

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Egy Rubik-kocka variánsról

TDK DOLGOZAT

Készítette:
Mágori Marcell
Matematika BSc hallgató

Témavezető:
dr. Vígh Viktor
Geometria Tanszék

Szeged
2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. A Rubik-kocka első variánsai	5
1.2. Korábbi irodalom	6
1.3. A twisty puzzle-ök mechanikája	6
2. A Floppy Comet Plus bemutatása	7
2.1. Belső mechanikai sajátosságok	9
3. Az FCP leírása	12
3.1. Csoportelméleti háttér	13
4. Az FCP kirakása	14
5. Az FCP gráfja	16
5.1. Megjegyzések a gráfról	19
6. Lehetséges általánosítások	19
6.1. Háromszög alap	20
6.2. Húrnégyszög alap	21
6.3. $(2k+1)$ -szög alap	22
A. Fő témák	24
B. Megválaszolt kérdések	24
C. Módszerek	24
D. Eredmények	24

Ábrák jegyzéke

1.	Két példa a korszakból: Skewb Ultimate (2000) és Hexaminx (2008)	5
2.	Rex Rhombic Dodecahedron (2011) és Ultra-X (2010)	5
3.	2x2x16 (2017) és Asymmetrical Rex 2x2x2 (2015)	6
4.	Szétszedett Moyu AoChuang V6 5x5x5-ös kocka	7
5.	Floppy Comet Plus	7
6.	Floppy Cube (balra) és Crazy Comet (jobbra)	8
7.	Nyújtott Floppy	8
8.	A nyújtott Floppy Cube egy forgatás után.	9
9.	A szükséges vágások	9
10.	Fecskefarok illesztés	10
11.	Vízszintes keresztmetszet	10
12.	Alkatrészek kinyomtatva	11
13.	A két fél összerakva	11
14.	Rögzítsük a kocka térbeli helyzetét a kirakott állapotban, és vezessük be az itt látható jelöléseket.	12
15.	A választott γ permutáció hatása	15
16.	A forgatások sematikus ábrája	15
17.	3x3x3 Superflip: minden él orientációt vált	17
18.	Minták a gráfban	19
19.	Háromszög alap	20
20.	Lehetséges pályák háromszög alap esetén a belső szögek aránya szerint	21
21.	Húrnégyszög esete	21
22.	Húrnégyszög alap	22

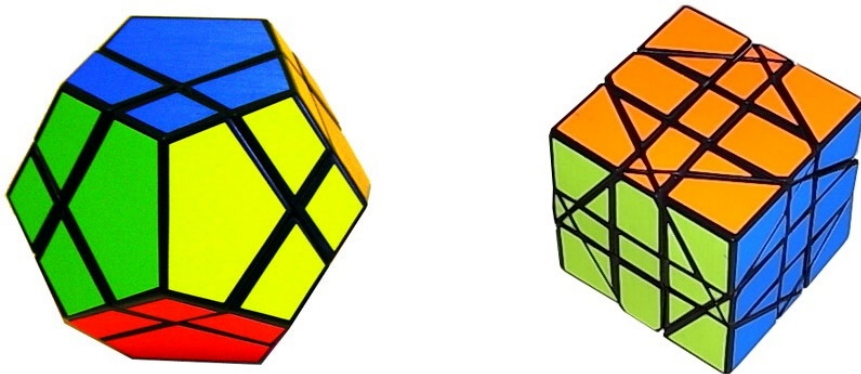
Kivonat

Bemutatjuk egy új, a szerző által fejlesztett Rubik-kocka variáns, a Floppy Comet Plus működési elvét és mechanikáját. Matematikai eszközökkel vizsgáljuk a kockát leíró csoportot, és a játék gráfját. Ismertetünk egy megoldási módszer alapvető gondolatmenetét. Néhány további lehetséges variáció geometriáját is tanulmányozzuk.

1. Bevezetés

1.1. A Rubik-kocka első variánsai

Rubik Ernő 1974-es találmánya kérdés nélkül a világ legnépszerűbb logikai játéka. Azt viszont kevesen tudják, hány hasonló elven működő variánsát alkották meg az elmúlt 5 évtizedben. Annak érdekében, hogy lehessen tartani velük a lépést, a közösség 2002-ben indított egy online adatbázist [10], ami tartalmaz jószerevel minden ún. twisty puzzle-t. (Helyet kapott még néhány távolabbi rokon is, mint például a Bűvös gyűrűk, Bábel torony és a 15-ös játék. Ami közös bennük, hogy mindegyik mozgó alkatrészekkel rendelkezik, de játék közben mégis egyben maradnak az elemek, a megoldás nem igényel szétszedést.)



1. ábra. Két példa a korszakból: Skewb Ultimate (2000) és Hexaminx (2008)

A korai időszakból csak a tömeggyártott variációk vannak dokumentálva, jobbra határterületekről, ezek egy részét szintén Rubik Ernő találta ki, de például Uwe Mèffert termékei is nagy népszerűségnek örvendtek. Jegyezzük viszont meg, hogy egészen 2009-ig szinte minden új twisty puzzle csak egy kereskedelmi forgalomban kaphatónak volt a formai módosítása.

Vajon mi történhetett a világban 2009-ben, ami ezt megváltoztatta? A válasz a 3D nyomtatás. Egy Shapeways nevű cégen keresztül bárki „kinyomtathatott” magának szinte bármilyen formájú alkatrészt jó minőségben. Ez az új technológia meglehetősen költséges volt, de a tervezők kevesebb munkával járt, és lehetővé tette bonyolultabb mechanizmusok használatát.

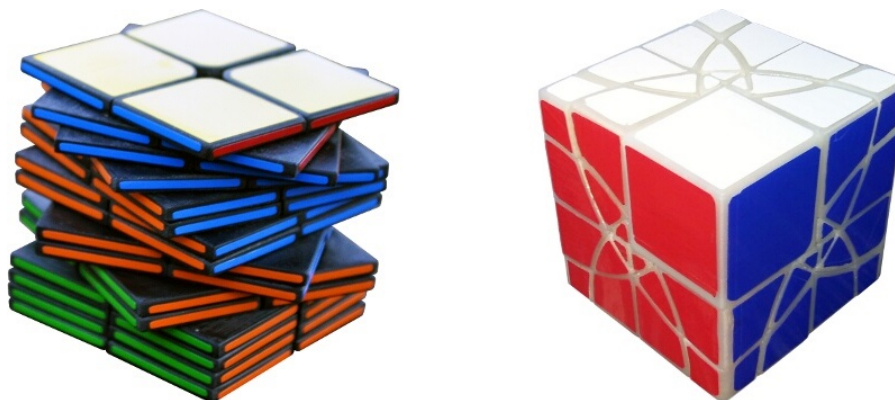


2. ábra. Rex Rhombic Dodecahedron (2011) és Ultra-X (2010)

Sok bonyolult kocka, amit eddig csak számítógépes szimulátorban lehetett kipróbálni, hirtelen a megvalósíthatóság határára került. A robbanásszerű lelkesedés eredménye az lett, hogy

pár év alatt rengeteg „alacsonyan csüngő gyümölcsöt leszedtek”; a tervezőknek alig kellett gondolkodniuk, és találtak egy olyan ötletet, amit nem alkotott még meg senki.

A következő technológiai ugrás 2015 körül történt, amikor az otthoni használatra árusított 3D nyomtatók ára és nyomtatási minősége elért egy versenyképes kombinációt. A vállalkozó szellemű tervezők felismerték, hogy nekik célszerűbb lehet venni egy ilyen gépet, s így utána már csak a nyers műanyagért kell fizetni. Ennek kezdetben az volt a hátránya, hogy az olcsóbb árkategóriás nyomtatók sok kalibrálási és karbantartási időt igényeltek. Ez a tendencia a mai napig érvényes, de szerencsére már nem ekkora léptékben.



3. ábra. 2x2x16 (2017) és Asymmetrical Rex 2x2x2 (2015)

1.2. Korábbi irodalom

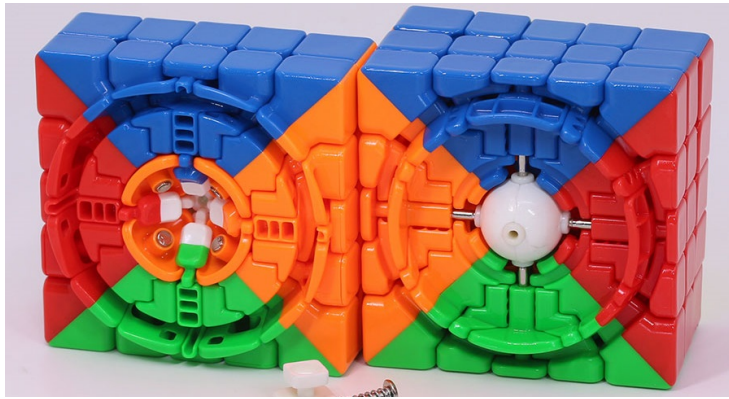
A téma iránt mélyebben érdeklődő Olvasónak mindenképp figyelmébe ajánljuk az alábbi, történeti jelentőségű műveket. Az első Alexander Frey és David Singmaster *Handbook of cubik math* [1] című könyve, ami a kocka első matematikai szemléletű leírása, emellett egy kirakási metódust is megad. Öt évvel később maga az alkotó, Rubik Ernő és társai írtak egy könyvet [3] hasonló elemekkel, kiegészítve a kocka körül addigra kialakult „kultusz” bemutatásával. Szintén a csoportelméleti háttérrel mutatja be Huhn András Polygon cikke [2] egyszerűbb példákon keresztül. Egy fontos, sokáig nyitott probléma megoldásában ért el 2013-ban sikereket Rokicki csapata a *The Diameter of the Rubik's Cube Group Is Twenty* [9] című cikkükben.

1.3. A twisty puzzle-ök mechanikája

A Rubik-kocka másik rejtélye – a kirakás mellett –, hogy hogyan működik. Minden kocka mechanizmusa azon alapszik, hogy egy adott tömör testet feldarabolunk *vágási felületekkel*. Ezek a vágási felületek tetszőlegesen bonyolultak lehetnek, az egyetlen megkötés, hogy forgásfelületeknek kell lenniük.

Ahogy a 4. ábrán látszik, bármilyen bonyolultak is az alkatrészek, ha egy adott forgatás mentén kettéválasztjuk a kockát, belül mindig egy forgásfelületet találunk. Épp ezért minden vágási felülethez létezik pontosan egy olyan síkgörbe, ami a forgástengelye mentén körbeforgatva a vágási felületet súrolja ki. A tervező dolga ezt a síkgörbét alkalmasan megválasztani.

Mivel egy vágási felület egyértelműen két térrészre osztja a befoglaló formát, definiálhatjuk az alkatrészeket aszerint, hogy a szükséges vágási felületek melyik oldalán találhatók. Így közvetlen logikai kapcsolat létesül az elemek alakja és kombinatorikai szerepe között.

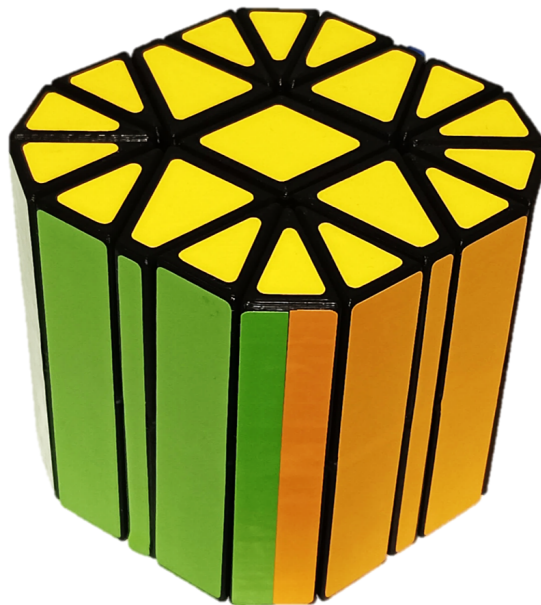


4. ábra. Szétszedett Moyu AoChuang V6 5x5x5-ös kocka

Minden kocka alkatrészeinek nagy része szabadon mozoghat, de azok, amiken keresztül halad valamelyik forgástengely, nem tudják elhagyni a helyüket. Ezeket az úgynevezett közepeket lehetőségünk van rögzíteni egy legbelső maghoz, tipikusan egy forgástengellyel párhuzamos csavarral.

A maradék szabadon mozgó alkatrész ezután tud közvetlen, vagy közvetett módon a közepekhez kapaszkodni. A vágási síkok meghatározásakor azt kell ellenőrizni, hogy a megfelelő logikai struktúra a közepekhez vezet-e vissza.

2. A Floppy Comet Plus bemutatása



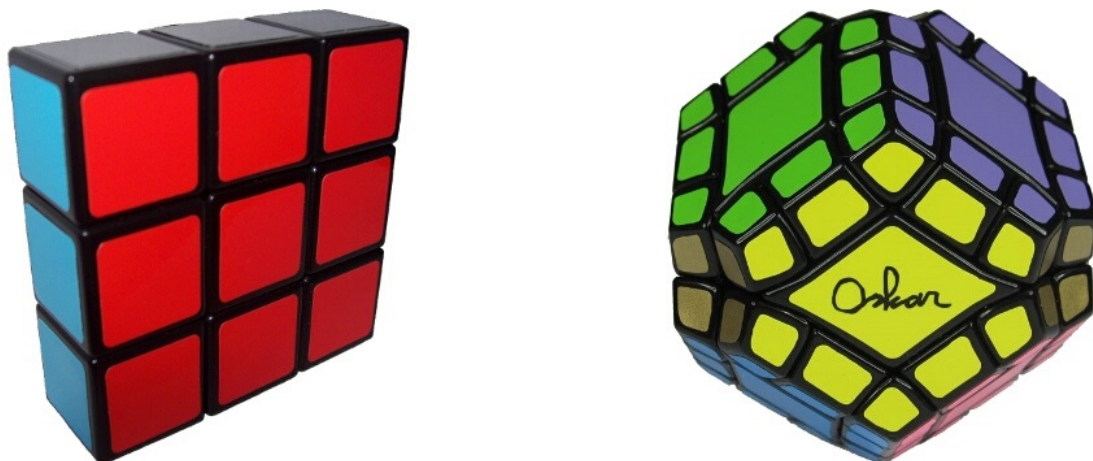
5. ábra. Floppy Comet Plus

A dolgozat fő témája egy saját fejlesztésű Rubik-kocka variáns részletes bemutatása ill. matematikai tulajdonságainak vizsgálata. A **Floppy Comet Plus** a kocka-variánsok szokásos

nevezéktanába illeszkedő elnevezés. A nevezéktan meglehetősen különös lehet elsőre, de kelle-
mes egyensúlyt ad a tisztán matematikai és tisztán „kreatív” leírás között. A név első két tagja
használt, már létező kockákra/tulajdonságokra hivatkozik, a végén szereplő **Plus** pedig extra al-
katrészek jelenlétére utal. A közösség által fejlesztett ingyenesen letölthető, telepítést igénylő
virtuális szimulátorban [11] ki is tudja próbálni az Olvasó a játékot.

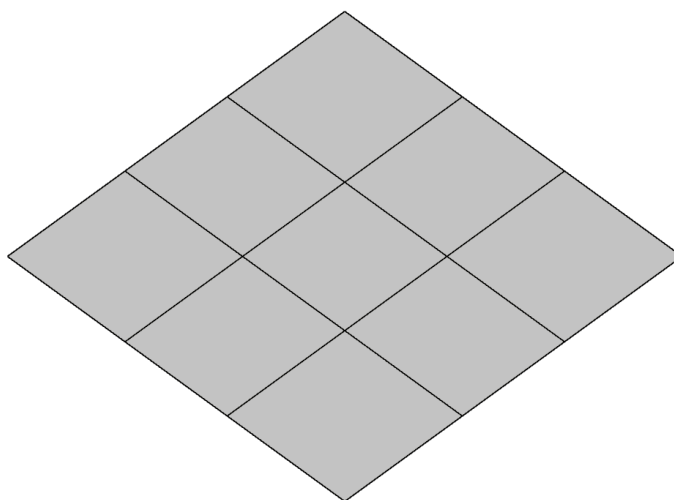
Logikai felmenője a **Floppy Cube**, más néven $1 \times 3 \times 3$ -as kocka (6. ábra). Katsuhiko Oka-
moto mutatta be az első működő példányát 2004-ben, tömeggyártása 2009 óta zajlik.

A külső megjelenésbeli hasonlóságok miatt került a névbe a **Crazy Comet**-re (6. ábra) való
hivatkozás, ugyanis ennek is rombusz alakúak a közepei, de mégsem egészen rombusz alakúak
az oldalai. Megalkotója, Oskar van Deventer, 2009-ben készítette el az első prototípust.



6. ábra. Floppy Cube (balra) és Crazy Comet (jobbra)

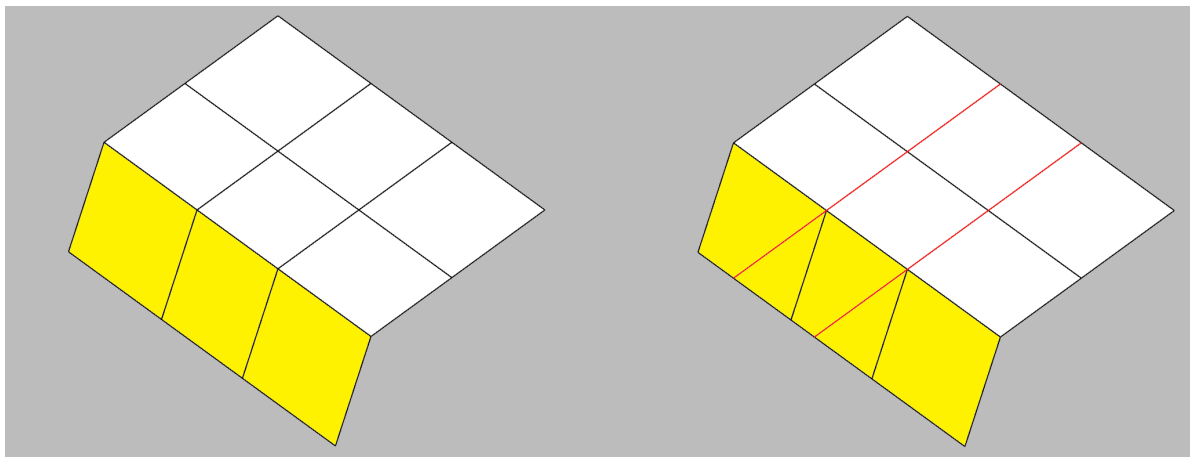
A Floppy Comet Plus (röviden FCP) fejlesztését 2021 júliusában kezdtem. Az alapötlet az
volt, hogy mi történne, ha egy Floppy Cube-ot az egyik lapátlója mentén megnyújtanánk.



7. ábra. Nyújtott Floppy

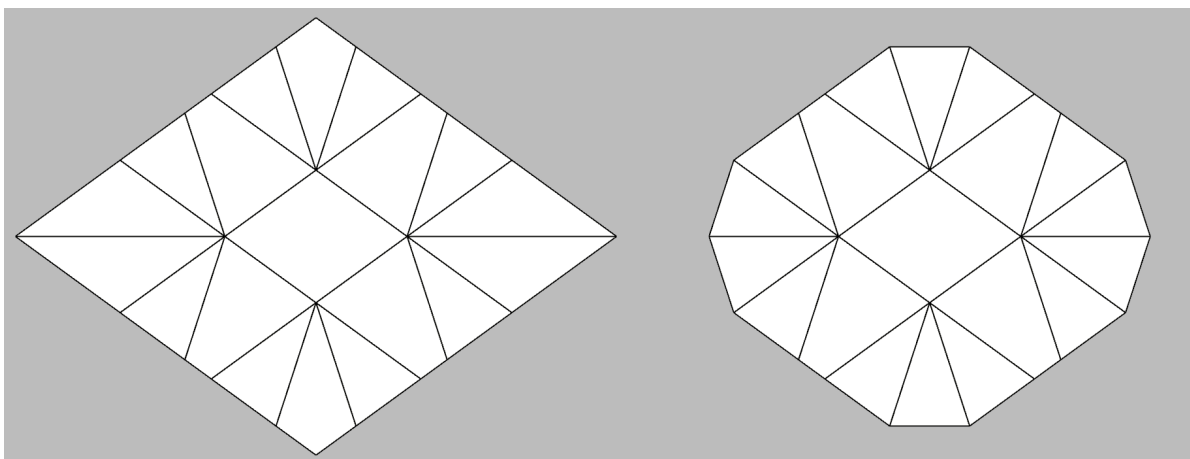
A nyújtás után mind a 4 forgatási opció lehetséges marad a kirakott állapotban, de ettől még

nem lehet összekeverni a kockát, (lásd 8. ábra), ugyanis egy forgatás után a szomszédos oldalak mozgatása lehetetlenné válik. Emiatt van szükség a **Plus** alkatrészekre. A 8. ábra jobb oldalán látható két új vágás hozzáadása után ismét minden oldal forgathatóvá válik.



8. ábra. A nyújtott Floppy Cube egy forgatás után.

Ezt a műveletet (azaz egy fordítás után minden szükséges új vágást „hozzáadunk”) addig kell iterálnunk, amíg már nincs szükség további vágásra. További természetes cél, hogy minél kevesebb darab keletkezzen. Ehhez a középső rombusz belső szögeit lényegében mi választhatjuk meg (a fizikai megvalósíthatóságot is szem előtt tartva). Ha azt akarjuk, hogy már kevés extra vágással működőképes legyen a kocka, akkor a rombusz hegyes belső szögét célszerű például 72 foknak választani, s így a 9. ábra bal oldalán látható struktúrát kapjuk.



9. ábra. A szükséges vágások

Hat végső formai korrekcióval az élek hegyeit, ahol voltak, levágtam. Így a kocka alakja a forgatások közben nem változik, a létrejövő „sarki” alkatrészek pedig egybevágóak lesznek, így az FCP több szimmetriával rendelkezik, és esztétikus megjelenésű.

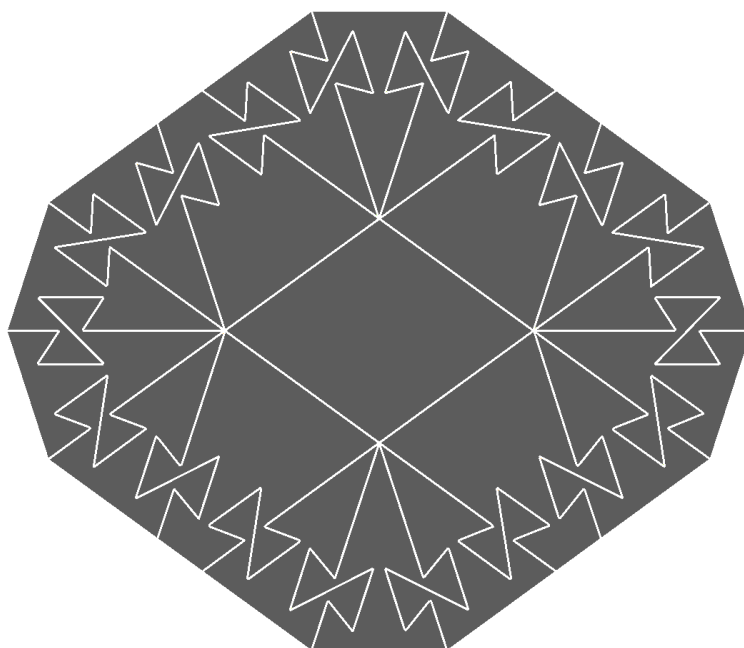
2.1. Belső mechanikai sajátosságok

A klasszikus gömbhéjas mechanizmust potenciálisan instabilnak találtam, úgyhogy egy általánosabb megközelítést alkalmaztam. Inspirációként az asztalosok körében közkedvelt fecskefa-



10. ábra. Fecskefarok illesztés

rok illesztés szolgált (10. ábra). A jobb helykihasználás kedvéért én még meg is dupláztam a mintát egy középpontos tükrözéssel, így jutottam el a 11. ábrán láthatóhoz.



11. ábra. Vízszintes keresztmetszet

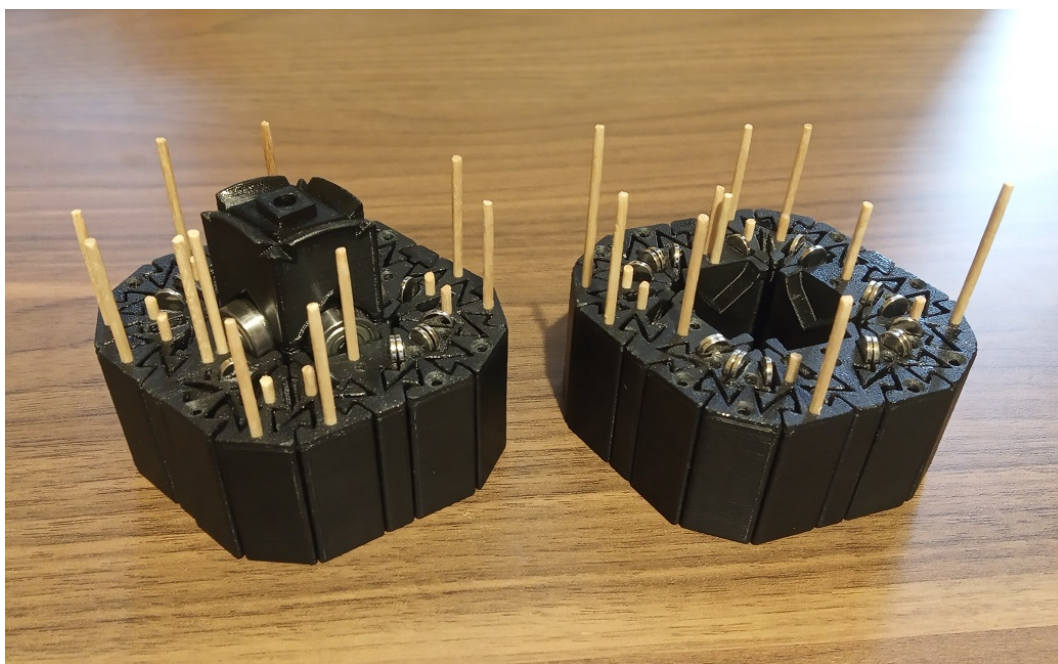
A mechanika hátulütője, hogy nem lehet rugalmasságot vinni a rendszerbe, nem enged mozgásteret az illesztés. Ennek talán az a legnagyobb hátránya, hogy összeszereléskor nincs lehetőség az utolsó elemet „bepattintani” a helyére.

Erre azt a megoldást találtam ki, hogy minden alkatrészt félbe vágtam a vízszintes tükörsík mentén, így egymástól függetlenül össze lehet rakni a két felet.



12. ábra. Alkatrészek kinyomtatva

Az „elfelezett” elemek rögzítését fogpiszkálókkal segítem. Ez két okból is praktikus megoldás: egyrészt segíti a precíz illesztést, másrészt növeli a ragasztás felületét.



13. ábra. A két fél összerakva

A kocka biztosabb működéséhez kis mágnes-korongokat is használlok. Ezek nélkül is funkcionálna, de sokat segít a stabilitásban és a játékélményen.

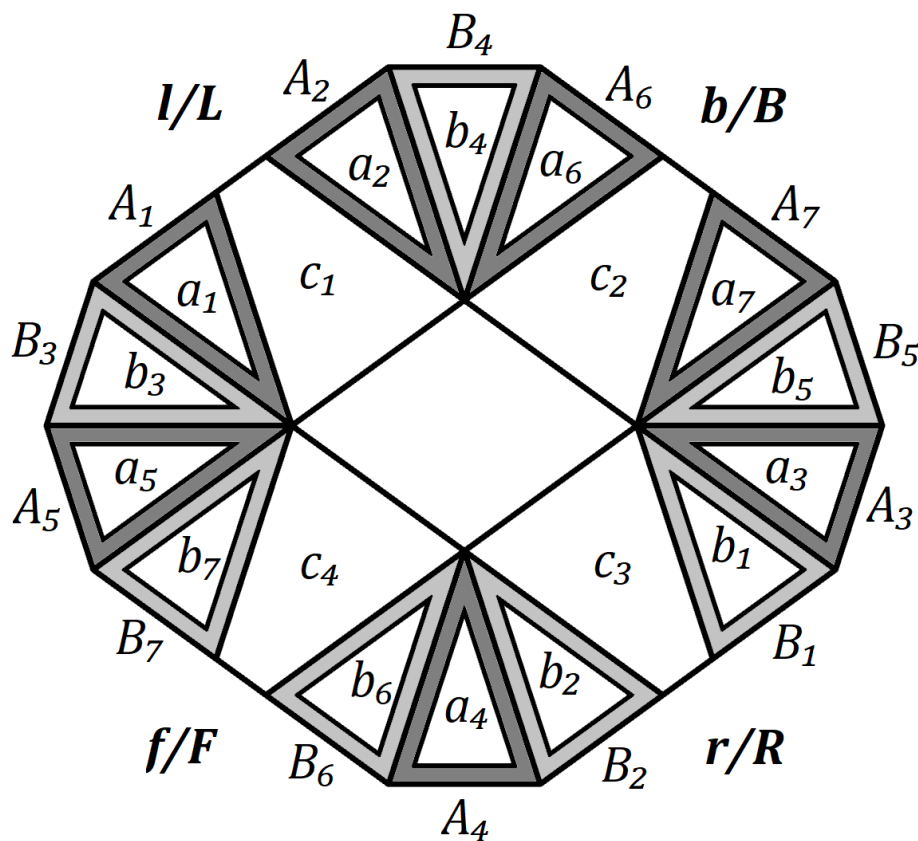
Az FCP-t 2021 októberében fejeztem be a gimnáziumi tanulmányaim mellett/ellenére, majd közzétettem a korábban említett közösség körében.

3. Az FCP leírása

Az elkészült kockának 19 (valódi) alkatrésze van, ezek közül egy rombusz alapú hasáb a kocka „magja”. Ezt négy, szimmetrikus trapéz alapú hasáb veszi körül, melyekre lapközepekként, vagy szimplán közepekként hivatkozunk, jelük c_1, c_2, c_3 és c_4 a 14. ábra szerint. A helyüket nem tudják elhagyni, de 180 fokkal elfordulva „fejre állhatnak” – ezt a továbbiakban úgy mondjuk, hogy megváltoztatják az orientációjukat.

Végül van 14 darab sarki elem, mindegyik háromszög alapú hasáb, amelyekre a Rubik-kockával való analógia miatt élként hivatkozunk. Az FCP-vel való játék közben hamar megfigyelhetjük, hogy a 14 él két pályába rendeződik. A 14. ábrán leírt módon az A pálya elemei: $a_1, a_2, \dots, a_7$, míg a B pálya elemei: $b_1, b_2, \dots, b_7$. Meg kell különböztessük az egyes elemekhez tartozó pozíciókat is: a kirakott állapotban a p_i elem pozíciója P_i . Az A és B pályán belül az élek tetszőlegesen permutálódhatnak, de a két pálya egymástól *idegen*. Az élekre is igaz, hogy egy forgatás által megváltoztatják az orientációjukat.

Jelölje továbbá l, b, r és f a megfelelő lapokat az ábra szerint. (Azaz például $f = \{b_2; a_4; b_6; c_4; b_7; a_5; b_3\}$. Az ezeken végrehajtható forgatásokra mindig a megfelelő nagybetűvel hivatkozunk, azaz pl. R az r lap 180 fokos elforgatását jelöli.



14. ábra. Rögzítsük a kocka térbeli helyzetét a kirakott állapotban, és vezessük be az itt látható jelöléseket.

3.1. Csoportelméleti háttér

Ha az egyik él-pálya elemeinek lehetséges pozícióit vizsgáljuk, azt figyelhetjük meg, hogy egy hét hosszú utat járnak be. Ennek az oka, hogy minden él pozíciójára maximum két oldal lehet hatással, például a B_2 -ből F és R tudja elmozgatni az adott alkatrészt. Speciálisan a pályának van két „zsákutcája” is, ezekből a pozíciókból csak egy forgatás vezet ki, például B_1 -re csak R van hatással. Mivel a pályák csupán utak, nem szerepel bennük kör, ami lehetőséget adna az orientáció megváltoztatására, így kapjuk a következő állítást.

1. Állítás. *Az A és B pályák elemei tetszőleges pozícióban csak egyféle orientációt vehetnek fel. (Tehát pl. az a_1 elem az A_2 pozícióban csak egyféle orientációban lehet.)*

Forgatások sorozatát egyszerű egymás után írással jelöljük, pl. $\omega = FBRF$ (a forgatásokat balról jobbra hajtjuk végre), és általában szónak nevezzük. Emellett jelentse π_ω az ω szó hatását a kockán. Az 1. állítás miatt egy ω szó az A és B pályákon egy-egy permutációként hat, jelölje ezeket a permutációkat $\pi_{A,\omega} \in S_A$ és $\pi_{B,\omega} \in S_B$, ahol S_A és S_B a szokásos szimmetrikus-csoportok. Mivel S_A és S_B izomorf S_7 -tel, az egyszerűbb írásmód kedvéért azonosítsuk S_A -t és S_B -t S_7 -tel.

Továbbá ω hat minden c_i középen, ezt megfeleltethetjük egy S_2 -hatásnak (tehát vagy átfordítja, vagy nem). Ha ω átfordítja c_i -t, legyen $\pi_{i,\omega} = (2\ 1)$, és $(1\ 2) = \text{id}$, ha nem fordítja át.

Így π_ω -t komponensekre bonthatjuk, tehát $\pi_\omega = (\pi_{A,\omega}, \pi_{B,\omega}, \pi_{1,\omega}, \pi_{2,\omega}, \pi_{3,\omega}, \pi_{4,\omega})$. A következő tétel lényegében leírja az FCP csoportját.

1. Tétel. *Egy $\pi \in S_7^2 \times S_2^4$ elemhez akkor és csak akkor létezik ω forgatássorozat, amelyre*

$$\pi = \pi_\omega = (\pi_{A,\omega}, \pi_{B,\omega}, \pi_{1,\omega}, \pi_{2,\omega}, \pi_{3,\omega}, \pi_{4,\omega})$$

teljesül, ha $\pi_{B,\omega}, \pi_{1,\omega}$ és $\pi_{2,\omega}$ között nulla vagy kettő, illetve $\pi_{A,\omega}, \pi_{3,\omega}, \pi_{4,\omega}$ között is nulla vagy kettő páratlan permutáció van.

Első lépésben a „csak akkor” irányt igazoljuk, azaz megmutatjuk, hogy tetszőleges ω szó esetén a megfelelő permutációcsaládok együttes paritása páros.

A következő táblázat – a permutációknál szokásos jelöléssel – összefoglalja az L, B, R, F forgatások hatását az élekre és a közepekre.

	A	B	C_1	C_2	C_3	C_4
L	(1 2) (5 6)	(3 4)	(2 1)			
B	(2 3) (6 7)	(4 5)		(2 1)		
R	(3 4)	(1 2) (5 6)			(2 1)	
F	(4 5)	(2 3) (6 7)				(2 1)

1. táblázat. Forgatások definíciója

Az 1. táblázatból leolvasható, hogy L és B az A pályán páros, a B pályán páratlan permutációt végez. Viszont R és F az A pályán páratlan, a B pályán páros permutációt végez. Eszerint $\pi_{B,\omega}$ paritása megegyezik az ω -ban lévő összes L és B betűk számának paritásával. Továbbá világos, hogy $\pi_{1,\omega}$ paritását éppen az ω -ban szereplő L betűk számának paritása adja, $\pi_{2,\omega}$ paritása éppen az ω -ban szereplő B betűk számának paritása, és így tovább. Ebből azonnal következik, hogy $\pi_{B,\omega}, \pi_{1,\omega}$ és $\pi_{2,\omega}$ között nulla vagy kettő páratlan permutáció van. Ugyanezen logika mentén belátható, hogy $\pi_{A,\omega}, \pi_{3,\omega}$ és $\pi_{4,\omega}$ között is nulla vagy kettő páratlan van.

4. Az FCP kirakása

Ebben a szakaszban igazoljuk az 1. tétel hiányzó irányát. Ebből származtatható egy – nem túl hatékony – megoldó algoritmus is.

Kiindulásként tegyük fel, hogy a közepek helyes orientációban vannak, ellenkező esetben át tudjuk őket fordítani tetszőleges sorrendben. A továbbiakban egy olyan eljárást adunk, amely egyes fázisai között a közepek helyes orientációban maradnak. Az 1. tételben szereplő paritási feltétel miatt feltehetjük, hogy $\pi_{A,\omega}$ és $\pi_{B,\omega}$ párosak.

Felhasználjuk a következő közismert tételt [12]:

2. Tétel. *A 3-ciklusok generálják az alternáló csoportot.*

Eszerint elegendő megmutatnunk, hogy az A pályán (és logikai szimmetria miatt így a B -n is) minden olyan 3-ciklust elő tudunk forgatásokkal állítani, ami minden további elemet (a pályán kívül is) fixen hagy.

Az egyszerűség kedvéért a P pozícióbeli elem ω forgatássorozat melletti képét jelölje $P\omega$. Jegyezzük meg, hogy egy forgatássorozat inverze a forgatások fordított sorrendű végrehajtását jelenti.

Tegyük fel, hogy forgatások egy χ sorozata az x oldal egyetlen élet felcseréli egy nem x -beli éllel, és az x többi elemét fixen hagyja. Vegyük észre, hogy ekkor a $\gamma = \chi X \chi^{-1} X^{-1}$ kommutátor egy 3-ciklus lesz az éleken. Ennek indoklása a következő: Legyen D_1 az egyetlen x lapon fekvő, χ által mozgatott él, $D_2 = D_1 X$ és $D_3 = D_1 \chi$ (s így $D_1 = D_3 \chi$). Ekkor ha végigvezetjük γ hatását a kitüntetett elemeken, azt kapjuk, hogy $D_1 \gamma = D_2$, $D_2 \gamma = D_3$ és $D_3 \gamma = D_1$. A többi alkatrészt azért nem mozgatja γ , mert ha $D \neq D_1, D_2$ él illeszkedik x -re, akkor χ és χ^{-1} nem hat rá, ezért $D\gamma = DXX = D$; valamint ha $D \neq D_3$ nem illeszkedik x -re, akkor $D\chi$ sem illeszkedik x -re, ezért $D\gamma = D\chi\chi^{-1} = D$.

Vegyük észre, hogy például a $\lambda = FBLFB$ forgatássorozat az l lapnak csak egy élet, A_1 -et mozgatja, s ezt felcseréli A_3 -mal. Ez azért teljesül, mert FB forgatássorozat az l minden elemét elmozgatja onnan, kivéve A_1 -et. Az ezt követő L forgatás (többek között) kicseréli A_1 -et A_3 -ra, FB pedig visszahozza l korábban elmozgatott elemeit. Az előzetes megjegyzés szerint a $\gamma = \lambda L \lambda^{-1} L^{-1}$ kommutátor éppen az $(A_1 A_2 A_3)$ permutációt adja, és semmilyen más elemet nem mozgat (15. ábra). Ez azonban csak egy darab 3-ciklus, ami mindig a fent megadott pozícióbeli elemeket permutálja. Ennek az általánosításáért felel a következő állítás.

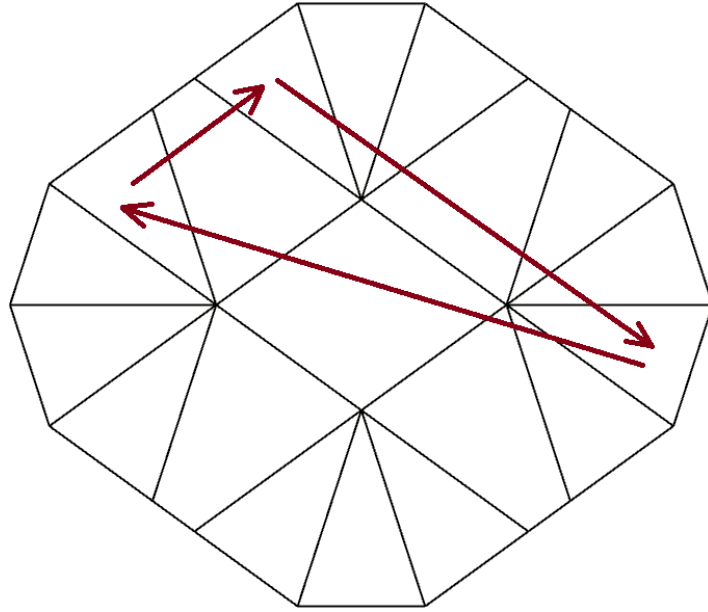
2. Állítás. *Tegyük fel, hogy valamely σ szóra és $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ indexekre $A_i \sigma = A_1$, $A_j \sigma = A_2$ és $A_k \sigma = A_3$. Ekkor a fentebb definiált γ -val teljesül, hogy $\sigma \gamma \sigma^{-1}$ éppen az $(A_i A_j A_k)$ permutációt adja, és semmilyen más elemet nem mozgat.*

Bizonyítás. A feltételek szerint

$$A_i \sigma \gamma \sigma^{-1} = A_1 \gamma \sigma^{-1} = A_2 \sigma^{-1} = A_j.$$

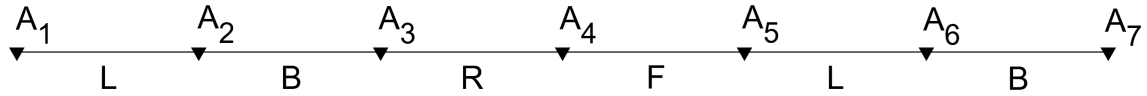
Hasonlóan látható, hogy $A_j \sigma \gamma \sigma^{-1} = A_k$ és $A_k \sigma \gamma \sigma^{-1} = A_i$.

Vizsgáljuk meg a ciklus „külső elemeit” is, ehhez válasszunk egy tetszőleges $P \neq A_i, A_j, A_k$ elemet. Ekkor $P\sigma$ nem lehet A_1, A_2 és A_3 egyike sem, ezért $P\sigma\gamma = P\sigma$, amiből $P\sigma\gamma\sigma^{-1} = P\sigma\sigma^{-1} = P$ adódik. $\square$



15. ábra. A választott γ permutáció hatása

3. Állítás. Tegyük fel, hogy $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ indexek. Ekkor létezik σ szó, amelyre $A_i\sigma = A_1$, $A_j\sigma = A_2$ és $A_k\sigma = A_3$.



16. ábra. A forgatások sematikus ábrája

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az A_i , A_j és A_k elemek sorban a helyükre rakhatók úgy, hogy a korábban helyre került elemeket már nem rontjuk el. A 16. ábra szerint $A_7BLFRBL = A_1$, és közben minden lehetséges A_i -t bejártunk, ezért biztosan találunk olyan σ_1 szót, amire $A_i\sigma_1 = A_1$. Az A_j és A_k helyrerakásához szükséges szavakat a könnyebb átláthatóság kedvéért a 2. táblázatban foglaltuk össze.

	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	fix
A_1	$BLFRBL$	$LFRBL$	$FRBL$	RBL	BL	L	-
A_2	$BLFLRB$	$LFLRB$	FRB	RB	B	id	A_1
A_3	$BLFLBR$	$LFLR$	FR	R	id	-	A_1, A_2

2. táblázat. Az oszlopban a mozgatni kívánt elem van feltüntetve, a sorban a célpozíció. A sor végén feltüntettük, hogy mik azok a pozíciók, amiket fixen kell hagynunk.

□

Az algebrai számolásokhoz használt eszköztár és szükséges bizonyítások megtalálhatók a [4] jegyzetben.

5. Az FCP gráfja

A twisty puzzle-ök mindegyikéhez természetes módon rendelhető egy gráf: a gráf csúcsait a játék különböző állapotai adják, és két állapotot éllel kötünk össze, ha egy (elemi) lépéssel egymásba vihetők. Az ilyen gráfokat hívják Cayley gráfnak [7].

Először megszámoljuk az FCP lehetséges állapotait. Az 1. tétel egyszerű következménye a következő.

1. Következmény. *Az élek tetszőleges átrendezése elérhető.*

Adott él-elrendezés esetén azonban nem állhat elő a közepek összes konfigurációja. Egy darab biztosan létezik az 1. táblázat definíciója szerint. Ezt felhasználva L és B közepek átfordítása szintén előállhat, mert nem változtatja meg a pályák paritását. Hasonlóan R és F átfordítása is elérhető, valamint kombinálva a kettőt, minden közép átfordítása. A többi opció legalább az egyik pálya paritásának nem felel meg. A következő állítást kaptuk.

4. Állítás. *Minden él-elrendezéshez a közepek pontosan 4 konfigurációja tartozik.*

Ahhoz, hogy megkapjuk az FCP összes állapotainak (permutációinak) számát, szorozzuk össze az élek összes lehetséges állapotát a közepek konfigurációinak számával egy konkrét él-elrendezés esetén, ami

$$(7!)^2 \cdot 4 = (7! \cdot 2)^2 = 101\,606\,400 \approx 10^8.$$

Hogy kontextusba helyezzük, az $1 \times 3 \times 3$ -as 192, a $3 \times 3 \times 3$ -as kocka $\approx 4 \cdot 10^{19}$ lehetséges állapottal rendelkezik.

Mivel minden csúcs fokszáma 4 (azaz a gráf 4-reguláris), az élek száma a csúcsok számának kétszerese, tehát

$$(7!)^2 \cdot 8 = 203\,212\,800.$$

A C_i közepeknek 16-féle konfigurációja lehetséges. Mivel minden forgatás pontosan egy közeget fordít át, ezért az FCP gráfja természetes módon egy 16-részes gráf. Speciálisan az átfordult közepek számának paritását figyelve az állapotok két halmazba oszthatók, így a gráf páros is.

Az eddigieket összefoglalja a következő állítás.

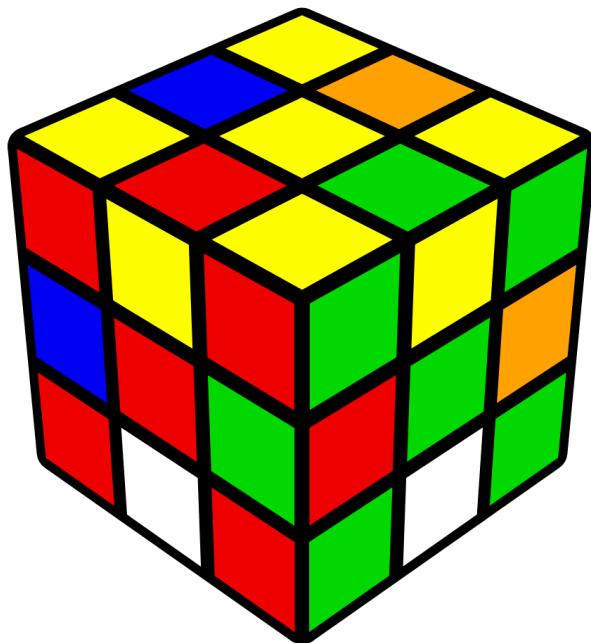
3. Tétel. *Az FCP gráfja egy páros, 4-reguláris, összefüggő egyszerű gráf, aminek $(7!)^2 \cdot 4$ csúcsa, és $(7!)^2 \cdot 8$ éle van.*

A következő gráfelméleti fogalom, amit vizsgáltunk, az átmérő. Két csúcs távolságán az őket összekötő (egyik) legrövidebb út hosszát értjük. (Példáinkban ez mindig véges lesz, mert csak összefüggő gráfokkal dolgozunk.) Egy gráf átmérője pedig a összes lehetséges csúcspárok távolságainak maximuma. (Véges, összefüggő gráfokra ez jól definiált.) Ez a fogalom a twisty puzzle-ök gráfjai esetén különösen fontos, hiszen szemléletesen ez azt jelenti, legkevesebb hány lépésből lehet biztosan kirakni a játékot. (Néhány twisty puzzle-nál előfordulhat, hogy a kirakott állapot nem végpontja egy átmérőnek sem (azaz maximális hosszúságú útnak), de a legtöbb kocka variánsnál könnyen látható, hogy az állapotok „egyenrangúak”).

A Floppy Cube gráfja 192 csúcsot tartalmaz, átmérője mindössze 8. Egy ilyen állapot található „legmesszebb” a kirakottól, ez az, amikor minden közép át van fordulva [7].

Történetileg a Rubik-kocka gráfjának vizsgálata kapta a legnagyobb publicitást. Az átmérőjét a nemzetközi szakirodalom „Isten számaként” (God’s number) emlegeti. Nagyjából 30 évnyi

intenzív, számítógéppel támogatott kutatás eredményeként 2010-ben Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, and John Dethridge igazolta, hogy a hagyományos Rubik-kocka gráfjának átmérője 20. Egy jól ismert példa az ún. „superflip” pozíció, ami a kirakott állapottól pontosan 20 távolságra van. Itt mind a 12 él orientációt vált, lásd 17. ábra. A Rubik-kocka gráfjáról ajánljuk az Olvasónak a [9]. hivatkozásban feltüntetett oldalt.



17. ábra. 3x3x3 Superflip: minden él orientációt vált

Az FCP gráfjának lényegesen kevesebb csúcsa van, mint a Rubik-kockának, ezért átmérője „erőből” kiszámolható. Egy mai csúcsteljesítményű asztali számítógépen egy jól optimalizált program néhány perc alatt lefut. A gráf bejárása történhet például egy 2-bites szélességi módszerrel. A konkrét algoritmus [8] cikke alapján készült, az implementációt a Rubik-kockás internetes közösség egy anonimitást kérő tagja végezte, a kód megtalálható és ellenőrizhető [6] címen. A program részletes futási eredményeit foglalja össze a 3. táblázat.

4. Tétel. Az FCP gráfjának átmérője 30.

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért megkíséreltem a SageMath szoftverrel is ellenőrizni a helyes futást, de a gráf mérete és a program hatékonysága miatt nem jártam sikerrel. A szűk keresztmetszet minden próbálkozásnál a memóriaigény volt. Valamelyest hatékonyabbnak bizonyult a GAP komputeralgebrai szoftver grape csomagja, ami kicsit több, mint négy óra futás után megerősítette a 4. tétel állítását.

Alább találhatóak az ehhez szükséges kódsorok. A csomag betöltése után meghatározzunk a különböző alkatrészeket adott indexek szerint, majd definiáljuk a forgatásokhoz tartozó generátorokat. A szoftver ezután létrehozza a Cayley gráfot, és egy beépített függvénnyel kiszámolja a gráf átmérőjét.

```

LoadPackage("grape");
A1:=1; A2:=A1+1; A3:=A2+1; A4:=A3+1; A5:=A4+1; A6:=A5+1; A7:=A6+1;
B1:=8; B2:=B1+1; B3:=B2+1; B4:=B3+1; B5:=B4+1; B6:=B5+1; B7:=B6+1;
C1:=15; C2:=C1+1; C3:=C2+1; C4:=C3+1;
D1:=19; D2:=D1+1; D3:=D2+1; D4:=D3+1;
L:=(A1,A2)(A5,A6)(B3,B4)(C1,D1);
B:=(A2,A3)(A6,A7)(B4,B5)(C2,D2);
R:=(A3,A4)(B1,B2)(B5,B6)(C3,D3);
F:=(A4,A5)(B2,B3)(B6,B7)(C4,D4);
gens:=[L,B,R,F];
group:=Group(gens);
Size(group);
graph:=CayleyGraph(group);
Diameter(graph);

```

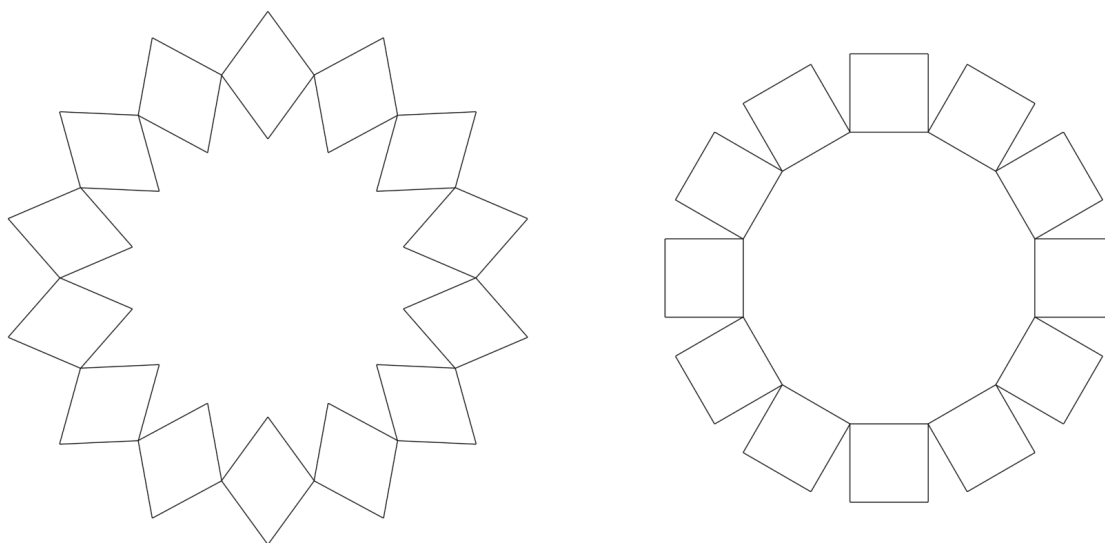
távolság	új pozíciók száma	bejárt pozíciók száma
1	4	5
2	10	15
3	24	39
4	58	97
5	140	237
6	322	559
7	716	1275
8	1574	2849
9	3408	6257
10	7238	13495
11	15152	28647
12	31358	60005
13	64364	124369
14	130446	254815
15	261356	516171
16	515399	1031570
17	996312	2027882
18	1877502	3905384
19	3433084	7338468
20	6004694	13343162
21	9898008	23241170
22	14946631	38187801
23	19611824	57799625
24	20490304	78289929
25	15064492	93354421
26	6685369	100039790
27	1451712	101491502
28	112226	101603728
29	2604	101606332
30	68	101606400

3. táblázat. A szélességi keresés eredménye

5.1. Megjegyzések a gráfról

Fel lehet fedezni rész-struktúrákat a gráfban, például „tele van” 4-hosszú körökkel. Ez abból adódik, hogy bármelyik permutációból kiindulva $FBFB = LRLR = \text{id}$. Ezen „négyzetek” száma az élek számának negyede, tehát $(7!)^2 \cdot 2 = 50\,803\,200$. A 18. ábra bal oldala a $(FBFBLRLR)^7 = \text{id}$ azonosságot, a jobb oldala a $(FR)^6 = \text{id}$ összefüggést reprezentálja. Az utóbbi észrevétel mutatja, hogy a gráfban vannak 12 hosszú körök. Mivel a gráf páros, így minden kör hossza is páros. Viszonylag rövid esetvizsgálat mutatja, hogy 6-hosszú kör nincs, ennek részleteit az Olvasóra bízunk. Természetesen merül fel az alábbi kérdés.

1. Kérdés. Van-e az FCP grájában 8, illetve 10 hosszúságú kör?



18. ábra. Minták a gráfban

6. Lehetséges általánosítások

Vizsgáljuk meg, lehetséges-e olyan általánosítás, ahol az FCP rombusz alakú magját (alapját) kicseréljük egy alkalmas konvex sokszög alapú hasábra. Vegyük észre, hogy a forgástengelyek szükségképpen mind egy síkba esnek, és a forgatások szöge továbbra is 180° . Ennek az a következménye, hogy a probléma átírható 2 dimenzióba, ahol minden tengely menti forgatás tengelyes tükrözésnek felel meg.

Egy konkrét K sokszög esetén, a 9. ábrához hasonlóan, kiegészíthetjük a szükséges vágásokkal a sokszöget. Először is hosszabbítsuk meg K minden oldalát, hogy megkapjuk a kiindulási vágásokat. Az iterációs eljárás következő lépésében mindig a már létező vágások megfelelő oldalfelező-merőleges mentén történő tengelyes tükrözésével kapjuk az új vágásokat. Ahhoz, hogy a kapott kocka (legalább elméletben) működőképes lehessen, a következő kérdésre kell először válaszolnunk.

2. Kérdés. Milyen feltételek mellett terminál a fenti eljárás véges sok vágás után?

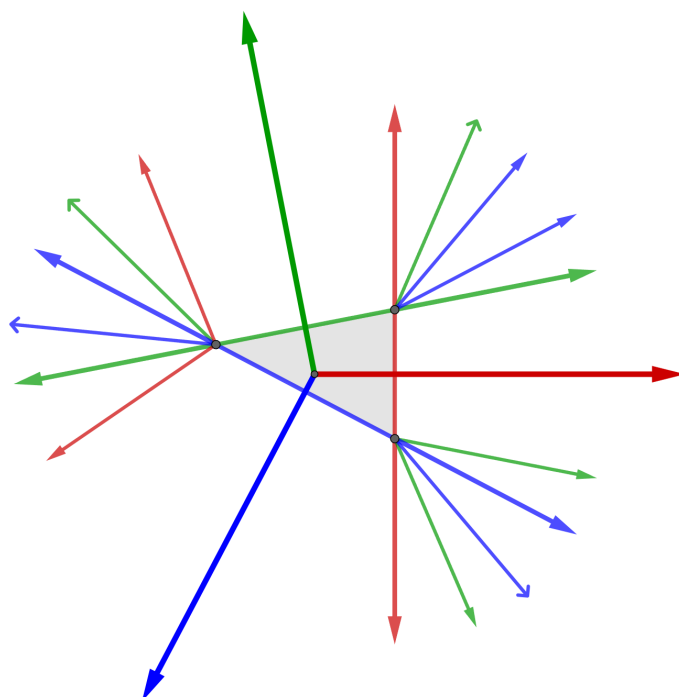
A következő alszakaszokban néhány elégséges feltételt mutatunk arra, amikor véges sok vágás elegendő.

6.1. Háromszög alap

Tekintsünk először azt az esetet, amikor K alap egy tetszőleges háromszög. A háromszög oldalainak szakaszfelező merőlegeseire való tükrözéseket jelölje τ_1 , τ_2 és τ_3 az óramutató járásával ellentétes körüljárás szerint számozva.

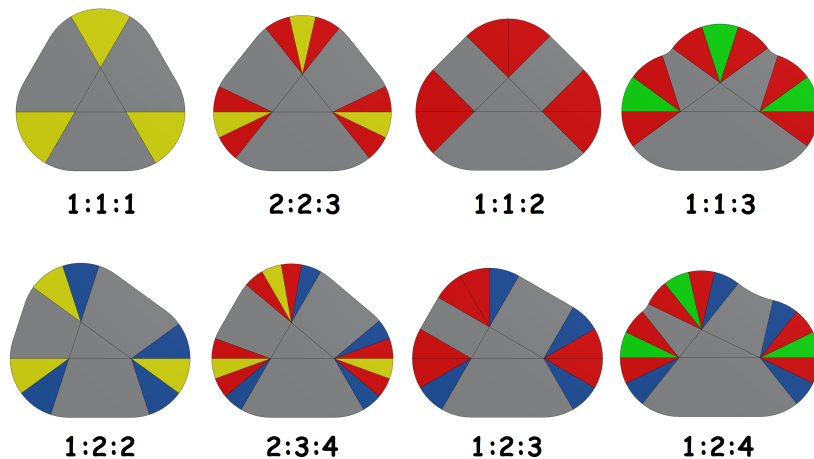
5. Állítás. *Tetszőleges K háromszög esetén $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_1 \tau_2 \tau_3$ szorzat, és minden ciklikus permutációja az identikus transzformáció.*

Bizonyítás. A forgatások szorzástétele szerint egy φ és egy ψ szögű forgatás szorzata egy $\varphi + \psi$ szögű forgatás, ahol az eltolásokat is 0° -os forgatásnak tekintjük. Ezt felhasználva a $\tau_1 \tau_2$, a $\tau_3 \tau_1$ és a $\tau_2 \tau_3$ forgatásokra, azt kapjuk, hogy a $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_1 \tau_2 \tau_3$ szorzat egy 720° -os forgatás. Vegyük észre, hogy $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_1 \tau_2 \tau_3$ szorzatnak fixpontja a háromszög körülírt körének középpontja, azaz a szorzat az identitás. Logikai szimmetria miatt a ciklikus permutációk szorzata is hasonlóan levezethető. $\square$



19. ábra. Háromszög alap

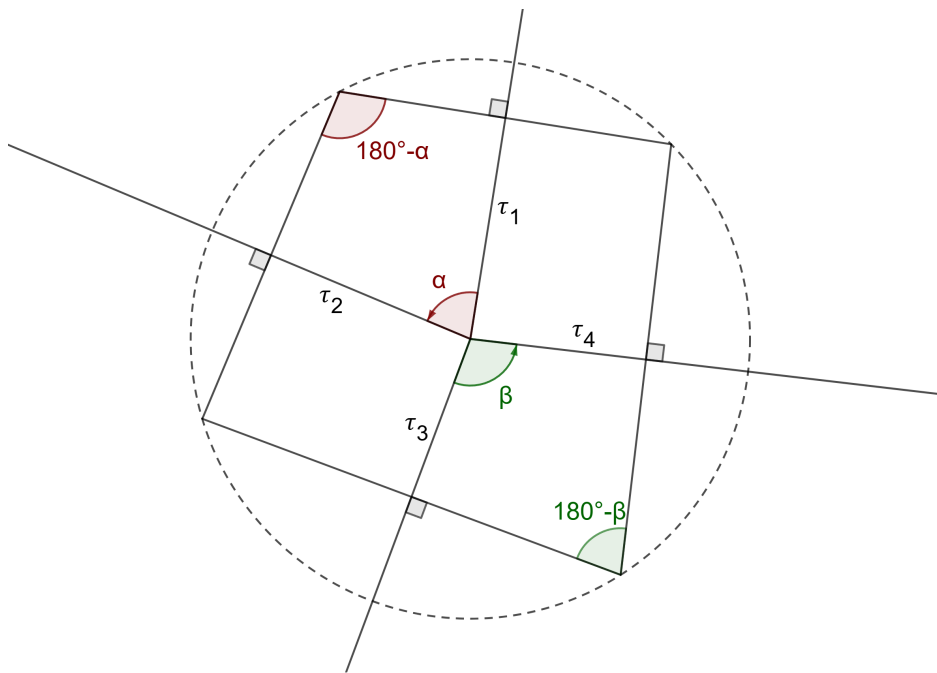
Az 2. kérdés megválaszolásához tekintsük a 19. ábrát. Az 5. állítás szerint az ábra mindig helyes, a kék, a piros és zöld vágássorozatok is hat lépésben biztosan záródnak. Tetszőleges háromszög alappal mindig készíthető egy konstrukció, aminek három közepe, és legfeljebb 13 éle van. Speciális alapok esetén kevesebb él is előfordulhat, a 20. ábrán összefoglaltuk a lehetséges variációkat.



20. ábra. Lehetséges pályák háromszög alap esetén a belső szögek aránya szerint

6.2. Húrnégyszög alap

Megmutatjuk, hogy húrnégyszögek esetén triviális záródás teljesül. Legyen tehát K húrnégyszög, az oldalfelező-merőlegesekre vett tükrözések pozitív körüljárás szerint τ_1 , τ_2 , τ_3 és τ_4 .

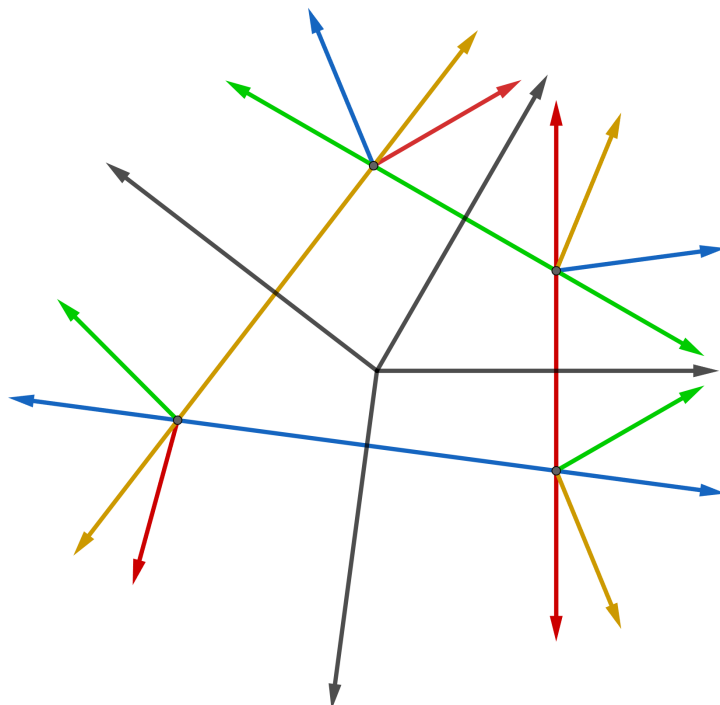


21. ábra. Húrnégyszög esete

6. Állítás. Tetszőleges K húrnégyszög esetén $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$ szorzat, és minden ciklikus permutációja az identikus transzformáció.

Bizonyítás. Hasonlóan indokolhatunk, mint az 5. állításnál. A $\tau_1 \tau_2$ és $\tau_3 \tau_4$ szorzatok forgatások, szögeik legyenek 2α és 2β . Ekkor τ_1 és τ_2 tengelyei által bezárt szög α ; τ_3 és τ_4 tengelyei

által bezárt szög β . Innen a 21. ábra szerint a hűrnégyszög szemköztes szögei $180^\circ - \alpha$ és $180^\circ - \beta$. A hűrnégyszög-tétel szerint ezek összege 180° , amiből $\alpha + \beta = 180^\circ$ adódik, és ismét a forgatások szorzástételéből kapjuk az állítást, hiszen a hűrnégyszög köré írt kör középpontja $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$ transzformáció fixpontja. $\square$



22. ábra. Hűrnégyszög alap

Hasonlóan a háromszög esetéhez, a 22. ábra mutatja a szükséges vágásokat. A létrejövő konstrukcióban négy centrum és legfeljebb 12 él keletkezik.

6.3. $(2k+1)$ -szög alap

Végezetül megmutatjuk, hogy a háromszög esete kiterjeszthető tetszőleges páratlan oldalszámú konvex hűrsokszögre. Legyenek az oldalfelező-merőlegekre vett tükrözések pozitív körüljárás szerint $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{2k+1}$.

7. Állítás. *Tetszőleges K páratlan oldalszámú konvex hűrsokszög esetén*

$$\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{2k+1} \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{2k+1}$$

szorzat, és minden ciklikus permutációja az identikus transzformáció.

Bizonyítás. Hasonlóan indokolhatunk, mint a háromszög esetén. Kettesével párosítva a tengelyeket, a forgatások szorzástételéből kapjuk, hogy a szorzat egy 720° -os (fixpontos, tehát nem eltolás) forgatás, azaz identitás. $\square$

Öt, vagy annál több csúcsú alap esetén - néhány speciális esettől eltekintve - a fizikai megvalósítás már nem tűnik plauzibilisnek, mivel nagyon sok, kis szögű élet kapnánk.

A felhasznált geometriai tételek bizonyításukkal együtt megtalálhatóak a [5] hivatkozás alatt.

Hivatkozások

- [1] Frey, Alexander H. and David Singmaster, *Handbook of Cubik Math* 1st ed., The Lutterworth Press, 2010., <https://doi.org/10.2307/j.ctv1bxh61p>
- [2] András Huhn, *A Rubik-kocka és a csoportok koszorúszorzata*, Polygon **IV.** (1994), no. 2, 15–25.
- [3] Ernő Rubik, Tamás Varga, Gerzson Kéri, György Marx, Tamás Vekerdy, David Singmaster: *Rubik's Cubic Compendium* (1987), Oxford University Press
- [4] I. R. Safarevics, *Algebra* (2000), Typotex.
- [5] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai* (1973), Műszaki Könyvkiadó.
- [6] <https://github.com/Aaxper/floppycometplus> Utolsó elérés: 2025.01.03.
- [7] <https://www.jaapsch.net/puzzles/> Utolsó elérés: 2025.01.03.
- [8] Richard E. Korf: *Minimizing Disk I/O in Two-Bit Breadth-First Search. Proceedings of the Twenty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence* (2008).
- [9] Rokicki, Tomas, Herbert Kociemba, Morley Davidson, and John Dethridge, *The Diameter of the Rubik's Cube Group Is Twenty* (2013). <https://www.cube20.org/> Utolsó elérés: 2025.01.03.
- [10] A variánsok adatbázisa, és az 5-6. oldalon található képek forrása <https://www.twistypuzzles.com/> Utolsó elérés: 2025.01.03.
- [11] A szimulátor egy .zip fájlként tölthető le, ami kicsomagolás után a "pCubes.exe" indításával használható. https://drive.google.com/file/d/1O-Z1yyjvky-A3wAK4jE_kmdaCNm6svEP/view?usp=sharing Utolsó elérés: 2025.01.03.
- [12] https://proofwiki.org/wiki/Alternating_Group_is_Generated_by_3-Cycles Utolsó elérés: 2025.01.03.

Saját eredmények

A. Fő témák

A bevezetőben ismertetett Rubik-kocka variáns (továbbiakban FCP)

- matematikai nyelvezetű leírása
- csoportelméleti háttérének megismerése
- egy megoldó módszerének bemutatása
- Cayley-gráfjának elemzése
- általánosításainak rövid ismertetése

B. Megválaszolt kérdések

- Hogyan adható meg, és mi az FCP elemeiből és forgatásaiból generált csoport?
- Leírható-e egy matematikailag korrekt megoldó algoritmus?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a generált Cayley-gráf?
- Miként általánosítható az FCP konstrukciója egy síkba eső forgástengelyek esetén?

C. Módszerek

- Gráf szélességi bejárása
- Gráf átmérőjének meghatározása számítógépes szoftverrel

D. Eredmények

- A csoport meghatározva egy direkt szorzat és definiáló relációk által
- Egy precíz megoldási módszer az FCP kirakásához
- Mekkora a generált gráf csúcsszáma és átmérője
- Néhány általánosítása az FCP-nek