

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi és Informatikai Kar

Matematikus MSc

Szorzás és egészrész-függvény iterálása
racionális számokon

Készítette: Ruff István Zalán (A09NT6)

Témavezető: Dr. Waldhauser Tamás

2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. A $\tilde{g}_q$-val rokon leképezések vizsgálata	4
2.1. Motiváció	4
2.2. A h leképezések tulajdonságai	6
2.3. A kivételes halmaz számosságának szélsőséges esetei	9
3. A generátum leírása	13
4. Bázisszorzók	17
5. Függelék	20

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a következő, módosított szorzásnak nevezett műveletet fogjuk vizsgálni.

1.1. Definíció. *Módosított szorzásnak* fogjuk nevezni a racionális számokon értelmezett $\circ$ műveletet: tetszőleges $a, b \in \mathbb{Q}$ racionális számokra a és b módosított szorzata $a \circ b = a \cdot \lceil b \rceil$.

A későbbiekben a $(\mathbb{Q}, \circ)$ grupoid részalgebráit fogjuk vizsgálni, különösen az egyetlen $q \in \mathbb{Q}$ racionális számból generált $\langle q \rangle_\circ$ halmazt. Egyik legfontosabb tulajdonsága ennek a halmaznak, hogy minden eleme q egész számszorosa.

1.2. Definíció. Legyen $q = \frac{m}{l}$ racionális szám. Ekkor a továbbiakban $q\mathbb{Z}$ vagy $\frac{m}{l}\mathbb{Z}$ jelöli az $\{\frac{m}{l}\}$ és $\mathbb{Z}$ halmazok komplexusszorzatát, azaz azon racionális számok halmazát, melyek előállnak $\frac{m}{l}$ és egy egész szám szorzataként.

1.3. Állítás. *Legyen $q = \frac{m}{l}$, ahol m és l relatív prím egész számok, ekkor $\langle q \rangle_\circ \subseteq q\mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Mivel $q \in q\mathbb{Z}$ és a generátum minden eleme megkapható úgy, hogy véges sokszor alkalmazzuk a $\circ$ műveletet a q számon, ezért elegendő belátnunk, hogy a $q\mathbb{Z}$ halmaz zárt a $\circ$ műveletre. Valóban, legyen $x_1q, x_2q \in q\mathbb{Z}$. Ekkor a $\circ$ műveletet elvégezve rajtuk, ezt kapjuk: $x_1q \circ x_2q = x_1q \lceil x_2q \rceil$. Az eredmény benne van $q\mathbb{Z}$ -ben, hiszen $x_1 \lceil x_2q \rceil \in \mathbb{Z}$. ■

Az állítás ekvivalens azzal, hogy amennyiben $\langle q \rangle_\circ$ elemeit felírjuk relatív prím egész számok hányadosaként, a nevező osztja q nevezőjét. A generátum ezen tulajdonsága motiválja, hogy az elemeit q -val egyszerűsítve vizsgáljuk, amelyben a következő állítás segít.

1.4. Állítás. *Tekintsük a fenti jelölésekkel a következő leképezést:*

$$\iota: q\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \frac{x}{q}.$$

Tekintsük továbbá az egész számok halmazán az $x \diamond y = x \lceil yq \rceil$ műveletet. Ekkor ι egy izomorfizmus a $(q\mathbb{Z}, \circ)$ struktúráról a $(\mathbb{Z}, \diamond)$ struktúrára.

Bizonyítás. A ι leképezés jóldefiniáltsága következik a komplexusszorzás fogalmából, emellett bijektív is, hiszen inverze a $\iota^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow q\mathbb{Z}, x \mapsto xq$ leképezés, amely szintén a komplexusszorzás fogalma miatt jóldefiniált. A műveletekkel való kompatibilitás is teljesül, hiszen egyrészt tetszőleges $xq, yq \in q\mathbb{Z}$ -re $(xq)\iota \diamond (yq)\iota = x \diamond y = x \lceil yq \rceil$, másrészt $(xq \circ yq)\iota = (xq \lceil yq \rceil)\iota = x \lceil yq \rceil$. ■

1.5. Megjegyzés. A $\diamond$ művelet függ a hozzá tartozó q racionális számtól. Csak akkor van értelme ekvivalens problémákat megfogalmazni a segítségével, ha olyan halmazban vizsgálódunk, amelyben minden elem q egész számszorosa, mint amilyen $\langle q \rangle_\circ$.

Az 1.3. Állítás alapján egyszerűsíthetjük a generált halmazban való számításainkat, amennyiben konjugálunk az imént bevezetett ι leképezéssel, vagyis a q -val való osztással. Nyilván ι pontosan a $\langle q \rangle_\circ$ halmaz elemeihez rendeli az $\langle 1 \rangle_\circ$ generátum elemeit. Egyik központi kérdésünk, hogy van-e $\langle q \rangle_\circ$ -ban egész szám, ami akkor és csak akkor teljesül, ha van az 1 számból a $\diamond$ művelettel generált halmazban l -lel osztható szám.

Lagarias 2004-ben megfogalmazta az 1.6. és az 1.8. Sejtéseket, és $q = \frac{m}{2}$ esetén be is bizonyította mindkettőt.

1.6. Sejtés ([LS04]). *Az $s(x) = x \circ x = x \cdot \lceil x \rceil$ függvényt egy 1-nél nagyobb q racionális számon iterálva mindig kapunk egész számot véges sok lépésben.*

Az előbbi sejtést a műveletek kiírásával úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a

$$q, q \circ q, (q \circ q) \circ (q \circ q), ((q \circ q) \circ (q \circ q)) \circ ((q \circ q) \circ (q \circ q)), \dots$$

számok között van egész.

Lagarias 2 nevezőjű törtekre bebizonyította a sejtést, és ebben az esetben a sorozat első egész tagjának indexét is meghatározta.

1.7. Tétel ([LS04]). *Legyen $q = \frac{2k+1}{2}$, továbbá definiáljuk a $\{q_n\}$ sorozatot úgy, hogy $q_0 = q$, és $q_{n+1} = q_n \circ q_n = q_n \cdot \lceil q_n \rceil$. Ekkor q_{v+1} egész, ahol v a 2-es tényező k prímtényező k felbontásában.*

Lagarias egy másik sejtése ugyanezen cikkből szorosabban kapcsolódik az eredményeinkhez.

1.8. Sejtés ([LS04]). *Minden $q \in \mathbb{Q}$ racionális számhoz, amelyre $|q| > 1$, létezik olyan $E \subseteq \mathbb{Z}$ véges halmaz, hogy ha $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus E$, akkor az $f_q(x) = q \circ x = q \cdot \lceil x \rceil$ függvényt iterálva x_0 -on mindig kapunk egész számot.*

A két bevezetett struktúra közötti kapcsolat miatt ez ekvivalens a következő sejtéssel.

1.9. Sejtés ([LS04]). *Legyen $q = \frac{m}{l}$ racionális szám, amelyre $|q| > 1$ és $m, l \in \mathbb{Z}$ relatív prímek. Ekkor létezik olyan $E \subseteq \mathbb{Z}$ véges halmaz, hogy ha $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus E$, akkor a $\tilde{g}_q(x) = 1 \diamond x = \lceil qx \rceil$ függvényt iterálva x_0 -on mindig kapunk l -lel osztható számot.*

Különféle speciális alakú q számokra egy számítógépes esetvizsgálat során mindig találtunk a $\tilde{g}_q$ leképezést 1-en iterálva egész számot, így azt sejtjük, hogy $1 \notin E$ tetszőleges $q > 1$ vagy $q < -1$ esetén.

1.10. Sejtés. *Legyen $|q| > 1$. Az előző két sejtés jelöléseivel az f_q leképezést q -n iterálva kapunk egész számot, vagyis a*

$$q, q \circ q, q \circ (q \circ q), q \circ (q \circ (q \circ q)), q \circ (q \circ (q \circ (q \circ q))), \dots$$

számok között van egész. Ezzel a sejtéssel ekvivalens, hogy a $\tilde{g}_q$ leképezést az 1 számon iterálva kapunk l -lel osztható számot, vagyis az

$$1, 1 \diamond 1, 1 \diamond (1 \diamond 1), 1 \diamond (1 \diamond (1 \diamond 1)), 1 \diamond (1 \diamond (1 \diamond (1 \diamond 1))), \dots \quad (1)$$

számok között van l -lel osztható.

Az előző és az 1.6. Sejtés is nehéznek tűnik, amennyiben bármelyik igaz, a következő gyengébb sejtés is igaz lenne.

1.11. Sejtés. *Tetszőleges $q > 1$ racionális számra a $\langle q \rangle_\diamond$ halmaz tartalmaz egész számot. Ezzel ekvivalens módon ha $q = \frac{m}{l}$ relatív prímek hányadosaként van felírva, akkor az $\langle 1 \rangle_\diamond$ halmaz tartalmaz l -lel osztható számot.*

1.12. Definíció. Nevezzük (a q -hoz tartozó) *kivételes halmaznak* azon egész számok halmazát, amelyeken a szokásos jelölésekkel a $\tilde{g}_q$ leképezést iterálva nem kapunk l -lel osztható számot.

A 2. fejezetben bevezetjük leképezések egy általánosabb $\mathcal{H}$ halmazát, amelybe $\tilde{g}_q$ is beletartozik, majd Lagarias nyomán belátjuk, hogy minden ilyen leképezés fenti módon definiált kivételes halmaza 0 sűrűségű, speciálisan 2 nevezőjű q esetén véges is. Ezután észrevételeket teszünk a $\tilde{g}_q$ leképezés kivételes halmazára, megállapítva, hogy $|q| < 1$ esetén lehet végtelen, valamint $|q| > 1$ esetén lehet tetszőlegesen nagy véges számosságú (azt nem tudjuk, $|q| > 1$ -re lehet-e végtelen). A 3. fejezetben bevezetjük a később sokat használt léptetett szorzás műveletét, valamint adunk egy módszert arra, hogyan írhatjuk fel egyszerűen kézzel $\langle 1 \rangle_\diamond$ legkisebb elemeit. Ebből a módszerből kiderül, hogy az 1-ből kiindulva a $\diamond$ művelettel generált halmaz megegyezik a szorzással és a $\tilde{g}_q$ leképezéssel generált halmazzal. A 4. fejezetben bemutatunk egy szöveges feladatot, amely az 1-ből léptetett szorzókra vezet, amelyek nem mások, mint az (1) képletben szereplő számok. A segítségükkel belátjuk az 1.11. Sejtést olyan racionális számokra, melyeket relatív prímek hányadosaként felírva a számláló és nevező különbsége legfeljebb 34.

1.13. Sejtés. *Tetszőleges q racionális számra, melyre $|q| > 1$, az $\langle 1 \rangle_\diamond$ halmaz nem nulla sűrűségű.*

A későbbi eredményeink alapján ebből a sejtésből is következik az 1.11. Sejtés, ugyanis ekkor a generátum nem lehet a (nulla sűrűségű) kivételes halmaz részhalmaza, így van benne olyan elem, amelyen iterálva a $\tilde{g}_q$ leképezést, kapunk l -lel osztható számot.

2. A $\tilde{g}_q$ -val rokon leképezések vizsgálata

2.1. Motiváció

A bevezetőben már megfigyeltük, hogy mivel a generátumban lévő számok nevezője mindig osztja a kiindulási szám nevezőjét, ezért kényelmesebb $\langle q \rangle_\diamond$ helyett

az $\langle 1 \rangle_\diamond$ halmazban számolni, ehhez pedig az f_q leképezést konjugáljuk a q -val való osztással, amelyet ι -val jelöltünk. Legyen

$$\tilde{g}_q(x) = \iota \circ f_q(x) \circ \iota^{-1}(x) = \frac{l}{m} f_q\left(\frac{mx}{l}\right) = \frac{l}{m} q \left\lceil \frac{mx}{l} \right\rceil = \left\lceil \frac{mx}{l} \right\rceil = [qx],$$

így kapjuk meg a $\tilde{g}_q$ leképezést. A $\tilde{g}_q$ és a [LS04] cikkben többször használt $g_q(x) = m \lceil \frac{x}{l} \rceil$ leképezések egy közös általánosításaként kapott leképezéscsaládot fogjuk vizsgálni a továbbiakban.

Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik $\tilde{g}_q(x)$ az l szerint vett maradékosztályok tekintetében. Legyen $x \equiv r \pmod{l}$; amennyiben $r = 0$, akkor $\lceil \frac{mx}{l} \rceil = \frac{mx}{l}$, mivel $\frac{mx}{l} \in \mathbb{Z}$, ezért $\tilde{g}_q(x) = \frac{mx}{l} = \frac{mx-0}{l}$. Másrészt, ha $r \neq 0$, akkor a felső egészrész definíciója szerint $\lceil \frac{mx}{l} \rceil = \frac{mx+l-r}{l}$, így $\tilde{g}_q(x) = \frac{mx-(r-l)}{l}$. Tehát r -től függően a számlálóban a kivonandó a $D_l = \{1-l, 2-l, \dots, -2, -1, 0\}$ modulo l teljes maradékrendszer egy eleme. Ha itt D_l helyett egy tetszőleges D modulo l teljes maradékrendszert veszünk, akkor hasonló függvényeket definiálhatunk. A továbbiakban az ennek megfelelő függvényeket h -val, a függvénycsaládot mint halmazt $\mathcal{H}$ -val fogjuk jelölni, tehát $\mathcal{H}$ elemei azon $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvények, melyekre teljesül a következő tulajdonság:

$$h(x) = \frac{mx-d}{l}, \text{ ahol } d \in D \text{ és } mx \equiv d \pmod{l}, \quad (2)$$

ahol D egy tetszőleges teljes maradékrendszer modulo l . Ez utóbbi feltétel miatt bármely x egész számhoz pontosan egy olyan $d \in D$ elem létezik, amelyre $mx \equiv d \pmod{l}$, tehát a h függvényünk jóldefiniált. A h függvény függ az m és l értékektől, valamint a D maradékrendszertől, a továbbiakban ezeket az egyszerűség kedvéért adottnak tekintjük és magát a függvényt csak h -val fogjuk jelölni.

A függvénycsaládnak eleme $g_q(x) = m \lceil \frac{x}{l} \rceil$ is, amennyiben a maradékrendszerünk $D = \{0, m(1-l), m(2-l), \dots, -2m, -m\}$. Ezt a leképezést úgy kapjuk, hogy q -val osztás helyett l -el szorzással konjugáljuk az f_q leképezést, tehát csak azt használjuk ki, hogy $\langle q \rangle_\diamond$ elemeinek nevezője osztja l -et.

A $\tilde{g}_{\frac{3}{2}}(x)$ leképezés szerepel Mahler, általa Z -számoknak nevezett számokról szóló sejtésében. A definíció alapján $\tilde{g}_{\frac{3}{2}}(x)$ értéke $\frac{3}{2}x$, ha x páros, és $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, ha x páratlan.

2.1. Definíció ([Mah68]). Nevezzünk Z -számnak olyan pozitív valós α számokat, melyekre teljesül, hogy tetszőleges $n \geq 1$ pozitív egész szám esetén $\{\alpha (\frac{3}{2})^n\} < \frac{1}{2}$, ahol a kapcsos zárójel a benne lévő szám törtrészét jelenti.

2.2. Állítás ([Mah68]). Ha α egy Z -szám, akkor $\lfloor \alpha (\frac{3}{2})^n \rfloor = \tilde{g}_q^n(\alpha)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy α egy Z -szám. Írjuk fel az $\alpha_n = \alpha (\frac{3}{2})^n$ számot $g_n + r_n$ alakban, ahol $g_n \in \mathbb{Z}$ és $0 \leq r_n < 1$, vagyis g_n és r_n nem más, mint α_n (alsó) egészrésze és törtrésze. Ekkor a vizsgált sorozatok definíciója miatt $\alpha_{n+1} = g_{n+1} + r_{n+1} = \frac{3}{2}(g_n + r_n)$. Mivel feltettük, hogy α egy Z -szám, ezért $r_n, r_{n+1} < \frac{1}{2}$. Az állítás a g_n sorozatra vonatkozik, de az r_n sorozat viselkedésére is teszünk a bizonyításban észrevételeket.

Először tegyük fel, hogy g_n páros szám, vagyis $\frac{3}{2}g_n$ egész szám. Mivel $0 \leq r_n < \frac{1}{2}$, így $0 \leq \frac{3}{2}r_n < \frac{3}{4}$, ezért $\alpha_{n+1} < \frac{3}{2}g_n + 1$, tehát $g_{n+1} = \frac{3}{2}g_n$ és $r_{n+1} = \frac{3}{2}r_n$, ami azt jelenti, hogy $0 \leq r_n < \frac{1}{3}$ is teljesül.

Most tegyük fel, hogy g_n páratlan szám, ekkor $\alpha_{n+1} = \frac{3}{2}g_n + \frac{3}{2}r_n$ alsó egészrésze $\frac{3}{2}g_n \pm \frac{1}{2}$ lehet, mivel $0 \leq r_n < 1$. Ha $g_{n+1} = \frac{3}{2}g_n - \frac{1}{2}$ lenne, akkor $r_{n+1} = \frac{3}{2}r_n + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ volna ellentmondva annak, hogy α egy Z -szám. Ezért $g_{n+1} = \frac{3}{2}g_n + \frac{1}{2}$ és $r_{n+1} = \frac{3}{2}r_n - \frac{1}{2}$. Ennek rendezésével és a $0 \leq r_{n+1} < \frac{1}{2}$ feltételből kapjuk, hogy $\frac{1}{3} \leq r_n < \frac{1}{2}$.

Összegezve tehát

$$g_{n+1} = \begin{cases} \frac{3}{2}g_n = \lceil \frac{3}{2}g_n \rceil, & \text{ha } g_n \text{ páros,} \\ \frac{3}{2}g_n + \frac{1}{2} = \lceil \frac{3}{2}g_n \rceil, & \text{ha } g_n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Mindkét esetben $g_{n+1} = \lceil \frac{3}{2}g_n \rceil = \tilde{g}_{\frac{3}{2}}(g_n)$, ebből indukcióval adódik az állítás. ■

Mahler sejtése, hogy Z -számok nem léteznek, továbbá bebizonyította, hogy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok Z -szám létezhet, valamint igazolta, hogy az alábbi sejtésből következik, hogy nem léteznek Z -számok.

2.3. Sejtés ([Mah68]). *Minden $n \geq 1$ pozitív egész számra létezik olyan n -től függő $j \geq 1$, hogy*

$$\tilde{g}_{\frac{3}{2}}^j(n) \equiv 3 \pmod{4}.$$

A kérdéskör nehézségét mutatja, hogy a Waring-problémában szereplő $g(k)$ értékre vonatkozó $g(k) = 2^k + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor - 2$ sejtés igazsága a $2^k \{(\frac{3}{2})^k\} + \lfloor (\frac{3}{2})^k \rfloor \leq 2^k$ egyenlőtlenségen múlik. Máig nyitott kérdés, hogy minden k -ra teljesül-e ez az egyenlőtlenség; Mahler [Mah57] megmutatta, hogy legfeljebb véges sok ellenpélda van.

2.2. A h leképezések tulajdonságai

A továbbiakban h az előző alfejezetben definiált $\mathcal{H}$ függvénycsalád egy tetszőleges eleme, amelyhez tartozó $q = \frac{m}{l}$ racionális számot és D maradékrendszert rögzítettnek tekintjük.

2.4. Állítás. *Bármely $h \in \mathcal{H}$ függvényre, valamint $x \in \mathbb{Z}$ és $i \in \mathbb{N}$ számokra $h(x + il) = h(x) + im$.*

Bizonyítás. A h függvény definíciója alapján

$$h(x + il) = \frac{m(x + il) - d}{l} = \frac{mx - d}{l} + im = h(x) + im,$$

ahol az utolsó lépésben ismét használtuk a definíciót. ■

2.5. Következmény. *Bármely $h \in \mathcal{H}$ függvényre, valamint $x \in \mathbb{Z}$ és $i, j \in \mathbb{N}$ számokra $h^j(x + il^j) = h^j(x) + im^j$.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk j szerint, a $j = 1$ eset éppen az előző állítás. Tegyük fel, hogy $h^j(x + il^j) = h^j(x) + im^j$. Ekkor

$$h^{j+1}(x + il^{j+1}) = h(h^j(x + il^j)) = h(h^j(x) + im^j).$$

Az indukciós hipotézist használva ez nem más, mint $h(h^j(x) + im^j \cdot l)$, amely az előző állítást alkalmazva éppen $h(h^j(x)) + im^j \cdot m = h^{j+1}(x) + im^{j+1}$. Ezzel az indukciós lépést és így az állítást beláttuk. ■

Térjünk vissza arra a problémakörre, hogy adott x számból kiindulva h mely iteráltjai lesznek l -lel oszthatók (lásd az 1.8. Sejtést).

2.6. Definíció ([LS04]). Egy adott $h \in \mathcal{H}$ leképezés j -edik iterált szerinti *kivételes halmazának* nevezzük és E_j -vel jelöljük az

$$E_j = \{x \in \mathbb{Z} \mid h(x), h^2(x), \dots, h^j(x) \not\equiv 0 \pmod{l}\}$$

halmazt, míg egyszerűen *kivételes halmaznak* nevezzük és E -vel jelöljük ezen halmazok metszetét, vagyis E elemei azon egész számok, amelyeken iterálva a h leképezést soha nem kapunk l -lel osztható számot.

2.7. Állítás ([LS04]). Legyen $j > 1$ egész szám, ekkor E_j előáll $l(l-1)^j$ darab modulo l^{j+1} maradékosztály egyesítéseként.

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk j -re. A kezdőlépéshez $j = 1$ -re bizonyítunk, vagyis azt kell belátnunk, hogy azon x egész számok halmaza, melyre $l \nmid h(x)$, előáll $l(l-1)$ modulo l^2 maradékosztály uniójaként. Definíció szerint a vizsgált esetben $h(x) = \frac{mx-d}{l} \not\equiv 0 \pmod{l}$, azaz $mx \not\equiv d \pmod{l^2}$. Mivel m és l relatív prímek, így átrendezhetjük az összefüggést úgy, hogy $x \not\equiv m^{-1}d \pmod{l^2}$, ahol m^{-1} jelöli m multiplikatív inverzét modulo l^2 , amelynek maradékosztálya természetesen modulo l is inverze m -nek. Ugyanakkor a (2) tulajdonságban foglalt $mx \equiv d \pmod{l}$ kongruencia miatt hasonló átrendezéssel $x \equiv m^{-1}d \pmod{l}$. Ez azt jelenti, hogy amennyiben x -nek l -lel, és így mx -nek l -lel vett maradéka rögzített, akkor egy modulo l^2 maradékosztályba nem tartozhat x , hogy $l \nmid h(x)$ teljesüljön. Mivel x -nek és így mx -nek l -lel vett maradéka l -féle, egy l -lel vett maradékon belül az l^2 -es maradék az egy tiltott maradékosztály miatt $(l-1)$ -féle lehet, ezért összesen $l(l-1)$ maradékosztályba tartozhat x modulo l^2 .

Tegyük fel, hogy a j egész számra teljesül, hogy E_j előáll $l(l-1)^j$ darab modulo l^{j+1} maradékosztály egyesítéseként, legyenek ezeknek a 0 és $l^{j+1} - 1$ közé eső elemei $s_1, s_2, \dots, s_{l(l-1)^j}$, halmazukat jelöljük S -sel. Tehát $x \in E_j$ ekvivalens azzal, hogy $x \equiv s_i \pmod{l^{j+1}}$ valamely i -re. Pontosan akkor eleme egy x egész szám az E_{j+1} halmaznak, ha eleme E_j -nek, és emellett $h^{j+1}(x) \not\equiv 0 \pmod{l}$, vagyis sem az első j , sem a $(j+1)$ -edik iterált nem osztható l -lel. Tegyük fel, hogy $x \equiv s_i \pmod{l^{j+1}}$, azaz $x = s_i + tl^{j+1}$, ahol t egész szám. Ekkor a 2.5. Következmény alapján

$$h^{j+1}(x) = h^{j+1}(s_i + tl^{j+1}) = h^{j+1}(s_i) + tm^{j+1} \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Kihasználva, hogy l és m relatív prímek, az utolsó inkongruenciát átrendezhetjük $t \not\equiv -m^{-j-1}h^{j+1}(s_i) \pmod{l}$ alakra, ez a feltétel meghatározza, hogy x nem lehet egy bizonyos l^{j+2} szerinti maradékosztályban. Tetszőleges $s_i \in S$ -hez egy darab modulo l^{j+1} , azaz l darab modulo l^{j+2} vett maradékosztály tartozik, amelyek közül a $h^{j+1}(x) \not\equiv 0 \pmod{l}$ feltétel egyet zár ki. Ez azt jelenti, hogy $x \in E_{j+1}$ teljesüléséhez az szükséges, hogy x azon $l(l-1)^j$ modulo l^{j+1} maradékosztályhoz tartozzon, amelyek E_j -t alkotják, ezen felül ha adott egy ilyen modulo l^{j+1} maradékosztály, akkor ezen belül $(l-1)$ -féle modulo l^{j+2} maradékosztályhoz tartozhat. Összesen tehát az E_{j+1} halmaz $(l-1)l(l-1)^j = l(l-1)^{j+1}$ darab modulo l^{j+2} maradékosztály egyesítéseként áll elő. ■

2.8. Következmény ([LS04]). *Legyen $j > 2$ egész szám, és jelölje E'_j azon x egész számok halmazát, melyre*

$$h(x), h^2(x), \dots, h^j(x) \not\equiv 0 \pmod{l}, \text{ és } h^{j+1}(x) \equiv 0 \pmod{l},$$

valgyis azon egészeket, amelyekre $h(x)$ -nek pontosan a $(j+1)$ -edik iteráltja lesz először l -lel osztható. Ekkor E'_j előáll $l(l-1)^j$ darab modulo l^{j+2} maradékosztály egyesítéseként.

Bizonyítás. Az előző állítás jelöléseivel $E'_j = E_j \setminus E_{j+1}$, emellett E_j definíciója miatt $E_{j+1} \subseteq E_j$. Eszerint úgy kaphatjuk meg E'_j elemszámát a megfelelő modulus szerint, hogy E_{j+1} és E_j elemszámát egy közös modulus szerint felírjuk és kivonjuk előbbit az utóbbiból. Alkalmazva az előző állítást, az E_j halmaz $l(l-1)^j$ maradékosztály egyesítése modulo l^{j+1} , azaz $l^2(l-1)^j$ maradékosztályé modulo l^{j+2} . Alkalmazva E_{j+1} -re is az állítást, E'_j számossága modulo l^{j+2} nem más, mint

$$l^2(l-1)^j - l(l-1)^{j+1} = l(l-1)^j(l-l+1) = l(l-1)^j. \quad \blacksquare$$

2.9. Lemma ([LS04]). *Legyen $T \subseteq \mathbb{Z}$ egy olyan halmaz, amely előáll t darab modulo s maradékosztály egyesítéseként. Ekkor tetszőleges x pozitív valós számra*

$$t \left\lfloor \frac{2x}{s} \right\rfloor \leq |T \cap (-x, x)| \leq t \left\lceil \frac{2x}{s} \right\rceil.$$

Bizonyítás. Az állítás közvetlenül következik abból, hogy s szomszédos számból pontosan t eleme T -nek, és $s \lfloor \frac{2x}{s} \rfloor \leq 2x \leq s \lceil \frac{2x}{s} \rceil$ ■

2.10. Tétel ([LS04]). *Tetszőleges x pozitív valós számra és $h \in \mathcal{H}$ leképezésre az E kivételes halmaz metszete a $(-x, x)$ intervallummal felülről becsülhető, pontosabban*

$$|E \cap (-x, x)| \leq l(2x)^{\beta_l}, \text{ ahol } \beta_l = \frac{\ln(l-1)}{\ln l}.$$

Bizonyítás. Nyilván tetszőleges $j > 1$ egész számra $|E \cap (x, x)| \leq |E_j \cap (-x, x)|$. Az előző lemma felső becslését és a 2.7. Állítást használva

$$|E_j \cap (-x, x)| \leq l(l-1)^j \left\lceil \frac{2x}{l^{j+1}} \right\rceil, \quad (3)$$

ahol a lemma jelöléseivel $l(l-1)^j$ tölti be t szerepét, míg s -nek l^{j+1} felel meg.

Legyen j a legkisebb természetes szám, amelyre $\lceil \frac{2x}{l^{j+1}} \rceil = 1$. Ekkor $l^j < 2x \leq l^{j+1}$, azaz $j+1 = \lceil \log_l 2x \rceil$. Tehát a fenti egyenlőtlenség úgy alakul, hogy

$$|E \cap (-x, x)| \leq |E_j \cap (-x, x)| \leq l(l-1)^j = l e^{j \cdot \ln(l-1)} \leq l e^{\ln(l-1) \frac{\ln 2x}{\ln l}} = l \cdot (2x)^{\frac{\ln(l-1)}{\ln l}}.$$

Az utolsó alak már j -től független, így alkalmas $|E \cap (-x, x)|$ felső becslésére, és éppen a tételben szereplő becslést szolgáltatja. ■

Mivel a 2.10. Tételben $\beta_l < 1$, ezért a következőt kimondhatjuk.

2.11. Következmény. *Az E halmaz sűrűsége nulla:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|E \cap (-x, x)|}{2x} = 0.$$

2.12. Következmény. *Az eddigi jelöléseinkkel, amennyiben $l = 2$, akkor a kivételes halmaz számossága legfeljebb 2.*

Bizonyítás. A 2.10. Tételben $l = 2$ esetén $\beta_l = 0$, ezért $|E \cap (-x, x)| \leq 2$ minden x pozitív valós számra. ■

Érdekes megvizsgálnunk, hogy a 2.10. Tétel bizonyításában jól választottuk-e j -t, ehhez a függelék ábráin látható $l = 2$ és $l = 3$ esetén x függvényében j azon értéke, amelyre az $l(l-1)^j \lceil \frac{2x}{l^{j+1}} \rceil$ becslés a lehető legkisebb. Az ábrákat készítő Google Colab munkafüzet megtalálható az alábbi linken:

https://colab.research.google.com/drive/14FqLj3NBhLUPV4F_qk5juzrkE_KrZl7c

2.3. A kivételes halmaz számosságának szélsőséges esetei

A 2.10. Tétel felveti a kérdést, hogy vajon lehet-e a teljes kivételes halmaz végtelen. Erre a $q = \frac{1}{l}$ esetben adunk példát. Vegyük észre, hogy ebben az esetben a g_q és $\tilde{g}_q$ leképezés ugyanaz. Az alábbi állítás a g_q leképezés definíciója alapján nyilvánvaló.

2.13. Lemma. *Legyen $k = k_0 + k_1 l + \dots + k_n l^n$ a k pozitív egész szám felírása l alapú számrendszerben, tehát $k_i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén. Legyen továbbá $q = \frac{1}{l}$.*

- 1) *Ha $k_0 = 0$, akkor $g_q(k) = k_1 + k_2 l + \dots + k_n l^{n-1}$.*
- 2) *Ha $k_0 \neq 0$, és $k_1 = k_2 = \dots = k_i = l-1$ és $k_{i+1} \neq l-1$, akkor $g_q(k) = 0 + 0l + \dots + 0l^{i-1} + (k_{i+1} + 1)l^i + k_{i+2}l^{i+1} + \dots + k_n l^{n-1}$.*
- 3) *Speciálisan, ha $k_0 \neq 0$ és $k_1 \neq l-1$, akkor $g_q(k) = (k_1 + 1) + k_2 l + \dots + k_n l^{n-1}$.*

2.14. Lemma. *Legyen $q = \frac{1}{l}$, ahol $l > 1$ egész szám, és legyen $\mathcal{B}$ azon számok halmaza, melyek nem oszthatók l -lel, és az l alapú számrendszerbeli felírásukban legfeljebb egy $(l-1)$ -es számjegy van, és amennyiben van egy, az is az 1-es helyiértéken. Ekkor a $\mathcal{B}$ halmaz zárt a g_q leképezésre.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathcal{B}$ és $k = k_0 + k_1l + \dots + k_nl^n$ a felírása l alapú számrendszerben. Mivel $\mathcal{B}$ elemei nem oszthatók l -lel, ezért $k_0 \neq 0$, továbbá csak az utolsó számjegy lehet $l-1$, ezért $k_1 \neq l-1$, vagyis $\mathcal{B}$ elemeire az előző lemma harmadik pontja használható. Tehát $g_q(k)$ jegyei l -es számrendszerben $k_1+1, k_2, \dots, k_n$, következőképpen legfeljebb az 1-es helyiértéken szerepelhet $l-1$ és $g_q(k)$ nem osztható l -lel. ■

2.15. Lemma. *Legyen k pozitív egész szám, és írjuk fel l alapú számrendszerben: legyen $k = k_0 + k_1l + \dots + k_nl^n$, emellett legyen s pozitív egész szám. Ha $k_1, k_2, \dots, k_s \neq l-1$ és $k_0 \neq 0$, akkor $g_q^s(k) = (k_s + 1) + k_{s+1}l + \dots + k_nl^{n-s}$.*

Bizonyítás. Indukciót alkalmazunk s -re. Ha $s = 1$, akkor a 2.13. Lemma harmadik pontja szerint igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $g_q^s(k) = (k_s + 1) + k_{s+1}l + \dots + k_nl^{n-s}$, ha $k_0 \neq 0$ és $k_1, k_2, \dots, k_s \neq l-1$. Ha k_{s+1} sem $l-1$, akkor

$$g_q^{s+1}(k) = g_q((k_s + 1) + k_{s+1}l + \dots + k_nl^{n-s}) = (k_{s+1} + 1) + k_{s+2}l + \dots + k_nl^{n-s-1},$$

mivel $k_s + 1 \neq 0$, valamint $k_{s+1} \neq l-1$, így használható a 2.13. Lemma harmadik pontja. ■

2.16. Tétel. *Legyen $q = \frac{1}{l}$ és $k = k_0 + k_1l + \dots + k_nl^n$ pozitív egész szám, továbbá legyen E a $\tilde{g}_q \in \mathcal{H}$ leképezéshez tartozó kivételes halmaz. Ekkor $k \in E$ pontosan akkor, ha a következők valamelyike teljesül:*

- (A1) $k_0 \neq 0$ és $k_1, k_2, \dots, k_n \neq l-1$;
- (A2) $k_0 = 0, k_1 \neq 0$ és $k_2, k_3, \dots, k_n \neq l-1$.

Bizonyítás. Az (A1) feltételnek megfelelő k számok a 2.14. Lemmában definiált $\mathcal{B}$ halmaz elemei, akárcsak az (A2) feltételnek megfelelő számok $\tilde{g}_q$ melletti képei. Amennyiben iteráljuk rajtuk a $\tilde{g}_q$ leképezést, a 2.14. Lemma alapján az iteráltak a $\mathcal{B}$ halmazban lesznek, és így k valóban a kivételes halmazhoz tartozik, hiszen $\mathcal{B}$ -ben nincsenek l -lel osztható számok.

A másik irányhoz azt kell belátnunk, hogy amennyiben egyik feltétel sem igaz egy k egész számra, akkor a g_q leképezést k -n iterálva kapunk l -lel osztható számot. Először belátjuk, hogy az (A1) és (A2) feltételek pontosan akkor nem teljesülnek, ha az alábbiak valamelyike igen:

- (B1) k osztható l^2 -tel;
- (B2) k -nak van olyan $(l-1)$ -es jegye l -es számrendszerben, amelyet nem csak nullák követnek.

Egyrészt amennyiben (B1) fennáll, akkor az (A1) feltétel $k_0 = 0$, az (A2) feltétel $k_1 = 0$ miatt nem teljesül. Ha (B2) áll fenn, akkor vagy $k_1 = l-1$ úgy, hogy $k_0 \neq 0$, vagy $k_j = l-1$ valamilyen 1-nél nagyobb j -re, és egyik esetben sem teljesül sem (A1), sem (A2).

Az ekvivalencia másik irányához tegyük fel, hogy sem (A1), sem (A2) nem teljesül. Előbbi tagadása miatt ha $k_0 \neq 0$, akkor $k_1, k_2, \dots, k_n$ közül valamelyik jegy $l-1$, vagyis van olyan $(l-1)$ -es jegy, amelyet nem csak nullák követnek, így (B2) igaz. Ha $k_0 = 0$, akkor az (A2) feltétel tagadása miatt $k_1 = 0$ (ekkor k osztható l^2 -el, azaz (B1) érvényes), vagy $k_1 \neq 0$ és $k_2, k_3, \dots, k_n$ közül valamelyik $l-1$, ekkor megint csak van olyan $(l-1)$ -es jegy, amelyet nem csak nullák követnek, vagyis (B2) teljesül.

Rátérünk arra, hogy a (B1) vagy (B2) feltételt teljesítő számok nem elemei E -nek. Amennyiben (B1) teljesül és így $l^2 \mid k$, abban az esetben már az első iterált osztható l -el. A (B2) feltételt teljesítő számok közül elegendő azokat vizsgálnunk, melyek nem oszthatók l -el, hisz az l -el oszthatók vagy egy iterációs lépéssel ilyenek lesznek, vagy megfelelnek a (B1) feltételnek is. Elegendő tehát azon számokat vizsgálni, amelyeknek van $(l-1)$ -es jegye, és utolsó jegye nem 0 (ez már garantálja, hogy az $(l-1)$ -es jegyet követi nem 0 jegy).

Jelöljük $(s+1)$ -gyel a legkisebb olyan indexet, melyen $(l-1)$ -es számjegy van. Mivel $k_0 \neq 0$, ezért az $(s+1)$ -edik helyiértéken lévő $(l-1)$ -es számjegyet nem csak nullák követik. Ha $s = 0$, azaz $k_0 \neq 0$ és $k_1 = l-1$, akkor $g_q(k)$ akkor a 2.13. Lemma második pontja alapján osztható l -el. Amennyiben $s \geq 1$, a 2.14. Lemma szerint $g_q^s(k) = (k_s + 1) + k_{s+1}l + \dots + k_n l^{n-s}$. Mivel $k_s + 1 \neq 0$, ezért k iteráltjai között van l -el osztható, hiszen $g_q^{s+1}(k) \equiv k_{s+1} + 1 \equiv l \pmod{l}$. ■

Megmutatjuk, hogy a 2.10. Tétel felső becslése nagyságrendileg éles, ugyanis $q = \frac{1}{l}$ esetén ugyanilyen nagyságrendű alsó becslés adható a $\tilde{g}_q$ leképezéshez tartozó kivételes halmazra.

2.17. Következmény. Ha $q = \frac{1}{l}$, akkor a $g_q \in \mathcal{H}$ leképezéshez tartozó E kivételes halmaz végtelen számosságú, továbbá minden $x \geq l$ valós számra

$$|E \cap (-x, x)| \geq \frac{1}{(l-1)^2} x^{\beta_l}, \text{ ahol } \beta_l = \frac{\log(l-1)}{\log l}.$$

Bizonyítás. A következmény a $\tilde{g}_q$ leképezésre is kimondható, mivel $q = \frac{1}{l}$ esetén a kettő megegyezik.

Legyen $\Sigma_n \subseteq \mathbb{Z}$ azon k egész számok halmaza, amelyekre $1 \leq k < l^n$, továbbá k -t l alapú számrendszerben felírva az 1-es helyiértéket kivéve nincsen $(l-1)$ -es számjegye, emellett nem osztható l^2 -tel. Az előző tétel alapján $\Sigma_n \subseteq E$. Kombinatorikai úton látható, hogy $|\Sigma_n| = l(l-1)^{n-1} - (l-1)^{n-2} \geq (l-1)^{n-1}$. Ha $l^n \leq x < l^{n+1}$ és $n \geq 1$, akkor

$$|E \cap (-x, x)| \geq |E \cap (0, l^n)| \geq |\Sigma_n| \geq (l-1)^{n-1} \geq \frac{1}{(l-1)^2} x^{\frac{\log(l-1)}{\log l}}. \quad \blacksquare$$

Láttuk, hogy $|q| < 1$ esetén nem feltétlenül véges a kivételes halmaz. Lagarias sejtése szerint minden q racionális számra, melyre $|q| > 1$, legfeljebb véges sok olyan szám létezik, melyen iterálva az f_q leképezést soha nem kapunk egész számot. Ez a

sejtés a $\tilde{g}_q$ leképezésre átfogalmazva éppen az 1.8. Sejtés, amelyet az átláthatóság kedvéért megismétlünk.

2.18. Sejtés. Minden q racionális számra, melyre $|q| > 1$, legfeljebb véges sok olyan szám létezik, melyen iterálva a $\tilde{g}_q$ leképezést soha nem kapunk l -lel osztható számot.

2.19. Állítás. A 2.18. Sejtés ekvivalens a következővel. Legyen $q = \frac{m}{l}$, ahol m és l relatív prím egész számok. Ha $q < -1$, akkor a $\tilde{g}_q$ leképezéshez tartozó E kivételes halmaz üres, valamint ha $q > 1$, akkor

$$E = (\mathbb{Z} \setminus l\mathbb{Z}) \cap \left(-\frac{1}{q-1}, 0\right).$$

Bizonyítás. A második alakból nyilvánvalóan következik az első, belátjuk, hogy az eredeti alakból következik az itt megfogalmazott.

Tegyük fel tehát, hogy igaz a 2.18. Sejtés, vagyis az E kivételes halmaz véges. Amennyiben $x \in E$, akkor minden $n > 0$ egész számra $\tilde{g}_q^n(x) \in E$, mivel ha x -en iterálva $\tilde{g}_q$ -t nem kapunk l -lel osztható számot, akkor valamely iteráltján iterálva sem. Ezért csak akkor lehet $x \in E$, ha valamilyen $n_1 \neq n_2$ pozitív egészekre $\tilde{g}_q^{n_1}(x) = \tilde{g}_q^{n_2}(x)$, különben végtelen sok különböző számot kapnánk $\tilde{g}_q$ iterálásával, amelyek mind elemei lennének a kivételes halmaznak.

Mivel $|q| > 1$, ezért bármely x egész szám esetén $|x| \leq |\tilde{g}_q(x)|$, ugyanis $|x| \leq |qx|$, továbbá

$$|\tilde{g}_q(x)| = |\lceil qx \rceil| = \begin{cases} \lceil qx \rceil, & \text{ha } qx \geq 0, \\ \lfloor -qx \rfloor, & \text{ha } qx < 0, \end{cases}$$

tehát $|x| \leq |\tilde{g}_q(x)|$. Ezért, ha ciklusba futunk $\tilde{g}_q$ iterálása során, akkor a ciklus mentén az abszolút érték állandó. Vagyis a ciklus csak 1 hosszúságú lehet úgy, hogy $\tilde{g}_q$ fixen hagy egy számot, vagy 2 hosszúságú úgy, hogy egy számot és ellentettjét egymásba viszi.

Amennyiben $q < -1$, akkor könnyen látható, hogy tetszőleges nem 0 számon iterálva a $\tilde{g}_q$ leképezést felváltva pozitívak és negatívak az iteráltak. Minden lépésben, amelyben negatív iteráltról lépünk pozitívrá, az abszolút érték nő, hisz bármely $x \in \mathbb{Z}^+$ esetén $|\tilde{g}_q(-x)| = \lceil -xq \rceil > x$. Ezért negatív q esetén soha nem futhatunk az iterálás során ciklusba, így amennyiben feltesszük, hogy a kivételes halmaz üres, akkor véges.

Amennyiben $q > 1$, akkor ha x pozitív egész szám, a 3.7. Lemma alapján nincs fixpont, és 2 hosszú ciklus sem lehet, mivel minden iterált pozitív. A 0 sem lehet kivételes, mert minden iteráltja 0, és így osztható l -lel. Így a kivételes halmazban csak negatív egészek lehetnek. Pontosabban, akkor teljesül $-x \in E$ valamilyen x pozitív egész számra, ha $x < \frac{1}{q-1}$, ekkor ugyanis ekvivalens átalakításokat végezve $xq < x + 1$, így $-x - 1 \leq -xq < -x$, ezért $\tilde{g}_q(-x) = \lceil -xq \rceil = -x$, vagyis $-x$ fix $\tilde{g}_q$ mellett. Amennyiben kisebb negatív számokon iteráljuk a $\tilde{g}_q$ leképezést, akkor hasonló átalakításokkal látható, hogy az abszolút érték minden iterálással nőni fog, így nem alakulhat ki ciklus. Mivel $\tilde{g}_q$ iterálásakor az abszolút érték nem csökken, és minden fixpontonál a kisebb abszolút értékű negatív számok is fixpontok, ezért ha

nem fixpontról indítjuk az iterációt, nem futhatunk fixpontba. Végül, a fixpontok közül pontosan azok vannak benne a kivételes halmazban, amelyek maguk nem oszthatók l -lel, ezért az $\left(-\frac{1}{q-1}, 0\right)$ intervallumból le kell vonnunk $l\mathbb{Z}$ elemeit, hogy megkapjuk E -t. ■

2.20. Következmény. *A $|q| > 1$ feltétel mellett a $\tilde{g}_q$ leképezés E kivételes halmaza tetszőlegesen nagy véges számosságú lehet.*

Bizonyítás. Legyen K tetszőleges pozitív egész küszöbszám. Legyen $1 < q < 1 + \frac{1}{K}$ olyan, hogy q -t az m és l relatív prímek hányadosaként felírva $l > K$. Ekkor a $\tilde{g}_q$ leképezésre az előző állítás alapján $-1, -2, \dots, -K \in E$, tehát $|E| \geq K$. ■

3. A generátum leírása

3.1. Definíció. Legyen a q racionális szám rögzített és legyen k egész szám. Nevezzük k -ből léptetett szorzóknak a következő $\{k_n\}$ sorozat elemeit:

$$k_n = \begin{cases} k, & \text{ha } n = 0, \\ \tilde{g}_q(k_n) = \lceil qk_n \rceil, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

Az 1-ből léptetett szorzóknak különleges jelentőségük lesz, róluk szól az 1.10. Sejtés, és fel fogjuk őket használni az 1.11. Sejtés egy speciális esetének bizonyításához.

3.2. Definíció. Nevezzük *bázisszorzóknak* az 1-ből léptetett szorzókat.

3.3. Példa. Nézzük meg, hogyan kapjuk meg a bázisszorzókat $q = \frac{9}{7}$ -re.

- $a_0 = 1$,
- $a_1 = \lceil q \rceil = \lceil \frac{9}{7} \rceil = 2$,
- $a_2 = \lceil qa_1 \rceil = \lceil \frac{18}{7} \rceil = 3$,
- $a_3 = \lceil qa_2 \rceil = \lceil \frac{27}{7} \rceil = 4$,
- $a_4 = \lceil qa_3 \rceil = \lceil \frac{36}{7} \rceil = 6$.

3.4. Lemma. *Legyen az $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ halmaz zárt a $\diamond$ műveletre, és tegyük fel, hogy $1 \in \mathcal{A}$. Bármely $k \in \mathcal{A}$ egész számra a k -ből léptetett szorzók is benne vannak az $\mathcal{A}$ halmazban. Speciálisan, a bázisszorzók benne vannak $\langle 1 \rangle_\diamond$ -ban.*

Bizonyítás. Elegendő belátnunk, hogy minden k -t tartalmazó részalgebrája $(\mathbb{Z}, \diamond)$ -nak tartalmazza a k -ből léptetett szorzókat, vagyis $\langle k \rangle_\diamond$ tartalmazza őket. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk, kezdőlépéséhez már feltettük, hogy $k_0 = k \in \mathcal{A}$. Ha feltesszük, hogy $k_{n-1} \in \langle k \rangle_\diamond$, akkor $k_n = 1 \diamond k_{n-1} \in \langle k \rangle_\diamond$ is benne van a generátumban, így indukcióval adódik az állítás. A bázisszorzók az 1-ből léptetett szorzók és 1 nyilván eleme $\langle 1 \rangle_\diamond$ -nak. ■

3.5. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ részalgebrája $(\mathbb{Z}, \diamond)$ -nak. Tegyük fel, hogy $b, c \in \mathcal{A}$ és legalább egyikük előáll $[kq]$ alakban, ahol $k \in \mathcal{A}$. Ekkor $bc \in \mathcal{A}$. Speciálisan, ha $c \in \langle 1 \rangle_\diamond$ és a_n bázisszorzó, ahol $n \geq 1$, akkor $ca_n \in \langle 1 \rangle_\diamond$.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy b áll elő a megadott alakban. Ekkor $bc = c \diamond k$, ahol a jobb oldali művelet tényezői a feltevés miatt benne vannak $\mathcal{A}$ -ban. Speciálisan, ha a_n bázisszorzó és $n \geq 1$, akkor a_n előáll $[a_{n-1}q]$ alakban, ahol a_{n-1} az előző lemma miatt van benne $\langle 1 \rangle_\diamond$ -ban. ■

Az előző két lemmából indukcióval közvetlenül adódik a következő:

3.6. Következmény. *Legyen $\mathcal{A}$ részalgebrája $(\mathbb{Z}, \diamond)$ -nak. Ha $\mathcal{A}$ egy tetszőleges elemét tetszőleges számú olyan b szorzóval szorozzuk, amely előáll $[kq]$ alakban, ahol $k \in \mathcal{A}$, akkor olyan számot kapunk, amely benne van $\mathcal{A}$ -ban. Speciálisan, a bázisszorzók szorzatai benne vannak $\langle 1 \rangle_\diamond$ -ban.*

3.7. Lemma. *Ha $q > 1$, akkor a $\tilde{g}_q$ leképezés szigorúan monoton növvő, így injektív a pozitív egész számokon.*

Bizonyítás. Nyilván $\tilde{g}_q$ mellett pozitív számok képe pozitív, negatív számok képe nempozitív, valamint $\tilde{g}_q$ monoton növvő. Mivel $q > 1$, ezért két szomszédos pozitív egész számot q -val szorozva az eredmények közti különbség legalább 1, ezért felső egészcsoportok, vagyis a két szomszédos egész szám $\tilde{g}_q$ melletti képei nem egyezhetnek meg. Ebből következően $\tilde{g}_q$ szigorúan monoton növvő. ■

3.8. Állítás. *Legyen q pozitív racionális szám. A következő végtelen lépéses konstrukcióval az $\langle 1 \rangle_\diamond$ halmaz minden elemét megkaphatjuk egy végtelen táblázatba foglalva. Először felírjuk az első sorba a bázisszorzókat az 1-gyel kezdődően. Ezt követően az alábbi lépést ismétljük, ameddig lehet:*

Vesszük a legkisebb olyan számot, amely nincs a táblázatban, de előáll a táblázatban már szereplő számok szorzataként. Ezt a számot beírjuk egy új sorba az első oszlopba, majd kiszámoljuk a léptetett szorzóit, és sorban kitöltjük vele az új sort.

Amennyiben $q > 1$, akkor a táblázatban bármely egész szám legfeljebb egyszer szerepel.

Bizonyítás. Előbb teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy a táblázat első oszlopának i -edik eleme felírható i -nél kisebb indexű sorok 1-nél nagyobb indexű oszlopaiból vett elemek szorzataként (az indexelést itt 1-től indítjuk). A kezdőlépéshez az 1-et üres szorzatnak tekintjük, továbbá tegyük fel, hogy minden $i < n$ esetén teljesül az állítás. Az n -edik sor első eleme a táblázat definíciója miatt feljebb lévő sorokban található számok szorzata. Amennyiben ezek között van az első oszlopból is elem, akkor azokat az indukciós feltevés alapján írjuk fel az első oszlopon kívül álló elemek szorzataként, és ezt a szorzatot írjuk be a helyére. Ezt a lépést mindegyik kezdeti szorzótényezőre alkalmazva, a kívánt alakban tudjuk felírni az n -edik sor első elemét.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy tetszőleges n -re a táblázat első n sorának elemei benne vannak a generátumban. Az első sor elemei a bázisszorzók, róluk már

láttuk, hogy a generátum tartalmazza őket. Tegyük fel, hogy egy adott n természetes számra a táblázat első n sorának elemei benne vannak a generátumban. Az $(n + 1)$ -edik sor első eleme felírható az első oszlopon kívülről vett elemek szorzataként, így a 3.6. Következmény szerint benne van a generátumban. Az $(n + 1)$ -edik sor emellett az első elem léptetett szorzóit is tartalmazza, amelyek így szintén benne vannak $\langle 1 \rangle_\diamond$ -ban. Ezzel beláttuk, hogy a táblázat elemei valóban mind $\langle 1 \rangle_\diamond$ elemei is.

Most lássuk be, hogy a táblázat tartalmaz minden számot a generátumból. Teljes indukcióval bizonyítunk aszerint, hogy mi az az n szám, ahányszor alkalmazni kell a $\diamond$ műveletet, ha meg szeretnénk kapni a generátum egy elemét az 1-ből. Amennyiben $n = 0$, azt úgy tekintjük, hogy a művelet elvégzése nélkül vesszük az egyetlen kezdeti számunkat, az 1-et, éppen a táblázat első sorának első elemét. Amennyiben $n = 1$, akkor csak egyféle eredményt kaphatunk, mégpedig az $1 \diamond 1 = [q]$ számot, azaz a_1 -et, amely a táblázat első sorának második eleme.

Az indukciós lépés bizonyításához tegyük fel, hogy ha legfeljebb n -szer kell végrehajtani az 1 számon a $\diamond$ műveletet, akkor a kapott szám benne van a táblázatban. Legyen x olyan szám, amelyre $(n + 1)$ -szer kell elvégezni a $\diamond$ műveletet az 1 számon, hogy megkapjuk x -et. Ekkor $x = x_1 \diamond x_2 = x_1 [qx_2]$, ahol az indukciós feltevés szerint x_1 és x_2 már szerepel a táblázatban. Vegyük észre, hogy $[x_2q]$ az x_2 elemtől jobbra lévő elem a táblázatban, így a szintén a táblázatban lévő x_1 -gyel vett szorzata is benne van a táblázatban, elvégre a konstrukció folytán a táblázat zárt a szorzásra.

Ha $q > 1$, akkor a táblázat első oszlopában lefelé haladva szigorúan nőnek a számok, ugyanis ha létezne olyan i pozitív egész szám, hogy az $(i + 1)$ -edik sor első eleme kisebb (egyenlő a képzési szabály miatt nem lehet), mint az i -ediké, akkor a képzési szabály miatt fel tudnánk írni az $(i + 1)$ -edik sor első elemét feljebbi sorokban lévő elemek szorzataként. Mivel az i -edik sorban minden elem nagyobb volna, ezért csak i -nél kisebb indexű sorok elemeit használnánk fel, ez azonban ellentmondana az i -edik sor első elemének kiválasztásakor a minimalitási feltételnek.

Most lássuk be, hogy $q > 1$ esetén a táblázatban minden elem pontosan egyszer szerepel. Az első sorban minden elem különböző, mivel a $q > 1$ feltétel és a 3.7. Lemma folytán jobbra haladva szigorúan nőnek a számok. Tegyük fel, hogy az első n sorban nincs ismétlődés. Az $(n + 1)$ -edik sor (ha egyáltalán létezik) első elemét a táblázat leírása szerint úgy választjuk, hogy nem szerepel a felette lévő sorokban. Az $(n + 1)$ -edik sor első eleme így nem egyezik meg a táblázat egy korábbi elemével sem. Ha feltesszük, hogy a k -edik eleme nem szerepelt korábban, akkor abból a 3.7. Lemma alapján következik, hogy a $(k + 1)$ -edik eleme csak az első oszlopban szerepelhetett, különben a k -adiknak is kellett volna korábban szerepelnie. Azonban az első oszlopban sem szerepelhetett, mivel az első oszlopban lefelé, valamint bármely sorban jobbra haladva szigorúan nőnek a számok. Így az $(n + 1)$ -edik sorban sincsen ismétlődés az addigiakhoz képest. ■

Érdemes megfigyelni, hogy szemléletesen bebizonyítottuk az alábbi tényt.

3.9. Következmény. *Legyen q pozitív racionális szám. Az $\langle 1 \rangle_\diamond$ halmaz megegyezik*

az 1-ből szorzással és a $\tilde{g}_q$ leképezéssel generált halmazzal, és mint ilyen, zárt a szorzásra és a $\tilde{g}_q$ leképezésre.

3.10. Lemma. Legyen $q = \frac{m}{l}$ úgy, hogy $m > l$ relatív prím pozitív egész számok. Ekkor azon számok, amelyek nem állnak elő $1 \diamond x$ alakban úgy, hogy x egész szám, azok l darab maradékosztályt alkotnak modulo m , emellett az m -mel osztva 1 maradékot adó számok mindig ilyenek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy n nem áll elő $1 \diamond x$ alakban. Ekkor nem létezik olyan x egész szám, hogy $n = \lceil x \frac{m}{l} \rceil$, azaz

$$n - 1 < \frac{xm}{l} \leq n.$$

Keressük a megfelelő n számokat az m -mel vett maradékuk szerint, tehát írjuk fel n -et $mt + r$ alakban, ahol t egész szám, míg $0 \leq r < m$. A fenti képletbe helyettesítve, majd rendezéssel azt kapjuk, hogy nem állhatnak fenn a $(x - tl)m \leq rl < (x - tl)m + l$ egyenlőtlenségek, vagyis rl maradéka m -mel osztva nem lehet $0, 1, 2, \dots, l - 1$. Mivel m és l relatív prímek, ezért adódik a lemma első állítása. A második onnan következik, hogy $n \equiv 1 \pmod{m}$ esetén $rl \equiv nl \equiv l \pmod{m}$ és $l \notin \{0, 1, 2, \dots, l - 1\}$. ■

3.11. Állítás. Legyen $q = \frac{m}{l}$, ahol m és l egész számok, relatív prímek és $m > l$. Amennyiben $[q]$ és m relatív prímek, akkor a 3.8. Állításban szereplő táblázat első n sora nem zárt a szorzásra tetszőleges n egész szám esetén.

Bizonyítás. Az állítás ekvivalens azzal, hogy a táblázatnak végtelen sok sora van. Az előző lemma szerint m -mel osztva 1 maradékot adó számok nem szerepelnek a táblázat első oszlopán kívül. Ugyanakkor ha $[q]$ és m relatív prímek, akkor $[q]$ hatványai között végtelen sok kongruens 1-gyel modulo m . Mivel $[q] \in \langle 1 \rangle_\diamond$, és a generátum zárt a szorzásra, ezért ezek a számok mind elemei a generátumnak, és így a táblázatnak is. Mivel nem lehetnek a táblázat első oszlopán kívül, ezért az első oszlopban vannak, tehát a táblázatnak végtelen sok sora kell legyen. ■

3.12. Sejtés. Tetszőleges $q > 1$ racionális szám és n pozitív egész szám esetén a táblázat első n sora nem zárt a szorzásra.

A sejtés ekvivalens azzal, hogy $q > 1$ esetén a táblázatnak végtelen sok sora van.

3.13. Állítás. Amennyiben teljesül az 1.13. Sejtés, akkor teljesül a 3.12. Sejtés is.

Bizonyítás. Kontrapozícióval bizonyítunk, tehát megmutatjuk, hogy a 3.12. Sejtés tagadásából következik az 1.13. Sejtés tagadása. Ha feltesszük, hogy a táblázatnak az első n sora zárt a szorzásra, akkor csak n sora van, legyenek az első oszlop elemei $p_1, p_2, \dots, p_n$. Az i -edik sor j -edik elemét alulról becsülhetjük $p_i q^{j-1}$ -nel, így az i -edik sor elemeinek reciprokösszegét felülről becsülhetjük a következő képlettel:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_i q^{j-1}} = \frac{1}{p_i} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^j = \frac{1}{p_i \left(1 - \frac{1}{q}\right)}.$$

Láthatjuk, hogy a sorok elemeinek reciprokösszege véges, így amennyiben véges sok sor van, a táblázat összes elemének reciprokösszege véges, a 3.8. Állítás szerint tehát $\langle 1 \rangle_\diamond$ elemeinek is véges a reciprokösszege, ebből következően a generátum 0 sűrűségű. ■

4. Bázisszorzók

Ebben a fejezetben az 1.11. Sejtést bizonyítjuk be olyan $q = \frac{m}{l}$ törtre, ahol $m \leq l + 34$. Most kényelmesebb lesz a $\diamond$ művelet helyett az eredeti $\circ$ műveletet használni. A 3.6. Következmény szerint a bázisszorzók szorzatai benne vannak az $\langle 1 \rangle_\diamond$ halmazban, ez pedig a $\langle q \rangle_\diamond$ generátumra nézve a következőt jelenti.

4.1. Állítás. *Ha $b_1, \dots, b_n$ bázisszorzók, akkor $qb_1 \cdot \dots \cdot b_n \in \langle q \rangle_\diamond$.*

Bizonyítás. A 3.6. Következmény alapján $b_1 \cdot \dots \cdot b_n \in \langle 1 \rangle_\diamond$, ebből pedig az ι^{-1} izomorfizmust használva azt kapjuk, hogy $qb_1 \cdot \dots \cdot b_n \in \langle q \rangle_\diamond$. ■

Mivel fontosabb szerepet fog játszani q számlálójának és nevezőjének különbsége, mint a számláló, így $\frac{k+l}{l}$ alakban fogjuk felírni.

4.2. Állítás. *Ha $1 < q = \frac{k+l}{l} < 2$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$, akkor 2 és $\lceil \frac{l}{k} \rceil$ között minden természetes szám bázisszorzó.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $a_n = n + 1$, ha $n < \frac{l}{k}$. Ebből valóban következik az állítás, hiszen $a_1 = 2$ (ez egyben a kezdőlépése az indukciónak), másrészt ha $n = \lceil \frac{l}{k} \rceil - 1$, akkor $a_n = \lceil \frac{l}{k} \rceil$.

Az indukciós lépéshez azt kell megmutatnunk, hogy ha $a_{n-1} = n$ és $n < \frac{l}{k}$, akkor $a_n = n + 1$. Ehhez azt az általánosabb állítást mutatjuk meg, hogy az indukciós feltevésből kiindulva $a_n = n + 1$ pontosan akkor teljesül, ha $n < \frac{l}{k}$. Az előbbi feltételből fogunk kiindulni, majd ekvivalens átalakításokkal belátjuk az utóbbit. Az $a_n = n + 1$ összefüggés a bázisszorzók definíciója szerint pontosan akkor áll fenn, ha $\lceil qa_{n-1} \rceil = n + 1$, ami az indukciós feltevés miatt ekvivalens azzal, hogy $\lceil qn \rceil = n + 1$, vagyis $n < nq \leq n + 1$. Mivel q -ról mindvégig feltételezzük, hogy nagyobb 1-nél, ezért a bal oldali egyenlőtlenség mindig teljesül, a lényeges a jobb oldali. Kiírva q -t azt kapjuk, hogy $n \frac{k+l}{l} \leq n + 1$, vagyis $n(1 + \frac{k}{l}) \leq n + 1$. Itt kivonhatunk mindkét oldalból n -et, ezzel kapjuk, hogy $\frac{nk}{l} \leq 1$. Ennek átrendezése arra vezet, hogy n kisebb, mint $\frac{l}{k}$. ■

4.3. Következmény. *Ha $q = \frac{k+l}{l}$ valamilyen $k, l \in \mathbb{N}$ -re és l olyan összetett szám, amelynek legkisebb prímtényezője nagyobb, mint k , akkor a módosított szorzással generált halmazban van egész szám.*

Bizonyítás. Valóban, ha l legkisebb prímtényezője nagyobb, mint k , akkor a legnagyobb prímtényezője kisebb, mint $\frac{l}{k}$, így a 4.2. Állítás szerint l minden prímtényezője bázisszorzó, azokkal szorozva q -t pedig a 4.1. Állítás szerint egész számot kapunk a $\langle q \rangle_\diamond$ generátumban. ■

A $k = 1$ speciális esetre a 4.2. Állítás azt jelenti, hogy 2 és l között minden természetes szám bázisszorzó, tehát esetükben nincs szükség a prímtényezőkre vonatkozó feltételre:

4.4. Következmény. Ha $q = \frac{l+1}{l}$ valamilyen $l \in \mathbb{N}$ -re, akkor $\langle q \rangle_\circ$ -ban van egész szám.

4.5. Lemma. Legyen $q = \frac{m}{p}$, ahol p prímszám és $p \nmid m$. Ekkor bármely c természetes számra $\lceil qc \rceil$ oszthatósága p -vel kizárólag cm -nek p^2 -tel vett maradékától függ.

Bizonyítás. Kibontva q felírását, $\lceil qc \rceil = \lceil \frac{cm}{p} \rceil$, ebből $\lceil qc \rceil$ oszthatósága p -vel, vagyis $p \mid \lceil \frac{cm}{p} \rceil$ az oszthatóság definíciója alapján ekvivalens azzal, hogy valamilyen s természetes számra $\lceil \frac{cm}{p} \rceil = ps$, azaz $ps - 1 < \frac{cm}{p} \leq ps$, vagyis $p^2s - p < cm \leq p^2s$. Ez akkor teljesül, ha $cm \equiv q \pmod{p^2}$ valamilyen $r \in \{-p+1, -p+2, \dots, -1, 0\}$ egész számra. ■

4.6. Állítás. Legyen $q = \frac{p+k}{p}$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$, p prímszám, $p > k$ és tegyük fel, hogy a legkisebb primitív gyök modulo p^2 legfeljebb $\frac{p}{k}$. Ekkor a módosított szorzással q -ból generált halmazban van egész szám.

Bizonyítás. A célunk olyan c természetes számot találni, amelyre egyrészt $qc \in \langle q \rangle_\circ$, másrészt $\lceil qc \rceil$ osztható p -vel, így $q \cdot \lceil qc \rceil = q \circ (qc) \in \langle q \rangle_\circ$ egész szám. Mivel $k < p$, ezért $p+k$ nem osztható p -vel, így az előző lemma alapján $\lceil qc \rceil$ oszthatósága p -vel kizárólag $c(p+k)$ -nak p^2 -tel vett maradékától függ.

Úgy fogunk megfelelő c -t találni, hogy előbb keressünk modulo p^2 primitív gyököt, amely a bázisszorzók között van, így hatványaival tudjuk szorozni q -t úgy, hogy benne maradunk a $\langle q \rangle_\circ$ részalgebrában (lásd a 4.1. Állítást). Feltevéseink és a 4.2. Állítás miatt van ilyen r primitív gyök, ennek hatványozásával redukált maradékrendszert kaphatunk modulo p^2 . Ha $p > k$, akkor p és $p+k$ relatív prímek, így a primitív gyök hatványainak $(p+k)$ -val vett szorzataiból is választhatunk redukált maradékrendszert. Feltehetjük tehát, hogy valamilyen t egész kitevőre $r^t(p+k) \equiv -1 \pmod{p^2}$. Ekkor r^t alkalmas választás c szerepére, hiszen a 4.5. Lemma szerint $p \mid \lceil qc \rceil$, továbbá ha r bázisszorzó, akkor a 4.1. Állítás szerint $qc = qr^t \in \langle q \rangle_\circ$. ■

Használni fogjuk a modulo p^2 legkisebb primitív gyökre az alábbi becslést.

4.7. Tétel ([Che22]). Minden p prímszámra a modulo p^2 legkisebb primitív gyök kisebb, mint $p^{0,74}$.

4.8. Következmény. Ha $q = \frac{p+k}{p}$, ahol p prímszám és k pozitív egész, valamint $p < {}^{0,74}\sqrt[p]{k}$, akkor $\langle q \rangle_\circ$ -ban van egész szám.

Bizonyítás. A feltételünk szerint $p^{0,74} < \frac{p}{k}$, ekkor pedig a 4.7. Tétel alapján van olyan primitív gyök modulo p^2 , amelynek segítségével a 4.6. Állítás szerint tudunk egész számot generálni. ■

Ahhoz, hogy olyan $\frac{k+l}{l}$ alakú számokról is ki tudjunk mondani egy hasonló állítást, amelyekre l összetett, szükség van a következőre.

4.9. Állítás. Legyen $q = \frac{k+l}{l}$, ahol $l > k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor ha $l \geq k^2$, akkor $\frac{k+l}{p} \in \langle q \rangle_\circ$, ahol p az l legnagyobb prímosztója.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy legfeljebb egy olyan prímosztója lehet (az azonos prímosztókat külön számolva) l -nek, amely nem bázisszorzó. Ugyanis ha több volna, az a 4.2. Állítást használva azt jelentené, hogy van legalább két $\frac{l}{k}$ -nál nagyobb prímosztója l -nek, ekkor azonban $\frac{l^2}{k^2} < l$, vagyis $l < k^2$ adódna, ellentmondva a feltevésünknek. Tehát legfeljebb egy kivétellel a nevező minden prímosztójával be tudjuk szorozni q -t úgy, hogy az nem vezet ki a generátumból (mivel bázisszorzókkal szorzunk, lásd a 4.1. Állítást), így az eredmény éppen az állításban szereplő alakot fogja ölteni. ■

4.10. Következmény. Legyen $q = \frac{k+l}{l}$, és legyen p a legnagyobb prímtényezője l -nek. Tegyük fel, hogy $l > k^2$ és a modulo p^2 legkisebb primitív gyök legfeljebb $\frac{l}{k}$. Ekkor $\langle q \rangle_\circ$ -ban van egész szám.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján $q' := \frac{k+l}{p} \in \langle q \rangle_\circ$. A feltételünk és a 4.2. Állítás szerint van a bázisszorzók között egy r primitív gyök modulo p^2 , amelynek valamilyen c hatványára a 4.5. Lemmát használva $\left\lceil \frac{k+l}{p} c \right\rceil$ osztható p -vel, hiszen $k+l$ és p relatív prímek. Így használhatjuk a 4.6. Állítás bizonyításának gondolatmenetét. Mivel $q'c$ úgy állt elő, hogy q -t bázisszorzókkal, pontosabban előbb p -n kívül a többi prímosztójával, majd (több lépésben) r -rel szoroztuk, ezért $q'c \in \langle q \rangle_\circ$. Tekintve, hogy $q', q'c \in \langle q \rangle_\circ$, a generátumnak eleme $q' \circ (q'c) = q' \cdot [q'c] = \frac{k+l}{p} \cdot [q'c]$, amely egy egész szám, mert $p \mid [q'c]$. ■

4.11. Tétel. Ha $q = \frac{k+l}{l}$, ahol k és l egész számok, továbbá $l \geq {}^{0,26}\sqrt{k}$, akkor $\langle q \rangle_\circ$ -ban van egész szám.

Bizonyítás. Legyen p az l legnagyobb prímosztója. A 4.7. Tétel szerint a modulo p^2 legkisebb r primitív gyökre $r \leq p^{0,74} \leq l^{0,74}$, továbbá $l^{0,74} \leq \frac{l}{k}$ pontosan akkor, ha $k \leq l^{0,26}$, ami ekvivalens azzal, hogy ${}^{0,26}\sqrt{k} \leq l$. Felhasználva, hogy $l \geq {}^{0,26}\sqrt{k} > k^2$, a 4.10. Következmény alapján következik, hogy $\langle q \rangle_\circ$ -ban van egész szám. ■

A tételben szereplő becslés alapján például olyan $\frac{k+l}{l}$ alakú számokra, ahol k egyenlő 2-vel, 3-mal, 4-gyel, elég rendre $l = 14$ -ig, 68-ig és 206-ig megvizsgálni, hogy tudunk-e egész számot generálni. Program segítségével megnéztük a kis eseteket $k \leq 34$ -re, és minden esetben találtunk l -lel osztható bázisszorzót. A számítógépes esetvizsgálat bizonyította a következőt:

4.12. Tétel. Ha $q = \frac{k+l}{l}$, ahol $l \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, \dots, 34\}$, akkor $\langle q \rangle_\circ$ -ban van egész szám.

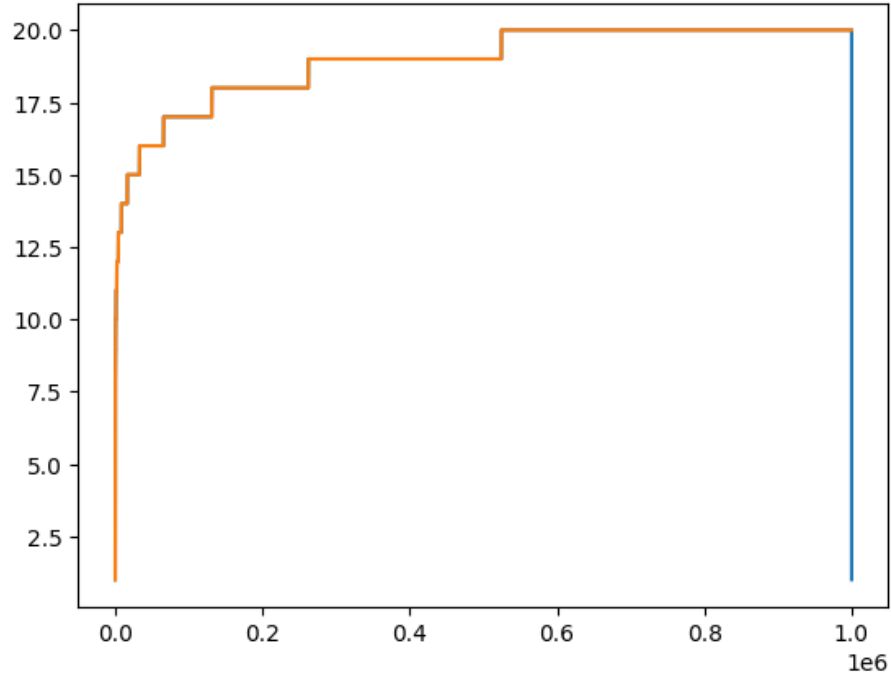
A függelékben található táblázat azt mutatja meg, hogy melyik k esetén a programnak milyen l -ig kellett vizsgálnia, illetve mennyi időt vett igénybe a számolás.

5. Függelék

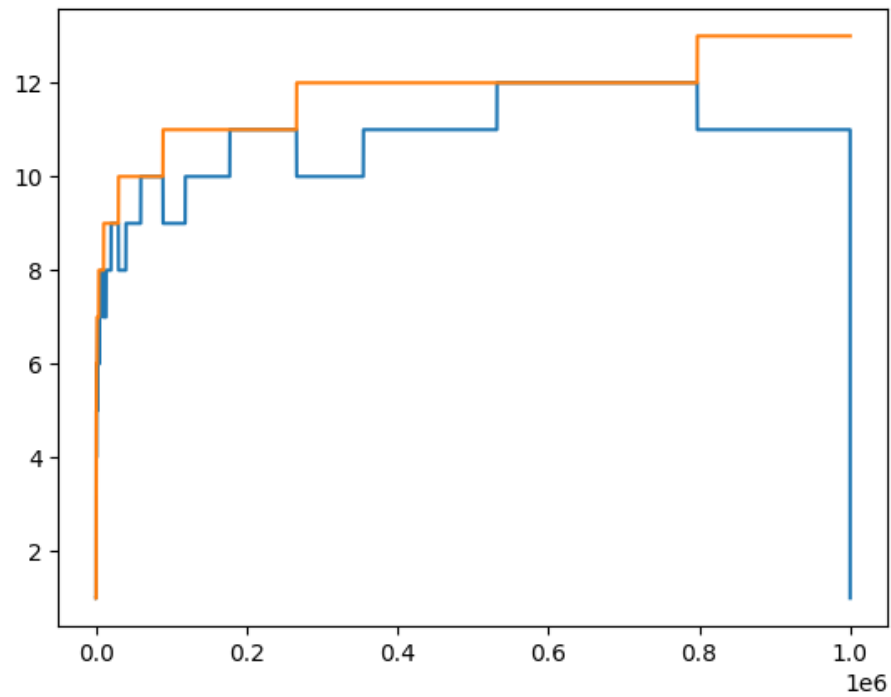
A következő oldalon található táblázat megmutatja, hogy a 4.12. Tétel bizonyításában használt program futtatása milyen k esetén melyik l értékig történt ($\max(l) = \sqrt[0.26]{k}$), és mennyi ideig tartott.

k	$\max(l)$	perc	másodperc	ezredmásodperc
1	2	0	0	1.62
2	15	0	0	2.45
3	69	0	0	6.27
4	207	0	0	0.404
5	488	0	0	3
6	984	0	0	13
7	1780	0	0	41
8	2975	0	0	120
9	4680	0	0	422
10	7018	0	0	888
11	10125	0	1	877
12	14149	0	3	641
13	19249	0	6	971
14	25597	0	12	810
15	33376	0	23	1
16	42780	0	39	998
17	54013	1	31	621
18	67294	2	59	235
19	82849	5	10	521
20	100917	8	35	716
21	121748	13	31	656
22	145601	20	48	771
23	172749	29	42	172
24	203473	43	34	735
25	238064	55	55	390

1. ábra. Az ábrán narancs szín mutatja $l = 2$ esetén a 2.10. Tétel bizonyításában használt $j = \lceil \log_l(2x) \rceil - 1$ értéket, a kék szín pedig azt a j számot, amelyre a (3) becslés a lehető legjobb



2. ábra. Az ábrán narancs szín mutatja $l = 3$ esetén a 2.10. Tétel bizonyításában használt $j = \lceil \log_l(2x) \rceil - 1$ értéket, a kék szín pedig azt a j értéket, amelyre a (3) becslés a lehető legjobb



Hivatkozások

- [Che22] Bo Chen. “Explicit upper bound on the least primitive root modulo p^2 ”. *Int. J. Number Theory* 18.2 (2022), 389–395. old. ISSN: 1793-0421. DOI: 10.1142/S1793042122500233. URL: <https://doi.org/10.1142/S1793042122500233>.
- [LS04] J. C. Lagarias és N. J. A. Sloane. “Approximate squaring”. *Experiment. Math.* 13.1 (2004), 113–128. old. ISSN: 1058-6458. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.em/1086894093>.
- [Mah57] K. Mahler. “On the fractional parts of the powers of a rational number. II”. *Mathematika* 4 (1957), 122–124. old. ISSN: 0025-5793. DOI: 10.1112/S0025579300001170. URL: <https://doi.org/10.1112/S0025579300001170>.
- [Mah68] K. Mahler. “An unsolved problem on the powers of $3/2$ ”. *J. Austral. Math. Soc.* 8 (1968), 313–321. old.