



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
Gépészmérnöki Kar
Műszaki Mechanika Tanszék

Térbeli gördülési problémák vizsgálata

Készítette:

Antali Máté

gépészeti modellezés mesterszakos hallgató

Témavezető:

Dr. Stépán Gábor

egyetemi tanár

Tudományos Diákköri Konferencia
Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Két síkgörbe gördülése	6
1.1. Merev test mozgásának leírása síkban	6
1.2. Síkgörbék közöspont-kényszere	10
1.3. Síkgörbék érintőkényszere	12
1.4. Síkgörbék gördülő kényszere	13
2. Két felület gördülése	16
2.1. Merev test helyzete a térben	16
2.2. A térbeli forgatások leírása	17
2.2.1. Leírás forgató mátrixokkal	17
2.2.2. Leírás forgástengellyel és forgatási szöggel	17
2.2.3. Leírás Euler-szögekkel	18
2.2.4. Leírás kvaterniókkal	20
2.3. Merev test mozgása a térben	22
2.4. Felületek közöspont-kényszere	25
2.5. Felületek érintő kényszere	26
2.6. Felületek gördülő kényszere	28
3. Egyéb térbeli gördülések	30
3.1. Felület és térgörbe gördülése	30
3.2. Elfajuló felületek gördülése	32
3.3. Felület gördülése két álló felületen	33
4. Forgóasztalon gördülő golyó mozgása	36
4.1. A modell felépítése	36
4.2. A rendszer kinematikai leírása	37
4.2.1. A forgóasztal mozgása	37
4.2.2. A golyó szabad mozgása	38
4.2.3. A kényszerek figyelembe vétele	38
4.3. A mozgásegyenletek felírása	40
4.3.1. Newton második axiómája	41
4.3.2. Elsőfajú Lagrange-egyenlet	43
4.3.3. Routh-Voss egyenlet	44
4.3.4. Appell-egyenlet	47
4.3.5. Kozlov-egyenlet	49
4.4. Az egyenlet megoldása	51
4.5. Nemideális gördülés modellezése	53
4.5.1. Gördülési ellenállás	54
4.5.2. Felületi forgási ellenállás	55

4.5.3.	Közegellenállás	55
4.5.4.	A csillapított mozgásegyenletek	56
4.6.	Numerikus szimuláció	56
4.6.1.	A golyó mozgása	57
4.6.2.	A relatív mozgás	57
4.6.3.	Az Euler-szögek változása	58
4.6.4.	Mozgás csillapított esetben	61
Összegzés		64
Hivatkozások		65

Bevezetés

A gépészeti szerkezetek területén sokszor megjelenő probléma a testek egymáson való gördülése. Gondolhatunk akár a különféle kerekre, de például a csapágysíkok gördülő elemei és számos mozgástovábbító elem is ide tartozik. Ha gördülésre gondolunk, valószínűleg síkbeli mozgás jut eszünkbe. Bár a térbeli gördülés valóban ritkábban kerül elő a gyakorlatban, leírása nagyságrendekkel nehezebb a síkbeli esetnél.

A gördülés fogalma a hétköznapi tapasztalatainkból származik, olyasféle mozgásokra használjuk, amikor két test felülete folyamatos érintkezésben van, és az érintkező részek csúszás helyett egymáshoz tapadnak. A mechanikában is hasonló értelemben használjuk a fogalmat, a gördülések leírásához számtalan matematikai modell használatos. A következőkben a talán legegyszerűbbel foglalkozunk, melyet általában egy pontos érintkezés modellnek neveznek.

A modell egyik feltevése, hogy a két gördülő test merev, vagyis semmilyen alakváltozás nem jöhet létre, ezen feltételezést az érintkezési tartományban is fenntartjuk. A másik feltevés, hogy a testek a gördülés közben érintik egymást, és az érintkezési pont vagy pontok relatív sebessége nulla, vagyis nem jön létre megcsúszás. Azért nevezhetjük egy pontosnak, mert bár például egy henger egy kúpon érintkezési egyenes mentén gördül, általános geometriájú testek esetén egyetlen pontban jön létre érintkezés.

A merev testek dinamikai leírásánál gyakran kevés szerepe jut a geometriának, a tömeg- és erőviszonyok számítása közben a geometriát sokszor nagyban leegyszerűsítjük. A gördülés vizsgálatakor viszont a testek alakja alapvetően meghatározza lehetséges mozgásukat. Olyannyira, hogy a gördülés kinematikai leírásakor a testeket érdemes határaikat alkotó görbéknek vagy felületeknek tekinteni.

Az első három fejezetekben a gördülés kinematikájával fogunk foglalkozni, megvizsgáljuk a görbével vagy felülettel modellezett testek gördülésének geometriai és topológiai viszonyait. Igyekezünk olyan tárgyalásmódot követni, mely minél általánosabban képes megragadni a gördülések közös tulajdonságait is. Bár a levezetések jelentős része használható gyakorlati számításokhoz is, vizsgálódásunk lényege elsősorban arra irányul, hogy biztos alapokra helyezve megismerjük a térbeli gördülés jelenségének szerkezetét.

A negyedik fejezetben a korábbi fejezetek módszereit alkalmazzuk egy példán, melyet igyekeztünk annyira egyszerűnek választani, hogy minél tisztábban kiemelje a gördülés sajátosságait. A példát a kinematika mellett kinetikai szempontból is vizsgáljuk, és megfigyeljük, hogy a gördülő mozgás milyen módon befolyásolja a kinetikai módszerek alkalmazhatóságát. Eredményeinket numerikus szimulációval támasztjuk alá.

1. Két síkgörbe gördülése

Célunk végső soron a térbeli gördülések vizsgálata, előbb azonban érdemes foglalkoznunk a síkbeli gördüléssel, mert a térbeli gördülés leírását így egy egyszerűbb jelenségre alapozva építhetjük fel. A görbék és felületek differenciálgeometriájához a [5] és [4] műveket használtuk.

A síkbeli gördülés végső soron nem idegen a kiterjedt merev testektől. Ha a testek egymáson legördülő felületei általános egyenes hengerfelületek, akkor párhuzamos elhelyezkedés esetén az alkotók mentén eltolva ugyanaz a mozgás figyelhető meg. E gyakran előforduló esetben érdemes az alkotókra merőleges metszetet vizsgálni, így síkgörbék gördülésére vezethetjük vissza a problémát. Ehhez a következő definíciót használjuk.

1. Definíció. *Síkgörbe (síkbeli elemi görbeív) alatt értjük a $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2; p \rightarrow g(p); \mathcal{C}^\infty$ -osztályú (analitikus) függvényt. Az összes síkgörbe halmazát $\mathcal{G}_2$ -vel jelöljük.*

A görbét megfeleltetjük a merev test határvonalának (metszetben), és mivel nincs deformáció, másra nincs is szükségünk. Bár egyes modellekben szükség lehet ennél bővebb definícióra is, megengedve a töréseket, fraktálszerű elemeket, a valóságban előforduló testek határvonala általában teljesíti a definíció feltételeit.

1.1. Merev test mozgásának leírása síkban

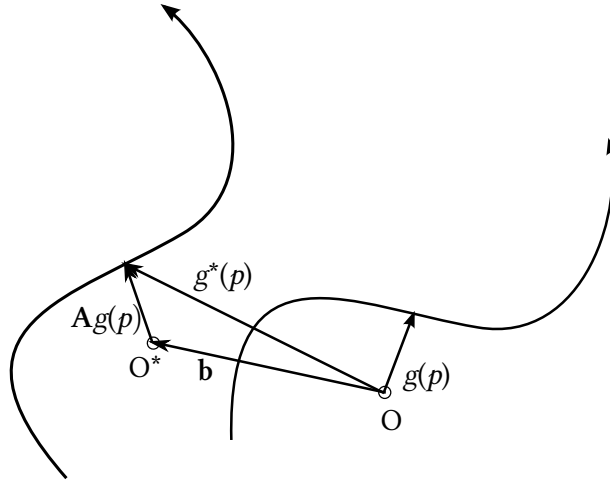
Ebben az alponthan síkgörbék mozgásáról fogunk beszélni, de természetesen bármely síkbeli alakzatra ugyanúgy alkalmazható a leírás.

Keressük azokat a $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transzformációkat, melyek a görbét úgy képezik le, hogy az megfeleljen egy merev test elmozdulásának. A merevtest-szerű mozgást általában úgy definiáljuk, hogy a mozgás során bármely két pont távolsága megegyezik. Folytonos mozgásnál ez elegendő is, azonban transzformáció esetén meg kell még követelnünk az iránytartást, vagyis kizárni a tükrözéseket. A távolság- és orientáció-tartó leképezések két elemi típusba sorolhatók, az eltolásnak az affin leképezések, az elforgatásnak az ortonormált, egységnyi determinánsú lineáris transzformációk felelnek meg. Ezen kívül képezhetjük ezek kompozícióját is.

Síkban az eltolást egy síkvektorral azonosíthatjuk, a transzformációt $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{b}$ alakban írhatjuk fel. Az eltolások két dimenziós tere így $\mathbb{R}^2$, ezért legcélszerűbb a kanonikus bázisban egy (x, y) számpárral paramétereznünk. Így:

$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Az elforgatásokat síkban $\mathcal{S}^1$ -szerkezetük miatt egy egységkör pontjaival szemléltethetjük. A transzformációt $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{r}$ alakban írhatjuk fel, ahol $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ és $\det \mathbf{A} = 1$. A legegyszerűbb paraméterezés egy φ szögkoordináta segítségével adható



1. ábra. A síkgörbe merevtest-szerű transzformációja

meg. Így a $[0; 2\pi)$ intervallumot használva standard bázisban egyszerűen felírható a lineáris transzformáció mátrixa:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Belátható, hogy a fenti tulajdonságokkal mind az eltolások, mind az elforgatások csoportot alkotnak a kompozícióra nézve. Egymás után alkalmazva egy elforgatást és egy eltolást, megkapjuk a síkbeli merevtest-szerű transzformációk halmazát:

$$\mathcal{M}_2 := \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{b}; \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T; \det \mathbf{A} = 1\}$$

A kapott leképezésekről szintén belátható, hogy csoportot alkotnak a kompozícióra nézve. Létrehozásának módja miatt kijelenthetjük, hogy $\mathcal{M}_2 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$. Ezt a struktúrát a topológiában általánosan *speciális euklideszi csoportnak* nevezik és $\mathcal{SE}(2)$ szimbólummal jelölik.

A fenti módszert használva három változóval paraméterezhetjük $\mathcal{M}_2$ -t, vagyis $\forall M \in \mathcal{M}_2$ esetén létezik olyan (x, y, φ) számhármass, hogy

$$[M\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

miközben $x, y \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in [0; 2\pi)$. A megfeleltetés indokolja a továbbiakban a $M(x, y, \varphi)$ jelölés használatát.

Most már adott egy három dimenziós sokaság, melyen egy adott merev test geometriai elhelyezkedését egy pont jelképezi. Térjünk vissza most a görbékre. Mivel a görbe skalár-vektor függvény, alkalmazható rá a fenti transzformáció, így értelmezve annak elmozdulását.

2. Definíció. A $g^* = M \circ g$ görbét a $g \in \mathcal{G}_2$ görbe **helyzetének** nevezzük, ha $M \in \mathcal{M}_2$. Adott g görbe esetén g^* és M azonosítható, M -t a g görbe **elmozdulásának** nevezzük.

Megkaptuk, hogy a síkban mozgó merev test elmozdulása megadható egy elmozdulásvektor két komponensével és az elforgatás szögével. Mindez szörnyen egyértelműnek tűnik, azért célszerű mégis ez a tárgyalásmód, hogy megfigyeljük, mennyire egyszerűen tehető meg a síkbeli gördülés kezelése, míg a térbeli gördülés leírása már a geometriai fázistér felírásakor akadályokba ütközik.

A test elmozdulása tehát egy $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$ három dimenziós térben írható le. Most modellezzük a test mozgását az időben.

3. Definíció. A $g \in \mathcal{G}_2$ görbe **mozgástörvényén** a $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}_2$ függvényt nevezzük, mely legalább $\mathcal{C}^2$ -osztályú.

Vagyis a mozgástörvény minden időpillanatban megadja a görbe elmozdulását, $\gamma(t) \circ g$ pedig a görbe helyzetét, mely tetszőleges p paraméterre megadja az adott pont pozícióját. Mivel $\gamma(t) \in \mathcal{M}_2$, megadható a (x, y, φ) számhármassal, vagyis a mozgástörvényt a $x(t)$, $y(t)$ és $\varphi(t)$ skalárfüggvények meghatározzák:

$$[\gamma(t)\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1)$$

Mozgás közben az $M(x, y, \varphi)$ transzformáció folyamatosan változik. Mivel a mozgástörvény deriválható, sebességként értelmezhetjük a transzformáció megváltozását:

4. Definíció. Adott a $g \in \mathcal{G}_2$ görbe a $\gamma(t)$ mozgástörvényével együtt. A g görbe **sebességállapotának** a $\dot{\gamma}(t) := \frac{d\gamma}{dt}$ mennyiséget nevezzük.

Mivel $\mathcal{M}_2$ három dimenziós sokaság, érintőtere, vagyis a lehetséges sebességállapotok tere a $T_M\mathcal{M}_2 \cong \mathbb{R}^3$ közösítéses három dimenziós tér. A sebességállapot leírásához ezért mindenképpen szükségünk lesz három új valós változóra. Deriváljuk a mozgástörvény (1) alakját az idő szerint:

$$[\dot{\gamma}(t)\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

A bal oldal a vizsgált pont sebessége az adott pillanatban. A változók feletti pont az idő szerinti deriválást jelenti. A definíciók alapján megmutatható, hogy ezen deriváltak léteznek, és (2) szerint a merev test bármely $\mathbf{r}$ pontjának sebességét megadják. Így célszerű a sebességteret a $\dot{x}$, $\dot{y}$ és $\dot{\varphi}$ változókkal leírni. Azonban mivel $\mathcal{S}^1$ nemeuklideszi, az érintőtér nem konstans, hanem függ a forgatásnak megfelelő φ koordinátától is, így a sebességállapot megadásához ezen paraméterezésnél négy valós változó szükséges.

Szükségünk lesz a második deriváltra is:

5. Definíció. Adott a $g \in \mathcal{G}_2$ görbe a $\gamma(t)$ mozgástörvényével együtt. A g görbe **gyorsulásállapotának** a $\ddot{\gamma}(t) := \frac{d^2\gamma}{dt^2}$ mennyiséget nevezzük.

Mivel a $T_M\mathcal{M}_2$ sebességtér euklideszi, érintőtere önmaga, így a gyorsulásállapot leírásához szükséges három új változónak választhatjuk $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ és $\ddot{\varphi}$ mennyiségeket. Valóban, ha deriváljuk (2)-t az idő szerint, kapjuk:

$$\begin{aligned} [\ddot{\gamma}(t)\mathbf{r}] &= \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [\mathbf{r}] - \\ &\quad - \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 & 0 \\ 0 & \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

A gyorsulástér tehát kifejezhető a három változó deriváltjaival, a teljes gyorsulásállapot megadásához azonban szükségünk van φ és $\dot{\varphi}$ mennyiségekre is. Vagyis a forgatás különleges struktúrája a magasabb érintőterekben is jelentkezik. A (2) és (3) képletek valójában a merev testre alkalmazható jól ismert sebesség- és gyorsulás-átszámításos formulák felírásai keresztszorzás helyett mátrixos alakban.

A mechanika gyakori megszorítása, hogy az erők csak az elmozdulás- és sebességtértől függhetnek, ilyenkor magasabb rendű deriváltakra nincs is szükségünk. Ekkor a rendszert az elmozdulást leíró koordináták másodrendű differenciálegyenletei írják le. Newton II. axiómája végső soron egy kényszert jelent a $\mathcal{M}_2$, a $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}_2$ és a $T_{\dot{\gamma}(t)}T_{\gamma(t)}\mathcal{M}_2$ terek között, mely determinálja az aktuális gyorsulásállapotot. Ezért a rendszer állapotterének a $T\mathcal{M}_2 \cong \mathcal{M}_2 \times T_{\gamma(t)}\mathcal{M}_2$ érintőnyalábot használhatjuk.

Mivel mind az elmozdulástér, mind a sebességtér három dimenziós, azt mondhatjuk, hogy a szabadon mozgó síkbeli testnek három szabadságfoka van. A rendszer állapottere az $\mathcal{M}_2$ tér érintőnyalábja, vagyis a hat dimenziós $T\mathcal{M}_2 \cong \mathbb{R}^5 \times \mathcal{S}^1$ tér.

Ha a rendszerben kényszereket vezetünk be, akár időfüggően is leszűkítjük az állapotteret, vagyis megtiltunk bizonyos fajta mozgásokat. A kényszert általánosan egy $F : T\mathcal{M}_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel fogalmazhatjuk meg úgy, hogy előírjuk a mozgás során $F = 0$ értékét. Sok esetben a kényszer a skaláris változókkal és skaláregyenletekkel is megadható. A kényszereket klasszikusan szkleronom-reonom, illetve holonom-anholonom módon csoportosítjuk attól függően, hogy az időt vagy a koordináta-sebességeket tartalmazzák-e vagy sem.

A következőkben a görbék gördülését szeretnénk leírni. A gördülés feltétele azonban több egymásra épülő elemből építhető fel:

1. A két gördülő görbének van közös pontja
2. A két görbe a közös pontban érinti egymást.
3. Az érintési pontban a két görbe sebessége megegyezik.

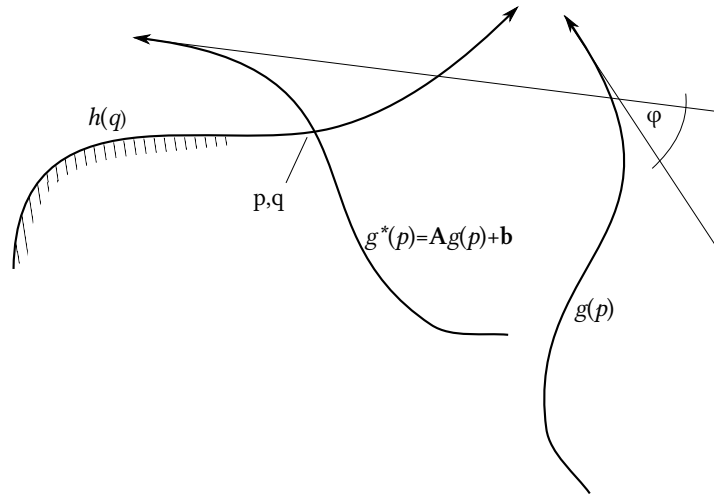
Ezeket fogjuk most sorra venni.

1.2. Síkgörbék közöspont-kényszere

A gördülés szükséges feltétele, hogy a két görbének minden pillanatban legyen közös pontja. Legyen két görbénk, $g, h \in \mathcal{G}_2$, p illetve q paraméterezéssel. Rögzítsük a koordináta-rendszert a h görbéhez, így csak a g görbe mozgását kell leírnunk, melyhez a fenti x , y és φ koordinátákat használjuk.

A közös pont feltétele szkleronom kényszer, hiszen a görbe geometriai helyzetében hoz létre megkötést. Ezért a kényszer nyilvánvalóan megfogalmazható $f(x, y, \varphi) = 0$ alakban. A zárt alakban történő felírás azonban általános görbénél reménytelen feladatnak tűnik. Érdekes ezért a kényszerezett teret új változókkal leírni, és abból visszaszámolni az eredeti változókra.

Legcélszerűbb, ha megadjuk, hogy a g görbe melyik pontja esik egybe a h görbe melyik pontjával. Ezt megtehetjük, ha megadjuk a p és q paramétereket, melyek kijelölik a pontok helyét a görbéken. Attól még, hogy a két pont közös, a g görbe szabadon elfordulhat e körül a pont körül, melyet célszerű a φ koordinátával megadnunk. Így egy (p, q, φ) számhármast kapunk az elmozdulástér megadására.



2. ábra. A síkgörbék közöspont-kényszere

Ez azért érdekes, mert úgy tűnik, hogy a szabadon mozgó és a kényszerezett görbe elmozdulástere is három dimenziós, vagyis a kényszer *nem csökkenti a szabadsági fokok számát*. Felmerül a kérdés, hogy valóban szükség van-e három változóra, nem redundáns-e ez a leírás. Könnyen találhatunk példákat arra, hogy a paraméterezés valóban nem kölcsönösen egyértelmű. Azonban a többszörös lefedettség csak bizonyos pontokban jelentkezik, és megmutathatóan nem olyan módon, hogy egy teljes dimenziótól megszabadulhatnánk. Ez amiatt van, hogy általános mozgás során a két görbének csak megszámlálhatóan sok metszéspontja lehet, míg egy valós vál-

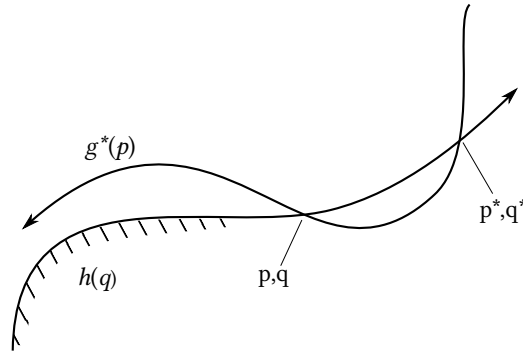
tozó kontinuum számosságot képvisel. A közöspont-kényszer az elmozdulástér nagy részében *lokálisan* nem jelent kényszert, hasonlóan ahhoz, ahogy a biliárdgolyónak is szabad mozgása van az asztal területén belül.

Az összefüggést a (p, p, φ) és (x, y, φ) változók között a következő összefüggés definiálja:

$$[h(q)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [g(p)] + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ebből a görbék ismeretében egyértelműen kifejezhetők az $x(p, q, \varphi)$ és az $y(p, q, \varphi)$ összefüggések. Az is látható azonban, hogy ez fordítva nem biztos, hogy így van, adott (x, y, φ) helyzetet többféle (p, q, φ) hármas is leírhat. Azonban mindenképpen csak megszámlálhatóan sok, hiszen egy kétismeretlenes egyenletrendszernek általában nincs kontinuum számosságú megoldása.

Az elmozdulások tere így három dimenziós $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$ felületnek tekinthető. A felület jellege a görbék paraméterezésétől is függ. Ha a paramétertartomány egy véges intervallum, akkor az elmozdulástér is véges, ha viszont az egyik vagy mindkét görbe zárt, akkor az elmozdulástér tórusz jelleget ölthet. Az olyan állapotokban, ahol a két görbének több metszéspontja is van, a paraméterezés szinguláris hellyel bír.



3. ábra. A görbeparaméterek redundanciája

A sebességtérben eltűnnek ezek a problémák. A kényszerezett és szabad görbe érintőtere homeomorf, a $(\dot{p}, \dot{q}, \dot{\varphi})$ változókkal egyértelműen kifejezhető a sebességállapot adott elmozdulás esetén. Ekkor (4) idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dh}{dq} \dot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dg}{dp} \dot{p} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [g(p)] + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Ez lineáris egyenletrendszer, így a helykoordináták ismeretében mind $\dot{x}(p, q, \varphi)$ és $\dot{y}(p, q, \varphi)$, mind ezek inverzei kifejezhetők. A $\frac{dq}{dp}\dot{p}$ és $\frac{dh}{dq}\dot{q}$ mennyiségek a közös pont görbék menti vándorlási sebességét fejezik ki. Ha p és q ívhosszparaméterek, akkor $\frac{dh}{dq}$ és $\frac{dq}{dp}$ egységvektorok.

1.3. Síkgörbék érintőkényszere

Vizsgáljuk most azt a kényszert, ami előírja, hogy a két görbének egy pontban érintenie kell egymást. Ezt leírhatjuk úgy, hogy először alkalmazzuk az előző pontban felírt közöspont-kényszert, majd előírjuk az érintővektorok egyirányúságát. Ez úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az érintő egységvektoroknak meg kell egyezniük.

Ha nem ívhosszparamétert használunk, az érintővektor nem feltétlenül egységszerű hosszú. Ezért ha érintő egységvektorhoz kívánunk jutni, az érintővektorokat normalizálni kell. Az érintőkényszer akkor áll fent, ha a két érintő egységvektor megegyezik:

$$\left[\frac{dh}{dq} \right] \left| \frac{dh}{dq} \right|^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \left[\frac{dg}{dp} \right] \left| \frac{dg}{dp} \right|^{-1} \quad (6)$$

Az egységvektorokat írjuk fel irányszögek segítségével:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dh}{dq} \right] \left| \frac{dh}{dq} \right|^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_h \\ \sin \alpha_h \end{bmatrix} \\ \left[\frac{dg}{dp} \right] \left| \frac{dg}{dp} \right|^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_g \\ \sin \alpha_g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ha $\alpha_g, \alpha_h \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, akkor ezeket visszaírva kapjuk:

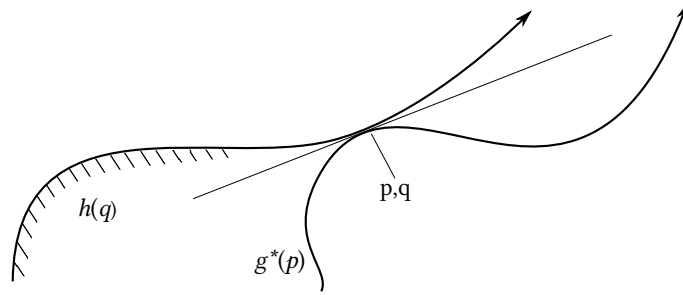
$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\alpha_h - \alpha_g) \\ \sin \varphi &= \sin(\alpha_h - \alpha_g), \end{aligned}$$

vagyis az alábbi eredményt kapjuk, mely a négy speciális pontra is belátható.

$$\varphi = \alpha_h - \alpha_g \quad (7)$$

Így ha ismerjük az érintési pont helyzetét a két görbén, az meghatározza a mozgó g görbe φ orientációját. Így a görbe elmozdulása leírható a (p, q) számpárral, mivel ebből a közöspont-kényszernél leírt (4) formula alapján meghatározható x és y . Azonban az ott említett nehézség továbbra is fennáll, hiába ismert x és y , ebből nem biztos hogy egyértelműen meghatározható p és q . Ráadásul a transzformációhoz ismerni kell φ értékét is, ami szintén nem egyértelműen függ az x és y mennyiségektől.

Ez a gyakorlati számításoknál nehézséget okoz. Az érintés kinematikáját a (p, q) számpárral lehet egyszerűen kezelni, viszont a mechanika törvényei a súlypont vagy más pont (x, y) koordinátáira írhatók fel egyszerűen. Ezért ha a görbék bonyolultak, az átszámítási képletek hiánya nagyban megnehezíti a mozgások kezelését.



4. ábra. Síkgörbék érintő kényszere

A sebességek leírásához szintén alkalmazhatók az előző pont eredményei. Azonban az (5) formulában ki kell küszöbölnünk $\dot{\varphi}$ értékét. Ezt megtehetjük, ha ismertek a görbék adott pontbeli görbületei. Könnyen belátható (7) deriválásával:

$$\dot{\varphi} = \kappa_h \left| \frac{dh}{dq} \right| \dot{q} - \kappa_g \left| \frac{dg}{dp} \right| \dot{p}, \quad (8)$$

ahol κ_h és κ_g a görbék görbületei, melyek a görbék egyenletéből zárt formulával adódnak. Most már $\dot{\varphi}$ ismeretében (5) segítségével meghatározható $\dot{x}(\dot{p}, \dot{q})$ és $\dot{y}(\dot{p}, \dot{q})$. Az érintőtér tehát két dimenziós, a fenti öt sebesség jellegű változó közül az elfajuló eseteket nem számítva bármelyik kettő meghatározza a másik hármat az (5) és (8) összefüggéseken keresztül, feltéve, hogy az elmozdulás ismert.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a közöspont és az érintő kényszer fenti formái együtt egy megszokott viselkedésű szkleronom-holonom kényszert alkotnak, mely az elmozdulástér és a sebességtér dimenzióját is eggyel csökkenti, így a kényszerezett rendszer két szabadságfokúnak tekinthető.

1.4. Síkgörbék gördülő kényszere

Most már közel járunk a gördülés megfogalmazásához, csupán azt kell még ki-kötnünk az előző ponthoz képest, hogy a görbék érintési pontjában a relatív sebesség zérus legyen. Mivel most az egyik görbét nyugvónak tekintjük, a másik görbe sebességének zérusnak kell lennie.

Vagyis (2) alapján:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} [g(p)] + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ekkor (5) utolsó két tagja eltűnik:

$$\begin{bmatrix} \frac{dh}{dq} \dot{q} \\ \frac{dg}{dp} \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dg}{dp} \dot{p} \\ \frac{dh}{dq} \dot{q} \end{bmatrix} \quad (10)$$

(6) miatt:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dg}{dp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dh}{dq} \end{bmatrix} \left| \frac{dh}{dq} \right|^{-1} \left| \frac{dg}{dp} \right|$$

Visszaírva (10)-be kapjuk:

$$\left| \frac{dh}{dq} \right| \dot{q} = \left| \frac{dg}{dp} \right| \dot{p} \quad (11)$$

A két oldalon az a sebesség áll, amellyel az érintési pont vándorol a görbék mentén. A kényszer kimondja, hogy ezen sebességeknek meg kell egyezniük, ami egybevág azon szemléletünkkel, hogy gördülés során a két görbén azonos ívhosszt járunk be. Ha ívhosszparamétert használunk mindkét görbén, akkor az érintővektorok eleve egységvektorok, így $\dot{p} = \dot{q}$ módon egyszerűsödik a kényszer.

A (11) gördülőkényszer nem a változók, hanem azok deriváltjai között teremt kapcsolatot. Azonban a kényszeret integrálhatjuk az idő szerint:

$$\int \left| \frac{dh}{dq} \right| dq = \int \left| \frac{dg}{dp} \right| dp + C \quad (12)$$

Ez már nem tartalmazza a p és q változók deriváltjait, megjelenik viszont a C integrálási konstans, amit még meg kell határoznunk. Ezt csak úgy tehetjük meg, ha egy időpillanatban ismerjük p és q értékeit. Tegyük fel, hogy a paraméterezések nem elfajulóak, és mindkét primitív függvény létezik. Jelöljük ezeket az ívhossz jelentésű primitív függvényeket $H(q)$ -val és $G(p)$ -vel. Adottak továbbá $p_0 = p(t_0)$ és $q_0 = q(t_0)$ értékek. Ekkor C értéke:

$$C = H(q_0) - G(p_0) \quad (13)$$

Ekkor (12) már valóban megkötést jelent az elmozdulást leíró koordináták között, így abból p vagy q ismeretében a másik meghatározható. Ezután az érintőkényszernél adott formulák segítségével számíthatók x , y és φ változók. Ha ívhosszparamétert használunk, (12) egyszerűsödik $q = p + C$ alakra, így $C = q_0 - p_0$ a kezdeti feltételben lévő eltolást jelzi a két paraméter között. Hasonlóan egyszerű eredményre jutunk, mikor az ívhosszparaméterrel lineáris paraméterezést használunk (például egy körvonal szöggel való paraméterezése), más esetekben a (12) kényszer használata bonyolulttá válik.

A szakirodalmi művek megoszlának annak tekintetében, hogy a (12) kényszeret holonom vagy anholonom kényszernek tarthatjuk-e. Láthatjuk, hogy ahhoz, hogy igazi holonom kényszer legyen, szükségünk van a C konstansra, mely a kezdeti feltételből adódik.

Ha a kezdeti feltételt is hozzávesszük a kényszerhez, jogosan tarthatjuk (12)-t holonom kényszernek. Ekkor p vagy q önmagában meghatározza az elmozdulások terét, amely így egy dimenziós lesz.

Ha azonban csupán a (12) feltételt tekintjük, az önmagában nem szűkíti le az elmozdulások, csupán a sebességek terét, így valójában anholonom kényszer. Azonban ez kevésbé látványos, mert a kevés dimenzió miatt a megmaradt szabadsági fok csupán egy konstansban jelentkezik, mely végig állandó a mozgás során. Az így megmaradt "fél" szabadsági fokot hozzávehetjük a fázistérhez, és $\dot{C} = 0$ semmitmondó differenciálegyenlettel írhatjuk le, melynek kezdeti értéket kell adnunk. A térbeli gördülésnél a jelenség sokkal látványosabban ki fog ütközni. Ebben a szemléletben a síkbeli gördülés elmozdulástere két dimenziós, míg sebességtere egy dimenziós.

(11) kényszer alapján (8) egyszerűbb alakba írható:

$$\dot{\varphi} = (\kappa_h - \kappa_g) \left| \frac{dh}{dq} \right| \dot{q} = (\kappa_h - \kappa_g) \left| \frac{dg}{dp} \right| \dot{p} \quad (14)$$

Ezután (9) alapján meghatározható $\dot{x}$ és $\dot{y}$.

Bár a fenti levezetésekben kapott formulák sok esetben gyakorlati számításokhoz is használhatóak, a cél az volt, hogy megfigyeljük a síkgörbék gördülését leíró kényszerfeltétel szerkezetét és hatását az elmozdulások és sebességek terére. A szabad síkgörbe $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$ elmozdulásterét a kezdeti feltétellel megadott gördülőkényszer egyszerűen a $\mathbb{R}$ térre szűkíti, le mely sok esetben analitikusan is, de egyszerű numerikus módszerekkel szinte mindig kényelmesen kezelhető.

Ne feledjük el azonban, hogy amikor gördülőkényszerrel beszélünk, egyszerre követeljük meg, hogy

1. a két görbének legyen közös pontja (központ-kényszer)
2. a közös pontban az érintő egységvektorok megegyezzenek (érintőkényszer)
3. a közös pontban a relatív sebesség nulla legyen (gördülőkényszer)
4. adott legyen a görbe egy indulási pozíciója (kezdeti feltétel).

Vagyis a két szabadságfok elvesztését jelentő kényszer bonyolultabb szerkezetű, mint elsőre gondolnánk.

Most ugrunk egy dimenziót és áttérünk a felületek egymáson való gördülésére. Ez két fronton is elbonyolítja a kérdést. Egyrészt már a szabad merev test elmozdulási tere is bonyolult struktúrával bír, másrészt a kényszerek megfogalmazásakor is nehézségek merülnek fel, ezért lesz a térbeli gördülés a síkbelinél nagyságrendekkel nehezebben kezelhető probléma.

2. Két felület görbülete

Rátérünk vizsgálódásunk valódi tárgyára, a felületek térbeli görbületére. Térbeli alatt most azt értjük, hogy nem lehet visszavezetni az előző pontban tárgyalt síkmozgásra. Gondolatmenetünket a görbék görbületéhez hasonló módon építjük fel.

Először definiálnunk kell, milyen felületekkel kívánunk foglalkozni:

6. Definíció. *Felület* (elemi felület) alatt értjük az $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3; f \rightarrow f(u, v); C^\infty$ -osztályú (analitikus) függvényt. Az összes felület halmazát $\mathcal{F}_3$ -mal jelöljük.

2.1. Merev test helyzete a térben

Keressük azokat a $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transzformációkat, melyek a merevtest-szerű mozgást megvalósítják. Megmutatható, hogy a síkmozgáshoz teljesen hasonló módon forgatások és eltolások, valamint ezek kompozíciói jelennek meg.

Az eltolást egy térbeli vektorral adjuk meg, és így a transzformáció $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{b}$ alakot ölt. Az elforgatások pedig $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{r}$ alakban írhatók fel, ahol $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ és $\det \mathbf{A} = 1$. A vektorok és tenzorok természetesen most a három dimenziós térben értendők.

A merevtest-szerű transzformációk halmaza térben tehát látszólag nagyon hasonlít a síkbeli esetre:

$$\mathcal{M}_3 := \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{b}; \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T; \det \mathbf{A} = 1\}$$

Azonban a különbség rögtön kiütözik, ha megvizsgáljuk ezen tér szerkezetét és parametrizálni akarjuk azt. Az eltolások tere természetesen egyszerűen $\mathbb{R}^3$, így kanonikus bázisban egy (x, y, z) számhármassal megadhatjuk:

$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A forgatásokkal viszont nehéz a helyzet. Láttuk, hogy a fenti tulajdonságú, ortogonális, egységnyi determinánsú tenzorok síkban egy egy dimenziós $\mathcal{S}^1$ struktúrát alkotnak. Általánosan megmutatható, hogy egy n dimenziós euklideszi térben a forgatások tere $\frac{1}{2}n(n-1)$ dimenziós, melyek struktúraosztályát $\mathcal{SO}(n)$ szimbólummal jelöljük. A képlet kiadja a közismert tényt, hogy három dimenziós tér esetén a forgatások tere is három dimenziós, vagyis az $\mathcal{SO}(3)$ csoport.

A síkbeli forgatásokat egyszerűen ábrázolhattuk egy kör pontjaival. A térbeli forgatásokat három dimenziós alakzattal tudnánk szemléltetni. Könnyen megmutatható, hogy például egy gömb pontjai alkalmasak erre, egy kis topológiai kiigazítással. Ha a gömb felszínének "átellenes", vagyis közös átmérőre eső pontjait azonosítjuk, olyan struktúrát kapunk, mely már azonosítható az $\mathcal{SO}(3)$ forgató csoporttal. Ezen

hipertér zárt alakzat, hiszen a szemközti pontok azonosításával megszüntettük a peremét. Ez egybevág azzal a szemléletünkkel, hogy egy merev test térbeli orientációinak sincsen szélső helyzete.

Bármilyen egyszerűnek tűnik is a térbeli forgatás, nagy nehézségekbe ütközünk, ha megpróbáljuk skaláris paraméterekkel egyértelműen leírni a térbeli orientációt. Nagyon elterjedt hiba az a feltételezés, hogy egy vektorral, másképp három egymástól független, három tengely körüli forgatással megoldható a probléma. Ez a szemléleti hiba nyilván a három dimenziós tér azon sajátosságán alapul, hogy a forgató csoport is éppen három dimenziós, ezért kézzel álló lenne vektornak tekinteni a térbeli orientációt. Ez azonban nem lehetséges, a forgató csoport erősen nem-euklideszi volta miatt a vektoros elírás legfeljebb nagyon kis szögkitérések esetén alkalmazható.

Tekintsük át röviden, milyen lehetőségek vannak az $\mathcal{SO}(3)$ csoport paraméterezésére.

2.2. A térbeli forgatások leírása

A műszaki mechanikában nagy szerepet kap a forgó merev testek viselkedésének leírása. Azonban az esetek többségében ezek a forgások síkbeliek, vagy síkbeli forgásokra visszavezethetők. Meglepő azonban, hogy mind a fizikusok, mind a gépészmérnökök csak nagyon kis része találkozik tanulmányai közben a térbeli forgatásokkal. Ebben a szakaszban a forgatások néhány lehetséges matematikai leírását mutatjuk be.

Már említettük, hogy a három dimenziós $\mathcal{SO}(3)$ objektumot szeretnénk leírni, és az is hamar kiderül, hogy erre a célra a három dimenziós vektorok általában alkalmatlanok.

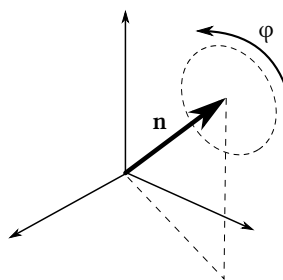
2.2.1. Leírás forgató mátrixokkal

Az első ötlet lehet, hogy mivel a forgató csoport elemei ortogonális, egységnyi determinánsú tenzornak tekinthetők, ezen tenzorok kanonikus bázisban vett **mátrixaival** dolgozzunk. Egy 3×3 -as mátrixnak eredendően kilenc eleme van. Az ortogonalitás feltétele $[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^T$, ami kilenc skaláregyenletet jelent. Az egyenletek természetesen nem függetlenek, mivel három skaláris ismeretlennek kell maradnia. A mátrixelemek egymásból való kifejezése azonban nehézségekbe ütközik. Egyik elem sem választható meg tetszőlegesen, például mindegyik elemnek egynél kisebb abszolút értékűnek kell lennie. Ezért a forgató mátrix elemeivel való közvetlen paraméterezés nem célravezető.

2.2.2. Leírás forgástengellyel és forgatási szöggel

Egy másik út, ha a forgatás geometriai jelentéséhez térünk vissza. Belátható, hogy a merev test bármely térbeli orientációjához találunk **egy irányvektort és**

egy szöget úgy, hogy az a. Vagyis például megadunk egy egységvektort és egy valós számot, így a forgatás egy $(\mathbf{n}, \varphi)$ párként adható meg, ahol $|\mathbf{n}| = 1$ és $\varphi \in [-2\pi, \pi)$. Az egységvektorok tere a két dimenziós $\mathcal{S}^2$ tér, így az egységvektorok megadása visszavezethető a gömbhéj paraméterezésére. Azonban nem vettük figyelembe, hogy a $\mathbf{n}$ tengely körüli φ szöggel való forgatás ugyanazt az eredményt adja, mint a $-\mathbf{n}$ tengely körüli $2\pi - \varphi$ szöggel való forgatás, melyet figyelembe kell venni a paraméterezésnél. Ha $\mathcal{S}^2$ -t térbeli polárkoordinátákkal adjuk meg, a később tárgyalt Euler-szögek egy speciális esetét kapjuk.



5. ábra. Térbeli forgatás irányvektorral és szöggel

Ezen módszerek kapcsolatánál érdemes megjegyezni, hogy ha a forgatás szöge φ , akkor a fenti $[\mathbf{A}]$ mátrix sajátértékei 1 és $\cos \varphi \pm i \sin \varphi$, így a forgatás szögét ismerve felírható a mátrix Jordan-féle kanonikus alakja:

$$[\mathbf{A}]_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (15)$$

2.2.3. Leírás Euler-szögekkel

Egy nagyon elterjedt megoldás az **Euler-szögek** használata, melyet Euler eredetileg a pörgettyű mozgásának vizsgálatára dolgozott ki. Az alapötlet az, hogy három speciálisabb forgatással próbáljuk leírni a forgató tenzort, azonban nem ezen forgatások lineáris kombinációjával, hanem egymásba ágyazásával:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_1(\psi) \circ \mathbf{T}_2(\vartheta) \circ \mathbf{T}_3(\phi) \quad (16)$$

A $\mathbf{T}_i$ tenzorokat egy-egy változóval akarjuk leírni. Ezt megtehetjük úgy, ha az előző módszerhez hasonlóan választunk egy tengelyt, és csak a forgatás szögét hagyjuk szabad paraméternek. Vagyis a három tenzor három, bizonyos értelemben lerögzített tengely körüli forgatást valósít meg egymás után. Azt akarjuk, hogy a teljes forgató csoportot lefedje az a konstrukció, ehhez biztosítanunk kell, hogy $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$, valamint $\mathbf{T}_2$ és $\mathbf{T}_3$ tengelyei ne egyezzenek meg. Ellenkező esetben ugyanis a tenzorok összevonhatóak lennének, és nem kapnánk három független paramétert.

A tengelyeket sokféle módon megadhatjuk. Mivel azonban megállapítottuk, hogy kanonikus alakban a forgatások mátrixa (15) alakú, érdemes a tengelyeket úgy felvenni, hogy valamelyik bázisvektor irányába mutassanak. Ekkor a kanonikus bázisban felírt x, y illetve z tengely körüli α szöggel való forgatás mátrixai a következőképp néznek ki:

$$\begin{aligned} T_x(\alpha) &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ T_y(\alpha) &:= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ T_z(\alpha) &:= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Két konvenció elterjedt, a klasszikus Euler-szögek esetén a z, x, z , a három tengelyű vagy Tait-Bryan szögek esetén pedig a z, x, y tengelyeket használjuk. Klasszikus Euler-szögek esetén a forgató tenzor mátrixa:

$$[\mathbf{A}]_{Eu} = T^{Eu}(\psi, \vartheta, \varphi) := T_z(\psi)T_x(\vartheta)T_z(\varphi) = \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta & -\cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta - \sin \varphi \cos \psi & \sin \psi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}]_{TB} = T^{TB}(\psi, \vartheta, \varphi) := T_z(\psi)T_x(\vartheta)T_y(\varphi) = \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta + \cos \varphi \sin \psi & \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \vartheta & \sin \vartheta & \cos \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Lényegesen bonyolultabb alakú mátrixok keletkeznek, mint a két dimenziós esetben. A két felírási mód hasonló szerkezetű, lényegében csak a változók és a sorok-oszlopok sorrendje különbözik. Könnyen megmutatható, hogy a (17) és (18) tenzorok, de általában az Euler-szögekkel paraméterezett $\mathbf{A}$ tenzorok családja lefedi a teljes $\mathcal{SO}(3)$ teret. A problémát az egyértelmű lefedettség jelenti. Olyan megadásra érdemes ugyanis törekedni, ami ezt a leképezést kölcsönösen egyértelműen adja meg, azaz minden $\mathcal{SO}(3)$ -beli tenzorhoz egyértelműen található egy $(\psi, \vartheta, \varphi)$ számhármasság.

Megmutatható, hogy az Euler-szögekkel nem adható meg $\mathcal{SO}(3)$ egyértelmű lefedése. A fenti két speciális esetről a problémát a konvolúciót nézve középső Euler-szög

okozza. Ekkor ugyanis megadható egy-egy olyan ϑ szög, melyre $\mathbf{T}_2$ tenzor a $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_3$ tengelyeit egymásba viszi át, így a két másik forgatás nem lesz független egymástól.

Ha a klasszikus Euler-szögeknél a $\vartheta = 0$ szöget rögzítjük, (17) a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) & 0 \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy lényegében egy forgatás maradt, a mátrix megadása ψ és φ szögekkel nem egyértelmű. Hasonló szinguláris hely lép fel $\vartheta = \pi$ esetben.

A Tait-Bryan szögek esetén a $\vartheta = \pm\pi/2$ helyeken lép fel szingularitás a paraméterezésben. Előbbi esetben a forgató mátrix alakja:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi + \psi) & 0 & \sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & 0 & -\cos(\varphi + \psi) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A szingularitás hasonló okból fakad, mint a jól ismert tény, hogy az Északi- és a Déli-sarkon nincs értelme a hosszúsági fokoknak. A szingularitás nem $\mathcal{SO}(3)$ szerkezetéből hanem a paraméterezésből fakad. A (16) alakú általános Euler-szögeknél mindenképpen megjelenik a két szinguláris pont, csak kifejezésük bonyolultabb,

Ha a szinguláris pontot el akarjuk kerülni, érdemes leszűkítenünk ϑ értékét, klasszikus Euler-szögeknél például a $(0, \pi)$ intervallumra. Ekkor a ψ és φ szögeknek egyaránt le kell fedniük egy teljes körülfordulást, vagyis megadhatók például a $\psi, \varphi \in [0, 2\pi)$ intervallumban. Nagyon hasonló módon kezelhetők a Tait-Bryan szögek, ekkor $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ és $\psi, \varphi \in [0, 2\pi)$.

Az így keletkező $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ szerkezetű tér azonban nem fedi le a teljes forgatócsoportot. Viszont ha hozzávesszük a kihagyott pontokat, akkor megjelenik a szingularitás. Vagyis választanunk kell az egyértelmű és a teljes lefedettség között, mindkettő nem érhető el. Az Euler-szögek ezen hiányosságuk ellenére a gyakorlati számításokban jól alkalmazhatóak, főleg, ha a szögtávozások kisebbek, mint derékszög.

A fenti szingularitási probléma azonban sajnos nem kerülhető el semmilyen három skalárból álló paraméterezés esetén. Ez az $\mathcal{SO}(3)$ különleges, többszörösen összefüggő szerkezetéből adódik. Ha a paraméterezés fenti hibáját ki akarjuk küszöbölni, három helyett négy változót kell használnunk, egy alkalmas kényszerrel együtt. Erre több módszer létezik, most az egyik gyakorlatban is alkalmazottat mutatjuk be.

2.2.4. Leírás kvaterniókkal

A forgatócsoport paraméterezése történhet **egységnyi hosszúságú kvaterniókkal** is. A kvaterniók a komplex számokhoz hasonló nemkommutatív algebrai struktúrát alkotnak, azonban négy dimenzióban. Egy kvaternió algebrai alakban

$q = a + b i + c j + d k$ alakban írhatók fel, ahol a, b, c, d valósak, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, valamint fennállnak az $ij = k, jk = i, ki = j$ azonosságok. Ezek segítségével a szorzás és összeadás definiálhatók, és a testaxiómákkal kibővítve a szokásos műveletek a komplex számok felépítéséhez hasonló módon kaphatók.

Két műveletet szükséges még definiálnunk. A fenti q kvaternió abszolút értékén értjük a $|q| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ valós számot, konjugáltján pedig a $q^* = a - b i - c j - d k$ kvaterniót.

A kvaterniók első (valós) komponensét érdemes a skalárokkal, a további három komponenst pedig a térbeli vektorokkal azonosítani, így mind a vektorok, mind a skalárok speciális kvaternióknak tekinthetők. A kvaterniókat ezért a fizikában számos területen alkalmazni lehet. Meglepő, hogy a forgatás is milyen egyszerűen kezelhető segítségével.

A kvaterniók négy valós paraméterrel adhatók meg, ezért biztosan bővebb teret jelentenek, mint a forgatócsoport. Azonban ha megkötjük, hogy a kvaterniók egységnyi hosszúak legyenek, akkor már három dimenziós teret kapunk. Az ilyen egységnyi hosszú kvaterniókat *verzoroknak* nevezzük. A verzorok tere valamilyen értelemben azonosítható lesz az $\mathcal{SO}(3)$ forgató csoporttal.

Az azonosítás a következőképpen történik. Vegyünk egy vektort, mely legyen $q = a i + b j + c k$. Adott egy kvaternió, ami legyen $v = v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k$, ahol $|v| = 1$, vagyis v verzor. Vegyük az alábbi leképezést, ahol $\cdot$ a kvaterniók közötti szorzást jelenti:

$$\hat{q} = v \cdot q \cdot v^* \quad (19)$$

Rövid számolással megmutatható, hogy ha v verzor, a keletkező $\hat{q}$ kvaternió q -hoz hasonlóan közönséges vektor, valamint q és $\hat{q}$ abszolút értéke megegyezik. Mivel a kvaterniók abszolút értéke vektorok esetén a vektor hosszát adja vissza, a fenti leképezés során a q vektornak csak az iránya változik, vagyis elfordul a térben. Tetszőleges két q és $\hat{q}$ vektorokhoz ($|q| = |\hat{q}|$) található olyan v verzor, ami a (19) leképezéssel q -t $\hat{q}$ -ba viszi át. Vagyis a verzorok lefedik a forgatócsoportot.

Felmerül a kérdés, hogy egyértelmű-e a lefedés. Nem, mivel fennáll az $v \cdot q \cdot v^* = (-v) \cdot q \cdot (-v)^*$ azonosság, minden forgatáshoz pontosan két verzor található. Tehát a verzorok tere kétszeresen fedi le az $\mathcal{SO}(3)$ csoportot. Ez könnyen egyszeressé alakítható, de maga a kétszeres lefedés is sima, szingularitásoktól mentes, megszűnnek az Euler-szögeknél tapasztalt nehézségek. Megjelennek viszont mások, hiszen kvaterniókkal sok művelet sokkal nehezebben végezhető el, mint a szokványos struktúrákkal. Mégis sok esetben célszerűbb a kvaterniók használata, mint az Euler-szögeké.

A verzorok nagyon szemléletesen összevethetők a fentebb tárgyalt irányvektor szög megadáással. Adjunk meg egy egységnyi irányvektort, legyen

$$[e_1 \ e_2 \ e_3]^T,$$

és adjunk meg egy α szöget. Képezzük a következő kvaterniót:

$$v = \sin \alpha + \cos \alpha e_1 i + \cos \alpha e_2 j + \cos \alpha e_3 k$$

Ez a kvaternió a (19) leképezésbe írva egy $[e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ tengely körüli α szöggel való forgatást valósít meg.

Ha elvégezzük a (19) leképezés műveletét koordinátáinként, felírhatjuk az $\mathbf{A}$ forgató tenzorokat a kvaternió v_i komponensei segítségével. Ha $\mathbf{A}$ forgató tenzor, akkor kanonikus bázisban mátrixa:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 & 2v_1v_2 & 2v_1v_3 \\ 2v_1v_2 & v_0^2 - v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 & 2v_2v_3 \\ 2v_1v_3 & 2v_2v_3 & v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Egyszerűbb alakba írva

$$[\mathbf{A}] = 2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} [v_1 \ v_2 \ v_3] + (v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) \delta, \quad (21)$$

ahol δ az egységmátrixot jelöli.

Láthatjuk, hogy a térbeli forgatás matematikai kezelése nem egyszerű. A gyakorlati számításokhoz többféle módszer lehet praktikus, mindegyik a maga előnyével és hátrányával együtt. A következőkben az Euler-szögeket fogjuk használni a levezetésekhez.

2.3. Merev test mozgása a térben

Azt kaptuk, hogy a térbeli merevtest-szerű transzformációk egy $\mathcal{M}_3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathcal{SO}(3)$ hat dimenziós teret alkotnak. A következőkben a forgatócsoport paraméterezéséhez a Tait-Bryan szögeket használjuk, T^{TB} jelöli a (18) mátrixot. Ekkor egy tetszőleges $\mathcal{M}_3$ -beli leképezés:

$$[M\mathbf{r}] = T^{TB} \cdot [\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

Ezen a módon $M(x, y, z, \psi, \vartheta, \varphi)$ alakban megadható tetszőleges merevtest-transzformáció. Alkalmazzuk ezt egy felületre:

7. Definíció. Az $f^* = M \circ f$ felületet az $f \in \mathcal{F}_3$ felület **helyzetének** nevezzük, ha $M \in \mathcal{M}_3$. Adott f felület esetén f^* és M azonosítható, M -t az f felület **elmozdulásának** nevezzük.

Az elmozdulást egy vektorral és három Euler-szöggel adjuk meg, a megadás sajnos egyes pontokban nem egyértelmű, amint fentebb is láttuk.

Ha a felület mozog a térben, definiálhatjuk a mozgástörvényét:

8. Definíció. Az $f \in \mathcal{F}_3$ görbe **mozgástörvényén** a $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}_3$ függvényt nevezzük, mely legalább $\mathcal{C}^2$ -osztályú.

Ha ismerjük a fenti hat paraméter időfüggését, tetszőleges időpillanatban megadhatjuk a merev test helyzetét. Vagyis a szabad merev testnek hat szabadságfoka van.

$$[\gamma(t)\mathbf{r}] = T^{TB} \cdot [\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (22)$$

A mozgástörvény deriválásával a sebességet mintegy a transzformációban bekövetkező változásként értelmezzük.

9. Definíció. Adott az $f \in \mathcal{F}_3$ felület a $\gamma(t)$ mozgástörvényével együtt. Az f felület **sebességállapotának** a $\dot{\gamma}(t) := \frac{d\gamma}{dt}$ mennyiséget nevezzük.

Az $\mathcal{M}_3$ tér érintőtere a hat dimenziós $\mathbb{R}^6$ tér, ennek egy pontját értjük sebességállapot alatt. A sebességállapotot megkapjuk paraméteres alakban, ha az idő szerint deriváljuk (22)-t:

$$[\dot{\gamma}(t)\mathbf{r}] = [\boldsymbol{\Omega}] T^{TB}[\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (23)$$

A megjelenő $\boldsymbol{\Omega}$ örvénytenzor az $\mathbf{A}(t)$ forgatásból $\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}\right)\mathbf{A}^T$ módon számolható. Az örvénytenzor antiszimmetrikus, az alábbi alakban írható fel a mátrixa:

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A tenzornak három független skaláris komponense van, így egy vektorral azonosítható. A komponensek jelölése már utal erre a használati módra, vagyis amikor a merev test örvénytenzora helyett az $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ szögsebességvektort helyettesítjük, miközben a mátrix-szorzás helyett vektoriális szorzatot alkalmazunk:

$$[\dot{\gamma}(t)\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times (T^{TB}[\mathbf{r}]) + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Mindez kifejezi azt a tényt, hogy a merev test sebességállapota leírható két vektorral, a sebességvektorral és a szögsebességvektorral, hiszen szerkezete euklideszi. Azonban ha össze akarjuk kapcsolni az elmozdulás- és a sebességteret, nem kerülhetjük el, hogy a helyzetet meghatározó koordinátákkal és deriváltjaikkal is kifejezzük a sebességállapotot. Ha képezzük az örvénytenzort Tait-Bryan paraméterezés esetén, a következő eredményt kapjuk:

$$[\Omega] = \dot{T}^{TB}(T^{TB})^T = \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \sin \vartheta - \dot{\psi} & \dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\psi} & 0 & \dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \cos \psi \\ -\dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \psi & \dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta & 0 \end{bmatrix},$$

Vagyis a szögsebesség-komponensek (24) és (25) összevetéséből:

$$\omega_x = \dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta$$

$$\omega_y = \dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \psi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\psi}$$

A síkbeli esethez hasonló jelenséget tapasztalunk, a nemeuklideszi altérhez tartozó koordináták megjelennek a sebességállapot leírásában. A hat koordináta-derivált mellett meg kell adnunk a három Euler-szöget is, ha ismerni akarjuk a sebességállapotot.

A gyorsulásállapotot is a görbékhez hasonlóan definiáljuk:

10. Definíció. Adott az $f \in \mathcal{F}_3$ felület a $\gamma(t)$ mozgástörvényével együtt. Az f felület *gyorsulásállapotának* a $\ddot{\gamma}(t) := \frac{d^2\gamma}{dt^2}$ mennyiséget nevezzük.

A gyorsulástér mint érintőtér szintén hat dimenziós euklideszi tér. Deriváljuk (23) összefüggést az idő szerint:

$$[\ddot{\gamma}(t)\mathbf{r}] = [\dot{\Omega}] T^{TB}[\mathbf{r}] + [\Omega^2] T^{TB}[\mathbf{r}] + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Az örvénytenzor deriválása komponensenként történik, a következő alakú mátrixot kapunk:

$$[\dot{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel antiszimmetrikus, a szögsebességhez hasonlóan vektort rendelhetünk hozzá, így kapjuk az $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z]^T$ szöggyorsulást. Az örvénytenzor négyzete pedig egyszerűen felírható a szögsebesség vektorral, szimmetrikus mátrixot kapunk:

$$[\Omega^2] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T - \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -\omega_z^2 - \omega_x^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix}$$

Természetesen a két mátrix elemei felírhatók az Euler-szögekkel, meglehetősen terjedelmes kifejezések adódnak. Ezekben szerepelnek a koordináták második deriváltjai mellett az Euler-szögek és deriváltjaik is.

A forgató csoport bonyolult paraméterezése így továbbadódik az érintőterek paraméterezéséhez. Pedig a gyorsulás- és sebességtér már vektorral is leírható, a szögsebesség és szöggyorsulás hatékony és sok esetben használható módszer. Azonban a sebességállapot csak akkor írható le a szögsebességvektorral, ha a térbeli orientáció vagy ismert vagy a forgásszimmetria miatt nem lényeges. Ezen két eset a síkbeli mozgásokkal együtt nagyon sok gyakorlatban felmerülő problémát lefed. Hasonló a helyzet a gyorsulásállapottal is, ha ismert a sebességállapot és a helyzet, akkor valóban elegendő a szöggyorsulásvektort megadnunk. Viszont sok esetben ez nem áll fenn, ekkor a forgatócsoport nemeuklideszi jellege miatt ismernünk kell a paraméterek alacsonyabb deriváltjait is, és a matematikai leírás nagyon elbonyolódhat.

Már említettük, hogy Newton második axiómája miatt a gyorsulástér függ a sebesség- és elmozdulástértől. Ezen kényszer azért jön létre, mert klasszikus mechanikai problémáknál Newton axiómája a második deriváltakra nézve lineáris egyenletrendszerhez vezet, azok mindig kiküszöbölhetők. Ezért a szabad merev test mechanikai jelenségei az elmozdulástér érintőnyalábján játszódhatnak le. A fentebb leírtak alapján kijelenthetjük, hogy ez a $T\mathcal{M}_3 \cong \mathcal{M}_3 \times T_{\gamma(t)}\mathcal{M}_3$ tizenkét dimenziós tér összességében $\mathbb{R}^9 \times \mathcal{SO}_3$ szerkezetű.

Kényszer alatt a síkbeli esethez hasonlóan az állapottéren értelmezett $F : T\mathcal{M}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, mely csak az állapotter azon pontjait engedélyezi a lehetséges állapotoknak, melyre az $F = 0$ feltétel teljesül. A térbeli gördülés feltételét a síkbelihez hasonlóan három lépésben építjük fel.

Ha két felület egymáson gördül, akkor:

1. A két felületnek van közös pontja
2. A két felület a közös pontban érinti egymást.
3. Az érintési pontban a két felület sebessége megegyezik.

Vizsgáljuk végig ezeket a kényszereket a síkbeli gördüléssel továbbra is párhuzamosan haladva.

2.4. Felületek közöspont-kényszere

Két felület egymáson való gördüléséhez szeretnénk eljutni. Az egyik felületet állónak tekintjük, erre $e(u_0, v_0)$ jelöléssel hivatkozunk, a másik, $f(u, v)$ felület pedig mozog.

A gördüléshez szükséges, hogy a két felületnek legyen egy közös pontja. Ezt nehéz lenne általános felületeknél zárt alakban megfogalmaznunk, azonban a kényszerezett teret megpróbálhatjuk paraméterezni.

A görbékhez hasonló módszerrel próbálkozunk. Adjuk meg a közös pont helyét a két felületen, ehhez az u_0, v_0, u, v koordináták szükségesek. A közös pont körül azonban a mozgó felület tetszőlegesen elfordulhat, ezt leírhatjuk a ψ, ϑ, φ Euler-szögeivel. Úgy tűnik, *hét* skaláris paraméterrel írható le a kényszerezett rendszer, ami nyilvánvalóan azt jelenti, hogy ezek nem függetlenek. Ez nem meglepő, ha belegondolunk, hogy két általánosan metsző felület közös részként egy görbét ad meg. Ha a felületek adott helyzetében a metszésgörbe más-más pontját tekintjük közös pontnak, a fenti hét paraméter más és más értéket vesz fel. A görbe egy dimenziós alakzat, ezen redundancia eggyel csökkenti a paraméterek számát.

Így végül azt kapjuk, hogy a közöspont-kényszer egy hat dimenziós teret hoz létre, vagyis nem csökkenti a szabad rendszer szabadságfokait, annak ellenére, hogy leszűkíti az elmozdulásteret. A hét paraméter közül elvben egyet ki lehetne küszöbölni, de általánosan ez reménytelen feladatnak tűnik. Mivel úgys továbbhaladunk az érintőkényszer leírására, nem foglalkozunk a megfelelőbb paraméterezéssel.

A redundancia ellenére az átszámítás az egyik irányban működik, az alábbi kifejezés segítségével a fenti hét paraméterből kiszámíthatók az x, y, z koordináták:

$$[e(u_0, v_0)] = T^{TB}[f(u, v)] + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (27)$$

Idő szerint deriválva a sebességtérben érvényes összefüggést kapunk. A továbbiakban a rövidség miatt a $\frac{\partial a}{\partial b}$ alakú parciális deriváltakat az a'_b szimbólummal jelöljük.

$$[e'_{u_0} \dot{u}_0 + e'_{v_0} \dot{v}_0] = T^{TB}[f'_u \dot{u} + f'_v \dot{v}] + [\mathbf{\Omega}]T^{TB}[f(u, v)] + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (28)$$

A probléma továbbra is fennáll, a négy felületparaméter deriváltjából számítható $\dot{x}, \dot{y}$ és $\dot{z}$, az inverz művelet azonban nem végezhető el, mert nem egyértelmű.

2.5. Felületek érintő kényszere

A felületek érintkezését legegyszerűbben normálvektoraikkal írhatjuk le. Ha két felület érinti egymást, akkor normál irányú egységvektoraik megegyeznek. A normál egységvektort az érintő egységvektorok vektoriális szorzatával számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= e'_{u_0} \times e'_{v_0} \cdot |e'_{u_0}|^{-1} |e'_{v_0}|^{-1} \\ \mathbf{m} &= f'_u \times f'_v \cdot |f'_u|^{-1} |f'_v|^{-1} \end{aligned}$$

A normálvektorok természetesen függenek a megfelelő felületparaméterektől. Így az érintés feltétele:

$$[\mathbf{n}] = T^{TB}[\mathbf{m}] \quad (29)$$

Az érintés következtében a redundáns paraméterezés megszűnik, mivel általános érintési helyzetben nincs kontinuum számosságú érintési pont egyszerre. Így a független ismeretleneket most már számíthatjuk a skaláregyenletek segítségével.

A hat általános koordináta mellett megjelennek az u_0, v_0, u, v változók, így összesen tíz ismeretlenünk van. Ezt szűkítik le a (27) közöspont- és (29) érintőkényszerek. A (27) három skaláregyenletet jelent, viszont a vektorok és a mátrix egységnyi normája miatt az (29) három skaláregyenlete közül csak kettő független választható ki. Ezért a szabad ismeretlenek száma $10-3-2=5$. Ezek már független ismeretlenek, ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a rögzített felülethez közöspont- és érintő kényszerrel kötött másik felületnek öt szabadságfoka van.

Egy lehetőség, ha az öt szabad paraméternek a négy felületparamétert és az egyik Euler-szöget választjuk. Ez általában, de nem mindig kivitelezhető. Ekkor u_0, v_0, u, v és az egyik Euler-szög segítségével (29) egyenletből a másik két Euler-szög kiadódik, majd ezeket visszaírva (27) összefüggésbe megkapható x, y és z . A visszatranszformálás nehézségekbe ütközik. Ismerve x, y és z koordinátákat és két Euler-szöget, a (27) és (29) öt egyenletéből elvileg kifejezhető a másik öt ismeretlen. Bonyolultabb felületek esetén azonban ennek több megoldása is lehet.

Az öt független változóval leírható a sebességtér is. Deriváljuk idő szerint a (29) összefüggést:

$$[\mathbf{n}'_{u_0} \dot{u}_0 + \mathbf{n}'_{v_0} \dot{v}_0] = T^{TB}[\mathbf{m}'_u \dot{u} + \mathbf{m}'_v \dot{v}] + [\boldsymbol{\Omega}]T^{TB}[\mathbf{m}]$$

Figyelembe véve (29)-t kapjuk:

$$[\mathbf{n}'_{u_0} \dot{u}_0 + \mathbf{n}'_{v_0} \dot{v}_0] - T^{TB}[\mathbf{m}'_u \dot{u} + \mathbf{m}'_v \dot{v}] = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}] \quad (30)$$

A három egyenlet most sem független egymástól, $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}$ és $\dot{\varphi}$ közül csak kettő határozható meg, egyet pedig meg kell hagynunk szabad változónak.

A (30) kifejezés szögsebesség dimenziójú. Nézzük, mit jelentenek az egyes tagok. A bal oldal két tagja a két felület vándorló érintősíkjaik szögsebességét jelzi. A normálvektorok deriváltjai a görbületi tenzor ferde (felületparaméter szerinti) koordináta-rendszerben vett oszlopvektorait adják. Ezek a paraméterek deriváltjait transzformálják át az érintősíkok szögsebességére.

A két (vándorló) érintősík szögsebességének különbsége a jobb oldalon lévő $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}$ tag, mely szögsebesség vektorral kifejezve $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$. Ez éppen a szögsebesség érintő síkba eső komponense. Vagyis megkaptuk azt a szemléletből adódó tény, hogy ha fent akarjuk tartani az érintési feltételt, akkor a felületek vándorló érintősíkjaik végig egy síkban kell lenniük. Amekkora szögsebesség különbség lenne a két érintősík között, akkora szögsebességgel kell mozognia a mozgó felületnek, hogy az érintés fennmaradjon. A (30) összefüggést jobban megérthetjük, ha a (8) kifejezéssel analógiában vizsgáljuk.

Az érintősíkra merőleges szögsebesség-komponenst viszont az érintőkényszer nem köti meg, hiszen az érintősíkok a felületi normális mentén szabadon elforoghatnak.

Ezt a komponenst $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}$ módon kapjuk. Érdekes lehet egy kiválasztott Euler-szög helyett ennek a normális irányú szögsebesség-komponensnek a nagyságát választani ötödik sebességváltozóként. Vagyis:

$$\omega_n = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n} \quad (31)$$

Ha ismert az érintkező felületek helyzete, akkor $\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{u}, \dot{v}$ változók leírják a közös pont sebességét az egyes felületeken. Ez viszont az érintőkényszer miatt meghatározza a szögsebességet mozgó felület érintősíkjaiba eső vetületét is. A normális irányba eső komponenst pedig ω_n adja meg. Ekkor (31) és (30) egyenletekből meghatározható $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}$ és $\dot{\varphi}$, majd a (28) egyenletből $\dot{x}, \dot{y}$ és $\dot{z}$.

Az érintőkényszerrel ellátott felületek mozgása közben az (u_0, v_0) és az (u, v) változók egy-egy felületi görbét, érintkezési görbéket rajzolnak ki a felületekre, legyenek ezek az álló illetve mozgó felületen c és d .

Mozgás közben a két felületi görbére is fennáll egy közöspont- és egy érintőkényszer. Tegyük fel, hogy ismerjük az érintkezési görbéket. Terítsük ki differenciálható leképezéssel egy adott érintkezési pont kis környezetét egy-egy síkra. Ekkor az érintkezési görbék képei síkgörbék lesznek. Ekkor eltűnik a felületek görbültségének problémája és visszakapjuk a síkgörbék közöspont-kényszerének esetét. Mint láttuk, az három szabad paraméterrel írható le, meg kell adnunk a görbéken a közös pont helyét és a mozgó görbe φ szögelfordulását. Ez a szögelfordulás viszont felületek esetén nem bír szemléletes jelentéssel, hiszen az igazi felületek görbültek, emiatt a forgatás tengelye - a felület normálvektora - nem állandó.

Ha belegondolunk ezen szög deriváltja viszont már értelmes, éppen ezt jelöltük az ω_n szimbólummal. Ha alkalmas referenciát választunk, például a $v = \text{const}$ és $v_0 = \text{const}$ paramétervonalak bezárt szögét, akkor különösen ortogonális paramétergörbék esetén használható koordinátát kapunk az Euler-szög helyett. Ennek kezelése általános geometria esetén elbonyolódik, ezzel most nem foglalkozunk

2.6. Felületek gördülő kényszere

A felületek gördülőkényszere az, amely a legtöbb érdekességet hozza tárgyalásunkba, és amely szétfeszíti a szabadsági fok gyakran használt fogalmát.

A gördülőkényszerrel egyszerűen azt kell feltennünk, hogy a közös pont sebessége zérus. Ekkor (23) és (28) összevetéséből a következőt kapjuk a kényszer:

$$[e'_{u_0} \dot{u}_0 + e'_{v_0} \dot{v}_0] = T^{TB} [f'_u \dot{u} + f'_v \dot{v}] \quad (32)$$

Ez azt fejezi ki, hogy a két felületen a közös pont vándorlási sebessége megegyezik. Másképpen fogalmazva a közös pont a két felületen adott idő alatt ugyanakkora utat fut be. Ez összhangban a gördülésnél tapasztaltakkal.

A (32) formula lineáris egyenlet a felületparaméterekre, melyekből $\dot{u}$ és $\dot{v}$ kifejezhető. Ekkor adott helyzet esetén az érintőkényszer kihasználása után (maradjon most meg a ψ Euler-szög) a sebességállapot leírható $\dot{u}_0$ és $\dot{v}_0$ változókkal:

$$\dot{u} = a_{11}(u, v, u_0, v_0, \psi) \cdot \dot{u}_0 + a_{12}(u, v, u_0, v_0, \psi) \cdot \dot{v}_0 \quad (33)$$

$$\dot{v} = a_{21}(u, v, u_0, v_0, \psi) \cdot \dot{u}_0 + a_{22}(u, v, u_0, v_0, \psi) \cdot \dot{v}_0$$

Az egyenleteket igen speciális felületeket kivéve nem lehet integrálni. Emiatt a (32) anholonom kényszer, vagyis nem képes explicit módon semmit sem mondani a koordinátákról, csupán azok deriváltjairól.

Kezdeti feltételként értéket kell adnunk mind az öt koordinátának, viszont csak három sebesség-változónak ($\dot{u}_0, \dot{v}_0$ és ω_n). Az u és v változók nem küszöbölhetőek ki, értéküket a kezdeti feltételek nem algebrailag, hanem a (33) differenciálegyenleteken keresztül kapcsolják a másik három változóhoz. A rendszer állapottere így nyolc dimenziós lesz, melyből öt az elmozdulástérhez, három pedig a sebességállapothoz tartozik. Az elmozdulástér struktúrája legegyszerűbb esetben $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{S}^1$, a sebességtér pedig $\mathbb{R}^3$. Ha a felület többszörösen összefüggő, akkor az elmozdulástérben több ciklikus dimenzió is megjelenhet, egy gömb és egy henger gördülése esetén például az elmozdulástér struktúrája $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$.

Ha figyelembe vesszük Newton axiómáit és az egyenletrendszert elsőrendű differenciálegyenletek rendszerévé alakítjuk, akkor az anholonom kényszer által megkötött u és v koordinátákra nem-triviális egyenletek formájában jelennek meg a (33) egyenletek. A helyzet hasonló, mint síkbeli gördülések esetén, ott egy „fél” szabadságfok jelent meg, itt azonban kettő. És míg síkbeli gördülés esetén a „fél” szabadságfokhoz tartozó egyenletet eliminálni lehet a kezdeti feltételekkel, addig, gördülés esetén a két egyenlet kapcsolttá válik.

Ez szorosan összefügg azzal a ténnyel, hogy síkbeli gördülésnél lokálisan a lehetséges érintkezési pontok halmaza megegyezik a tényleges érintési pontok halmazával. Másképp az érintési pont pályája a gördülő alakzatokon adott. Felületeknél nem ez a helyzet, a megvalósuló érintési pontok szintén görbék mentén helyezkednek el, a lehetséges érintési pontok azonban a felület egészét kitöltik. A kényszerek nem határozzák meg az érintési pontok által leírt felületi görbéket, melyek csak a Newton-egyenletekkel összevont teljes egyenletrendszer tesz határozottá.

Képzeljük el most megint a közös pont által leírt a és b felületi görbéket, melyek egy adott P érintési pont körüli környékét az érintősíkra differenciálhatóan transzformálva kapjuk a c és d síkgörbéket. Ha a felületek gördülnek, akkor a c és d síkgörbék is gördülnek egymáson. Síkbeli gördülésnél a kezdeti feltételek után csak egy szabad változónk marad. Ez megmondja, hogy adott időpillanatban hol van a közös pont az egyik görbén, amely a gördülési feltétel miatt a másik görbén is meghatározza a pontot. Esetünkben viszont a c és d görbék nincsenek megadva. Síkban egy görbe megadásához egyetlen változó elegendő (például a görbület), ha ismert a kezdőpont és a kezdőponti irányvektor. Ha mindkét görbét meg kell határoznunk, akkor két újabb változóra van szükség, mely megadja a görbéket.

Hasonlóan képzelhetjük el a felületeken lévő a és b gördülést. Az $\dot{u}_0$ és $\dot{v}_0$ változók időfüggvényei együtt megadják, hogy a mozgó felületen milyen a görbén és milyen befutás szerint történik a mozgás. Ha ω_n tartósan nulla, akkor ez a görbe a felületek ismeretében áttranszformálható a másik felületre is. Ekkor a két görbe érintősíkbba eső vetületének görbületei minden pillanatban megegyeznek, a görbékben csak a felületek térbeli görbülete miatt van különbség. Ha azonban az érintősík menti forgás is jelen van, vagyis $\omega_n \neq 0$, akkor az a mozgó felület b érintési görbájén megváltoztatja az érintőirányú görbületet, hiszen a mozgó felület érintő síkbeli forgását is követni kell a görbének.

Ha a sebességtér három változójának a három Euler-szöget választjuk, egy másik szemléletes példát kapunk. Ekkor a térbeli gördülő felület sebességtere topológiailag hasonló egy gömbcsuklós kényszerrel ellátott merev testéhez. A gömbcsuklót úgy is tekinthetjük, mint egy elfajult gördülést, ahol végtelenül kicsiny gömbön gördül a csuklóval ellátott test. Azonban a gömbcsukló esetén az álló felület pont, és ezért az érintési pont helye állandó, ezért nem jelenik meg a két további „fél” szabadsági fok.

Láthattuk, hogy két felület egymáson való gördülése bonyolult leíráshoz vezet, és a mozgásnak különleges szerkezete alakul ki 5 szabad geometriai illetve 3 szabad sebesség-változóval. A szabadsági fok fogalma anholonom rendszereknél már nem egyértelmű, érdemes külön beszélni a kétféle szabadságfokról.

A következő pontban kitekintésszerűen megvizsgáljuk a térben előforduló további lehetséges gördüléseket.

3. Egyéb térbeli gördülések

Ha már részletesen foglalkoztunk a síkgörbék és a térbeli felületek egymáson való gördülésével, érdemes vázaltszerűen áttekintenünk a három dimenziós tér további gördülési eseteit. Azt tapasztaljuk, hogy ha fenntartjuk a merev test modelljét, az egy pontos érintkezést, nem túl sok eset marad.

3.1. Felület és térgörbe gördülése

Síkgörbékről már szó esett, de nem beszéltünk a térgörbék gördüléséről. A gördülő térgörbéket bizonyos testek közelítésére vagy élek mentén történő gördülések modellezésére használhatjuk.

Legegyszerűbb a térgörbét úgy tekintenünk, mint egy elfajuló, végtelenül vékony hengerfelületet. Térbeli merev test lévén szabad mozgása ugyanúgy leírható az $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{SO}(3)$ térben, mint egy térbeli felületé. Viszont mivel görbe, az alakzat leírásához elegendő egyetlen paraméter is.

Vegyük először azt az esetet, amikor egy mozgó $g(p)$ görbe gördül egy álló $f(u, v)$ felületen. A felület és a görbe közöspont kényszerének megadásakor felmerülnek a megszokott problémák. Legegyszerűbb, ha a kényszerezett teret a közös pont görbén

mért p paraméterével és felületen mért u és v paramétereivel, valamint a görbe Euler-szögeivel adjuk meg. Így a kényszerezett tér szintén hat dimenziós, $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{SO}(3)$ szerkezetű lesz.

Az érintőkényszert a legegyszerűbben úgy adhatjuk meg, ha feltételezzük, hogy a görbe irányvektora és a görbe normálvektora merőlegesek egymásra. Ezt az előző pontok jelöléseivel a következőképpen tehetjük meg:

$$\frac{dg}{dp} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0 \quad (34)$$

A kényszer egyetlen skaláregyenletet jelent, mellyel kiküszöbölhető az egyik Euler-szög. A másik két Euler-szöggel és a p, u, v változókkal az öt dimenziós kényszerezett tér leírható.

A gördülőkényszer szerint a közös pont sebessége zérus. Ez vektoregyenlet lenne, de ismét csak két független skaláregyenletet kapunk belőle, melyből két koordináta-derivált, például a maradék két Euler-szög deriváltja. A sebességtér így leírható a $\dot{p}, \dot{u}$ és $\dot{v}$ változókkal.

A helyzet hasonló a térbeli görbülethez, a geometriai teret öt skalármennyiség, a sebességtér három változó írja le, a teljes állapotter nyolc dimenziós. Megfigyelhető azonban az a különbség, hogy az érintőkényszer után a felület-felület kapcsolat esetén a szög jellegű változók száma egyre csökkenthető, csak a közös normálsík körüli forgás marad szabadon. A görbe-felület érintkezésnél mindenképpen marad két szög jelentésű változó. Ezt elképzelhetjük úgy, hogy a görbe közös pontban lévő érintővektora elfordulhat a felület érintősíkjában, miközben a görbe is elfordulhat saját érintővektora körül. Ez a különbség nyilván abból adódik, hogy ha a görbét elfajuló hengerként tekintjük, akkor az érintővektor körüli elfordulás szöge a henger kerületén mért koordináta elfajulásából származik.

Ha a görbét tekintjük állónak, és a rajta görbülő felületet mozgónak, hasonló eredményeket kapunk.

Két térgörbe egymáson való görbületét is hasonlóképpen definiálhatjuk. A $g(p)$ görbét mozgónak, a $h(q)$ görbét állónak tekintjük. A mozgó görbe hat független paraméterét a közöspont kényszer itt ötre csökkenti, hiszen a kényszerezett tér megadható a közös pont p és q helyével, valamint a mozgó görbe három Euler-szögével. A görbék érintő kényszerét úgy értelmezzük, hogy az érintővektoraik irányának meg kell egyezniük a közös pontban. Ez kettővel csökkenti a szabad paraméterek számát, a térbeli helyzet leírható a p, q változókkal és egy Euler-szöggel.

A görbülő kényszert alkalmazva csak egy szabad egyenletünk marad, a kényszer $\dot{p}$ és $\dot{q}$ közül az egyiket kifejezhetővé teszi. Így az elmozdulástér három változóval, a sebességtér pedig két változóval írható le. Így az egymáson görbülő két térgörbe a síkgörbék egy szabadságfokú és a felületek három szabadságfokú sebességtére között helyezkedik el.

3.2. Elfajuló felületek gördülése

A felületek tárgyalásakor végig általános felületeket tételeztünk fel, és nem foglalkoztunk a szélsőséges esetekkel. Pedig két felület találkozásakor kialakulhatnak elfajuló esetek is, sőt, akár nem is jön létre gördülés. Ezeket fogjuk megvizsgálni ebben a pontban.

A felületek esetében az érintést csupán az érintősíkok helyzetével vizsgáltuk. Mivel a felületeknek irányítása is van, ezért kezelni tudjuk azt is, hogy a testek „belseje” ellentétes irányba nézzen, vagyis ne messenek egymásba lokálisan. Azonban nem akármilyen felületek tudnak egymáson gördülni metszés nélkül globálisan, hanem az egyik felület alakja leszűkíti azon testek geometriáját, melyek rajta gördülni tudnak. Például egy labda nem tud tisztán végiggördülni egy olyan egyenetlen felületen, melynek mélyedései kisebbek, mint az átmérője. Ezekbe a mélyedésekbe „nem fér bele”, hanem tiszta gördülés helyett kis ütközésekkel átlendül a mélyedés túlsó peremére. Az ilyen esetekben a fenti tárgyalás tiszta gördülést mutatna, viszont a felületek a mozgás során egymásba metszenének. A tiszta gördülés geometriai feltétele a görbületekkel áll szoros kapcsolatban.

Nézzük először ezt a problémát síkgörbék esetén, ahol egyszerűbb látnunk a feltételeket. Defináljuk az érintési pontban a normálvektor irányát a megszokottól eltérően úgy, hogy az mindkét görbe esetén az álló görbe „belseje” felé mutasson. Ezen koordináta-rendszerben értelmezhetők pozitív és negatív görbületek is. Ekkor legyen a mozgó g görbe görbülete κ_g , az álló h görbe görbülete pedig κ_h .

Ha mindkét görbe konvex, vagyis az álló görbe pozitív, a mozgó pedig negatív görbületű, akkor mindenképpen létrejöhet a gördülés. Ha mindkét görbe konkáv, vagyis az ellentétes állapot áll fenn, akkor nem jöhet létre gördülés, a testek ugyanis egymásba metszenek érintés közben. Ha a görbületek azonos előjelűek, akkor a görbületek nagysága mutatja meg a feltételt. Könnyen látható, hogy akkor tud egymáson gördülni, a két test, ha $\kappa_h - \kappa_g > 0$. Ha ez fennáll, akkor létrejöhet a gördülés metszés nélkül. Nyilván a görbületek a görbék mentén változnak, így a gördülés létrejötte függ a kezdeti feltételektől is.

Érdekes határhelyzet, amikor a két görbület megegyezik, vagyis $\kappa_h - \kappa_g = 0$. Ekkor az érintés még létrejöhet metszés nélkül, viszont gördülés már nem fog következni. Jól mutatja ezt a (14) egyenlet, ahol határhelyzetben a szögsebesség zérussá válik. Ezen esetben lokálisan a két görbe másodrendben is érinti egymást. Ha ez egy pontban történik csak, akkor még lehet gördülés, azonban ha a görbék véges szakaszán fennáll, akkor végtelen sok közös, érintési pont keletkezik. Ekkor a fenti paraméteres leírás redundánssá válik, az érintési pont pedig képes vándorolni a görbe helyzetének megváltozása nélkül. Fizikailag ez azt jelenti, hogy a görbék „beragadnak”, nem képesek egymáson gördülni.

Felületeknél a helyzet bonyolultabb, ugyanis a görbület az érintősík bármely irányában értelmezhető. Természetesen fennáll a feltétel, hogy két konvex elliptikus felület képes egymáson gördülni, míg két konkáv elliptikus felület nem. Köztes esetben elliptikus pontokból álló felület esetén a feltételt még megfogalmazhatjuk

a főgörbületek segítségével. Hiperbolikus pontoknál azonban a helyzet bonyolulttá válik, bizonyos irányokban lehetségessé, más irányokba lehetetlenné válik a görbület.

Érdekes az a helyzet, amikor egy irányban a görbületek megegyeznek, a többi irányban viszont fennáll a görbület feltétele. Ilyenkor a mozgás nem szűnik meg, mint a görbék esetén, de lokálisan csökken a sebességállapotot leíró szabad paraméterek száma. Itt is nagyon sok eset fordulhat elő, most néhány speciálisat vizsgálunk meg.

Legyen az álló és a mozgó felület is egy konvex görbéből képzett egyenes hengerfelület. Az elmozdulások terét öt skaláris változóval adhatjuk meg. Általános helyzetben a görbület szabadon létrejöhet, a sebességteret 3 változó határozza meg. Azokban a helyzetekben azonban, ahol a hengerek egy-egy alkotója egy egyenesbe kerül, megszűnik az egyik lehetséges forgásirány, mivel az azonos irányba mért görbületek megegyeznek (mindkettő zérus). Ha a csúszásmentes görbületet szigorúan vesszük, akkor a végtelen sok érintési pont egyike sem csúszhat meg, vagyis lecsökken a sebességtér egy dimenziósra. Ha ezt a feltételt elhagyjuk, akkor is csak két sebesség-változó elegendő, az egyik görbületi irány ugyanis kötött. Előbbi esetben a kezdeti feltételektől függ, hogy tiszta általános térbeli (3 dimenziós) mozgás vagy tisztán síkbeli görbék görbületére visszavezetett (1 dimenziós) mozgás jön létre. Utóbbi esetben a mozgás három- és két dimenziós mozgások kombinációja lehet.

Legyen most az álló felület egy sík, a mozgó felület pedig egy konvex vonalfelület. A vonalfelületek jellemzője, hogy minden pontjukon át húzható olyan felületi görbe, mely egyenes. Vagyis minden pontjukban létezik olyan irány, amelyben zérus a görbület. Az alkotónak, vagyis az egyenes felületi görbének az álló síkba kell esnie, különben metszés lépne fel. Emiatt az elmozdulásteret nem öt csak négy változóval írhatjuk le. Mivel minden pont ilyen, ezért minden pontban az alkotó mentén végtelen sok érintési pont alakul ki. Ha egyik pontnak sem engedjük meg a csúszást, akkor az egyetlen lehetséges forgásirány a közös egyenes, az alkotó körüli forgás lesz. Vagyis a sebességtér egyetlen változóval jellemezhetjük. Ezért ha a kezdeti feltételt megadjuk, akkor a mozgás topológiailag megegyezik a síkgörbék görbületével. Azonban kezdeti feltételként nem kettő, hanem négy változót adhatunk meg. Tipikus példa erre a henger vagy kúp görbülete a síkon, mely a térbeli mozgáshoz képest sokkal szegényesebb viselkedést mutat, mely a síkgörbék görbületére hasonlít. Az egyenes henger és sík görbületekor valóban síkmozgás is alakul ki, mely visszavezethető síkgörbék mozgására. Kúp síkon való görbületekor azonban a mozgás térbeli, viszont a görbület nem igazi térbeli, mert a közös pont vándorlási iránya minden pontban adott.

3.3. Felület görbülete két álló felületen

Előfordulhat olyan eset is, hogy egy felület két álló felületen görbül. Meg kell jelezni, hogy igazából nincs különbség a két felületen való görbület és az egy felületen való kétpontos görbület között, de az egyszerűség kedvéért most három különböző felületet fogunk tekinteni.

Gördülés típusa	Elmozdulástér dimenziója	Sebességtér dimenziója
síkgörbe síkgörbén	2	1
felület felületen	5	3
térgörbe felületen	5	3
térgörbe térgörbén	3	2
henger hengeren	5	3 vagy 1
henger vagy kúp síkon	4	1
felület két felületen	4	1

1. táblázat. A térbeli gördülések szabadsági fokai

Legyen a mozgó felület $f(u, v)$ az álló felületek pedig $e_1(u_1, v_1)$ és $e_2(u_2, v_2)$. A szabad felületnek hat szabadságfoka van. Mint tudjuk ha az f felületet az e_1 -hez kényszerezük közöspont- és érintőkényszerrel, a mozgó felületnek még öt szabad paramétere marad. Ha a másik, e_2 álló felület szempontjából is előírunk egy hasonló kényszert, akkor az még egy szabadságfokot elvesz, négy változóval válik leírhatóvá a mozgás.

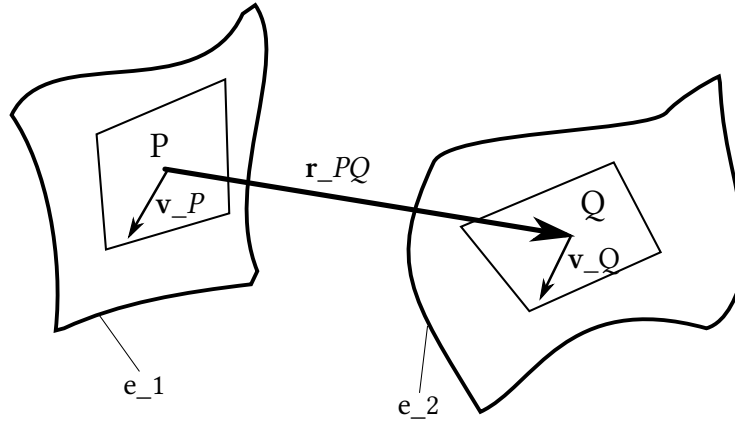
Ez utóbbi nem egészen nyilvánvaló, ugyanis ehhez be kellene látnunk, hogy a két érintőkényszer független egymástól. Ahogyan már egy felülepár esetén is geometriai feltételei voltak a gördülő mozgásnak és magának az érintésnek is, ez három felületnél is így lesz, csak nagyobb bonyolultsággal. Ha viszont az érintés lehetséges és nem elfajuló esetről van szó, akkor a testnek négy szabadságfoka marad.

A négy szabadságfokot a sebességtérben könnyű elképzelnünk, és mivel a kényszer holonom, ezért az elmozdulástér is ugyanennyi változóval írható le. Legyenek P és Q az érintési pontok. A lehetséges sebességállapotoknál elkülöníthetünk két jellegzetes osztályt, ezen PQ szakasz mozgására és a felület PQ körüli forgására. A forgás egy paraméterrel írható le. A PQ szakasz mozgását pedig leírhatjuk a végpontjai sebességével. Ezen pontokba eső, a mozgó felülethez tartozó pontok sebességvektorai a felületek közös érintősíkjaiba kell, hogy essenek. Vagyis a két végpont sebességét két síkvektorral, négy skalármennyiséggel adhatjuk meg. A merevtest-mozgás miatt azonban két pont sebességének különbsége merőleges az őket összekötő szakaszra. Vagyis ha $\mathbf{v}_P$ és $\mathbf{v}_Q$ a pontok sebességei, $\mathbf{r}_{PQ}$ pedig az őket összekötő vektor, akkor fennáll a

$$(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q)^T \mathbf{r}_{PQ} = 0 \quad (35)$$

feltétel, mely háromra csökkenti a szabad paraméterek számát a PQ szakasz sebességállapotának leírásában. Ehhez hozzávéve a PQ körüli forgást kapjuk a négy lehetséges mozgásfajta.

Megfigyelhetjük, hogy PQ szakasz mozgása síkmozgással homeomorf mozgást eredményez, hiszen végpontjai két dimenziós sokasághoz vannak kényszerezve. Így a teljes felület mozgása topológiailag egy síkmozgás és egy rögzített tengely körüli



6. ábra. Sebességviszonyok a két érintkezési pontban

forgás szuperpozíciójával egyenértékű.

Láttuk, hogy két felület esetén a görbülő kényszer a sebességtér változóinak számát kettővel csökkenti. Ha a két görbülő kényszer függetlenül lép fel, akkor a sebességtér dimenziója nullára csökken, vagyis a két felületen a harmadik test görbülete nem lenne lehetséges. Ez viszont nyilván nem így van, így meg kell vizsgálnunk, hogy a görbülőkényszereket leíró négy skaláregyenlet közül mennyi lesz független.

A dolog kulcsa ott van, hogy a kettős görbülőkényszer a fenti PQ szakasz két végpontjára ír elő sebességekényszert, zérus sebességet. Azonban láttuk, hogy a merevtest-szerű mozgás miatt a két végpont sebessége nem négy, hanem csak három változóval írható le. Emiatt a görbülőkényszerrel csak három sebességkomponensnek adhatunk értéket. Jó kérdés, hogy a negyedik, megkötött sebességkomponens kiadódik-e. Azt kapjuk, hogy igen, ugyanis ha a (35) egyenletbe helyettesítjük a $\mathbf{v}_P = 0$ és $\mathbf{v}_Q = 0$ feltételeket, akkor a feltétel azonosan teljesül.

A görbülő kényszer azonban csak PQ két végpontjáról tud valamit mondani, a PQ körüli forgás egyetlen szabad sebesség-változóként megmarad. Így a két felületen görbülő felület sebességtere a síkbeli görbüléshez hasonlóan egy dimenziós. A kényszer a görbülő felületek egyszerűbb esetéhez hasonlóan nem integrálható, így az elmozdulástér négy változóval írható le. Ez a furcsa kinematikai kapcsolat jelenik meg például a vasúti kerék esetében.

A fentiekhez hasonlóan tárgyalni lehetne még egy felület két görbén való görbülését, egy felület görbén és felületen való görbülését, és még néhány hasonló esetet. A fenti módszerekkel ez elvi szinten könnyen megtehető, a geometriai vizsgálat pedig a felületek bonyolultságától függ.

Azt beláthatjuk, hogy radikálisan más típusú egy pontos görbülést egy mozgó elem esetére már nem tudunk kitalálni, mert nem fér el a három dimenziós térben. Láttuk, hogy már egy mozgó és két álló felület esetén is csak egy sebességet leíró mennyiség maradt, ha ezt is megkötjük, a mozgás lehetetlenné válik.

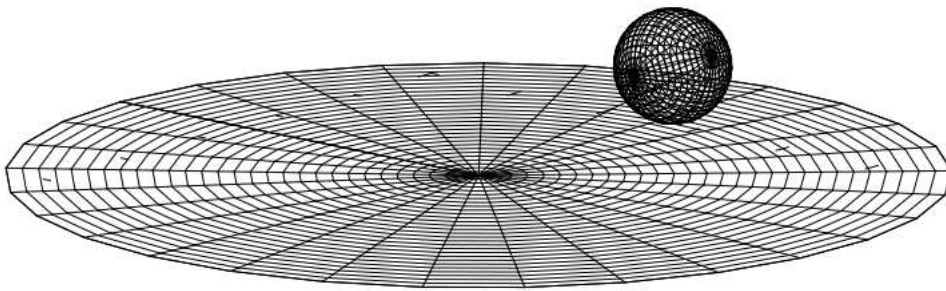
4. Forgóasztalon gördülő golyó mozgása

A következőkben a fentebb tárgyalt módszereket fogjuk bemutatni egy egyszerű példán keresztül. Igyekeztünk kiválasztani a lehető legegyszerűbb modellt, melyen a gördülés bizonyos jellegzetességei megfigyelhetők.

4.1. A modell felépítése

Cél olyan példát találni, melyen jól megfigyelhetők a gördülő kényszer jellegzetességei, de kellően egyszerű ahhoz, hogy analitikus módszerekkel kézben tarthassuk. Egy ilyen modell a forgóasztalon gördülő golyó példája. A modell feltevései a következők:

1. A modell két merev testből áll.
2. Az egyik merev test egy R sugarú gömb, a másik egy sík.
3. A gömb tiszta gördülést végez a síkon.
4. A sík egy rá merőleges tengely körül egyenletes forgómozgást végez Ω szögsebességgel.
5. A gömb tömege m , súlypontja a középpontjában van, tehetetlenségi nyomatéki tenzora gömbtenzor, tehetetlenségi nyomatéka Θ .
6. A rendszerre a sík normálvektora irányába mutató $-g$ gravitációs gyorsulás hat.



7. ábra. A modell vázlata

A két felület állandó görbületű, így a geometriától némileg függetlenül tudjuk vizsgálni a gördülést. A gömbszimmetrikus tehetetlenségi nyomaték miatt a pörgettyűhatással nem kell számolnunk. Külső erőket szintén nem tételezünk fel. A

modellben a sík nem áll, hanem előírt mozgást végez, ez könnyen belefoglalható az előző fejezetek levezetésébe, viszont így egyszerűen tudjuk belefoglalni a helykoordinátáktól való függést a kényszerbe.

A levezetésekben a fentiekkel ellentétben nem használjuk a $[x]$ szimbólumot a mátrix jelölésére, amíg mást nem mondunk, a tenzorokat és vektorokat azonosítjuk egy rögzített bázisbeli mátrixaikkal.

4.2. A rendszer kinematikai leírása

Vizsgáljuk a fenti rendszer mozgását. A sík egyenlete legyen

$$\hat{\mathbf{r}}(\hat{u}, \hat{v}) = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ 0 \end{bmatrix},$$

a gömbé pedig legyen

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} R \cos v \sin u \\ -R \sin v \\ -R \cos v \cos u \end{bmatrix}$$

A gömb egyenletére sok hasonló felírást választhatunk, ezen megadás azért célszerű, mert majd látni fogjuk, hogy így az Euler-szögekkel egyszerűen kifejezhetőek lesznek a paraméterek.

4.2.1. A forgóasztal mozgása

A sík mozgástörvényét a következő alakban írjuk fel:

$$\hat{\mathbf{r}}'(t) = \hat{\mathbf{R}}(t)\hat{\mathbf{r}}(t) + \hat{\mathbf{b}}(t) \quad (36)$$

Mivel a síknak vannak tartósan álló pontjai, ezért a translációs vektor $\hat{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{0}$. A forgatási tenzor nem, csak az örvénytenzor ismert:

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen $\hat{\mathbf{R}}$ meghatározható a $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \hat{\mathbf{R}}$ lineáris differenciálegyenlet megoldásával. Esetünkben ez egyszerű, és $\hat{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{I}$ kezdeti feltétellel adódik:

$$\hat{\mathbf{R}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Visszaírva (36)-ba kapjuk:

$$\hat{\mathbf{r}}'(t) = \begin{bmatrix} \hat{u} \cos(\Omega t) - \hat{v} \sin(\Omega t) \\ \hat{u} \sin(\Omega t) + \hat{v} \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Mivel a sík mozgása adott, ezért nulla szabadsági foka van, akárcsak egy álló felületnek.

4.2.2. A golyó szabad mozgása

A gömb mozgástörvényét hasonlóan írjuk fel:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (38)$$

Egyelőre válasszuk szabadon a transzformáció komponenseit. Legyen az eltolási vektor:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A forgató tenzort pedig paraméterezzük a Tait-Bryan szögekkel (18) alapján:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta & -\sin \psi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta + \cos \varphi \sin \psi & \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \vartheta & \sin \vartheta & \cos \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Ha a golyó szabadon van, akkor ez hat ismeretlent jelent, a megszokott módon a $\mathcal{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ lesz az elmozdulástér struktúrája.

4.2.3. A kényszerek figyelembe vétele

Most először az érintőkényszert vesszük figyelembe. A sík normálvektora a transzformáció után:

$$\mathbf{n}' = \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial_{\hat{u}} \hat{\mathbf{r}} \times \partial_{\hat{v}} \hat{\mathbf{r}}}{|\partial_{\hat{u}} \hat{\mathbf{r}} \times \partial_{\hat{v}} \hat{\mathbf{r}}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A gömb normálvektora a saját koordináta-rendszerében:

$$\mathbf{m} = \frac{\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}}{|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}|} = \begin{bmatrix} \cos v \sin u \\ -\sin v \\ -\cos v \cos u \end{bmatrix}$$

Ez a normálvektor a gömb külseje felé mutat, a sík normálvektora pedig pozitív z irányban. Hogy szemléletesebb legyen a modell, a normálvektorokat ellentétes irányban rendeljük össze, így a gömb az xy sík „felett” lesz. Így az érintőkényszer:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{m}' = \mathbf{R}(\psi, \vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{m}(u, v)$$

A gömb ezen paraméterezése azért célszerű, mert ekkor hosszas számítás után az alábbi egyszerű eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} u &= \varphi \\ v &= \vartheta \end{aligned} \tag{39}$$

Vagyis a geometria speciális jellege miatt a két kiküszöbölt Euler-szög egyszerűen helyettesíthető a gömb paramétereivel. Ezért a forgató mátrix kifejezhető az u és v paraméterekkel.

Írjuk most fel a közöspont-kényszert:

$$\hat{\mathbf{r}}(\hat{u}, \hat{v}, t) = \mathbf{r}(\psi, u, v, x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \cos(\Omega t) - \hat{v} \sin(\Omega t) \\ \hat{u} \sin(\Omega t) + \hat{v} \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\psi, u, v) \cdot \begin{bmatrix} R \cos v \sin u \\ -R \sin v \\ -R \cos v \cos u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A számításokat elvégezve kapjuk:

$$x = \hat{u} \cos(\Omega t) - \hat{v} \sin(\Omega t) \tag{40}$$

$$y = \hat{u} \sin(\Omega t) + \hat{v} \cos(\Omega t)$$

$$z = R \tag{41}$$

Vagyis az érintő- és közöspont-kényszerral ellátott rendszer most már leírható öt független változóval, amivel a többi kifejezhető. A következőkben vegyesen fogunk dolgozni x és y illetve $\hat{u}$ és $\hat{v}$ változókkal, a golyó helyét előbbiek az álló rendszerhez képest, utóbbiak az asztalhoz képest írják le. Mivel a feltétel (39) azonosítja a gömb paramétereit az Euler-szögekkel, ezért bármelyiket használhatjuk, egyelőre maradunk az Euler-szögeknél.

Vegyük most figyelembe a gördülő kényszert, vagyis a közös érintési pont meg egyező vándorlási sebességet. Ez megtehető például (32) alapján. A forgóasztalon az érintési pont vándorlási sebessége ((37) deriválásával, (40) figyelembe vételével):

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -\Omega y - \dot{x} \\ \Omega x - \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha kiszámítjuk (32) jobb oldalát, megkapjuk az érintési pont vándorlási sebességét a golyó felszínén:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -R\dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta - R\dot{\vartheta} \sin \psi \\ R\dot{\vartheta} \cos \psi - R\dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az így kiszámított $\hat{\mathbf{v}}$ és $\mathbf{v}$ mennyiségek természetesen relatív sebességek a felületek koordináta-rendszerében. Kihasználva a gördülés feltételét, vagyis hogy $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ kapjuk a gördülés kényszeregyenleteit:

$$\dot{x} - R\dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta - R\dot{\vartheta} \sin \psi + \Omega y = 0 \quad (42)$$

$$\dot{y} + R\dot{\vartheta} \cos \psi - R\dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta - \Omega x = 0$$

Ismerjük a szögsebesség-komponenseket is (25) alapján:

$$\omega_x = \dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta$$

$$\omega_y = \dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \psi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\psi}$$

Ezekkel kifejezve a gördülőkényszer:

$$\dot{x} - R\omega_y + \Omega y = 0 \quad (43)$$

$$\dot{y} + R\omega_x - \Omega x = 0$$

A kényszer (43) alakját ezen egyszerű geometria esetén gyorsan megkaphatjuk a szokásos módon is, hiszen a gömb középpontjának sebessége éppen $[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$, így a szögsebesség segítségével a kényszer megadható az érintési pontok megegyező abszolút sebességének előírásával is, mely ugyanehhez a formulához vezet.

A fenti módszertan alapján leírtuk rendszerünket kellő számú változóval, és megtudtuk fogalmazni a kényszereket is. Ez általános levezetéssel összhangban azt kaptuk, hogy az elmozdulástér öt független változóval (például $x, y, \psi, \vartheta, \varphi$), a sebességtér pedig három változóval (például $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}$) írható le. Most figyelembe vesszük a dinamikai megfontolásokat, melynek következtében lényegében újabb kényszereket helyezünk el a rendszerben, annyit, hogy a mozgást teljesen meg tudjuk határozni.

4.3. A mozgásegyenletek felírása

A mozgásegyenleteket szemléltetésképpen többféle módszerrel is fel fogjuk írni. A klasszikus mechanika alaptétele Newton II. axiómája, melyet sokféle alakban megfogalmazhatunk. Azt vizsgáljuk, hogy melyik módszer milyen mértékben alkalmas vagy nem alkalmas a gördülés kezelésére.

4.3.1. Newton második axiómája

Először használjuk közvetlenül Newton második axiómáját. Állandó tömegű tömegpontokra a szokásos jelölésekkel a következő formában írható fel:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$$

Merev testre pedig a következő két egyenlet adódik (nem jelöljük külön indexszel, de nyilvánvalóan súlyponti mennyiségekről beszélünk):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{R})\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (45)$$

A jobb oldalon álló függvények a merev test fázisterétől, vagyis elmozdulás- és sebességállapotától, valamint az időtől függhetnek. A fentiekkel összhangban $\mathbf{R}$ jelöli a forgató tenzort.

Az axióma mellett természetesen fennállnak a különböző deriváltakat összekötő további egyenletek (a pont az idő szerinti deriválást jelenti):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}; \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}; \quad \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \quad (46)$$

Kényszer esetén fennáll a következő kényszeregyenlet is:

$$0 = K(\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (47)$$

Ezt úgy tudjuk figyelembe venni, ha a (44) egyenletek jobb oldalához alkalmas további tagokat, kényszererőket adunk, melyek biztosítják az előírt mozgást. Ezek meghatározása nem egyértelmű, ha nem teszünk fel a kényszerekről további megkövetéseket, akkor intuitív módon tehetjük csak meg.

Nézzük most a forgó asztalon gördülő golyó példáját. A tehetetlenségi nyomaték mátrixa független a térbeli helyzettől, mivel gömbszimmetrikus:

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{R}) \equiv \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta \end{bmatrix}$$

Mivel a golyó egyenletének $\mathbf{r}(u, v)$ megadásában az origó éppen a gömb középpontja, és mivel a súlypont is itt található, ezért $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$

A kényszererők megválasztása nem magától értetődő. Közvetlenül Newton axiómáiból ez nem is adódik ki, ugyanezt módszeresen az elsőfajú Lagrange-egyenletekkel tehetjük meg. Most vegyük fel az ábra alapján a három kényszererő-komponenst. Azért választunk hármat, mert (41) közöspont-érintő és (43) gördülő egyenletek összesen három skaláregyenletet jelentenek.

Külső erőként a súlypontban fellépő $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ gravitáció jelentkezik.

Ezek alapján Newton II. axiómája:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= S_x \\
 m\ddot{y} &= S_y \\
 m\ddot{z} &= -mg + N \\
 \Theta\varepsilon_x &= RS_y \\
 \Theta\varepsilon_y &= -RS_x \\
 \Theta\varepsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{48}$$

Ehhez még adódnak a kényszerek:

$$\begin{aligned}
 z - R &= 0 \\
 \dot{x} - R\omega_y + \Omega y &= 0 \\
 \dot{y} + R\omega_x - \Omega x &= 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

Az algebrai egyenletrendszer többféleképpen is megoldható. A holonom kényszerrel megadott z koordináta ebből rögtön kiadódik. A sebességtér három szabadságfokának megfelelően három független másodrendű differenciálegyenletet írhatunk fel, melyet a koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{aligned}
 (mR^2 + \Theta)\ddot{x} &= -\Theta\Omega\dot{y} \\
 (mR^2 + \Theta)\ddot{y} &= \Theta\Omega\dot{x}
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\Theta\ddot{\psi} = -\frac{\dot{\vartheta}\dot{\psi}}{\cos\vartheta} + \frac{\tan\vartheta}{R} \left(\left(\dot{\psi} + \frac{mR^2}{mR^2 + \Theta}\Omega \right) (\dot{x}\sin\psi - \dot{y}\cos\psi) + \Omega\dot{\psi}(x\cos\psi + y\sin\psi) \right)$$

Meglepő, hogy amellet, hogy az első két egyenlet milyen egyszerű alakot öltött, a harmadik egyenlet rendkívül bonyolult, tartalmazza φ és ϑ változókat is, melyeket a kényszerekkel nem lehet kiküszöbölni. A harmadik egyenletet csak akkor lehet megoldani, ha hozzávesszük a kényszerekből vett elsőrendű differenciálegyenleteket φ és ϑ változókra. Ezzel később fogunk foglalkozni.

Az első két egyenlet viszont könnyen megoldható függetlenül a többitől is. Mát-
rixos alakba rendezve a következő alakba hozható:

$$\begin{bmatrix} mR^2 + \Theta & 0 \\ 0 & mR^2 + \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Theta\Omega \\ -\Theta\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Ezen egyszerű egyenlet integrálható, ráadásul nem tartalmazza a koordinátákat, csak azok deriváltjait. A gömbszimmetria miatt nem is kell figyelembe vennünk az Euler-szögeket, hogy meghatározzuk a golyó súlypontjának mozgását.

Ha a fenti egyenletekből nem x és y , hanem φ és ϑ változókat akarnánk kifejezni, nehézségekbe ütköznénk, mert az egyenletekben x és y mindenképp benne marad. (Ennek a nehézségnek az előhozására használtunk forgó asztalt.) Az x és y változók eliminálásához ugyanis integrálnunk kellene az anholonom (43) kényszert, ami nem lehetséges.

4.3.2. Elsőfajú Lagrange-egyenlet

Az elsőfajú Lagrange-egyenlet felírásához feltételezzük, hogy a kényszerek ideálisak. Ez azt jelenti, hogy a kényszererők virtuális teljesítménye zérus. A virtuális teljesítményt úgy kapjuk, hogy a kényszerezett sebességtér két tetszőleges pontjában számított teljesítmények különbségét vesszük. Ez a megkötés eléggé általános, ugyanis ha a kényszererőt ideális és nemideális részre bontjuk, és ismerjük a nem-ideális komponenst, akkor az az aktív erőkhöz számítható.

Tegyük fel, hogy a rendszerre ható kényszer zárt alakban kifejezhető skaláregyenletekkel írható le. Tegyük fel, hogy az anholonom kényszerek a sebességekben lineárisak. A holonom kényszerek deriválásából szintén lineáris kényszereket nyerhetünk. Ekkor a kényszeregyenletek (összesen n skaláregyenlet):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t) \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t) = 0$$

Itt $\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T \quad \boldsymbol{\omega}^T]^T$, $\mathbf{A}$ egy $n \times 6$ -os mátrix, $\mathbf{b}$ pedig egy hat dimenziós vektor.

Ekkor a fenti mátrixegyenlet egy felületet határoz meg a sebességtérben (ez a felület természetesen függ az elmozdulásmezőtől). Ha a kényszererő ideális, akkor merőleges erre a felületre. Megmutatható, hogy ekkor Lagrange multiplikátor-módszerével a kényszererők a következő alakba írhatók:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_K(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t) \\ \mathbf{M}_K(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$$

Itt $\boldsymbol{\lambda}$ az n darab kényszernek megfelelő λ_i Lagrange-multiplikátort tartalmazza. Ha az $\mathbf{F}_K$ és $\mathbf{M}_K$ kényszererőket hozzáadjuk a (44) egyenletek jobb oldalához, akkor az így kapott egyenletek a kényszerekkel együtt már meghatározzák a mozgást.

Nézzük a konkrét példát, a (49) kényszerek alapján. Ha kiszámítjuk az $\mathbf{A}$ mátrixot, kapjuk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & 1 & 0 & R & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Így a kényszererők:

$$\mathbf{F}_K = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_K = \begin{bmatrix} \lambda_3 R \\ -\lambda_2 R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hozzáadva a (44) egyenlethez kapjuk:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_2 \\ m\ddot{y} &= \lambda_3 \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda_1 \\ \Theta\varepsilon_x &= R\lambda_3 \\ \Theta\varepsilon_y &= -R\lambda_2 \\ \Theta\varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \tag{52}$$

Ez formálisan megegyezik a (48) egyenletekkel. A (49) kényszerekkel együtt megoldva megkapjuk a (51) egyenletet.

Az elsőfajú Lagrange-egyenlet nem alakítja át a Newton-axiómát, hanem csak lehetővé teszi a kényszererők kényszerektől való függésének megállapítását, és a kényszererőknek a Newton-egyenletbe való feltüntetését. Előnye, hogy bonyolultabb helyzetben mindig helyes (a kényszereknek megfelelő) felírást kapunk a kényszererőkre.

Ha az egyenletek nem is különülnek el mindig ilyen szépen, elvileg a kényszererő mindig két részre bontható gördülés esetén. Az egyik, felületekre normális irányban álló komponens a felületek érintési pontjait tartja egyben, lokálisan biztosítva a közöspont-kényszert. Egy ettől független, kétkomponensű, a felületek közös érintősíkjába eső erő pedig az érintőkényszer megmaradását és a gördülés feltételét biztosítja. Ez differenciálisan összehangolja a két felület paraméterezését. Esetünkben az egyszerű modell miatt a két komponens két-két egyenletet fog össze, de általános gördülésnél a síkbeli erő komponensei megjelenhetnek mind a négy egyenletben is.

4.3.3. Routh-Voss egyenlet

A másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével leírhatjuk a mozgást egy olyan elmozdulástérben, melyet a holonom kényszerek által való leszűkítésből kapunk. A kényszerezett tér paraméterezésénél elszakadhatunk a változók fizikai tartalmától, és praktikussági szempontok alapján tetszőlegesen választhatjuk meg őket, feltéve ha a kényszerezett teret egyértelműen leírják. Egy test gördülésekor a hatból egy szabadságfokot tudunk megszüntetni az érintőkényszer segítségével.

Mint látni fogjuk, nehézséget jelent, hogy a Newton- és az elsőfajú Lagrange-egyenlet esetén megtehetjük, hogy az elmozdulástér az Euler-szögekkel, a sebességteret pedig a szögsebességekkel írtuk le, melyek nem az Euler-szögek deriváltjai. A másodfajú Lagrange-egyenleteknél ez nem tehető meg, a sebességteret az általános koordináták deriváltjaival kell jellemeznünk, ami bonyolultabb leírást eredményez.

A másodfajú Lagrange-egyenlet analitikus módszer, az egész rendszeren értelmez egy L állapotfüggvényét (a Lagrange-függvényt), és a mozgásegyenletek ebből levezethetők, emiatt általában gyorsabb és egyszerűbb módon juthatunk egyenletekhez, mint a szintetikus módszerekkel. Nagy hátránya viszont, hogy a módszer nem tudja kezelni az anholonom kényszereket, ami gördülés esetén végzetes hiányosság.

A Routh-Voss egyenlet úgy viszonyul az elsőfajú Lagrange-egyenlethez, mint a másodfajú Lagrange-egyenlet a Newton-axiómához. Az anholonom kényszert megfogalmazhatjuk a kényszerezett tér érintőterében is, és az általános kényszererőről feltesszük, hogy merőleges a kényszer által megadott felületre, így Lagrange-multiplikátorokkal kiszámíthatók a kényszererők.

Legyen $\mathbf{q}$ az általános koordináták vektora. Ha nincsenek potenciális erők, akkor a Lagrange-függvény egyszerűen a mozgási energiával egyezik meg:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{R})\boldsymbol{\omega}$$

Ha meghatározzuk a $\mathbf{v} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, $\boldsymbol{\omega} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ és $\mathbf{R} = f(\mathbf{q}, t)$ függvénykapcsolatokat, akkor a Lagrange-függvény felírható $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ alakban.

Adott n darab skaláris anholonom kényszeregyenlet, mely mátrixos formában:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}(\mathbf{q}, t) = 0$$

Erre a felületre merőlegesnek kell lennie a kényszererőnek, mely így felírható a következő alakban:

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}$$

Levezethető, hogy ekkor Newton axiómájával ekvivalensek a következő mozgásegyenletek:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + W_i,$$

melyek az anholonom kényszerekkel együtt megoldhatóak az általános koordinátákra és a Lagrange-multiplikátorokra. fontos megjegyezni, hogy az ilyen módon nyert Lagrange-multiplikátorok általában nem egyeznek meg az elsőfajú Lagrange-egyenletnél kapottakkal.

Fenti példánknál válasszuk általános koordinátáknak a következőket:

$$\mathbf{q} = [x \quad y \quad \psi \quad \vartheta \quad \varphi]^T$$

Ekkor:

$$\mathbf{v} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad 0]^T$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\Theta(\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \vartheta$$

A kényszeregyenletek (42) alapján:

$$\begin{aligned} \dot{x} - R\dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta - R\dot{\vartheta} \sin \psi + \Omega y &= 0 \\ \dot{y} + R\dot{\vartheta} \cos \psi - R\dot{\varphi} \sin \psi \cos \vartheta - \Omega x &= 0 \end{aligned}$$

A $\mathbf{C}$ mátrix a kényszerekből:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -R \sin \psi & -R \cos \psi \cos \vartheta \\ 0 & 1 & 0 & R \cos \psi & -R \sin \psi \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Az általános kényszererő:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ -\lambda_1 R \sin \psi + \lambda_2 R \cos \psi \\ -\lambda_1 R \cos \psi \cos \vartheta - \lambda_2 R \sin \psi \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Megkapjuk a Routh-Voss-egyenleteket:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \tag{53}$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2$$

$$\Theta(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta) = 0$$

$$\Theta(\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}\dot{\vartheta}) = -\lambda_1 R \sin \psi + \lambda_2 R \cos \psi$$

$$\Theta(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \vartheta) = -\lambda_1 R \cos \psi \cos \vartheta - \lambda_2 R \sin \psi \cos \vartheta$$

Az egyenletek a (42) kényszerekkel együtt írják le a mozgást. Hosszadalmas számolással belátható, hogy a (51) differenciálegyenlet megoldása a (53) egyenleteket is megoldja. Viszont (53)-ból kilátástalannak tűnik levezetni (51)-t, mivel a kényszerek kiküszöbölése nehézségekbe ütközik. Ha tudjuk, minek kell kijönni, megoldható a levezetés, ellenkező esetben viszont kevés eséllyel találunk rá a megoldásra.

Külön problémát jelent még az Euler-szögek szingularitásának megjelenése. Ha a (42) kényszerben vesszük például a $\vartheta = \pi/2$ helyet, akkor a kényszerek a következő formát öltik:

$$\begin{aligned}\dot{x} - R\dot{\vartheta} \sin \psi + \Omega y &= 0 \\ \dot{y} + R\dot{\vartheta} \cos \psi - \Omega x &= 0\end{aligned}$$

A két egyenlet összevetésével adódik:

$$\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi + \Omega y \cos \psi - \Omega x \sin \psi = 0$$

Ez viszont azt jelentené, hogy ekkor $\dot{x}$ és $\dot{y}$ nem választható meg függetlenül. Ez nyilván hamis következtetés, ami a paraméterezés alkalmatlanságát mutatja a szinguláris helyen.

Azt látjuk tehát, hogy a Routh-Voss egyenletek, bár sok esetben könnyen kezelhető egyenletekhez vezetnek, meglehetősen elbonyolítják az egyenletek felírását, ha a kényszerekben mind a négy gördüléssel összekapcsolt koordináta szerepel deriválás nélküli alakban. Ráadásul figyelni kell az Euler-szögek szinguláris helyeire is.

4.3.4. Appell-egyenlet

Az Appell-egyenlet még egy lépés a Lagrange-egyenlethez képest azzal, hogy képes explicite kiküszöbölni az anholonom kényszereket is, így megszabadulunk az algebrai problémák jelentős részétől.

Az alapelv az, hogy miután a holonom kényszerekkel ellátott teret paramétereztük az általános koordinátákkal, a sebességteret az anholonom kényszerekkel való további szűkítés után úgynevezett kvázi-sebességekkel írunk le. A kvázi-sebességek pedig nem feltétlenül az általános koordináták deriváltjai, hanem szabadon választhatók.

Az Appell-egyenlethez ki kell számítanunk egy állapotfüggvényt, a gyorsulási energiát vagy más néven Appell-függvényt, mely merev testre a következőképpen néz ki:

$$S = \frac{1}{2}ma^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{R})\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{R})\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{R})\boldsymbol{\omega}$$

Ez bonyolultabb, mint a Lagrange-függvény, viszont cserébe a kényszereket explicit módon figyelembe vehetjük már az állapotfüggvény felírásakor. Legyen $\mathbf{s}$ a kvázi-sebességek vektora. Ekkor a kényszerek segítségével kifejezhetők a $\mathbf{a} = f(\mathbf{q}, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t)$, $\boldsymbol{\omega} = f(\mathbf{q}, \mathbf{s}, t)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = f(\mathbf{q}, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t)$ és $\mathbf{R} = f(\mathbf{q}, t)$ kapcsolatok, így az Appell-függvény $L(\mathbf{q}, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, t)$ formába írható.

Az Appell-egyenlethez nem kell feltételeznünk, hogy az anholonom kényszerek ideálisak legyenek, viszont szükség van egy másik, hasonló feltételezésre, mely szerint a kényszererők virtuális gyorsulási teljesítménye zérus. Ezt úgy kapjuk, ha a leszűkített gyorsulástér két tetszőlegesen választott pontjának különbségét szorozzuk a kényszererővel.

Ekkor az Appell-egyenlet az alábbi egyszerű formát ölti, ha $\boldsymbol{\Pi}$ a kvázierők vektora, mely az erőknek a kvázi-sebességek terébe való transzformálásával adódik:

$$\frac{\partial S}{\partial s_i} = \Pi_i$$

Megmutatható ([3]), hogy a fenti típusú kényszerek esetén ezek az egyenletek ekvivalensek a Newton-axiómákkal. Kényszeregyenletek itt már nincsenek, a kvázi-sebességek definiáló egyenleteivel együtt elsőrendű differenciálegyenletet kapunk.

A golyós példában tartsuk meg az előző pontban használt általános koordinátákat. Viszont a kvázi-sebességeknek válasszuk a következőket:

$$\mathbf{q} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \omega_z]^T = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]^T$$

Három kvázi-sebességet kell választanunk, hiszen a sebességtér három dimenziós. Ekkor a kényszerek segítségével:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [\dot{s}_1 \quad \dot{s}_2 \quad 0]^T \\ \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -s_2 + \Omega x \\ s_1 + \Omega y \\ s_3 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -\dot{s}_2 + \Omega s_1 \\ \dot{s}_1 + \Omega s_2 \\ \dot{s}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az Appell-függvény csak a kvázi-gyorsulásokat tartalmazó része:

$$S = \frac{1}{2}m(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) + \frac{1}{2}\frac{\Theta}{R^2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + \dot{s}_3^2 - 2\Omega s_1\dot{s}_2 + 2\Omega s_2\dot{s}_1) + f(\mathbf{s}, \mathbf{q})$$

Kvázierők nincsenek, hiszen az egyetlen külső erő, a gravitáció gyorsulási teljesítménye a kényszerek miatt zérus. Az Appell-egyenletek ez alapján:

$$\begin{aligned} (\Theta + mR^2)\dot{s}_1 + \Theta\Omega s_2 &= 0 \\ (\Theta + mR^2)\dot{s}_2 - \Theta\Omega s_1 &= 0 \\ \Theta \dot{s}_3 &= 0 \end{aligned} \tag{54}$$

A kényszerek segítségével a többi általános koordinátára is felírható differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{1}{R} \left((-s_2 + \Omega x) \cos \psi + (s_1 + \Omega y) \sin \psi \right) \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{R \cos \vartheta} \left(-(-s_2 + \Omega x) \sin \psi + (s_1 + \Omega y) \cos \psi \right) \end{aligned} \tag{55}$$

Az egyenletrendszer kiegészítik még a kvázi-sebességek definíciós egyenleteinek inverzei:

$$\dot{x} = s_1 \quad (56)$$

$$\dot{y} = s_2$$

$$\dot{\psi} = s_3 + \frac{\dot{\varphi} \tan \vartheta}{R} \left((-s_2 + \Omega x) \sin \psi - (s_1 + \Omega y) \cos \psi \right)$$

Az (54-56) egyenletek a nyolc dimenziós fázistér valamennyi változójára egyenletet jelentenek. Esetünkben azonban (54) megoldható önmagában is, mert nem szerepelnek benne az általános koordináták.

A teljes egyenletrendszer a (51) egyenlettel ekvivalens, nagy előnye azonban, hogy a ψ változóra felírt bonyolult egyenlet helyett egyszerűbbeket kaptunk.

Látjuk, hogy az Appell-egyenlettel nagyon hatékonyan tudjuk kezelni a gördüléseket, mivel teljesen kiküszöbölhetjük a kényszereket és az elmozdulás- és sebességtér paraméterezésében is nagy szabadságot kapunk. Ráadásul rögtön elsőrendű egyenletekhez jutunk. Hátrány viszont, hogy bonyolultabb geometriánál az Appell-függvény nagyon összetett is lehet. Érdemes még megfigyelnünk, hogy a ϑ koordináta meghatározásakor nincsen baj az egyenlettel, viszont ϑ szinguláris helyhez tartozó $(\pm\pi/2)$ értékekor a φ és ψ változókra vonatkozó egyenlet értelmezhetetlenné válik, ami szintén mutatja az Euler-szögek hiányosságát.

4.3.5. Kozlov-egyenlet

A szakirodalom egy ritkán emlegetett módszere az angolul „*vaconomic equation*” elnevezésű egyenlet. A szó a *variációs* és *axiomatikus* kifejezések összevonásából származik, és magyar szakirodalomban nem találkozunk vele. Mivel elsőként Kozlov ([2]) írta le cikkében, a következőkben Kozlov-egyenletnek fogjuk nevezni.

A fentiekkel ellentétben a Kozlov-egyenlet jelenleg is kutatás alatt álló, nem kiforrott módszer. Alapötlete, hogy a Hamilton-elv megfelelő általánosításával kíván eljutni az egyenletekig úgy, hogy a szélsőértékkeresést a leszűkített téren hajtja végre.

Formalitásában a Lagrange-egyenlethez áll közel. Legyen adott egy rendszer $\mathbf{q}$ általános koordinátavektorral és az $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ Lagrange-függvénnyel. A rendszerre hat egy $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ kényszer, melyet n darab $\Phi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ skaláregyenlettel fogalmazhatunk meg. Ezek az egyenletek egy $\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ vektorba rendezhetők. Vezessünk be egy új állapotfüggvényt, a kiterjesztett Lagrange-függvényt, mely már a kényszerezett rendszerről mond valamit:

$$\hat{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Itt $\boldsymbol{\lambda}$ Lagrange-multiplikátorok vektora, azonban ezek nyilvánvalóan más jelentéssel bírnak, mint a Routh-Voss egyenletek esetén. Levezethető ([1]), hogy a fenti Lagrange-függvényből képzett Hamilton-féle variációs feladat megoldásai az alábbi egyenletek:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

A kényszeregyenleteket nem küszöböljük ki, azok ugyanúgy hozzátartoznak az egyenletrendszerhez, mint a Routh-Voss egyenlet esetén.

A fenti egyenlet sokkal szebb, kompaktabb, mint a Routh-Voss egyenlet. Azonban szépséghibája, hogy anholonom kényszerek esetén nem mindig ekvivalens a Newton-egyenletekkel. Megfogalmazásunk azért óvatos, mert az ekvivalencia feltételére még nem sikerült kritériumokat találni. Bizonyos kényszerek esetén mindig visszkapjuk a Newton-egyenleteket, másoknál csak bizonyos kezdeti feltételek esetén, míg léteznek olyan kényszerek, ahol a bármilyen kezdeti feltételre eltér az egyenletek megoldása a Newton-axiómáétól.

Vizsgáljuk meg, mi a helyzet golyós példánk esetén. A fenti módon kiterjesztett Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} \hat{L} = & \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\Theta(\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\vartheta - \lambda_1(\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\psi\cos\vartheta - \\ & - R\dot{\vartheta}\sin\psi + \Omega y) - \lambda_2(\dot{y} + R\dot{\vartheta}\cos\psi - R\dot{\varphi}\sin\psi\cos\vartheta - \Omega x) \end{aligned}$$

A kapott Kozlov-egyenletek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \dot{\lambda}_1 - \Omega\lambda_2 &= 0 \\ m\ddot{y} - \dot{\lambda}_2 + \Omega\lambda_1 &= 0 \\ \Theta(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + \lambda_1 R(\dot{\varphi}\sin\psi\cos\vartheta - \dot{\vartheta}\cos\psi) + \\ &+ \lambda_2 R(-\dot{\varphi}\cos\psi\cos\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\psi) = 0 \\ \Theta(\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}\dot{\vartheta}) + \dot{\lambda}_1 R\sin\psi - \dot{\lambda}_2 R\cos\psi + R(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi)(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\vartheta) &= 0 \\ \Theta(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + \dot{\lambda}_1 R\cos\psi\cos\vartheta + \dot{\lambda}_2 R\sin\psi\cos\vartheta + \\ &+ \lambda_1 R(-\dot{\psi}\sin\psi\cos\vartheta - \dot{\vartheta}\cos\psi\sin\vartheta) + \lambda_2 R(\dot{\psi}\cos\psi\cos\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\psi\sin\vartheta) = 0 \end{aligned} \tag{57}$$

Meglehetősen bonyolult egyenleteket kapunk. Megjelennek a Lagrange-multiplikátorok deriváltjai is, vagyis a fázistér két újabb változóval bővül, a Lagrange-együtthatókra is differenciálegyenletet kell felírunk.

Ha kifejezzük az x és y változókra vonatkozó differenciálegyenleteket, kapjuk:

$$\begin{aligned} (mR^2 + \Theta)\ddot{x} + \Theta\Omega\dot{y} + \lambda_2 R^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\vartheta - \Omega) &= 0 \\ (mR^2 + \Theta)\ddot{y} - \Theta\Omega\dot{x} - \lambda_1 R^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\vartheta - \Omega) &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

Ha ezt összevetjük (51), látjuk, hogy nem lesz minden esetben azonos. Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetekben lesz egyenletünk ekvivalens a Newton-axiómával.

Az utolsó tag egyrészt eltűnhet akkor, ha $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0$. Megmutatható, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha a $\dot{x} = \dot{y} = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ helyzetből indítjuk a rendszert. Ez meglehetősen nagy megkötést jelent.

A másik lehetőség, ha a zárójelben lévő kifejezés zérus. Ha felfedezzük, hogy $\dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \vartheta = \omega_z$, akkor megállapíthatjuk, hogy az egyenletek akkor is egybeesnek, ha a golyó és az asztal érintőfelületei egymás síkjában nem fordulnak el. Ha egy ilyen kényszert is hozzáveszünk a rendszerhez, vagyis a gördülést a legszigorúbb értelmében egypontosnak tekintjük, akkor a Kozlov-egyenlet x és y változókra visszaadja a Newton-egyenleteket.

Érdemes még meggondolni a λ multiplikátorok fizikai tartalmát. A λ mennyiségek a korábbi egyenletekkel való összevetés alapján a kényszererőkhöz hasonló jelentéssel bírnak. Így a λ változók, mint ezek integráljai, valamilyen értelemben impulzusoknak felelnek meg.

A Kozlov-egyenlet az elmélet jelenlegi állása szerint inkább csak elméleti érdekességnek tekinthető. érdekes felfedezés azonban, hogy ha gördülés feltételét szigorítjuk, és nem engedünk meg elfordulást az érintősíkban, akkor a kényszerezett rendszerben is érvényes a Hamilton-elv. Ezt általános gördülésre nem jelenthetjük ki ezek alapján, de erős sejtéssel élhetünk, hogy ez általában fennáll a gördülő felületeknél.

4.4. Az egyenlet megoldása

A példát úgy választottuk, hogy analitikus módszerekkel vizsgálható legyen. A következőkben megoldjuk a mozgásegyenlet egyes részeit és megfigyeljük a gördülés hatásának jelenlétét a megoldásban.

Kiindulási egyenletünk a (51) alak lesz:

$$\begin{bmatrix} mR^2 + \Theta & 0 \\ 0 & mR^2 + \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Theta\Omega \\ -\Theta\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Átrendezve kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer megoldva a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Itt C_1 és C_2 tetszőleges konstansok, a β körfrekvencia pedig:

$$\beta = \Omega \frac{\Theta}{\Theta + mR^2}$$

Ha figyelembe vesszük az $\dot{x}(0) = v_{x0}$ és $\dot{y}(0) = v_{y0}$ kezdeti feltételeket, akkor kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{bmatrix} \quad (59)$$

A mátrix egy xy síkban β egyenletes szögsebességgel való elforgatását jelenti a sebességvektor kezdeti állapotának. Vagyis a golyó sebességének nagysága a mozgás során nem változik, a sebesség iránya pedig egyenletesen forog, ami körmozgást jelent.

Érdekes, hogy a golyó sebesség-függvénye nem függ attól, hogy a forgóasztalon honnan indítjuk el a golyót. Ez meglepő, hiszen az asztal különböző pontjai eltérő sebességgel forognak. Ha a golyó az asztalhoz lenne ragasztva, a forgóasztal körpályára kényszerítené. Esetünkben is egy körmozgás alakul ki, azonban ennek frekvenciája eltér a forgóasztaltól. Úgy tűnik, hogy a gördülés egy frekvenciaváltó szerepét tölti be. Ennek az az oka, hogy a gördülés következtében a tehetetlenségi nyomaték és a tömeg az egyenlet egyes részein párhuzamosan kapcsolttá válik, más-
hol viszont ez nem jön létre. A különböző nagyságú redukált tömegek állítják el a mozgás frekvenciáját. Nézzük meg, mennyivel.

A gömbszimmetrikus tömegeloszlás miatt a tehetetlenségi nyomaték $\Theta = k m R^2$ alakba írható. Ekkor:

$$\beta = \Omega \kappa = \Omega \frac{k}{k+1}$$

A k paramétert beszoríthatjuk két szélsőséges eset közé. Ha a golyónak a teljes tömege a középpontjában koncentrálódik, akkor $k = 0$, ha viszont teljes tömege a gömbfelszínen van, akkor $k = 1$. Homogén gömb esetén pedig $k = 2/5$. Ekkor a κ konstans értéke 0 és $1/2$ közé esik, homogén gömb esetén $\kappa = 2/7$.

Vagyis a gördülés egy kapcsolódást jelent a haladó- és a forgómozgás között, melynek áttételét a tehetetlenségi paraméterek befolyásolják. Ha a tömeghez képest kicsi a tehetetlenségi nyomaték, akkor a gördülésnél fellépő erő hatása a forgásra jelentős, a súlypont mozgására kevésbé jelentős lesz. Ha a tehetetlenségi nyomatékot növeljük, akkor a gördülés egyre nagyobb részben ad át impulzust a súlypontnak is.

Ezek a megállapítások tisztán most csak ebből a modellből vonhatók le, azonban jellegre igazak bonyolultabb alakú testek és terhelések esetén is.

Ha integráljuk a (59) egyenletet, és figyelembe vesszük az $x(0) = x_0$ és $y(0) = y_0$ kezdeti feltételeket, az alábbi megoldás adódik:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 - \frac{1}{\beta} v_{y0} \\ y_0 + \frac{1}{\beta} v_{x0} \end{bmatrix} \quad (60)$$

A mozgás körmozgás, melynek középpontját a kezdeti feltételek határozzák meg. Az egyenlet utolsó tagja adja a kör középpontját. Az első mátrixtényező mutatja, hogy a körmozgásnak megfelelően a középponthez képesti vektor kilencven fokot siet a sebességvektor irányához képest. A kör sugarát is egyszerűen számíthatjuk:

$$\rho = \frac{\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}}{\beta}$$

Érdekességgé válhat megemlíteni, hogy a mozgás analógiába hozható a síkmozgást végző töltött részecske mozgásával, melyre rá merőleges mágneses mező hat. Ha pedig az asztal nem csak forogna, hanem egyenletesen gyorsulna, akkor annak hatása az analóg modellben homogén elektromos mezőnek felelne meg.

A szögsebességekre a megoldást a kényszer egyenletek adják. Átrendezve (43)-t kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} = \frac{\Omega}{R} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Beírva eddigi eredményeinket adódik:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} = \frac{mR}{\Theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{bmatrix} + \frac{\Omega}{R} \begin{bmatrix} x_0 - \frac{1}{\beta} v_{y0} \\ y_0 + \frac{1}{\beta} v_{x0} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Vagyis a szögsebességvektor is valamilyen értelemben körmozgást végez, az $\omega_x - \omega_y$ síkon. Érdekes, hogy a „kör” középpontja nem zérus, hanem az indítási állapottól függő konstans érték. Látható, hogy a szögsebesség már erősen függ attól, hogy a mozgás hol zajlik a síkon. Ez azért érdekes, mert a különböző helyről azonos kezdősebességgel elindított golyók sebessége megegyezik a mozgás során, viszont szögsebességük különböző lesz.

Fejezzük ki az Euler-szögek deriváltjait. Az (55) egyenletet átalakítva kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} \quad (62)$$

A bal oldalon álló két komponenst a szögsebességek ψ irányú elforgatásával kapjuk.

Ezek már nem oldhatók meg analitikusan, numerikus megoldásukkal később foglalkozunk. Az explicit megadáshoz a második egyenletet el kell osztanunk $\cos \vartheta$ -val, ami csak nem szinguláris helyeken lehetséges.

4.5. Nemideális gördülés modellezése

Egész levezetésünkben feltételeztük, hogy a gördülés ideális, vagyis a felületeknek csak egy érintkezési pontjuk van, melynek sebessége zérus. Ezzel a modellel elhanyagoltunk egy sor rugalmas és disszipatív jelenséget. A rugalmas jelenségek modellezése gyökeresen más modellt kívánna, azonban a disszipatív jellemzőkkel könnyen kiegészíthetjük modellünket.

Olyan egyszerű elemekkel bővítjük a modellt, melyek nem változtatják meg a kinematikai leírást, hanem csak dinamikai vonatkozásban jelentkeznek. A csillapítási tagok általában testek relatív mozgását igyekeznek megakadályozni. A felületek között két jellemző mozgás van, a felületek mentén történő gördülés és a felületek érintősíkjában való elfordulás.

Mindkét esetben feltételezhetjük, hogy a valóságban egy kis mértékű deformáció miatt nem egyetlen pont, hanem egy kis felület érintkezik. A deformáció miatt a felületek az érintkezési pont közelében elcsúsznak egymáson.

Az ellenállási erők nagyon sok tényezőtől függhetnek. Most csak golyós példánkra koncentrálnunk, feltevéseink nem általánosak. Célunk megfigyelni a disszipatív jelenségek hatását a gördülésre.

A legegyszerűbb modellt, ha az ellenállást kizárólag a sebességektől függőnek tekintjük. Ez nem nagyon rossz feltételezés, hiszen esetünkben a felületeket összeszorító erő állandó. Mivel a kinematika szerint csak egy pontos érintkezés van, ezért nem vehetünk fel koncentrált erőket, hiszen ezek teljesítménye zérus lenne. Ezért az ellenállásokat nyomatékként feltételezzük.

Láttuk, hogy elég jól elkülöníthető a gördülés az érintősíkban történő forgástól, ezért a két jelenség ellenállását külön-külön vizsgáljuk.

4.5.1. Gördülési ellenállás

Legyen a gördülési ellenállás a változók közül kizárólag az érintési pont vándorlási sebességétől függő mennyiség. A nyomaték legyen merőleges a sebességvektorra és az $\mathbf{n}$ felületi normális egységvektorra egyaránt. Legyen az érintési pont vándorlási sebessége $\hat{\mathbf{v}}$. Az eddigiek alapján az ellenállás nagysága:

$$\mathbf{M}_g = -\frac{\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}}{|\hat{\mathbf{v}}|} f(|\hat{\mathbf{v}}|)$$

Fejtsük sorba az f függvényt és vegyük a lineáris közelítését. Ekkor:

$$\mathbf{M}_g = -\frac{\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}}{|\hat{\mathbf{v}}|} (\mu_g + \nu_g |\hat{\mathbf{v}}|)$$

Példánkban az érintési pont vándorlási sebessége éppen megegyezik a golyó súlypontjának asztalhoz viszonyított sebességével, a kényszerek segítségével pedig a nyomaték a súlypontban ható erővé redukálható. Ezt végigszámolva a következő eredményt kapjuk:

$$\mathbf{F}_g = -\frac{\mu_g}{R} \begin{bmatrix} \frac{\dot{x} + \Omega y}{\sqrt{(\dot{x} + \Omega y)^2 + (\dot{y} - \Omega x)^2}} \\ \frac{\dot{y} - \Omega x}{\sqrt{(\dot{x} + \Omega y)^2 + (\dot{y} - \Omega x)^2}} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\nu_g}{R} \begin{bmatrix} \dot{x} + \Omega y \\ \dot{y} - \Omega x \\ 0 \end{bmatrix}$$

A második tag viszkózus jellegű csillapítás, a koordináták lineáris kifejezése. Ez annyiban tér el a megszokott viszkózus csillapítástól, hogy mivel az asztal forog,

ezért nem egyszerűen a golyó sebességét csökkenti, hanem az Ω -t tartalmazó tagokon keresztül a sebességvektort el is forgatja.

Az első tag nemlineáris száraz súrlódási tag, általában ezt nevezzük gördülési ellenállásnak. Nagysága állandó, iránya a relatív sebességgel ellentétes.

A gördülési körülményektől függően mindkét tagnak szerepe lehet, bár a mozgásra gyakorolt hatásuk - mint később látni fogjuk - hasonló.

Mivel a relatív mozgást befolyásolják, teljesítményük nem feltétlenül negatív. Számítsuk ki a viszkózus tag teljesítményét:

$$P_v = -\frac{\nu_g}{R}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mu_1}{R}\Omega(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Az első tag energiát vesz el a rendszertől, a második előjele azonban lehet pozitív is. Ha a szögsebesség nagy, akkor ez utóbbi tag a meghatározó, így a csillapítás energiát ad a rendszerhez. Ugyanez áll a gördülési tagra is, csak ott az erők a relatív sebesség nagyságával normálva vannak.

4.5.2. Felületi forgási ellenállás

Megállapítottuk, hogy a gördülő- és érintőkényszerek nem befolyásolják a két felület közös érintősíkjában történő relatív elfordulást. A valóságban egy kis felület ér össze, melynek pontjai relatív elfordulásakor elcsúsznak egymáshoz képest, ezt igyekszik akadályozni egy súrlódási nyomaték. Itt nem foglalkozunk a száraz súrlódási, csupán a viszkózus hatással.

Példánkban a felületek érintősíkjá a z síkkal párhuzamos, így a viszkózus nyomaték is z irányba fog esni. A forgóasztal szögsebessége minden pontban Ω , a golyóé pedig $s_3 = \omega_z$. Ezért a csillapítás nyomatéka:

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\nu_f(\omega_z - \Omega) \end{bmatrix}$$

Ezen csillapítás teljesítménye negatív, ha a ω_z forgás gyorsabb, mint az asztal szögsebessége, ellenkező esetben viszont energiát ad át a golyónak.

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy egy végtelen nagyságú ν_f tényező esetén határhelyzetben az $\omega_z - \Omega$ feltételt kapjuk, ez pedig éppen az az eset, amikor a Kozlov-egyenlet érvényes, vagyis ekvivalens a Newton-egyenlettel.

4.5.3. Közegellenállás

A csillapítási hatások nem csak a két felület között léphetnek fel, hanem a mozgó golyó és a levegő között is. A hatások közül csekélyebb a golyó szögsebességével arányos légellenállás, de ezt egyébként is bele lehet foglalni a fentebb használt ν_g konstansba. A jelentősebb a golyó sebességével arányos csillapítás, melyet általánosan a következő alakban írhatunk:

$$\mathbf{F}_k = -\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} f(|\mathbf{v}|)$$

A gyakorlatban használt lineáris és másodrendű tagot figyelembe véve:

$$\mathbf{F}_k = -\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} (\nu_k |\mathbf{v}| + \delta_k |\mathbf{v}|^2)$$

Esetünkben a közeg-ellenállási erő:

$$\mathbf{F}_k = -\nu_k \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} - \delta_k \begin{bmatrix} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.5.4. A csillapított mozgásegyenletek

A fenti csillapításokat figyelembe véve a (51) egyenlet a következőképp módosul:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} mR^2 + \Theta & 0 \\ 0 & mR^2 + \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_k R^2 + \nu_g R & \Theta \Omega \\ -\Theta \Omega & \nu_k R^2 + \nu_g R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \nu_g R \Omega \\ -\nu_g R \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \\ & + \mu_g R \begin{bmatrix} \frac{\dot{x} + \Omega y}{\sqrt{(\dot{x} + \Omega y)^2 + (\dot{y} - \Omega x)^2}} \\ \frac{\dot{y} - \Omega x}{\sqrt{(\dot{x} + \Omega y)^2 + (\dot{y} - \Omega x)^2}} \end{bmatrix} + \delta_k R^2 \begin{bmatrix} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

Az egyenletek közül még a z irányú forgást leíró változik meg:

$$\Theta \dot{s}_3 = -\nu_f (\omega_z - \Omega)$$

Ha csak a lineáris tagokat vesszük figyelembe, akkor az egyenlet továbbra is vizsgálható lenne analitikusan. Ehelyett most azonban egyszerű numerikus szimulációval vizsgáljuk az egyenlet viselkedését mind csillapítás nélküli, mind csillapított esetben.

4.6. Numerikus szimuláció

A numerikus szimulációt Maxima környezetben készítettük el, mely a Maple programhoz hasonló platformfüggetlen szabad felhasználású számítógép-algebrai szoftver.

A többféle felírt egyenletrendszer közül az Appell-egyenletnél kapott (54-56) nyolc dimenziós egyenletrendszert szimuláltuk. Megoldó algoritmusnak negyedrendű fix lépésközű Runge-Kutta megoldót használunk.

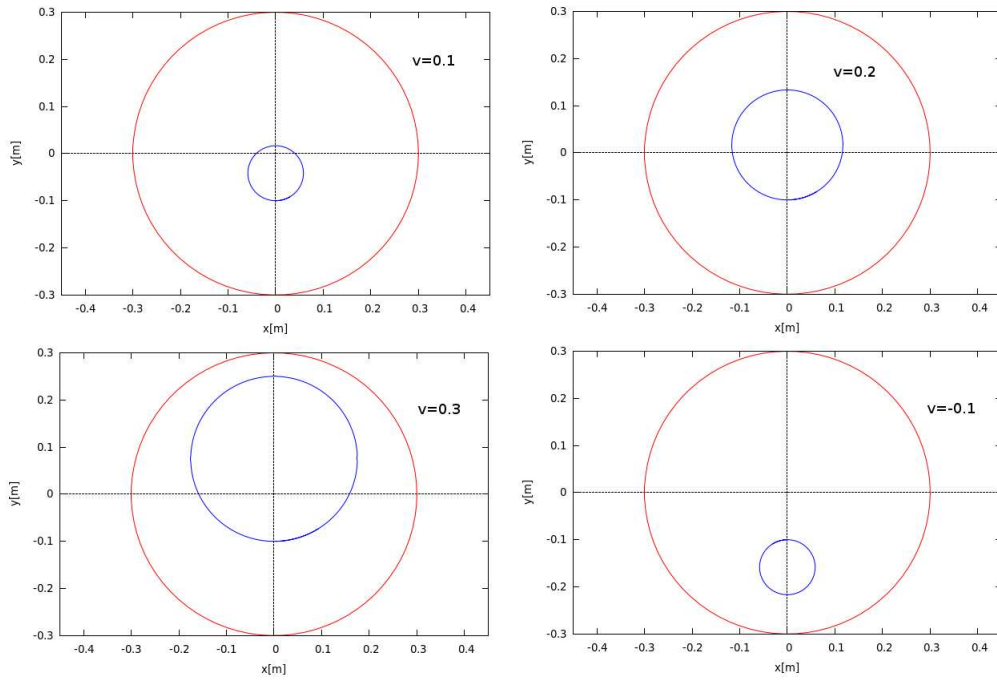
4.6.1. A golyó mozgása

A paraméterek számának csökkentése érdekében érdemes lenne az egyenleteket dimenziótlanítani. Ezt most nem tesszük meg, de a mértékegységek számának megfelelően lerögzíthetünk három paramétert anélkül, hogy az általánosságból vesztenénk.

Legyen ezért a golyó sugara $R = 0.01$ [m], tömege $m = 0.03$ [kg], az asztal fordulatszáma pedig $\Omega = 6$ [s⁻¹]. Ha még tömör gömböt is feltételezünk, akkor $k = 0.4$.

Ekkor súrlódásmentes esetben lerögzítettünk minden paramétert, a mozgásnál elegendő csak a kezdeti feltételeket változtatni.

Az egyenletekből már analitikusan megkaptuk, hogy a golyónak körpályán kell mozognia. A körpálya kizárólag a kezdősebességtől függ. Az ábrán látható néhány indítás, amely igazolja ezt a feltevést. A kezdősebességek 0.1-0.3 m/s között változik az ábrán látható pályáknál. A külső kör csak a forgóasztal szélét akarja jelképezni.

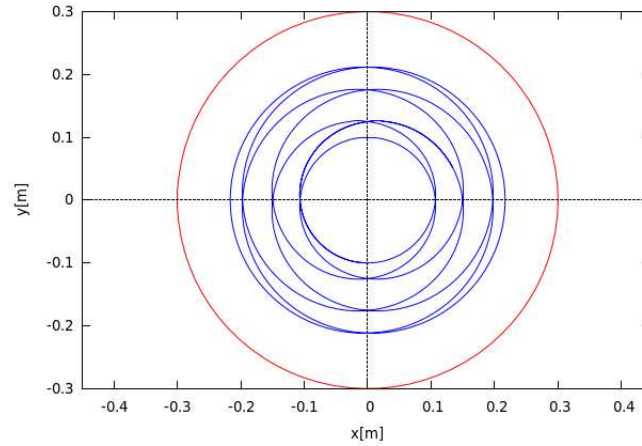
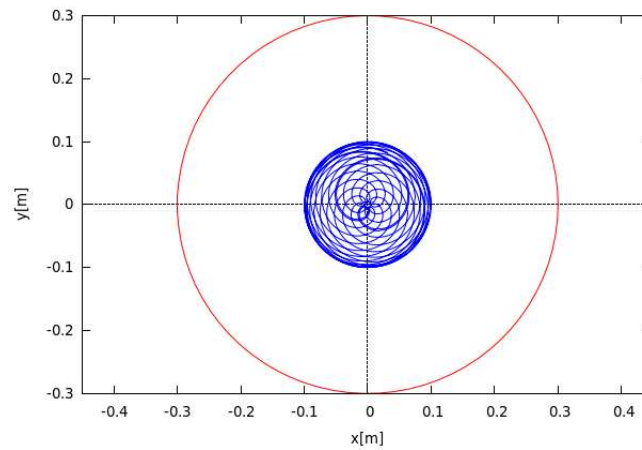


8. ábra. A golyó mozgása a forgóasztalon

4.6.2. A relatív mozgás

Érdekes a golyó mozgását az asztalhoz rögzített koordináta-rendszerben is vizsgálni. Elvileg ez is számolható analitikusan. Az eredményeket a diagramok mutatják.

A furcsa görbéket kétfajta periodikus mozgás, az asztal forgása és golyó körmozgása együtt okozza. Ha a k tényező racionális szám, akkor a frekvenciák aránya is racionális, így a görbe visszatér önmagába. Tömör gömb esetén a frekvenciaarány

9. ábra. A golyó relatív mozgása racionális k esetén10. ábra. A golyó relatív mozgása irracionális k esetén

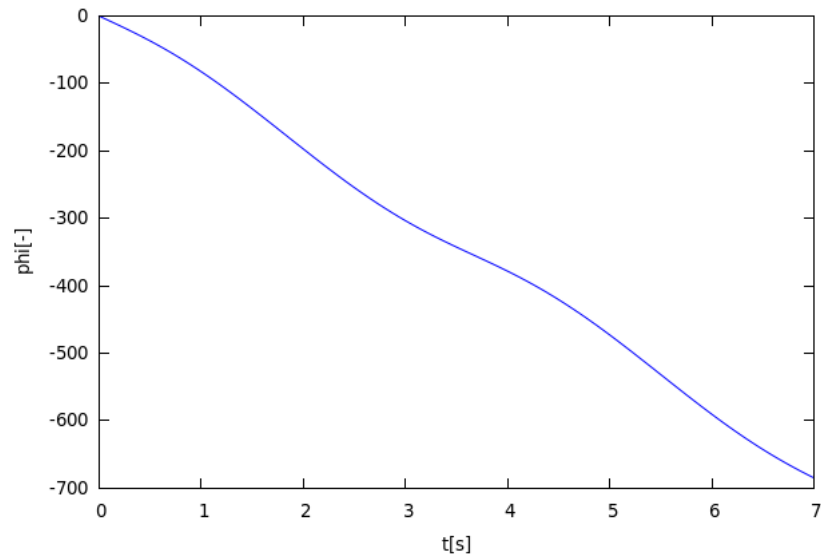
$2/7$, emiatt tudunk megszámolni 7, illetve 14 görbét. Ha a frekvenciaarány irracionális, akkor furcsa mintázatokot rajzol ki a mozgás.

4.6.3. Az Euler-szögek változása

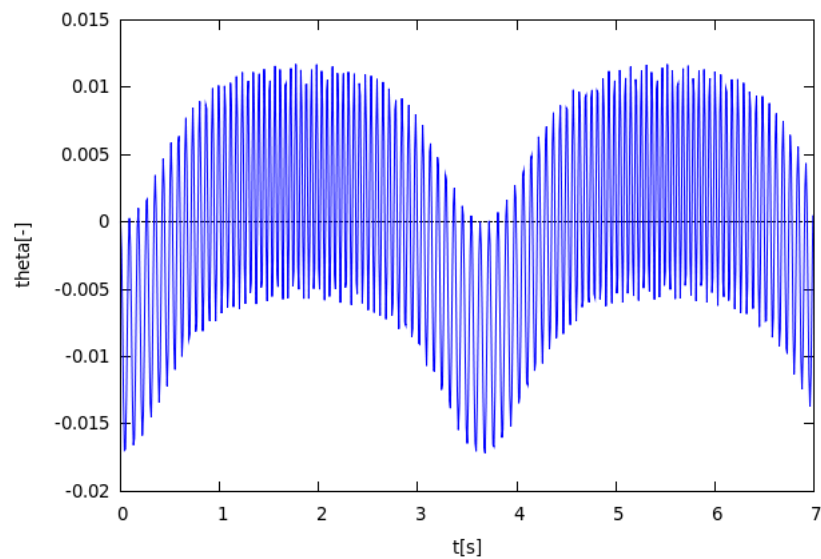
A golyó tömegközéppontjának mozgása meglehetősen egyszerű. Közben azonban az Euler-szögek mozgását is érdemes vizsgálni. A következő szimulációk $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{y0} = 0$ kezdeti feltételek mellett készültek. Az x irányú kezdősebességet negatív és pozitív irányban 0.1 méter per szekundumra választjuk, hogy megfigyeljük a forgásirányban és azzal ellentétesen történő indításkor az Euler-szögek viselkedését.

Indítsuk először el a golyót a forgásiránnyal szemben. Az alábbi eredményeket

kapjuk:

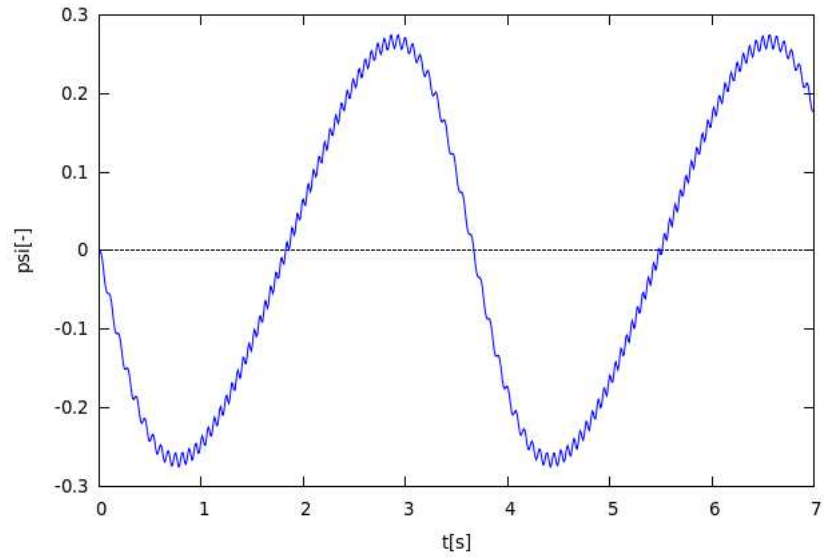


11. ábra. A φ koordináta változása ellenirányú indításkor

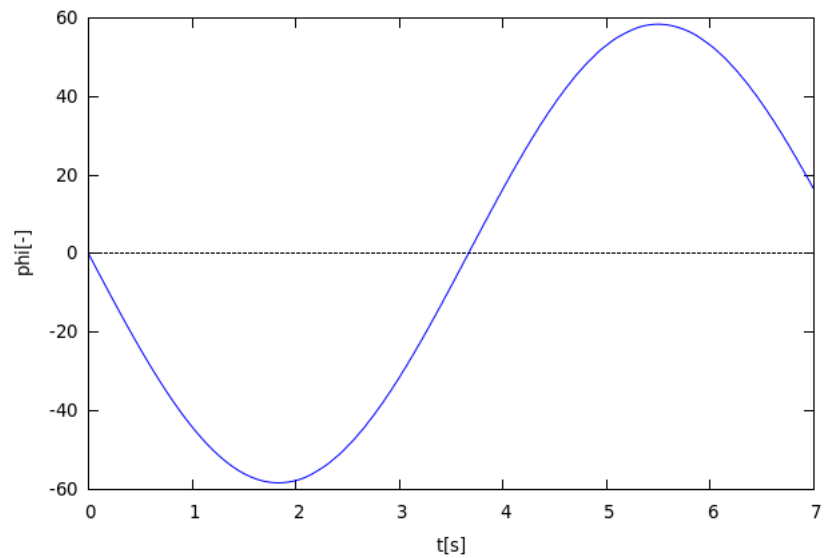


12. ábra. A ϑ koordináta változása ellenirányú indításkor

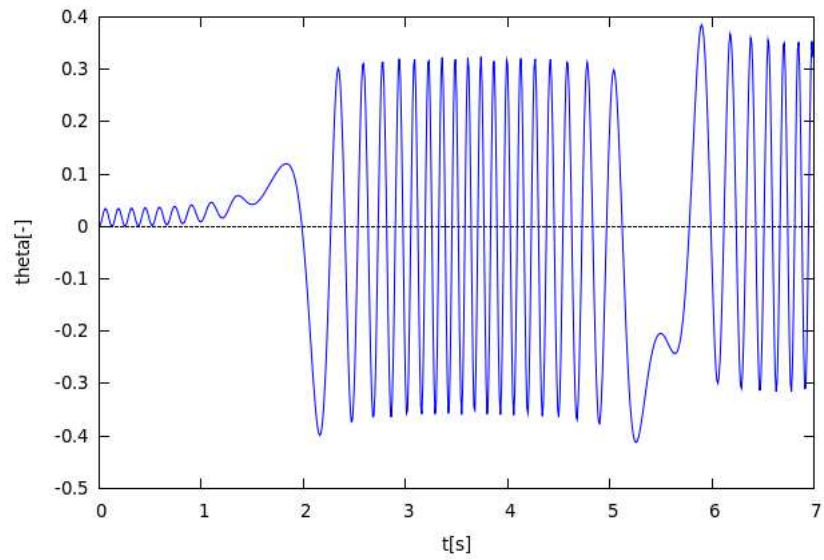
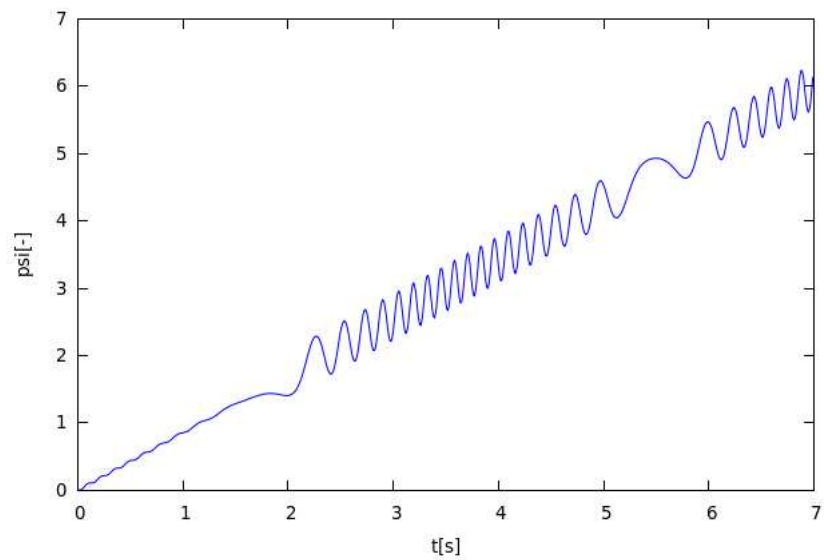
Azt tapasztaljuk, hogy a φ koordináta közel egyenletes mozgást végez. A másik koordináta kitérése kis mértékű, mind a kettőben megjelenik a φ forgásából származó nagyfrekvenciás rezgés. Összességében a gömbön az érintési pont helye közel egy körön marad, csak kis mértékben mozog odébb.

13. ábra. A ψ koordináta változása ellenirányú indításkor

Ha forgásirányban indítjuk el a golyót, drasztikusan más eredményt kapunk:

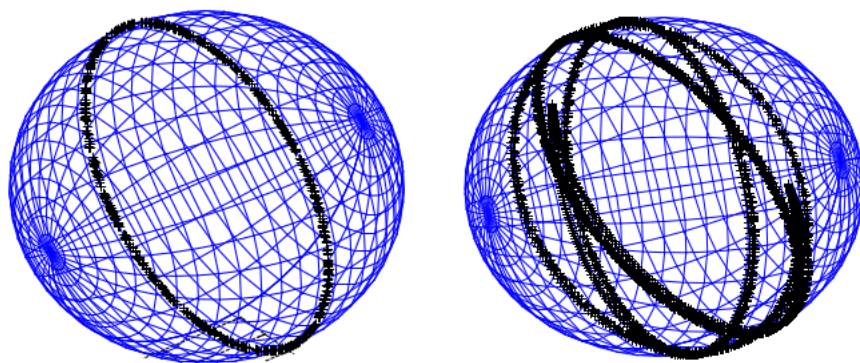
14. ábra. A φ koordináta változása forgásirányú indításkor

A φ most szinuszos jellegű mozgást fog végezni, viszont a másik két koordináta kitérése nagyon megnő az előző esethez képest, és viselkedésük kaotikussá válik. Az érintési pontok helye gömbön sokkal változatosabb helyekre jut el, mint ahogy az alábbi ábrán is látható:

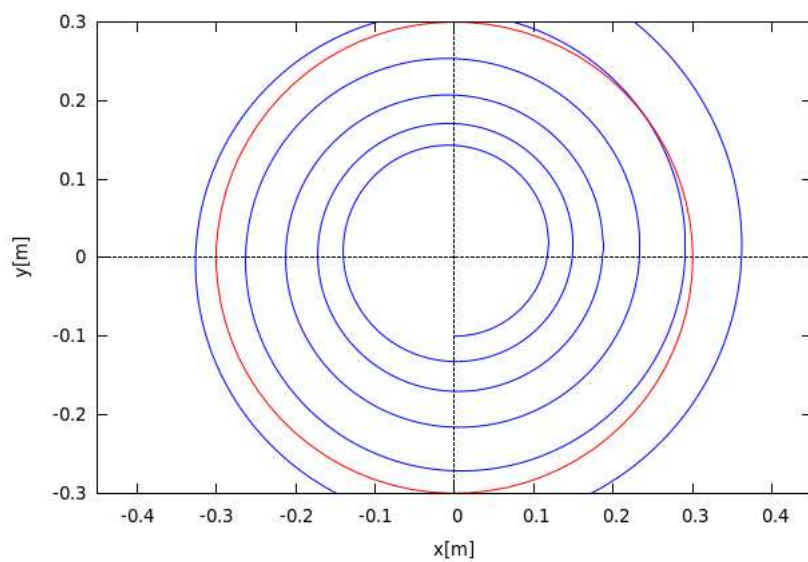
15. ábra. A ϑ koordináta változása forgásirányú indításkor16. ábra. A ψ koordináta változása forgásirányú indításkor

4.6.4. Mozgás csillapított esetben

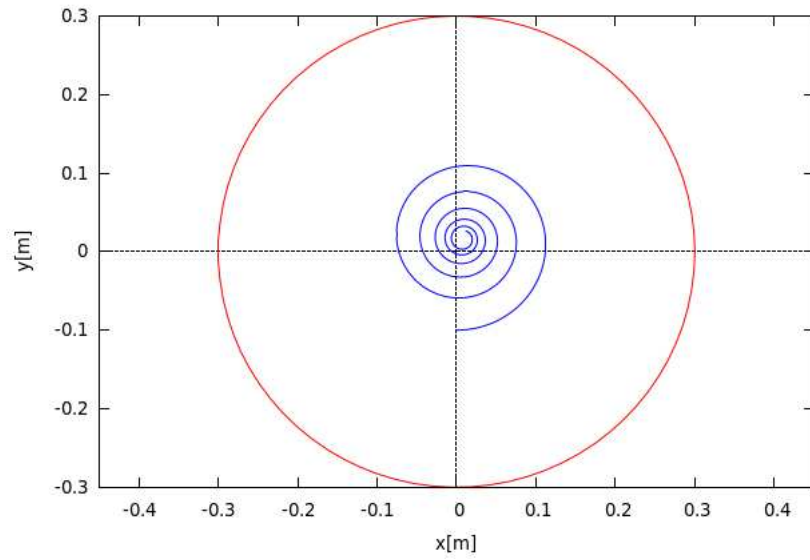
Mint már említettük, a gördülési csillapítás (mind a viszkozus, mind a száraz) instabilitást okoz, melyet a szimuláción is jól megfigyelhetünk. A közegellenállás viszont növeli a stabilitást és energiát von el a mozgástól. A kétfajta hatás megfelelő aránya esetén stacionárius pályák alakulhatnak ki.



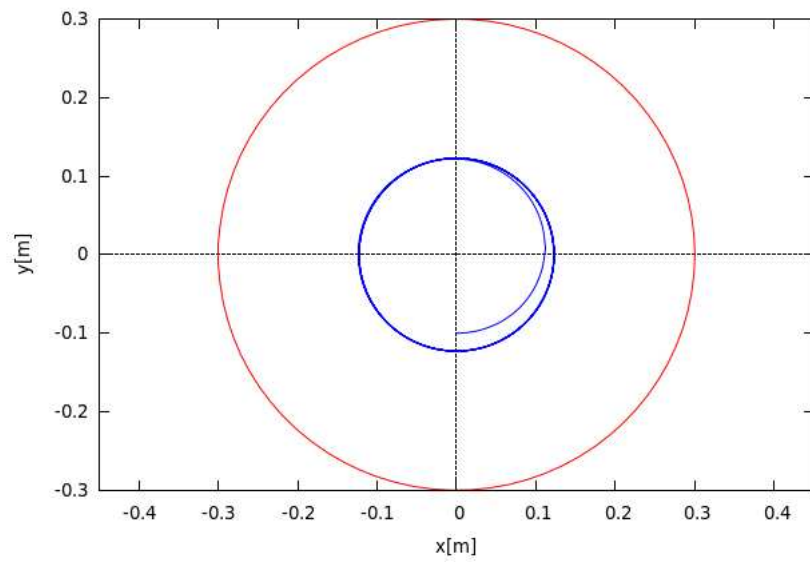
17. ábra. Az érintési pont vándorlása a gömbön ellen- és forgásirányú indításkor



18. ábra. A gördülési ellenállás hatása



19. ábra. A közegellenállás hatása



20. ábra. A görbülési ellenállás és közegellenállás együttes hatása

Összegzés

A dolgozatban áttekinthettük a térbeli gördülések különböző kinematikai jellemzőit. Célunk a téma elméleti megalapozása volt további számításokhoz. Megfigyeltük, hogy a térbeli gördülés lényegileg lesz bonyolultabb a síkbelinél, és nagyon sok módszer problémákba ütközik, ha a térbeli gördülésre akarjuk alkalmazni.

A forgóasztalon gördülő golyó példáján megfigyelhettünk a gördülésre jellemző jelenségeket, és megnéztük, hogy a különféle mozgásegyenlet-felírási módszerekben hogyan jelentkezik a gördülés hatása. A gördülés leírásának bonyolultságát a térbeli forgások szerkezete és az anholonom kényszerek együttesen adják.

Pedig mindez nem más, mint a létező legegyszerűbb modell a gördülésre. A tapasztalatok szerint a rugalmas hatások nem elhanyagolhatóak. A bonyolultabb modellek megegyeznek abban, hogy valamilyen módon végtelen szabadsági fokú differenciálegyenleteket, parciális- vagy késleltetett egyenleteket használnak. Fontos kérdés, hogy az egy pontos gördülés kinematikai problémái közül mennyi őrződik meg, mennyi oldódik meg, és mennyi lesz még bonyolultabb, ha áttérünk a folytonos modellekre.

A forgóasztalon gördülő golyó hihetetlen egyszerűségében rejlő meglepő bonyolult belső viselkedés alázatosságra és óvatosságra inti a tudománnyal foglalkozót. A világ, amelyet képleteinkkel igyekszünk úgy-ahogy modellezni, már egy gyerekjátékban is rejthet olyan mély problémát, ahova már nem ér el csekélyke emberi tudásunk.

ad maiorem Dei gloriam

Hivatkozások

- [1] Lewis, A.D. - Murray, R.R.: *Variational principles for constrained systems: theory and experiment*, Non-Linear Mechanics, 793-815 1995
- [2] Kozlov, V.V: *Realization of nonintegrable constraints in dynamics*, J. Applied Math. Mechanics, 594-600, 1992
- [3] Stépán Gábor - Béda Gyula: *Analitikus mechanika*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2000
- [4] Szőkefalvi-Gehér-Nagy: *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979
- [5] Farkas Miklós - Sonkoly Pál: *Differenciálgeometria és vektoranalízis*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2000