



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

TDK dolgozat

Kerék stabilizálása libikókán „Ball-and-beam”

Készítette:

Borda Péter

Mechatronikai mérnök BSc., IV. évfolyam



Konzulensek: dr. Stépán Gábor, Zelei Ambrus

2011. október

Tartalom

1. Bevezetés	3
2. A rendszer mechanikai modellje	4
2.1. Kinematikai mennyiségek meghatározása	5
2.2. A mozgásegyenlet felírása	7
2.3. A matematikai modell linearizálása.....	8
3. Analóg szabályozó tervezése	10
3.1. A matematikai modell átalakítása: állapotter modell	10
3.2. A szabályozhatóság kérdése.....	12
3.3. Stabilizálás állapot-visszacsatolással.....	13
3.4. A stabilitás ellenőrzése numerikus szimulációval.....	16
3.5. Szabályozó optimalizálása	18
3.6. Értékkövető szabályozás megvalósítása	20
4. Digitális szabályozó tervezése	22
4.1. Stabilitásvizsgálat mintavételes esetben	23
4.2. Digitális pozíciósabályozás	28
5. Összefoglalás.....	31
6. Források.....	32

1. Bevezetés

Gyermekek kedvenc játéka a libikóka, érdekes dinamikai viselkedése miatt. Érdekes játszótéri feladat, hogy a libikókára helyezett focilabdát próbáljuk megállítani a libikóka adott helyén esetleg, hogy megfelelő ütemben balra-jobbra tudjuk mozgatni előírt pálya mentén.

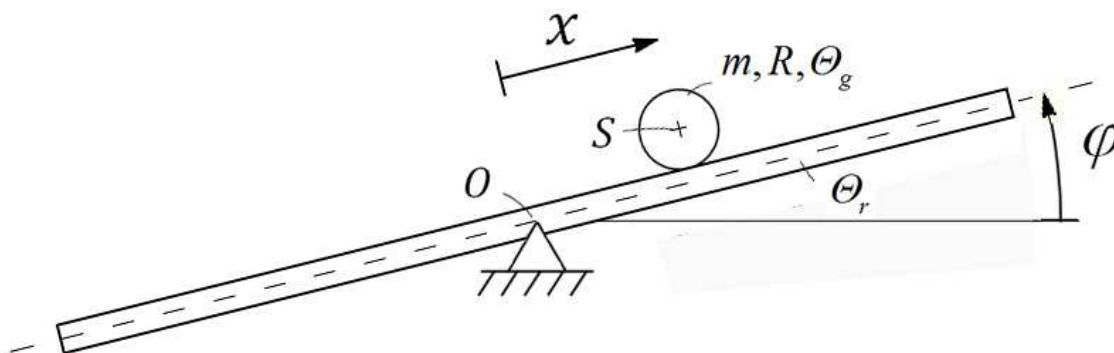
Napjaink mérnöki gyakorlatában egyre gyakrabban találkozhatunk olyan dinamikai problémákkal, ahol a rendszer szabadsági fokainak száma nagyobb a beavatkozó erők számánál. Az ilyen, úgy nevezett alulaktuált rendszerek szabályozása kihívást jelent, azonban korántsem megoldhatatlan feladat.

Dolgozatom első részében az alulaktuált rendszerek egy egyszerű modelljének, a „ball-and-beam” rendszernek a kiszámított nyomaték szabályozásához szükséges lépéseit mutatom be, természetesen azzal a céllal, hogy a libikókán gördülő golyót előre meghatározott pozícióban illetve pályán tartsam.

Adott rendszerparaméterek esetén vizsgálom az egyébként instabil rendszer szabályozhatóságát, valamint a rendszer stabilizálásához szükséges szabályozó jellemzőket időben folytonos (analóg) esetben, állapot-visszacsatolást alkalmazva. A kapott 4 dimenziós stabilitási térképekre alapozva szimulációval ellenőrzöm az eredmények helyességét. Az analóg szabályozás után a stabilitási vizsgálatot elvégzem digitális rendszer esetén is, adott mintavételezési idők mellett.

2. A rendszer mechanikai modellje

Ahhoz, hogy tetszőleges rendszert szabályozni tudjunk, fel kell írunk annak mozgásegyenleteit. Ehhez először megalkotjuk a rendszer mechanikai modelljét, majd innen kiindulva már kinematikai és dinamikai alapösszefüggéseket használva képesek leszünk meghatározni a „ball-and-beam” rendszer mozgását leíró differenciálegyenleteket. A libikókán gördülő golyó modelljének megértéséhez tekintsük az 1. ábrát.



1. ábra, A rendszer egyszerűsített modellje

A rendszert modellezzük, mint egy középen csapágyazott téglalap keresztmetszetű, elhanyagolható magasságú rudat, és egy rajta elhelyezett tömör golyót. Tekintsük most el annak problémájától, hogy a golyó oldalirányban le tud gurulni pályájáról, tegyük fel, hogy annak a rúd hossz tengelyére merőleges mozgása például vályú kialakításával meg van gátolva. Emellett éljünk azzal az egyszerűsítéssel, hogy a golyó gördül és nem csúszik mozgása közben. Rendszerünk fizikai paraméterei a következők: m a golyó tömege, R a golyó sugara, Θ_g a golyó tehetetlenségi nyomatéka saját súlypontján átmenő tengelyre, Θ_r a rúd tehetetlenségi nyomatéka az O ponton átmenő, rajz síkjára merőleges tengelyre és g a gravitációs gyorsulás. A stabilitás vizsgálata során ezek értékére megfelelő becslést teszünk. Rendszerünk pillanatnyi konfigurációjának egyértelmű meghatározásához két általános koordinátára van szükségünk:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Eszerint két szabadsági fokú rendszerrel van dolgunk. A továbbiakban a két koordináta pozitív irányát az 1. ábrának megfelelően értelmezzük.

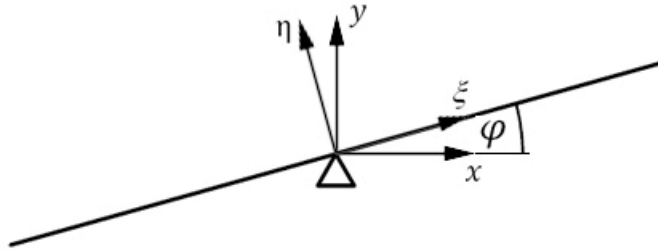
2.1. Kinematikai mennyiségek meghatározása

A mozgásegyenletek felírásához a másodfajú Lagrange-egyenletet fogjuk használni, ehhez pedig feltétlen ismernünk kell a rendszer tagjainak mozgásállapotát.

Tekintsük előbb a *rudat*. Ennek O pontja tartós nyugalomban, a pont nem mozdulhat el, így a mozgását jellemző kinematikai vektorkettős:

$$[\boldsymbol{\omega}_{\text{rúd}}, \mathbf{v}_O]_O = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]_O \quad (2.2)$$

A *golyó* mozgásának pontos leírásához a relatív kinematika eszközeit használjuk. A rúdhoz rögzített ξ, η mozgó (relatív) koordináta rendszer és az x, y álló (abszolút) koordináta rendszer értelmezésére tekintsük a 2. ábrát.



2. ábra Koordináták értelmezése

Ennek megfelelően előállítható egy $\mathbf{T}$ transzformációs mátrix, mellyel a relatív és az abszolút koordináták közötti koordináta transzformáció lehetségessé válik. A feladat síkbeli, a mátrix felírását mégis célszerű 3 dimenzióban megtenni, a későbbiekben úgyis térbeli vektorokkal számolunk.

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$\begin{matrix} (\xi, \eta, \zeta) \\ \downarrow \\ (x, y, z) \end{matrix}$

A test S tömegközéppontjának sebessége az abszolút rendszerből nézve:

$$\mathbf{v}_S = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_{S, \text{száll}} \quad (2.4)$$

ahol $\boldsymbol{\beta}$ a test relatív sebessége, azaz a test sebessége a mozgó koordináta rendszerhez képest, $\mathbf{v}_{S, \text{száll}}$ pedig a mozgó koordináta rendszer S pontjának sebesség állóhoz viszonyítva. A képlet alkalmazásának fontos feltétele, hogy a vektorokat ugyanabban a koordináta rendszerben kell felírni, csak így összegezhetők ugyanis. Határozzuk meg a (2.3)

transzformáció segítségével a (2.4) képletben szereplő vektorokat figyelembe véve, hogy O tartósan álló pont, sebessége tehát zérus.

$$\underset{(\xi, \eta, \zeta)}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{(x, y, z)}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{(\xi, \eta, \zeta)}{\mathbf{T}} \cdot \underset{(\xi, \eta, \zeta)}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos \varphi \\ \dot{x} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\underset{(\xi, \eta, \zeta)}{\mathbf{r}_{OS}} = \begin{bmatrix} x \\ R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{(x, y, z)}{\mathbf{r}_{OS}} = \underset{(\xi, \eta, \zeta)}{\mathbf{T}} \cdot \underset{(x, y, z)}{\mathbf{r}_{OS}} = \begin{bmatrix} x \cos \varphi - R \sin \varphi \\ x \sin \varphi + R \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\underset{O}{\mathbf{v}_S} = \underbrace{\mathbf{v}_O}_0 + \underset{(x, y, z)}{\boldsymbol{\omega}} \times \underset{(x, y, z)}{\mathbf{r}_{OS}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \cos \varphi - R \sin \varphi \\ x \sin \varphi + R \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x\dot{\varphi} \sin \varphi - R\dot{\varphi} \cos \varphi \\ x\dot{\varphi} \cos \varphi - R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\underset{S}{\mathbf{v}} = \underset{S}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{S, száll}{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos \varphi - x\dot{\varphi} \sin \varphi - R\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{x} \sin \varphi + x\dot{\varphi} \cos \varphi - R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Jelölje a gördülő golyó szögsebességét a rúdhoz képest:

$$\underset{rel}{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Ekkor a golyó szögsebessége a relatív kinematika összefüggései alapján az abszolút koordináta rendszerben:

$$\underset{golyó}{\boldsymbol{\omega}} = \underset{rel}{\boldsymbol{\omega}} + \underset{száll}{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} - \frac{\dot{x}}{R} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

A golyó pillanatnyi mozgásállapotát jellemző vektorkettős tehát (2.8) és (2.10) felhasználásával:

$$\left[\underset{golyó}{\boldsymbol{\omega}}, \underset{S}{\mathbf{v}_S} \right]_S = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} - \frac{\dot{x}}{R} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{x} \cos \varphi - x\dot{\varphi} \sin \varphi - R\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{x} \sin \varphi + x\dot{\varphi} \cos \varphi - R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right]_S. \quad (2.11)$$

2.2. A mozgásegyenlet felírása

A rendszer kinematikai viszonyainak ismeretében felírhatjuk annak mozgási energiáját, disszipációs és potenciális energiáit, majd ezeket felhasználva a másodfajú Lagrange-egyenletet, melynek általános alakja ^[1]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k(t) \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

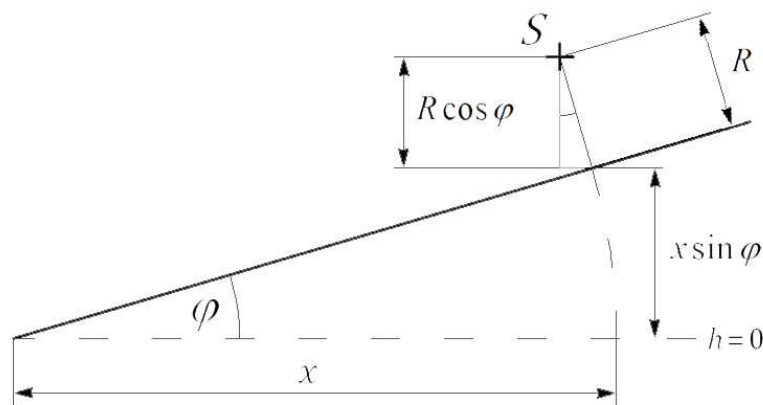
ahol T a rendszer kinetikus energiája, $D = 0$ mivel a disszipatív erőket elhanyagoljuk, U a nehézségi erő potenciálfüggvénye, Q_k pedig az általános erők vektorának k -adik komponense. A rendszer mozgási energiája:

$$T = \frac{1}{2} \Theta_r \omega_{rúd}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_g \omega_{golyó}^2. \quad (2.13)$$

Behelyettesítve (2.2) és (2.11) összefüggéseket, valamint figyelembe véve, hogy a golyó tehetetlenségi nyomatéka a saját súlypontján átmenő tengelyre $\Theta_g = \frac{2}{5} m R^2$, a mozgási energia alakja:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \Theta_r \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + (x^2 + R^2) \dot{\varphi}^2 - 2R\dot{x}\dot{\varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 \left(\frac{\dot{x}^2}{R^2} + \dot{\varphi}^2 - \frac{2}{R} \dot{x}\dot{\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\Theta_r + m \left(x^2 + \frac{7}{5} R^2 \right) \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{7}{10} m \dot{x}^2 - \frac{7}{5} m R \dot{x}\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A potenciálfüggvény felírásához használjuk fel a 3. ábrát:



3. ábra, h magasság értelmezése

A potenciálfüggvény tehát:

$$U = mgh = mg(x \sin \varphi + R \cos \varphi). \quad (2.15)$$

Ismerve (2.14) és (2.15) függvényeket a rendszert egyértelműen leíró mozgásegyenletek könnyen előállíthatók a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével. A megfelelő deriválásokat a (2.1) képletben szereplő általános koordinátáknak megfelelően előállítva az alábbi két egyenletből álló, nemlineáris differenciálegyenlet rendszer adódik:

$$\left[\Theta_r + m \left(x^2 + \frac{7}{5} R^2 \right) \right] \ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} - \frac{7}{5} mR\ddot{x} + mg (x \cos \varphi - R \sin \varphi) = 0 \quad (2.16)$$

$$-\frac{7}{5} mR\ddot{\varphi} + \frac{7}{5} m\ddot{x} - mx\dot{\varphi}^2 + mg \sin \varphi = 0 . \quad (2.17)$$

Ugyanezt a két egyenletet kapjuk, ha szabadtest ábrákat használunk, a két test között ideális kényszererőket felvéve, mint ismeretleneket, majd azokat kirendeazve az egyenletekből.

2.3. A matematikai modell linearizálása

Ahhoz, hogy a rendszerhez szabályozót tudjunk tervezni előbb linearizáljuk az imént kapott két mozgás-egyenletet a $\mathbf{q}_0^T = [\varphi_0 \ x_0 \ \dot{\varphi}_0 \ \dot{x}_0] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ egyensúlyi helyzetnél. Használjuk fel a linearizálás általános képletét.

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{q}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (2.18)$$

Az $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ függvényt tekintsük négyváltozós vektor-vektor függvénynek, melynek komponensei rendre (2.16), (2.17) egyenletek bal oldala.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\varphi, x, \dot{\varphi}, \dot{x}) = \begin{bmatrix} \left[\Theta_r + m \left(x^2 + \frac{7}{5} R^2 \right) \right] \ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} - \frac{7}{5} mR\ddot{x} + mg (x \cos \varphi - R \sin \varphi) \\ -\frac{7}{5} mR\ddot{\varphi} + \frac{7}{5} m\ddot{x} - mx\dot{\varphi}^2 + mg \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Ezt szem előtt tartva végezzük el a (2.18) által kijelölt műveleteket!

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} \left[\Theta_r + \frac{7}{5} mR^2 \right] \ddot{\varphi} - \frac{7}{5} mR\ddot{x} \\ -\frac{7}{5} mR\ddot{\varphi} + \frac{7}{5} m\ddot{x} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} = \begin{bmatrix} -mgR & mg & 0 & 0 \\ mg & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T = [\varphi \quad x \quad \dot{\varphi} \quad \dot{x}] \quad (2.22)$$

(2.20)-(2.22) kifejezéseket visszaírva (2.18)-ba adódik:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \left[\Theta_r + \frac{7}{5} m R^2 \right] \ddot{\varphi} - \frac{7}{5} m R \ddot{x} - m g R \varphi + m g x \\ -\frac{7}{5} m R \ddot{\varphi} + \frac{7}{5} m \ddot{x} + m g \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

A linearizált mozgásegyenletek tehát:

$$\left[\Theta_r + \frac{7}{5} m R^2 \right] \ddot{\varphi} - \frac{7}{5} m R \ddot{x} - m g R \varphi + m g x = 0 \quad (2.24)$$

$$-\frac{7}{5} m R \ddot{\varphi} + \frac{7}{5} m \ddot{x} + m g \varphi = 0. \quad (2.25)$$

A kapott egyenletrendszert az egyszerűbb átláthatóság kedvéért rendezzük mátrixos alakba:

$$\begin{bmatrix} \Theta_r + \frac{7}{5} m R^2 & -\frac{7}{5} m R \\ -\frac{7}{5} m R & \frac{7}{5} m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m g R & m g \\ m g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

ahonnan meghatározható a rendszer $\mathbf{M}$ tömegmátrixa és $\mathbf{S}$ merevségi mátrixa.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Theta_r + \frac{7}{5} m R^2 & -\frac{7}{5} m R \\ -\frac{7}{5} m R & \frac{7}{5} m \end{bmatrix} [\text{SI}] \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -m g R & m g \\ m g & 0 \end{bmatrix} [\text{SI}] \quad (2.27)$$

A továbbiakban a linearizált mozgásegyenleteket használjuk.

3. Analóg szabályozó tervezése

A fenti differenciálegyenlet rendszer stabilitását megvizsgálva elmondható, hogy a $(\mathbf{q}^*)^T = [\varphi \ x] = [0 \ 0]$ instabilis egyensúlyi helyzetet leszámítva a linearizált rendszer instabil, ami megfelelően tükrözi a valóságot. Ez is szükségessé teszi egy megfelelő szabályozó tervezését célunk, vagyis a golyó mozgásának szabályozása érdekében.

3.1. A matematikai modell átalakítása: állapotter modell

A rendszer szabályozását oly módon kívánjuk megvalósítani, hogy a rúd φ szöghelyzetét és $\dot{\varphi}$ szögsebességét, valamint a golyó x elmozdulását és $\dot{x}$ sebességét mérve, azokból egy egyértelműen meghatározható nyomatékkal hatunk a rendszerre annak O pontjában (lásd 1.ábra). Felhasználva (2.27) jelöléseit:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} M(t) = \mathbf{a} M(t) \quad (3.1)$$

Egyelőre nem jelöljük explicit módon, hogy az $M(t)$ nyomaték, amivel aktuátor a rúdra fog hatni, függ a két általános koordinátától, illetve azok első deriváltjaitól: a későbbiekben ezt is beépítjük a modellbe. Első lépésként (3.1)-ből fejezzük ki a második deriváltakat.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} (-\mathbf{S} \mathbf{q} + \mathbf{a} M(t)), \quad (3.2)$$

ahol

$$-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{mg}{\Theta_r} \\ -\frac{5g}{7} & -\frac{mgR}{\Theta_r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Theta_r} \\ \frac{R}{\Theta_r} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

így

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{mg}{\Theta_r} \\ -\frac{5g}{7} & -\frac{mgR}{\Theta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Theta_r} \\ \frac{R}{\Theta_r} \end{bmatrix} M(t). \quad (3.4)$$

Vezessük be a rendszer pillanatnyi állapotára jellemző, ún. állapotvektort:

$$\mathbf{x}^T = [\varphi \ x \ \dot{\varphi} \ \dot{x}], \quad (3.5)$$

majd ennek felhasználásával írjuk át (3.2)-ot Cauchy-féle normál alakba ^[2].

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{a} \end{bmatrix} M(t) \quad (3.6)$$

Itt $\mathbf{E}$ a 2x2-es egység mátrix. Megjegyzendő, hogy a (3.5) képlettel definiált állapotvektor megegyezik a korábban használt $\mathbf{q}^T = [\varphi \quad x \quad \dot{\varphi} \quad \dot{x}]$ vektorral, pusztán annak jelölését változtattuk meg, hogy az így kapott (3.6) összefüggés alakja formailag illeszkedjen az állapotter modell általános alakjához:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} .\end{aligned}\tag{3.7}$$

ahol $\mathbf{x}$ a rendszer állapotvektora, $\mathbf{u}$ a rendszer bemeneti vektora, $\mathbf{y}$ a rendszer kimeneti vektora. Esetünkben u skalár, mivel egyetlen bemenetünk $M(t) = u_e$ (az index jelentését lásd a 3.3 fejezetben), továbbá y is skalár, ugyanis egyetlen kimenetként számunkra jelenleg a golyó x pozíciója fontos. Ehhez illeszkedve $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok, d skalár. Összevetve (3.6) és (3.7) egyenleteket és figyelembe véve u és y skalár voltát, az állapotter modell egyes elemei az alábbiak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{\Theta_r} & 0 & 0 \\ -\frac{5g}{7} & -\frac{mgR}{\Theta_r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\Theta} \\ \frac{R}{\Theta} \end{bmatrix}\tag{3.8}$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad d = 0\tag{3.9}$$

Ezzel megalkottuk a rendszer állapotter modelljét.

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{\Theta_r} & 0 & 0 \\ -\frac{5g}{7} & -\frac{mgR}{\Theta_r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ x \\ \dot{\varphi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\Theta} \\ \frac{R}{\Theta} \end{bmatrix} M(t)\tag{3.10}$$

$$\mathbf{x} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varphi \\ x \\ \dot{\varphi} \\ \dot{x} \end{bmatrix}\tag{3.11}$$

Fontos megjegyezni, hogy ez csak egy matematikai átalakítás, mellyel bizonyos lépések könnyebben algoritmizálhatók, egyszerűbben áttekinthetők, fizikai tartalmát tekintve semmiben nem különbözik (3.1)-től.

3.2. A szabályozhatóság kérdése

Mielőtt továbblépnénk feltétlen el kell végeznünk egy nagyon fontos lépést: meg kell vizsgálnunk, hogy a rendszert egyáltalán lehet-e szabályozni, irányítani. Egy rendszer vagy szakasz irányítható, ha létezik olyan $u(t)$ bementi változó, amely az állapotjelzőket egy kezdeti $\mathbf{x}(t_0)$ állapotból egy $\mathbf{x}(t_v)$ végállapotba, véges $t_v - t_0$ idő alatt vezérelni képes^[3]. Az irányíthatóság matematikai megfogalmazásához definiáljunk a $\mathbf{Q}_{ir}$ Kalman-féle irányíthatósági mátrixot, mely n állapotjelzős rendszer esetén a következő formát ölti:

$$\mathbf{Q}_{ir} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (3.12)$$

Az irányíthatóság kérdésének eldöntésére meg kell határoznunk a mátrix lineárisan független oszlopainak számát, vagyis a mátrix rangját. Amennyiben ez megegyezik a rendszer állapotjelzőinek számával, a rendszer teljesen irányítható, ellenkező esetben pedig van olyan állapotjelző, amit nem tudunk irányítani. Egyes forrásokban^{[3],[4]} az irányíthatóság feltételeként a $\det(\mathbf{Q}_{ir}) \neq 0$ össze-függést jelölik, mely matematikai tartalmát tekintve azonos az előzővel vagyis, hogy az állapottér modell $\mathbf{A}$ mátrixa ne legyen szinguláris. Vizsgáljuk most $\mathbf{Q}_{ir}$ mátrix rangját!

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_{ir}) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Theta_r} & 0 & -\frac{mgR}{\Theta_r^2} \\ 0 & \frac{R}{\Theta_r} & 0 & -\frac{5\Theta_r g + 7mgR^2}{7\Theta_r^2} \\ \frac{1}{\Theta_r} & 0 & -\frac{mgR}{\Theta_r^2} & 0 \\ \frac{R}{\Theta_r} & 0 & -\frac{5\Theta_r g + 7mgR^2}{7\Theta_r^2} & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.13)$$

(3.13) alapján $\mathbf{Q}_{ir}$ mátrix első és harmadik, valamint második és negyedik oszlopa csak $g=0$ feltétel mellett lineárisan összefüggő – ami természetesen ez esetben fizikailag értelmetlen –, így

$$\text{rang}(\mathbf{Q}_{ir}) = 4, \quad (3.14)$$

ami megegyezik a rendszer állapotjelzőinek számával. A rendszer tehát állapotirányítható, a további vizsgálatoknak, a szabályozó tervezésének van értelme.

3.3. Stabilizálás állapot-visszacsatolással

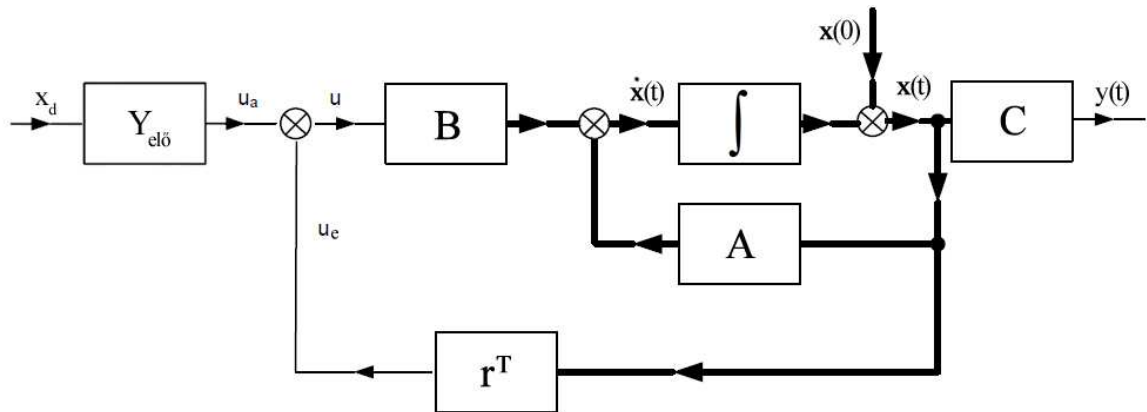
A 3.1 fejezetben említettük, hogy az $M(t) = u_e$ szabályozó nyomaték egyértelmű függvénye a rúd szöghelyzetének és szögsebességének és a golyó pozíciójának és sebességének, vagyis a rendszer 4 állapotjelzőjének. Ezt a függvényt az alábbi matematikai formulában adjuk meg:

$$u_e(t) = M(t) = P_1 \varphi(t) + P_2 x(t) + D_1 \dot{\varphi}(t) + D_2 \dot{x}(t) = \mathbf{r}^T \mathbf{x}, \quad (3.15)$$

ahol

$$\mathbf{r}^T = [P_1 \quad P_2 \quad D_1 \quad D_2] \quad (3.16)$$

szabályozó vektor. Ezzel gyakorlatilag megvalósítottuk az állapot-visszacsatolást a rendszerben.



4. ábra, Állapot-visszacsatolás vázlata ^[4]

A megfelelő szabályozás megalkotásához $\mathbf{r}^T$ paramétereit kell úgy behangolni, hogy a rendszer stabil legyen. Itt térünk ki az $M(t) = u_e$ kifejezés e indexére. A nyomatéket ugyanis a rendszerbe egyfajta ellenőrző jelként vezetjük vissza. Ennek és az általunk előírt u_a alapjelnek az összege fogja adni a rendszer u bemenetét.

$$u = u_e + u_a \quad (3.17)$$

Az alapjel meghatározására a 3.6 fejezetben visszatérünk, egyelőre tekintsük zérusnak, majd írjuk be (3.15) és (3.17) összefüggéseket a (3.7) állapottér modell első egyenletébe ^[1].

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u_e = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{r}^T \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{r}^T) \mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{x}, \quad (3.18)$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{r}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{\Theta_r} & 0 & 0 \\ -\frac{5g}{7} & -\frac{mgR}{\Theta_r} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{P_1}{\Theta_r} & \frac{P_2}{\Theta_r} & \frac{D_1}{\Theta_r} & \frac{D_2}{\Theta_r} \\ \frac{RP_1}{\Theta_r} & \frac{RP_2}{\Theta_r} & \frac{RD_1}{\Theta_r} & \frac{RD_2}{\Theta_r} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{P_1}{\Theta_r} & \frac{P_2 - mg}{\Theta_r} & \frac{D_1}{\Theta_r} & \frac{D_2}{\Theta_r} \\ \frac{RP_1}{\Theta_r} - \frac{5g}{7} & \frac{RP_2 - mgR}{\Theta_r} & \frac{RD_1}{\Theta_r} & \frac{RD_2}{\Theta_r} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Eszerint a rendszert leíró differenciálegyenlet:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{P_1}{\Theta_r} & \frac{P_2 - mg}{\Theta_r} & \frac{D_1}{\Theta_r} & \frac{D_2}{\Theta_r} \\ \frac{RP_1}{\Theta_r} - \frac{5g}{7} & \frac{RP_2 - mgR}{\Theta_r} & \frac{RD_1}{\Theta_r} & \frac{RD_2}{\Theta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ x \\ \dot{\varphi} \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

A korábban említetteknek megfelelően az állapottér modell csak egy matematikai átalakítás, a (3.20) megfelel az alábbi egyenletnek:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (P_1 \varphi + P_2 x + D_1 \dot{\varphi} + D_2 \dot{x}) \tag{3.21}$$

A rendszer stabil, ha az $\mathbf{A}^*$ mátrix minden sajátértékének valós része negatív. Ez természetesen a Routh-Hurwitz kritérium teljesülése esetén is igaz, így használjuk ezt a feltételt. Ehhez első lépésként számoljuk ki a rendszer karakterisztikus egyenletét, a $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$ kifejezéssel:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}^*) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ -\frac{P_1}{\Theta_r} & -\frac{P_2 - mg}{\Theta_r} & \lambda - \frac{D_1}{\Theta_r} & -\frac{D_2}{\Theta_r} \\ -\left(\frac{RP_1}{\Theta_r} - \frac{5g}{7}\right) & -\frac{RP_2 - mgR}{\Theta_r} & -\frac{RD_1}{\Theta_r} & \lambda - \frac{RD_2}{\Theta_r} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{7}{5} m \Theta_r \lambda^4 - \frac{7}{5} m (D_1 + RD_2) \lambda^3 - \frac{7}{5} m (mgR - P_1 - P_2) \lambda^2 + mg D_2 \lambda + mg (P_2 - mg).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

A Routh-Hurwitz kritérium értelmében λ bármilyen kitevőjű hatványának együtt-hatójának pozitívnak kell lennie, vagyis:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= mg(P_2 - mg) > 0 \\
 a_1 &= mgD_2 > 0 \\
 a_2 &= -\frac{7}{5}m(mRg - P_1 - RP_2) > 0 \\
 a_3 &= -\frac{7}{5}m(D_1 + RD_2) > 0 \\
 a_4 &= \frac{7}{5}m\Theta_r > 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Vizsgáljuk meg az egyes feltételeket. Az utolsó feltétel mindig teljesül, ami szükséges ugyan, de nem szolgáltat információt a 4 szabályozási paraméterre vonatkozóan. Az első két feltétel értelmében mind P_2 , mind pedig D_2 értékének pozitívnak kell lennie, továbbá emiatt és a harmadik és negyedik feltétel miatt P_1 függ P_2 -től és D_1 függ D_2 -től, de mindkettő feltétlenül negatív. Írjuk még fel a Hurwitz mátrixot:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

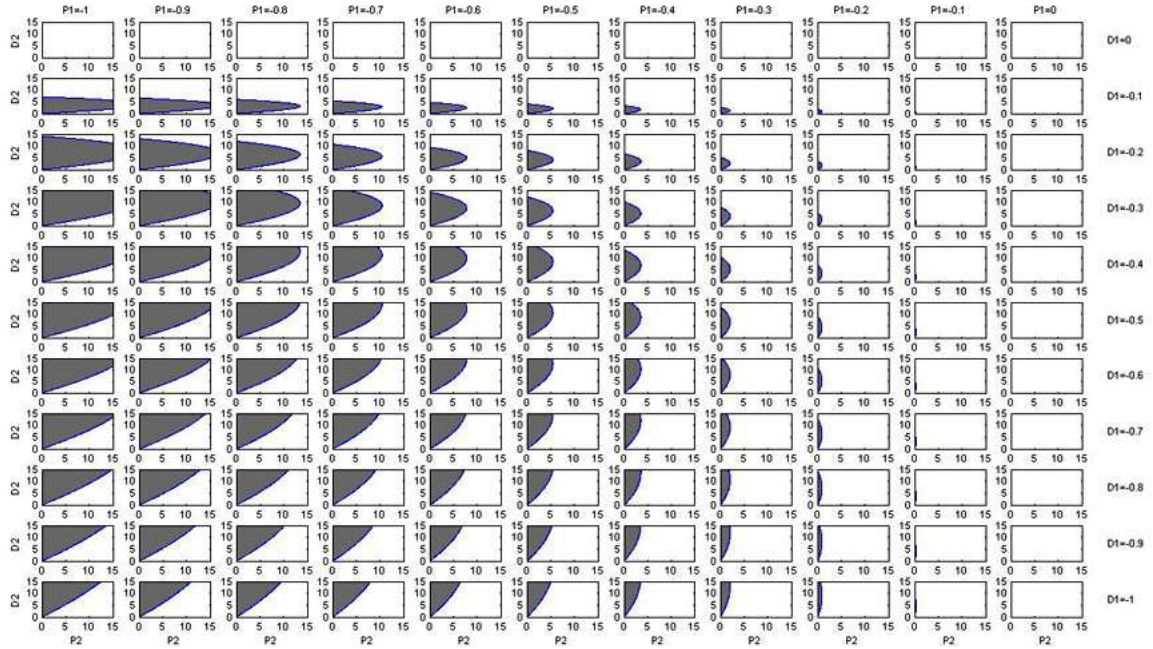
Ennek a főátlóra vett minden aldeterminánsa is pozitív kell, hogy legyen. 4 dimenziós esetben ebből további 3 feltétel adódik, azonban ezekből bonyolultságuk miatt analitikusan meglehetősen nehéz a szabályozási paramétereket meghatározni. Ezért a stabil tartományokat inkább numerikusan határozzuk meg a sajátértékek vizsgálatával. Ehhez vegyünk fel közelítő értékeket a rendszer fizikai paramétereire: a rúd legyen fél méter hosszú, anyaga fa, a rajta guruló acél golyó pedig legyen 1 cm átmérőjű. Ekkor a paraméterek jó közelítéssel:

$$\begin{aligned}
 R &= 0,005[\text{m}] \\
 m &= 0,004[\text{kg}] \\
 \Theta_r &= 0,0015[\text{kg m}^2].
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

A gravitációs gyorsulás értéke:

$$g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \tag{3.26}$$

Ezeket visszaírva (3.22)-ba, majd a sajátértékeket a 4 szabályozási paraméter változtatása mellett például *Matlab* programmal meghatározva 4 dimenziós stabilitási térképet kapunk.



5. ábra, 4 dimenziós stabilitási térkép analóg esetben ^[2]

A grafikonokon szürkével jelölt területekről választva szabályozási paramétereket a rendszerünk stabil lesz, mely összhangban van a Routh-Hurwitz kritériummal kapott eredményekkel.

3.4. A stabilitás ellenőrzése numerikus szimulációval

Eddigi számításaink ellenőrzésére készítsünk numerikus szimulációt a linearizált rendszerről. A szimuláció alapja negyedrendű Runge-Kutta módszer lesz kis hibája és viszonylag egyszerű programozhatósága miatt. Az alkalmazandó összefüggések:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \frac{h}{6} (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) & k = 0, 1, 2, \dots \\
 \mathbf{K}_1 &= \mathbf{F}(t_k, \mathbf{y}_k) \\
 \mathbf{K}_2 &= \mathbf{F}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_1\right) \\
 \mathbf{K}_3 &= \mathbf{F}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_2\right) \\
 \mathbf{K}_4 &= \mathbf{F}(t_k + h, \mathbf{y}_k + h\mathbf{K}_3)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

ahol h az alkalmasan megválasztott időlépés, $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ a meredekségi függvény. Esetünkben a meredekségi függvény a (3.20) által adott mátrixegyenletből adódik, h meghatározásához pedig a

$$\sum_{i=0}^p \frac{(h \lambda_{\min})^i}{i!} < 1 \quad (3.28)$$

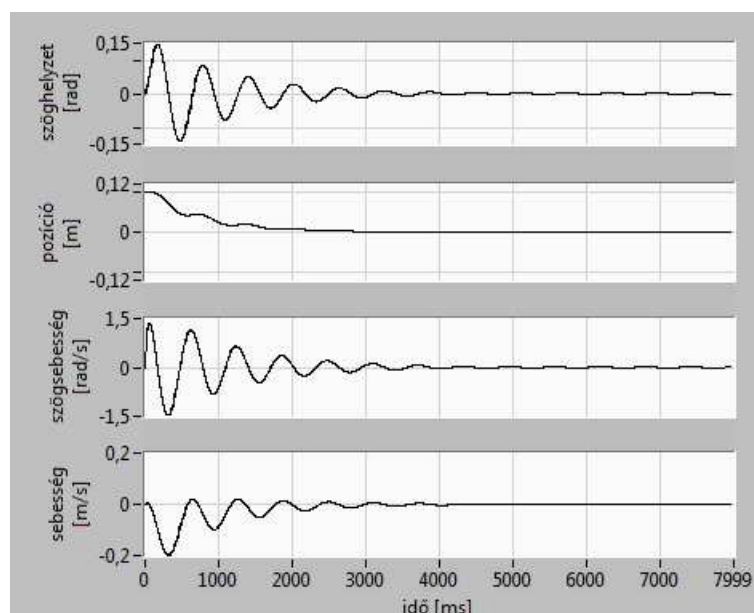
egyenlőtlenséget kell használnunk, ahol p a numerikus módszer rendje – esetünkben 4 –, $\lambda_{\min}$ a (3.19)-tal adott $\mathbf{A}^*$ mátrix sajátértékeinek minimuma ^[5]. A szimuláció futtatásához vegyünk fel kezdeti értékeket:

$$\varphi(0) = 0 [\text{rad}] \quad x(0) = 0,1 [\text{m}] \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad \dot{x}(0) = 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad (3.29)$$

továbbá válasszuk szabályozási paraméternek a következő, 5. ábra alapján a rendszert stabilizáló értékeket:

$$P_1 = -0,3 \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad P_2 = 0,9 \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \right] \quad D_1 = -0,05 \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \right] \quad D_2 = 0,67 \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}} \right]. \quad (3.30)$$

Az így módon definiált paraméterekkel az időlépés értékére a $h < 0,098 [\text{s}]$ feltétel adódik, a pontosság javítása érdekében legyen most $h = 0,001 [\text{s}]$. *LabVIEW* programban írt szimuláció eredményeit a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra, A numerikus szimuláció eredménye

Ez alapján elmondható, hogy az adott paraméterek mellett rendszerünket valóban sikerült stabilizálni.

3.5. Szabályozó optimalizálása

A numerikus szimuláció alapján a felvett négy szabályozási paraméter stabilizálja ugyan a rendszert, de a golyó „csak” mintegy 2 másodperc alatt közelít a zérus egyensúlyi helyzetbe (lásd 6. ábra). Megtartva a szimuláció eddigi kezdeti értékeit, próbáljuk a szabályozási paramétereket optimalizálni szem előtt tartva következőket:

- a rúd szöge beszabályozás közben ne lépje jelentősen túl az 5°-ot;
- a golyó pozíciója minél gyorsabban érje el a zérus értéket;
- törekedjünk a golyó minimális túllendülésére;
- a szögsebesség és szöggyorsulás értéke ne legyen irreálisan nagy.

A következő elgondolást kövessük: az egyes állapotjelzők csillapodásának gyorsasága az $\mathbf{A}^*$ mátrix sajátértékeitől függ. Ezek a sajátértékek a (3.22) képlettel már definiált

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.31)$$

karakterisztikus egyenlet komplex számokon értelmezett gyökei, melyeket irányítástechnikában a rendszer *pólusainak* neveznek. A korábban leírtaknak megfelelően a pólusok valós részének negatívnak kell lenniük a stabilitás érdekében, a lecsillapodás sebessége pedig a gyökök imaginárius tengelytől mért távolságától függ; minél távolabb helyezkednek el a pólusok a képzetes tengely bal oldalán, annál gyorsabb a rendszer beállása. Állapot-visszacsatolás alkalmazásával az eredetileg instabil rendszer $\mathbf{A}$ mátrixának sajátértékeit a $\mathbf{r}^T$ vektor elemeinek megfelelő beállításával úgy módosítottuk, hogy a kapott $\mathbf{A}^*$ mátrix valamennyi sajátértékének valós része már negatív lett, vagyis állapot-visszacsatolás segítségével *pólusáthelyezést* hajtottunk végre, így stabillá téve a rendszert. Célunk tehát a rendszer pólusainak áthelyezése oly módon, hogy a rendszer az általunk elvárt módon viselkedjen.

Ehhez használjuk az Ackermann-féle összefüggést^[5], mely alapján a rendszer karakterisztikus egyenletének átalakított alakját egyelőre kell tenni a $\prod(\lambda - p_i)$ kifejezéssel, ahol p_i a rendszer általunk tervezett pólusa.

$$\lambda^4 + \frac{a_3}{a_4}\lambda^3 + \frac{a_2}{a_4}\lambda^2 + \frac{a_1}{a_4}\lambda + \frac{a_0}{a_4} = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2)(\lambda - p_3)(\lambda - p_4) \quad (3.32)$$

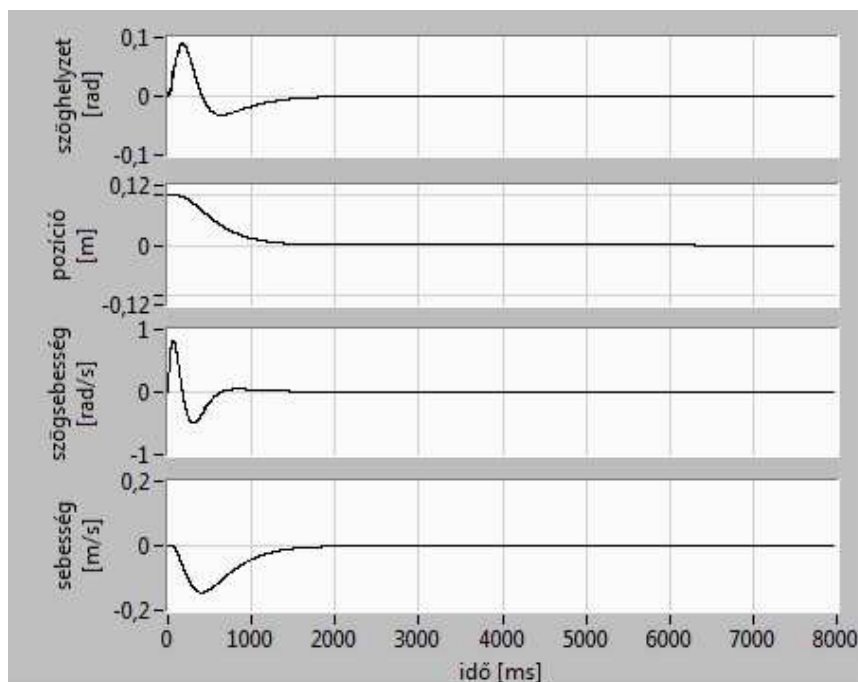
Az egyenlet bal oldalán a_i értékei ismeretlenként P_1, P_2, D_1, D_2 paramétereket tartalmazzák (lásd (3.23) összefüggések), a jobb oldalon ismert összefüggés áll, a szabályozási paraméterek tehát meghatározhatók. A (3.32) egyenlet megoldását *LabVIEW*

programmal valósítottam meg, a pólusok folyamatos változtatása, valamint a módosított rendszer lefutásának figyelése mellett.

A fejezet elején kitűzött célokat viszonylag jól megvalósító rendszer jellemzői az alábbiak:

$$P_1 = -0,46 \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad P_2 = 0,536 \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \right] \quad D_1 = -0,04 \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \right] \quad D_2 = 0,31 \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}} \right]. \quad (3.33)$$

A numerikus szimuláció alapján a rendszer állapotjelzőinek lefutás ezek használatával:



7. ábra, Optimalizált rendszer lefutása

Látható, hogy a rendszer korábbi viselkedése nagymértékben javul. A rendszer pólusai a fenti négy szabályozási paraméter mellett:

$$p_{1,2} = -8,915 \pm 8,3167i \quad p_{3,4} = -3,934 \pm 0,3573i. \quad (3.34)$$

Ez látszólag ellentmond azzal a korábbi megállapításunkkal, hogy a rendszer annál gyorsabban áll be, minél kisebb a pólusok valós része. Az ellentmondást úgy tudjuk feloldani, ha figyelembe vesszük az optimalizálás utolsó feltételét. A szimulációk során megfigyelhető volt ugyanis, hogy a pólusok valós részét az imaginárius tengelytől távolabb helyezve, irreálisan nagy lesz például a rúd szöggyorsulása, habár gyorsan csillapodik. Nagyobb szöggyorsulás pedig nagyobb nyomatékot követel, aminek viszont az aktuátor határt szab. Így lehet, hogy az általános megállapítás ellenére, ezeket a pólusokat és a hozzájuk tartozó szabályozási paramétereket használjuk a továbbiakban.

3.6. Értékkövető szabályozás megvalósítása

A rendszer állapotjelzői, köztük a golyó pozíciója jelenleg bármilyen reális kezdeti feltétel mellett zérushoz tart. Mi azonban előre meghatározott pályán kívánjuk azt tartani. Ennek megvalósításához térjünk vissza a 3.3 fejezetben zérusnak vett u_a értékének definiálásához. A kifejezést alapjelnek nevezzük, ezzel kívánjuk a golyó pozícióját beállítani. Az alapjel mértékegysége az eddigiek alapján pedig ugyanaz, mint $M(t) = u_e$ -nek, vagyis nyomaték jellegű mennyiség, a golyó pozíciójának mértékegysége ezzel szemben természetesen méterben mérendő. A mértékegységek helyessé tétele érdekében szükségünk van egy ún. előerősítő tagra, mely megteremti a kapcsolatot a golyó megkívánt x_d pozíciója és az alapjel között.

$$u_a = Y_{elő} x_d \quad (3.35)$$

A keresett előerősítő értéke szakirodalmakban ^[7] megtalálható levezetés alapján

$$Y_{elő} = - \left[\mathbf{c}^T \left[\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{r}^T \right]^{-1} \mathbf{b} \right]^{-1} \quad (3.36)$$

kifejezéssel egyenlő, melybe behelyettesítve az állapottér modell egyes elemeit

$$Y_{elő} = mg - P_2 \quad (3.37)$$

adódik. Írjuk vissza (3.15) (3.35), (3.37) egyenleteket (3.17) egyenletbe.

$$u = Y_{elő} x_d + \mathbf{r}^T \mathbf{x} \quad (3.38)$$

Ezt visszaírva a (3.7) állapottér modell első egyenletébe

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} (Y_{elő} x_d + \mathbf{r}^T \mathbf{x}) = \mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{b} Y_{elő} x_d, \quad (3.39)$$

ahol

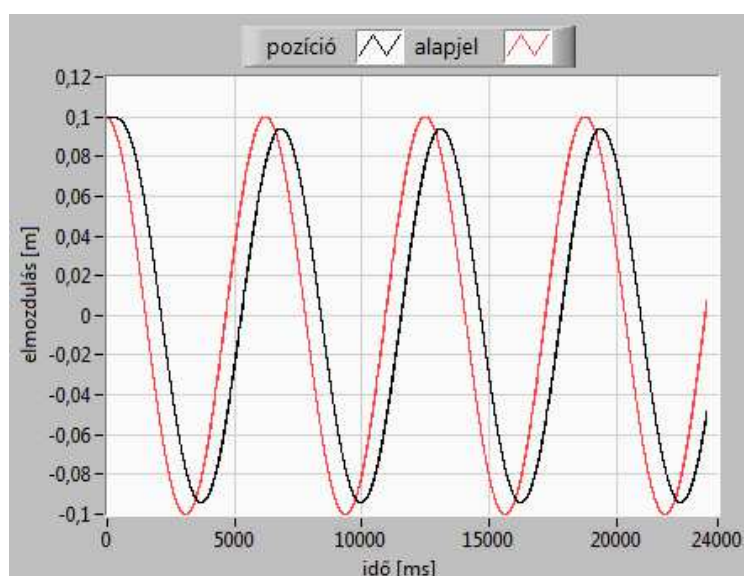
$$\mathbf{b} Y_{elő} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mg - P_2}{\Theta_r} \\ \frac{(mg - P_2) R}{\Theta_r} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Ezzel rendszerünk mozgásegyenlete a következő:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{P_1}{\Theta_r} & \frac{P_2 - mg}{\Theta_r} & \frac{D_1}{\Theta_r} & \frac{D_2}{\Theta_r} \\ \frac{RP_1}{\Theta_r} - \frac{5g}{7} & \frac{RP_2 - mgR}{\Theta_r} & \frac{RD_1}{\Theta_r} & \frac{RD_2}{\Theta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ x \\ \dot{\phi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mg - P_2}{\Theta_r} \\ \frac{(mg - P_2)R}{\Theta_r} \end{bmatrix} x_d. \quad (4.2)$$

Ismét megjegyezzük, hogy az állapotter modell csak matematikai átalakítás, ugyanerre az eredményre vezetett volna, ha (3.21) mátrixegyenletbe x koordináta helyett $x - x_d$ kifejezést írjuk.

A fenti differenciál egyenletrendszerrel létrehoztuk a rendszer értékkövető szabályozását: $x_d(t)$ időben elegendően lassan változó bemeneti paramétert a rendszer véges időn belül követi. Szimulációval szemléltetve a megoldást:

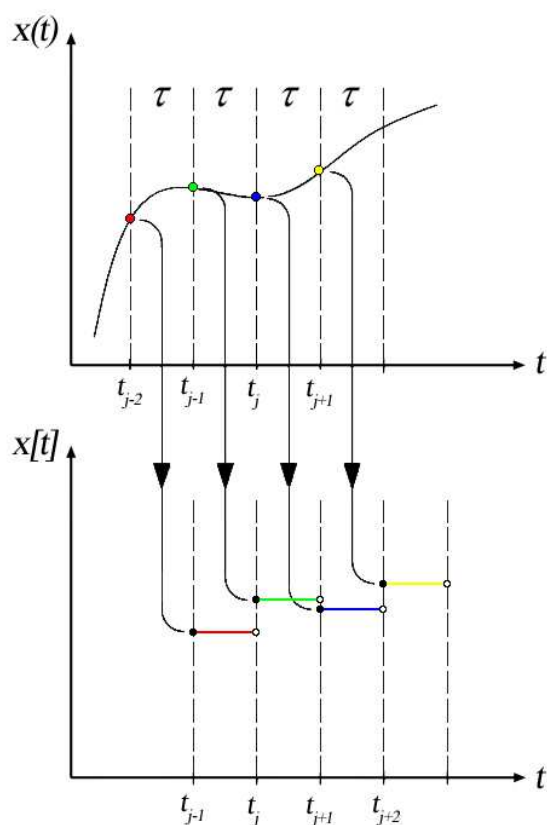


8. ábra, Szinuszos bemenő jel követése analóg esetben

Látható, hogy a rendszer a szinuszos bemeneti jelet időkésséssel és minimális hibával ugyan, de jól követi.

4. Digitális szabályozó tervezése

A természetben lejátszódó folyamatok időben folytonosak. Napjainkban azonban már szinte minden rendszer irányítását digitális eszközök segítségével valósítjuk meg, aminek alapvető velejárója a folyamatok jellemzőinek adott időközönként történő mérése, feldolgozása és kiértékelése. Digitális eszköz alkalmazásának számos előnye mellett hátrányaként kell említeni, hogy az eredeti jel információtartalma csökken, mivel azt csak diszkrét időlépésenként vizsgáljuk, valamint, hogy az adatok feldolgozásához véges időtartam szükséges, időkésés jelenik meg a rendszerben. Ezt a fajta időbeli diszkretizálást nulladrendű tartóval (ZOH) modellezzük: a folytonos rendszerjellemzőket τ mintavételi időnként mintavételezzük, a t_{j-1} időpontban mintavételezett jel τ időkéséssel jelenjen meg a rendszerben, értéke t_j és t_{j+1} között legyen állandó.



9. ábra, Időbeli diszkretizáció modellje^[8]

Vagyis egy tetszőleges, t_j időpontban mintavételezett mennyiség matematikailag a következő formát ölti:

$$v(t) = v(t_j - \tau) \quad t \in [t_j, t_j + \tau), \quad (4.1)$$

ahol $t_j = j\tau$ és $j = 1, 2, \dots$. A továbbiakban ezt a modellt használjuk.

4.1. Stabilitásvizsgálat mintavételes esetben

Rendszerünk digitális modelljében az egyes állapotjelzőket τ mintavételi időközönként mérjük, majd az így mintavételezett értékek felhasználásával állítjuk elő a $u_e(t_j) = M(t_j)$ beavatkozó nyomatékot.

$$u_e(t_j) = P_1 \varphi(t_j) + P_2 x(t_j) + D_1 \dot{\varphi}(t_j) + D_2 \dot{x}(t_j). \quad (4.2)$$

Építsük ezt be eddigi matematikai modellünkbe, zérus alapjelet beállítva és jelezve az egyes jellemzők időfüggését.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u_e(t_j - \tau) \quad t \in [t_j, t_j + \tau), \quad (4.3)$$

ahol $u_e(t_j - \tau)$ szakaszonként állandó, $\mathbf{x}(t)$ és $\dot{\mathbf{x}}(t)$ időben folytonosan változó mennyiségek, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{b}$ mátrixok pedig a (3.8) egyenlettel definiáltak. Keressük meg a (4.3) elsőrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciál egyenletrendszer megoldását! Ehhez legyen kezdeti feltétel $\mathbf{x}(t_j) = \mathbf{x}_j$. A megoldást az alábbi formában keressük:

$$\mathbf{x}_{ih, \text{ált}}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_{ih, p}(t), \quad (4.4)$$

vagyis az inhomogén egyenletrendszer általános megoldása a homogén egyenletrendszer megoldásának és az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldásának összegeként keresendő. Az egyenlet homogén részének megoldása a kezdeti feltétel figyelembe vételével:

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_j)} \cdot \mathbf{x}_j. \quad (4.5)$$

Az állandók variálásának módszerét alkalmazva az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása:

$$\mathbf{x}_{i, p}(t) = \int_{t_j}^t e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \cdot \mathbf{b} u_e(t_j - \tau) d\xi. \quad (4.6)$$

Az általános megoldás így (4.4) értelmében:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_j)} \cdot \mathbf{x}_j + \int_{t_j}^t e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \cdot \mathbf{b} u_e(t_j - \tau) d\xi \quad t \in [t_j, t_j + \tau). \quad (4.7)$$

Vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{b} u_e(t_j - \tau)$ szakaszonként állandó, vagyis kiemelhető az integrálból:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_j)} \mathbf{x}(t_j) + \int_{t_j}^t e^{\mathbf{A}(t-\xi)} d\xi \cdot \mathbf{b} u_e(t_j - \tau) \quad t \in [t_j, t_j + \tau). \quad (4.8)$$

Határozzuk meg az integrál értékét!

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)} d\xi = -A^{-1} \left[e^{A(t-\xi)} \right]_{t_j}^t = A^{-1} \left[e^{A(t-t_j)} - E \right], \quad (4.9)$$

ezzel:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_j)} \mathbf{x}(t_j) + A^{-1} \left[e^{A(t-t_j)} - E \right] \cdot \mathbf{b} u_e(t_j - \tau) \quad t \in [t_j, t_j + \tau]. \quad (4.10)$$

Innen:

$$\mathbf{x}(t_{j+1}) = \lim_{t \rightarrow t_{j+1}} \mathbf{x}(t) = e^{A(t_{j+1}-t_j)} \mathbf{x}(t_j) + A^{-1} \left[e^{A(t_{j+1}-t_j)} - E \right] \cdot \mathbf{b} u_e(t_j - \tau). \quad (4.11)$$

Vegyük észre, hogy $e^{A(t_{j+1}-t_j)} = e^{A\tau} = \Phi$, a rendszer rezolvens mátrixa. Vezessük be a következő jelölést: $A^{-1}[\Phi - E]\mathbf{b} = \Gamma$, ahol Γ $\mathbf{b}$ -vel egyező méretű oszlopvektor. Ezzel (4.11) [6]:

$$\mathbf{x}(t_{j+1}) = \Phi \cdot \mathbf{x}(t_j) + \Gamma u_e(t_{j-1}). \quad (4.12)$$

A rendszer $u(t)$ bemenetét a korábban bevezetett állapotvektorral felírva:

$$u_e(t_j) = \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t_j). \quad (4.13)$$

Ahhoz, hogy az immár mintavételes rendszer stabilitását vizsgálni tudjuk, rendezzük (4.12) és (4.13) egyenleteket mátrixos alakba [2].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_{j+1}) \\ u_e(t_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{r}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_j) \\ u_e(t_{j-1}) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Vezessünk be újabb jelölést [2] :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{r}^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

A (4.14)-tal jelölt diszkrét leképezés stabilitását kell vizsgálnunk. Ehhez meg kell határozunk $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix sajátértékeit.

$$\det(\mu \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}) = 0. \quad (4.16)$$

Mintavételes esetben a stabilitás kritériuma:

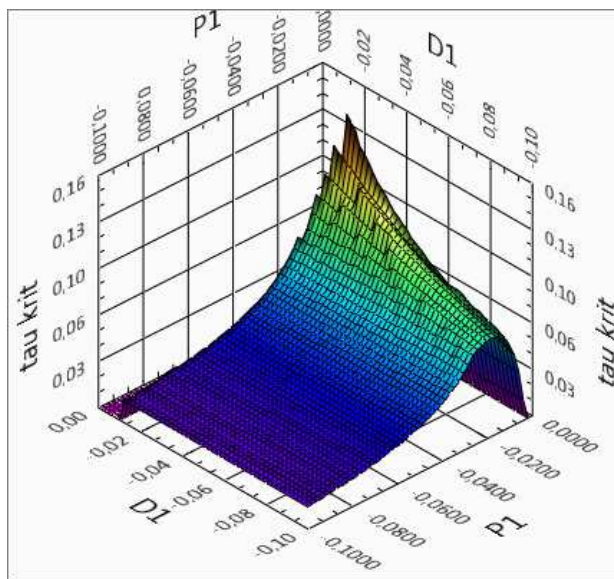
$$|\mu| < 1, \quad (4.17)$$

vagyis az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix valamennyi sajátértékének abszolút értékének kisebbnek kell lennie 1-nél. A feltétel abból a gondolatmenetből kapható, hogy a (4.14) egyenletrendszert az $\tilde{\mathbf{A}}$ $n \times n$ -es mátrix sajátvektorainak koordináta rendszerébe transzformálva, az

egyenletrendszer n darab mértani sorra esik szét, melyek kvóciensei az $\tilde{A}$ mátrix sajátértékei. Mértani sor pedig csak abban az esetben konvergens, ha kvóciensének abszolút értéke kisebb, mint 1.

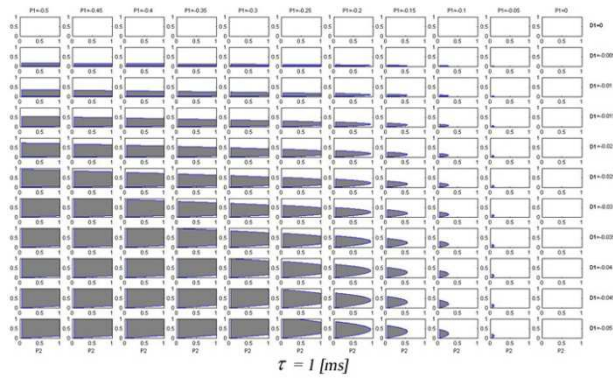
(4.16) kifejtését és az egyes gyökök (4.17) szerinti vizsgálatát *Maplab* programmal végeztem el tekintettel az analitikus megoldás bonyolult mivoltára. A program egy adott τ értékhez az analóg esethez hasonló 4 dimenziós stabilitási térképet rajzol.

A következő oldalon látható stabilitási térképek alapján elmondható, hogy kellően kis mintavételi időt – azaz időkéscést - választva a stabil tartomány digitális és analóg esetben alig tér el egymástól, így $\tau < 0,001[s]$ feltétel mellett a mintavételes stabilitási térkép gyakorlatilag megegyezik az 5. ábrán látható analóg esetben kapottal. τ -t növelve a stabil tartomány mérete rohamosan csökken, érdekes azonban hogy mindig található a stabilitási térképen olyan tartomány melyből egy adott, tetszőlegesen nagy időkéscés esetén is kiválasztható a 4 szabályozási paramétert, úgy hogy a *matematikai modell* stabil maradjon. Ennek szemléltetésére tekintünk az alábbi ábrát.

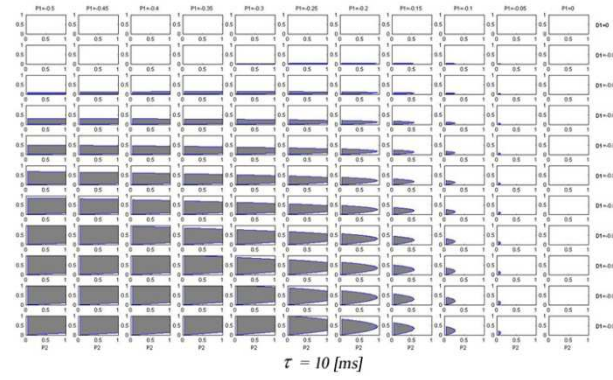


10. ábra, Kritikus mintavételi idő változása

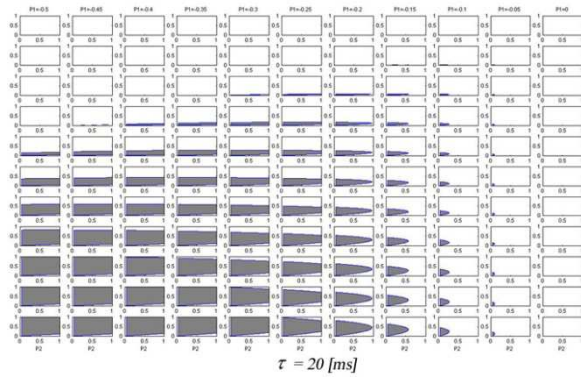
A 10. ábráról leolvasható, hogy adott $P1$, $D1$ értéket választva, végigpróbálva az összes stabil szabályozást eredményező $P2$, $D2$ értéket, mekkora az a maximális τ_{krit} kritikus mintavételi idő, melynél a rendszer épp a stabilitás határán van. Az ábra alapján látszólag a mintavételi időnek van maximális értéke, ez azonban csak annak köszönhető, hogy a futtatott program $P1$, $D1$ ill. $P2$, $D2$ alsó- és felső határa közötti tartományon csak véges, n osztópontban számolja ki τ_{krit} értékét. Az osztópontok számát növelve a kritikus mintavételi idők maximumának értéke a végtelenhez tart.



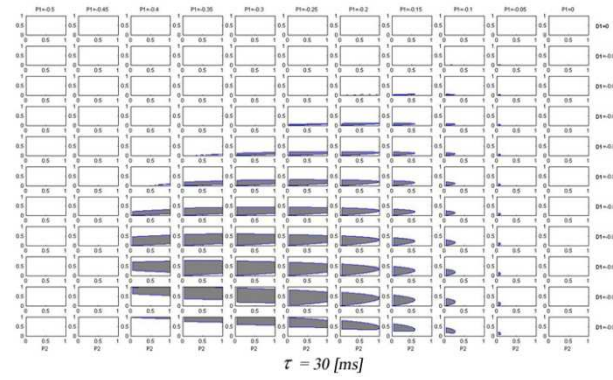
11.1 ábra



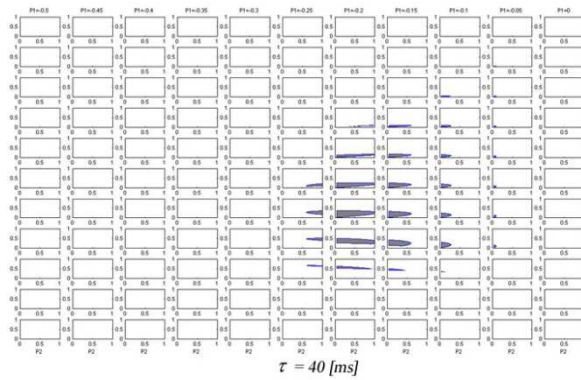
11.2 ábra



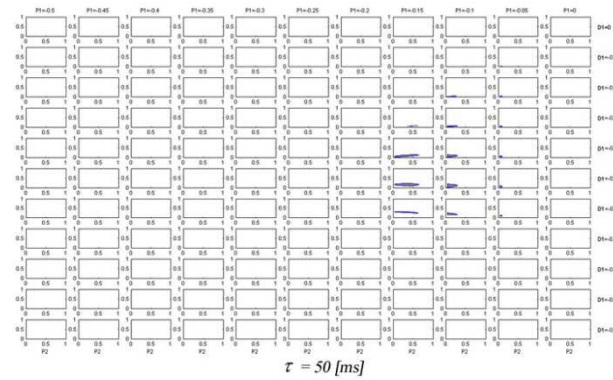
11.3 ábra



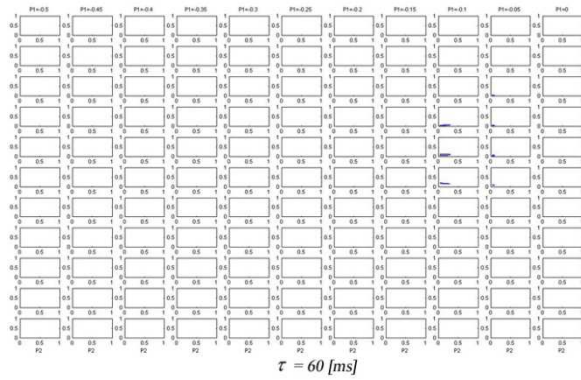
11.4 ábra



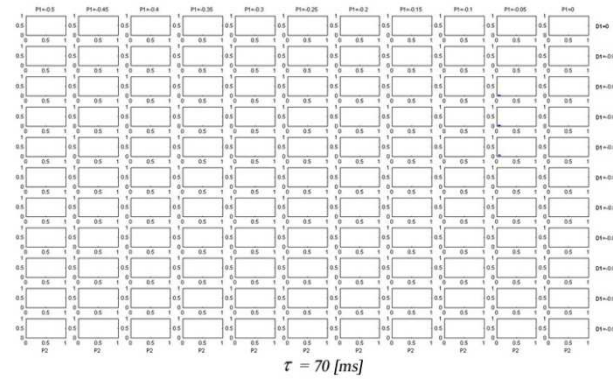
11.5 ábra



11.6 ábra



11.7 ábra

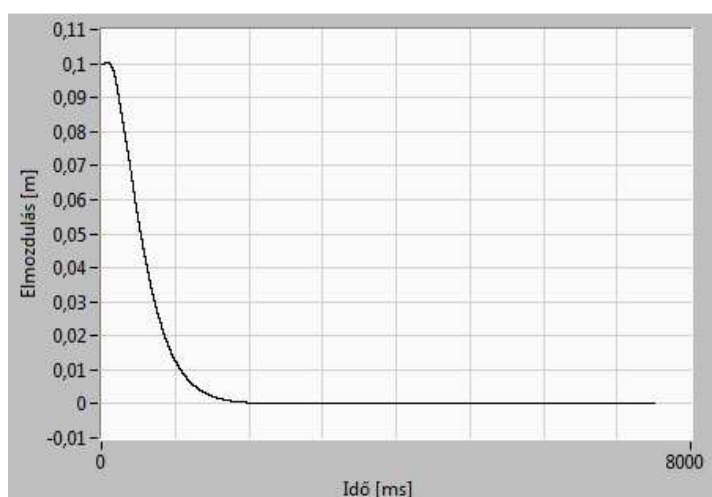


11.8 ábra

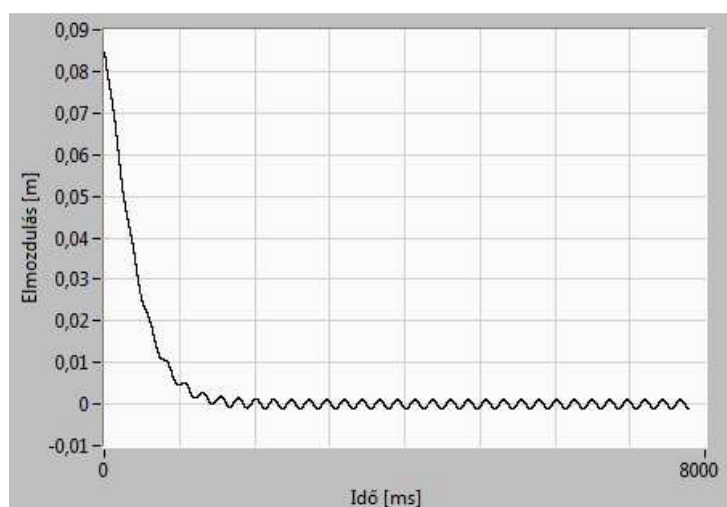
Felhasználva a numerikus szimulációkhoz eddig használt (3.25), (3.26), (3.29) és (3.33) paramétereket, újabb *LabVIEW* szimulációt készítettem a mintavételes és időkééses rendszer vizsgálatára. A szimuláció magja a 9. ábrán vázolt modellnek megfelelően a 4 állapotjelzőt adott τ időközönként mintavételezi és adott értéken tartja, a mintavételezéssel egy időben kiszámolja az állapotjelzők $t - \tau$ időpontbeli értékéből $u_e(t - \tau) = M(t - \tau)$ nyomatékot, majd megoldja a (4.3) differenciál egyenletrendszert. Újabb fontos feltétel az adott szabályozási paraméterekhez tartozó τ_{krit} meghatározása, mely esetén a rendszer a stabilitás határán van. Ez a (3.33) paraméternégyes esetén

$$\tau_{krit} \approx 0,0287[s] \quad (4.18)$$

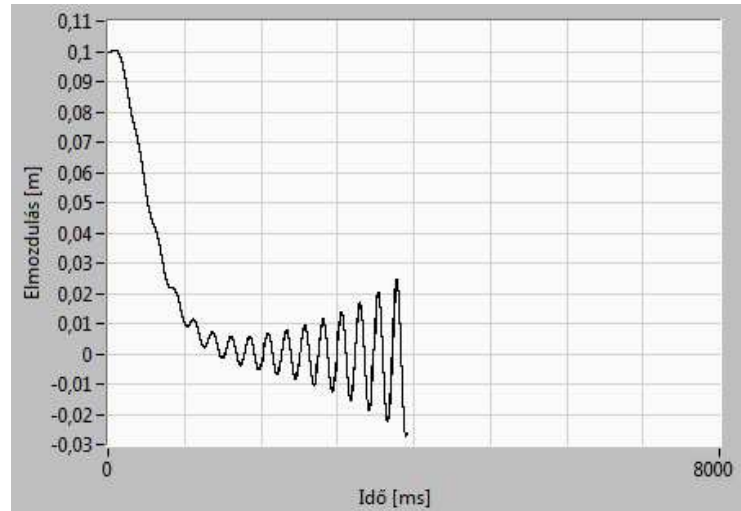
értékre adódik. Ennek és a digitális rendszer működésének ellenőrzésére három különböző mintavételi idővel futtattam a készített szimulációt, τ_{krit} -nél kisebb, nagyobb illetve azzal megegyező nagyságú mintavételi időt beállítva.



12. ábra, $\tau = 0,028 [s]$



13. ábra, $\tau = \tau_{krit} = 0,0287 [s]$



14. ábra, $\tau = 0,029$ [s]

A szimulációk alapján elmondható, hogy a kapott kritikus mintavételi idő az adott rendszerparaméterek mellett valóban helyes érték, mintavételes rendszerünk stabil, amennyiben a fenti stabilitási térképeknek megfelelően választunk szabályozási paramétereket és mintavételi időt.

4.2. Digitális pozíciószabályozás

Az analóg rendszerhez hasonlóan végső célunk most is az, hogy a rúdon guruló golyót előírt pályán tartsuk. Ehhez továbbra is használjuk az állapotter modell első egyenletét:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad (4.19)$$

ugyanakkor tartsuk szem előtt, hogy adott u bemeneti jel csak τ időkésséssel, és csak τ időtartamig képes hatni a rendszerre:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t - \tau) \quad t \in [t_j, t_j + \tau). \quad (4.20)$$

Emlékezzünk emellett arra, hogy az u bemenet az u_e ellenőrző- és az u_a alapjel összegeként került meghatározásra a 3.3 fejezetben, így :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} [u_a(t - \tau) + u_e(t - \tau)] \quad t \in [t_j, t_j + \tau). \quad (4.21)$$

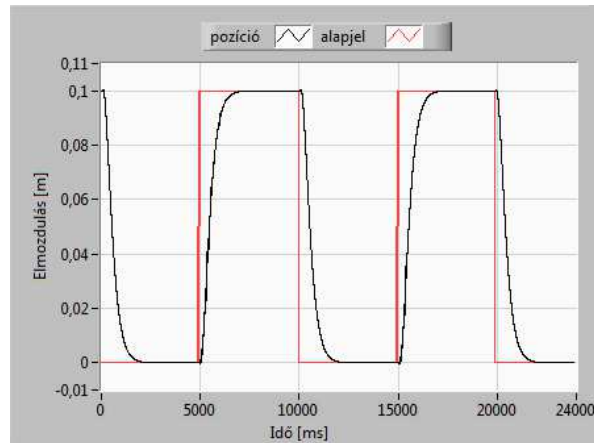
Mintavételes állapot-visszacsatolást alkalmazva is ugyanazzal a problémával kerülünk szembe, mint analóg esetben nevezetesen, hogy a megkívánt pozíció, mint általunk előírt bemenet és az u_a alapjel, mint a rendszerbe ténylegesen bekerülő bemenet mértékegységei nem egyeznek meg. Ez a problémát ugyanúgy tudjuk orvosolni, mint korábban: előerősítő alkalmazásával. Mivel a mechanikai modell paramétereit nem változtattuk meg, az előerősítő értéke is változatlan marad:

$$Y_{el\delta} = -\left[\mathbf{c}^T \left[\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{r}^T \right]^{-1} \mathbf{b} \right]^{-1} = mg - P_2. \quad (4.22)$$

Így digitális pozíciószabályozás esetén (4.21) a következő végleges alakot ölti:

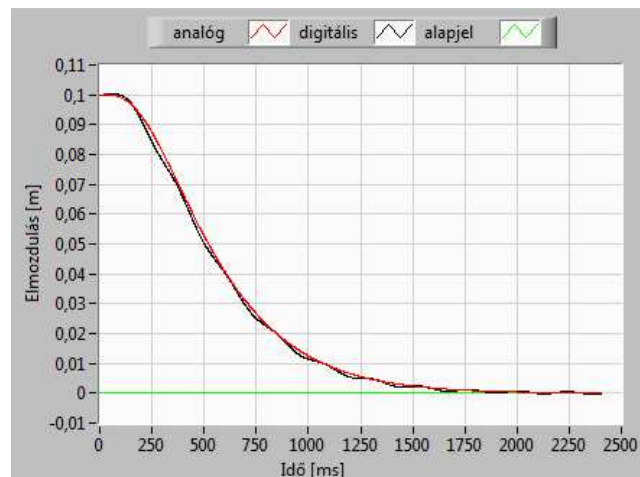
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \left[Y_{el\delta} x_d(t - \tau) + \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t - \tau) \right] \quad t \in [t_j, t_j + \tau). \quad (4.23)$$

A (4.23) egyenletrendszer megoldását, és a digitális rendszer viselkedésének ellenőrzését az eddigiekhez hasonlóan *LabVIEW*-ban megírt numeikus szimulációval végeztem, 0,5-ös kitöltési tényezőjű, 10 [s] periódusidejű négyszögjel, mint alapjel beállítása mellett, valamint a mintavételi időt $\tau = 0,025[s]$ értéknek fölvéve.



15. ábra, Négyszögjel követése digitális esetben

A szimuláció bizonyossága szerint a golyó szabályozása most is sikeres volt. Érdekes azonban megvizsgálni mekkora és milyen eltérések adódnak a mintavételezés és időkézés megjelenése miatt, az időkézés nélküli analóg esethez képest. Vizsgáljuk a két szabályozást egyszerre, azonos kezdeti feltételek és bemenet mellett. Legyen $x(0) = 0,1[m]$, $x_d = 0[m]$ továbbá az eltérések kiemelésére állítsunk be a kritikus mintavételi időhöz közelebb eső mintavételi időt, $\tau = 0,028[s]$.



16. ábra, Analóg és digitális szabályozás összehasonlítása

Látható, hogy bármely szabályozás alkalmazása esetén a rendszer véges időn belül beáll az előírt pozícióba, ahogy azt vártuk, ugyanakkor szembetűnő a különbség a két eset között. Az indulási pillanatban a digitális szabályozó később reagál: a golyó megindult a rúd vége felé, amikor a szabályozás elkezd hatnia rendszerre; időkésés nélküli rendszerben ezt nem tapasztaljuk. Ezen felül, mivel a beállított mintavételi idő közel van kritikushoz, a golyó mozgásában „hullámozás” figyelhető meg. Folytonos idejű szabályozásnál ez a jelenség csak abban az esetben tapasztalható, ha a szabályozási paraméterek nem megfelelő beállítása miatt vagyunk a stabilitási határon.

5. Összefoglalás

Dolgozatomban kísérletet tettem egy alapvetően instabil, alulaktuált rendszer szabályozására. A rendszer mozgásegyenleteinek felírását követően, megvizsgáltam a rendszer stabilizálásának feltételeit előbb analóg, majd mintavételes és időkéséses szabályozó használata mellett. Az egyes esetekben kapott 4 dimenziós stabilitási térképeket felhasználva numerikus szimulációkkal ellenőriztem a kapott eredményeket, majd ezek alapján igyekeztem optimálisnak tekinthető szabályozóparamétereket választani. Mind analóg, mind pedig digitális szabályozást használva sikerült a rendszert stabilizálni, a rúdon gördülő golyó pályát előírni, így a dolgozat elején kitűzött cél maradéktalanul teljesült.

6. Források

1. **Stépán Gábor.** *Rezgéstan, előadás jegyzet.* 2010.
2. **Budai Csaba.** *Szakdolgozat: Inga egyensúlyozás Segwayen.* Budapest, 2010.
3. **Csáki Frigyes, Bars Ruth.** *Automatika.* Budapest : Tankönyvkiadó, 1972.
4. **Huba Antal.** *Mechatronika 1-2. előadás jegyzet.* 2011.
5. **Stoyan Gisbert.** *Numerikus módszerek 1-2.* Budapest : Typotex, 2005.
6. **Gene E. Franklin.** *Digital Control of Dynamic Systems.* Menlo Park, CA : Addison-Wesley Longman Inc., 1998.
7. **Holger Lutz, Wolfgang Wendt.** *Taschenbuch der Regelungstechnik.* Frankfurt am Main : Harri Deutsch Verlag, 2003.
8. **Stépán Gábor.** *Robotok mechanikája, előadás jegyzet.* 2011.
9. **Benjamin C. Kuo.** *Önműködő szabályó rendszerek.* Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 1979.