

Esztergálási folyamat stabilizálása digitális szabályozással

TDK dolgozat

Készítette: Lehotzky Dávid, BME, Gépészmérnöki Kar, Gépészeti Modellezés szak

Konzulens: Dr. Insperger Tamás, Műszaki Mechanika Tanszék, egyetemi docens

2011. november

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Instabil másodrendű lineáris rendszer digitális szabályozása a pozíció, sebesség és gyorsulás visszacsatolásával	2
2.1 Szabályozás folytonos szabályozó erővel	2
2.2 Pozíciószabályozás digitális szabályozó erővel.....	3
2.2.1 Mintavételezés közvetlenül az erőugrás után	5
2.2.2 Mintavételezés közvetlenül az erőugrás előtt.....	9
2.2.3 Stabilitási tartományok kirajzolása	10
2.3 Összegzés.....	12
3. Digitálisan szabályozott, késleltetett oszcillátor.....	14
3.1 Késleltetett oszcillátor stabilitási vizsgálata	14
3.2 Digitálisan szabályozott, késleltetett oszcillátor stabilitási vizsgálata	18
3.2.1 Digitális szabályozás PD szabályozóval	19
3.2.2 Digitális szabályozás PDA szabályozóval	28
3.3 Összegzés.....	32
4. Esztergálás digitális szabályozással	33
4.1 Esztergálási folyamat mechanikai modellezése.....	33
4.2 Stabilitási vizsgálat digitális pozíciószabályozás nélkül	36
4.3 Stabilitási vizsgálat digitális pozíciószabályozás esetén	38
4.4 Összegzés.....	45
5. Összefoglalás, további tervek	46
6. Irodalomjegyzék.....	47

1. Bevezetés

A gyártástechnológia általánosan ismert eljárása az esztergálás. A látszólag egyszerűnek tűnő anyagleválasztási folyamat azonban rejt magában problémákat. A tapasztalat azt mutatja, hogy a szerszám bizonyos technológiai paraméterek mellett nagy amplitúdójú rezgéseket végez a megmunkálás során. Ezek a rezgések rámásolódnak a megmunkált felületre csökkentve annak minőségét. Az esztergálási folyamat instabilitása a rendszer időkésésének köszönhető. Az esztergakés munkadarabra másolódott rezgései miatt a szerszám egy hullámos felületen vág. A forgácsvastagságot így nem csak a szerszám aktuális pozíciója, hanem annak egy fordulattal korábbi helyzete is befolyásolja. Ezt a jelenséget regeneratív szerszámgéperezgésnek hívják.

A szerszámgépet két szabadsági fokú modellel leírva egy késleltetett differenciálegyenlethez jutunk. Ennek stabilitási térképe az irodalomból jól ismert. E modell alapján több eljárás is létezik a regeneratív rezgések csökkentésére, a stabilitás növelésére. Ilyen módszer a váltakozó fordulatszámú esztergálás [5], vagy a csillapítás növelése [6]. Dolgozatomban azt vizsgálom meg, hogy digitális pozíciószabályozás alkalmazásával elméleti úton lehetséges-e a szerszámgép stabilitásának növelése. Ehhez először a digitális pozíciószabályozás jellemzőit vizsgáljuk meg.

A szabályozás paramétereinek megválasztása során számunkra az elsődleges jellemző a szabályozás stabilitása. Ezt digitálisan szabályozott rendszer esetén a rendszer paraméterein kívül általában a mintavételezés frekvenciája és az erősítési tényezők szabják meg. Az irodalomban a pozíció és a sebesség mintavételezésére épülő PD szabályozók stabilitási tartományai és azoknak mintavételezési időtől való függése az egyszerűbb mechanikai rendszerekre általánosan ismertek [7]. A gyorsulás figyelembe vétele a szabályozó erőben azért lehet indokolt, mert a mintavételezett jel a szabályozások számos gépészeti alkalmazásában a gyorsulás. Az ipari gyakorlatban azonban többnyire nem szokták visszacsatolni a mintavételezett gyorsulás értékét.

Dolgozatom második fejezetében azt vizsgálom meg, hogy digitális pozíciószabályozás esetén a gyorsulás visszacsatolásával meg lehet-e növelni egy instabil másodrendű lineáris rendszer stabilitását az egyszerű PD szabályozáshoz képest.

A harmadik fejezetben egy digitálisan szabályozott, késleltetett oszcillátor stabilitását szemi-diszkretizációs [3] közelítő eljárás segítségével vizsgálom. Az eredményeket a rendszer és a szabályozási paraméterek függvényében kirajzolom, valamint összevetem a szabályozás nélküli stabilitási határokkal.

Végül az utolsó fejezetben szemi-diszkretizációs közelítést alkalmazok a digitálisan szabályozott esztergálási folyamat két szabadsági fokú modelljének leíró differenciálegyenletére és összevetem az eredményeket a szabályozás nélküli stabilitási határokkal.

2. Instabil másodrendű lineáris rendszer digitális szabályozása a pozíció, sebesség és gyorsulás visszacsatolásával

A vizsgált rendszert leíró differenciálegyenlet:

$$\ddot{x}(t) - \alpha^2 x(t) = Q, \quad (2.1)$$

ahol α a rendszer saját körfrekvenciája, Q pedig a szabályozó erő. $Q=0$ esetén az inverz ingának a felső egyensúlyi helyzetéhez közeli mozgásait leíró differenciálegyenletet kapjuk. Ebben az esetben a differenciálegyenlet egyensúlyi helyzete $x_0 = 0$, amely egy instabil nyeregpont. A differenciálegyenlet megoldása $Q=0$ esetén:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}. \quad (2.2)$$

A szakirodalom alapján a szabályozó erőt általában az elmozdulás és a sebesség függvényében határozzák meg úgy, hogy az egy adott időpillanatban $Q(t_j) = P x(t_j) + D \dot{x}(t_j)$, ahol P és D a proporcionális és differenciális erősítési tényezők. Ezt a szabályozást PD szabályozónak nevezik. Mivel a gyakorlatban a gyorsulást egyszerűen lehet mérni, ezért itt mi a gyorsulás jelet is figyelembe vesszük úgy, hogy a szabályozó erő egy adott időpillanatban $Q(t_j) = P x(t_j) + D \dot{x}(t_j) + A \ddot{x}(t_j)$ alakban adható meg, ahol A a gyorsulással arányos erősítési tényező. A szakirodalomban a gyorsulást nem szokták felhasználni a szabályozó jel megalkotásában. Itt mi feltételezzük, hogy mind a pozíció, sebesség és gyorsulás jel a szabályozás során rendelkezésre áll.

2.1 Szabályozás folytonos szabályozó erővel

Először azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a szabályozó erőhöz szükséges jeleket az idő függvényében folytonosan mérjük, és időkésés nélkül csatoljuk vissza. Ez egy igen nagymértékben idealizált modell, mivel a valóságban a szükséges jeleket csak mintavételezni tudjuk, így a szabályozó erő diszkrét értékeket vehet csak fel. Ezen felül a visszacsatolást késés is jellemzi. Ezek a tényezők csökkentik a szabályozás stabilitási határait.

A szabályozást leíró differenciálegyenlet:

$$\ddot{x}(t) - \alpha^2 x(t) = \underbrace{-Px(t) - D\dot{x}(t) - A\ddot{x}(t)}_{Q(t)}. \quad (2.3)$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$(1 + A)\lambda^2 + D\lambda + P - \alpha^2 = 0. \quad (2.4)$$

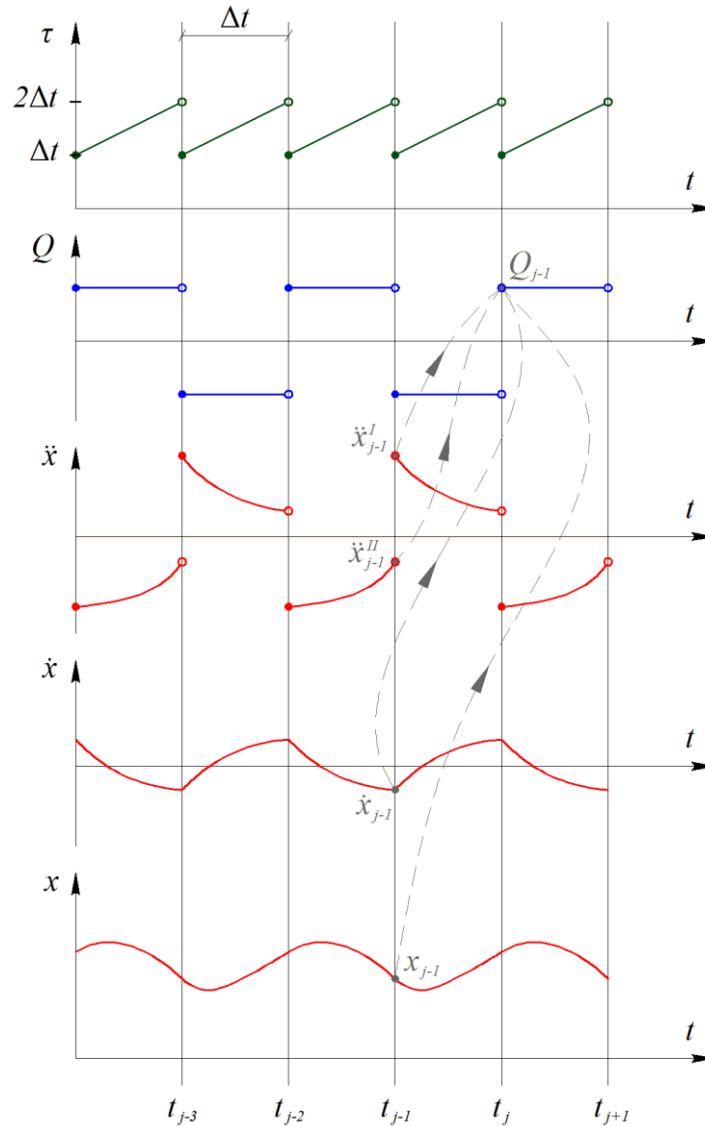
A Routh-Hurwitz kritérium alapján a szabályozás akkor lesz stabil, ha a karakterisztikus egyenlet összes együtthatója pozitív. Így a stabilitás feltételei:

$$A > -1, D > 0, P > \alpha^2. \quad (2.5)$$

Itt a P paraméter a rendszer merevségét, D a csillapítását és A pedig a tömegét növeli.

2.2 Pozíciószabályozás digitális szabályozó erővel

A digitális szabályozó erőt a Zero Order Holder (ZOH) modell [7] segítségével vesszük figyelembe. A szabályozó erő szakaszonként állandó, értékét Δt időtartammal korábbi pozíció, sebesség és gyorsulás értékekből számolja ki és tartja Δt ideig. A szabályozás időközése tehát Δt és $2\Delta t$ értékek között változik. A szabályozás működését az (2.1.) ábra szemlélteti.



(2.1.) ábra: ZOH modell működésének vázlata a gyorsulás visszacsatolásával

Globálisan a digitális szabályozóval szabályozott rendszer differenciálegyenlete egy másodrendű késleltetett differenciálegyenlet, amelyben az időközés az idő függvénye:

$$\ddot{x}(t) - \alpha^2 x(t) = Q(t - \tau(t)), \quad (2.6)$$

ahol $\tau(t)$ az időközés. Az időközés időfüggvényét a (2.1.) ábra mutatja.

Lokálisan egy egyszerű inhomogén, másodrendű, lineáris differenciálegyenlettel írható le a fenti probléma:

$$\ddot{x}_k(t_k) - \alpha^2 x_k(t_k) = Q_{j-1}, \quad (2.7)$$

ahol $t_k \in [0, \Delta t]$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$,

$t - t_j = t_k$ - lokális időkoordináta,

$t_{j+1} - t_j = \Delta t$ - mintavételezési idő,

n - mintavételezések száma.

A szabályozó erő:

$$Q_{j-1} = -Px(t_{j-1}) - D\dot{x}(t_{j-1}) - A\ddot{x}(t_{j-1}). \quad (2.8)$$

A továbbiakban az $x(t_j)$ alakú jelölés helyett az x_j alakú jelölést használjuk majd.

A (2.7) differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x_k(t_k) = c_1 e^{\alpha t_k} + c_2 e^{-\alpha t_k} - \frac{Q_{j-1}}{\alpha^2} = (c_1 + c_2) \operatorname{ch}(\alpha t_k) + (c_1 - c_2) \operatorname{sh}(\alpha t_k) - \frac{Q_{j-1}}{\alpha^2}. \quad (2.9)$$

A kezdeti feltételek:

$$x_k(0) = x_j = c_1 + c_2 - \frac{Q_{j-1}}{\alpha^2}, \quad (2.10)$$

$$\dot{x}_k(0) = \dot{x}_j = \alpha(c_1 - c_2). \quad (2.11)$$

A pozíció legalább elsőrendben, a sebesség pedig legalább nulladrendben folytonos függvény (ez bármely, a Newton-törvények által leírt mechanikai rendszer esetén igaz), így az erőugrás pillanatában ezeknek értéke ugrásszerűen nem változhat.

A kezdeti érték feladat megoldása:

$$x_k(t_k) = \left(x_j + \frac{Q_{j-1}}{\alpha^2} \right) \operatorname{ch}(\alpha t_k) + \frac{\dot{x}_j}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha t_k) - \frac{Q_{j-1}}{\alpha^2}. \quad (2.12)$$

A $t \in [t_j, t_{j+1}]$ intervallum elején és végén a gyorsulás értékében - csak úgy, mint a szabályozó erő értékében - ugrás van. Ez abból következik, hogy a kezdeti feltételekkel csak a pozíció és a sebesség folytonossága lett előírva a vizsgált időintervallum határain, így csak a legmagasabb rendű tag változhat az erőugrás hatására. A mintavételezés a gyorsulásugrások helyén történik, így a visszacsatolt gyorsulás értéke nem egyértelmű. Attól függően, hogy melyik értéket csatoljuk vissza különböző stabilitási tartományok jellemzik a szabályozást. A két gyorsulás visszacsatolási módot az (2.1.) ábra szemlélteti. A következő két alfejezetben ezt a két esetet vizsgáljuk meg.

2.2.1 Mintavételezés közvetlenül az erőugrás után

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a stabilitás, ha az erőugrás után mintavételezett gyorsulás értéket (amely az (2.1.) ábrán $\ddot{x}_{j-1}^I$ - ként van jelölve) csatoljuk vissza.

A vizsgált időintervallum határán a szabályozó erő kifejezhető diszkrét pozíció és gyorsulás értékekkel, ha a mintavételezés időpillanatát visszahelyettesítjük a differenciálegyenletbe:

$$\ddot{x}_j - \alpha^2 x_j = Q_{j-1}. \quad (2.13)$$

Ezzel (2.12) megoldás a következő alakra hozható:

$$x_k(t_k) = \frac{\ddot{x}_j}{\alpha^2} \text{ch}(\alpha t_k) + \frac{\dot{x}_j}{\alpha} \text{sh}(\alpha t_k) - \frac{\ddot{x}_j}{\alpha^2} + x_j. \quad (2.14)$$

Az első idő szerinti derivált:

$$\dot{x}_k(t_k) = \frac{\ddot{x}_j}{\alpha} \text{sh}(\alpha t_k) + \dot{x}_j \text{ch}(\alpha t_k). \quad (2.15)$$

Az időintervallum másik határán a szabályozó erő ismét kifejezhető diszkrét pozíció és gyorsulás értékekkel:

$$\ddot{x}_{j+1} - \alpha^2 x_{j+1} = Q_j. \quad (2.16)$$

(2.14-16) alapján a pozíció, sebesség és gyorsulás értéke a t_{j+1} időpontban:

$$x_{j+1} = \frac{\ddot{x}_j}{\alpha^2} \text{ch}(\alpha \Delta t) + \frac{\dot{x}_j}{\alpha} \text{sh}(\alpha \Delta t) - \frac{\ddot{x}_j}{\alpha^2} + x_j, \quad (2.17)$$

$$\dot{x}_{j+1} = \frac{\ddot{x}_j}{\alpha} \text{sh}(\alpha \Delta t) + \dot{x}_j \text{ch}(\alpha \Delta t), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{j+1} &= Q_j + \alpha^2 x_{j+1} = \\ &= -Px_j - D\dot{x}_j - A\ddot{x}_j + \ddot{x}_j \text{ch}(\alpha \Delta t) + \alpha \dot{x}_j \text{sh}(\alpha \Delta t) - \ddot{x}_j + \alpha^2 x_j. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Az alábbi differenciaegyenlet rendszer írható fel t_j és t_{j+1} pontok között:

$$\begin{bmatrix} x_{j+1} \\ \dot{x}_{j+1} \\ \ddot{x}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\text{sh}(\alpha \Delta t)}{\alpha} & \frac{\text{ch}(\alpha \Delta t) - 1}{\alpha^2} \\ 0 & \text{ch}(\alpha \Delta t) & \frac{\text{sh}(\alpha \Delta t)}{\alpha} \\ \alpha^2 - P & \alpha \text{sh}(\alpha \Delta t) - D & \text{ch}(\alpha \Delta t) - A - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ \dot{x}_j \\ \ddot{x}_j \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Rövidebb formában:

$$\underline{X}_{j+1} = \underline{M} \underline{X}_j. \quad (2.21)$$

A fenti differenciaegyenlet rendszer akkor aszimptotikusan stabil, ha $\underline{\underline{M}}$ mátrix összes sajátértéke kisebb, mint 1, vagyis a stabilitási kritérium:

$$|\mu_{1,2,3}| < 1. \quad (2.22)$$

A $\mu_{1,2,3}$ karakterisztikus multiplikátorokat a karakterisztikus egyenlet megoldásával kapjuk meg. A karakterisztikus egyenlet:

$$\det(\underline{\underline{A}} - \mu \underline{\underline{E}}) = 0. \quad (2.23)$$

A determinánst kifejtve a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \mu^3 + \underbrace{\mu^2 [A - 2\text{ch}(\alpha \Delta t)]}_{a_2} + \underbrace{\mu \left[1 - \frac{P}{\alpha^2} - A + \frac{P}{\alpha^2} \text{ch}(\alpha \Delta t) - A \text{ch}(\alpha \Delta t) + \frac{D}{\alpha} \text{sh}(\alpha \Delta t) \right]}_{a_1} + \\ \underbrace{A \text{ch}(\alpha \Delta t) - \frac{D}{\alpha} \text{sh}(\alpha \Delta t) + \frac{P}{\alpha^2} [\text{ch}(\alpha \Delta t) - 1]}_{a_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A (2.22) kritérium Möbius-transzformáció segítségével átalakítható $\text{Re} [\eta_{1,2,3}] < 0$ feltétellé, amelyre alkalmazhatjuk a Routh-Hurwitz kritériumot. A Möbius-transzformáció alapján:

$$\mu = \frac{\eta + 1}{\eta - 1}. \quad (2.25)$$

Visszahelyettesítve a (2.24) karakterisztikus egyenletbe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right)^3 + a_2 \left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right)^2 + a_1 \left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right) + a_0 = 0 \quad \left| \cdot (\eta - 1)^3 \right. \\ \left. (\eta + 1)^3 + a_2 (\eta + 1)^2 (\eta - 1) + a_1 (\eta + 1) (\eta - 1)^2 + a_0 (\eta - 1)^3 = 0. \right. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ez mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} \eta^3 \\ \eta^2 \\ \eta \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.27)$$

A transzformált karakterisztikus egyenlet együtthatói:

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$b_3 = 4 \left(\frac{P}{\alpha^2} - 1 \right) \text{sh}^2 \left(\frac{\alpha \Delta t}{2} \right), \quad (2.29)$$

$$b_2 = 4sh\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right)\left[\frac{D}{\alpha}ch\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right) - \left(1 + A + 2\frac{P}{\alpha^2}\right)sh\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right)\right], \quad (2.30)$$

$$b_1 = 2\left[1 - \frac{P}{\alpha^2} + \left(2A + \frac{P}{\alpha^2} + 1\right)ch(\alpha\Delta t) - 2\frac{D}{\alpha}sh(\alpha\Delta t)\right], \quad (2.31)$$

$$b_0 = 2\left[(1 - A)(ch(\alpha\Delta t) + 1) + \frac{D}{\alpha}sh(\alpha\Delta t)\right]. \quad (2.32)$$

A Routh-Hurwitz kritérium alapján az alábbi feltételek teljesülése esetén lesz igaz a (2.22.) feltétel.

1) A karakterisztikus egyenlet együtthatói nagyobbak nullánál ($b_i > 0$).

Tudva, hogy $\alpha, \Delta t > 0$ a következő kritériumokhoz jutunk:

$$b_3 > 0 \rightarrow P - \alpha^2 > 0, \quad (2.33)$$

$$b_2 > 0 \rightarrow -2P + \alpha ch\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right)D - \alpha^2 A - \alpha^2 > 0, \quad (2.34)$$

$$b_1 > 0 \rightarrow sh^2\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right)P - \alpha sh(\alpha\Delta t)D + \alpha^2 ch(\alpha\Delta t)A + \alpha^2 ch^2\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right) > 0, \quad (2.35)$$

$$b_0 > 0 \rightarrow th\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right)D - \alpha A + \alpha > 0. \quad (2.36)$$

2) A Hurwitz-mátrix $\underline{\underline{H}}$ determinánsa és annak főátló szerinti valamennyi al-determinánsa nagyobb zérusnál.

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Tudva, hogy az együtthatóknak pozitívnak kell lenniük elég csak a következő determinánst vizsgálni:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0. \quad (2.38)$$

A determinánst kifejtve:

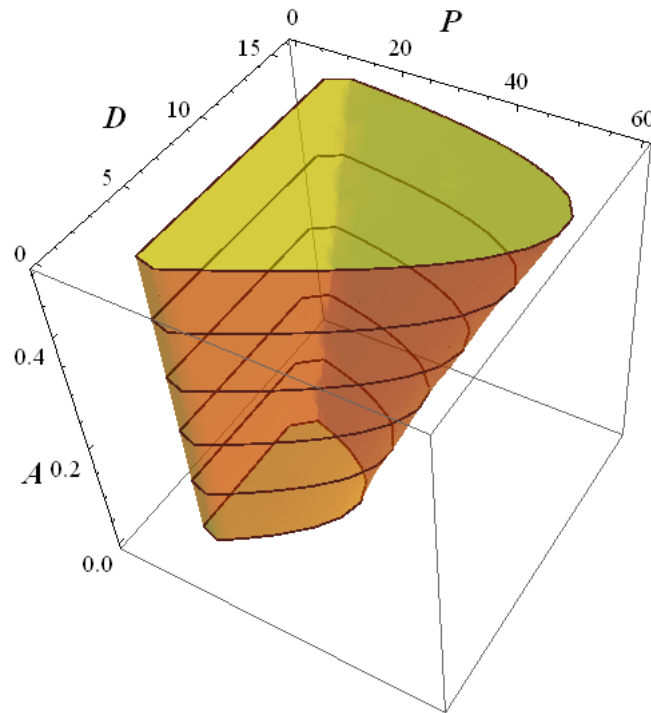
$$k_1 P^2 + k_2 D^2 + k_3 A^2 + k_4 PD + k_5 PA + k_6 DA + k_7 P + k_8 D + k_9 A > 0. \quad (2.39)$$

Ahol az egyes konstansok értékei:

$$k_1 = -4sh^4\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= -\alpha^2 \operatorname{sh}^2(\alpha \Delta t), \\
k_3 &= -2\alpha^4 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha \Delta t}{2}\right) \operatorname{ch}(\alpha \Delta t), \\
k_4 &= 4\alpha \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha \Delta t}{2}\right) \operatorname{sh}(\alpha \Delta t), \\
k_5 &= 2\alpha^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha \Delta t}{2}\right) [1 - 2\operatorname{ch}(\alpha \Delta t)], \\
k_6 &= \alpha^3 \operatorname{sh}(\alpha \Delta t) [2\operatorname{ch}(\alpha \Delta t) - 1], \\
k_7 &= -2\alpha^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha \Delta t}{2}\right) [1 + 2\operatorname{ch}(\alpha \Delta t)], \\
k_8 &= k_6, \\
k_9 &= \alpha^2 k_7.
\end{aligned}$$

A stabil tartományt a (2.33-36) határsíkokra és a (2.39) másodrendű felületre vonatkozó relációk különítik el. Ennek szemléletes, 3 dimenziós térképét a (2.2.) ábra mutatja, amelyet Mathematica V6 szimbolikus algebrai program segítségével rajzoltunk ki.



(2.2.) ábra: A (2.7) egyenlet szemléletes, analitikus 3D stabilitási térképe erőfrissítés utáni visszacsatolás esetén, $\alpha=3[\text{rad/s}]$, $\Delta t=0.1[\text{s}]$ mellett

2.2.2 Mintavételezés közvetlenül az erőugrás előtt

Ezúttal vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a gyorsulás értékét (amely az (2.1.) ábrán $\ddot{x}_{j-1}^H$ -ként van jelölve) az erőugrás előtt mérjük.

A (2.12) megoldásból és annak idő szerinti deriváltjaiból a pozíció, sebesség és gyorsulás értéke a t_{j+1} pontban:

$$x_{j+1} = \left(x_j + \frac{Q_{j-1}}{\alpha^2} \right) ch(\alpha \Delta t) + \frac{\dot{x}_j}{\alpha} sh(\alpha \Delta t) - \frac{Q_{j-1}}{\alpha^2}, \quad (2.40)$$

$$\dot{x}_{j+1} = \left(\alpha x_j + \frac{Q_{j-1}}{\alpha} \right) sh(\alpha \Delta t) + \dot{x}_j ch(\alpha \Delta t), \quad (2.41)$$

$$\ddot{x}_{j+1} = (\alpha^2 x_j + Q_{j-1}) ch(\alpha \Delta t) + \alpha \dot{x}_j sh(\alpha \Delta t). \quad (2.42)$$

Az alábbi differenciaegyenlet rendszer írható fel t_j és t_{j+1} pontok között:

$$\begin{bmatrix} x_{j+1} \\ \dot{x}_{j+1} \\ \ddot{x}_{j+1} \\ Q_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\alpha \Delta t) & \frac{sh(\alpha \Delta t)}{\alpha} & 0 & \frac{ch(\alpha \Delta t) - 1}{\alpha^2} \\ \alpha sh(\alpha \Delta t) & ch(\alpha \Delta t) & 0 & \frac{sh(\alpha \Delta t)}{\alpha} \\ \alpha^2 ch(\alpha \Delta t) & \alpha sh(\alpha \Delta t) & 0 & ch(\alpha \Delta t) \\ -P & -D & -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ \dot{x}_j \\ \ddot{x}_j \\ Q_j \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

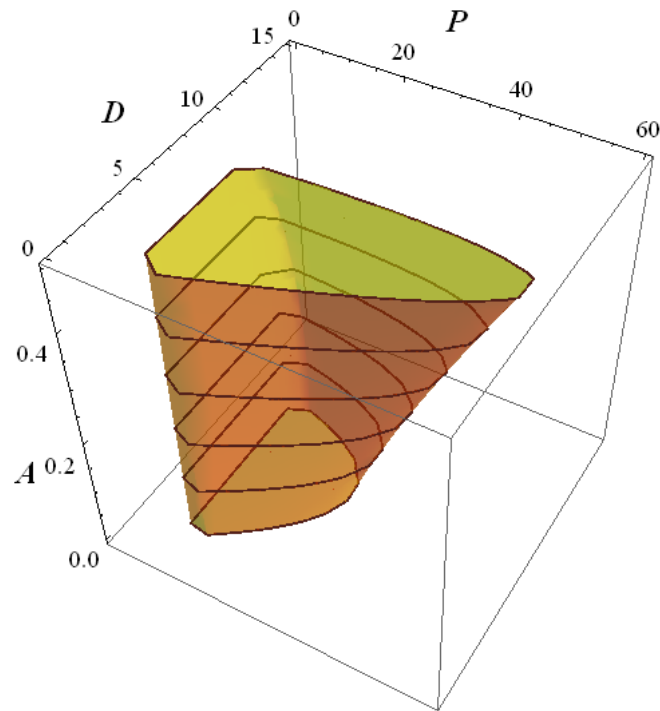
Ismét a (2.21) formájú differencia egyenletrendszerhez jutunk. Látható hogy $\underline{\underline{M}}$ mátrix rangja itt 4. Amely abban az esetben csökken le 3-ra, ha a gyorsulást nem használjuk fel a szabályozó erőben. A korábbiakban felírt (2.20) egyenletben szereplő $\underline{\underline{M}}$ mátrix rangja 3, amely a gyorsulás visszacsatolásától függetlenül 3 marad.

A stabilitási tartomány határgörbéjét a korábbiakhoz hasonlóan ismét úgy tudjuk meghatározni, hogy alkalmazzuk a Routh-Hurwitz kritériumot az alábbi polinomra:

$$D(\eta) = (\eta - 1)^4 \det \left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1} I - \underline{\underline{M}} \right), \quad (2.44)$$

az így meghatározott stabilitási tartományt a (2.3.) ábra szemlélteti.

A (2.1.) ábra alapján könnyen belátható, hogy ha a gyorsulást nem vesszük figyelembe a szabályozó erőben, akkor a (2.20) és a (2.43) differencia egyenletrendszerek ugyanazt a stabilitási tartományt határozzák meg.



(2.3.) ábra: A (2.7) egyenlet szemléletes, analitikus 3D stabilitási térképe erőfrissítés előtti visszacsatolás esetén, $\alpha=3[\text{rad/s}]$, $\Delta t=0.1[\text{s}]$ mellett

2.2.3 Stabilitási tartományok kirajzolása

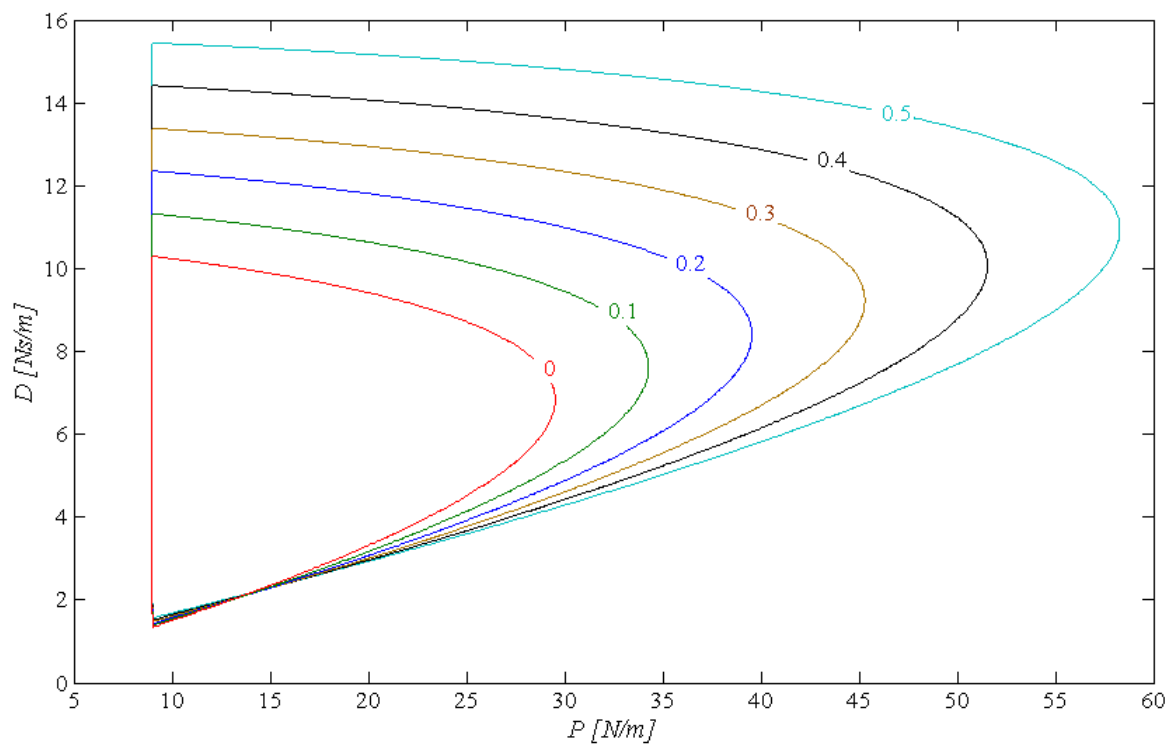
A stabilitási tartományokat a 2.2.1 és 2.2.2 fejezetekben analitikus úton határoztuk meg. Azonban elegendően pontos eredményhez juthatunk akkor is, ha a stabilitási vizsgálatot numerikus sajátérték vizsgálattal számítjuk ki. Ez az eljárás gyorsabb és egyszerűbb a görbék analitikus úton történő meghatározásánál.

A numerikus sajátérték vizsgálattal előállított stabilitási tartományok helyességét numerikus szimuláció segítségével ellenőrizzük. Ez lassabb eljárás és a szimuláció segítségével előállított görbék vizsgálatára épül.

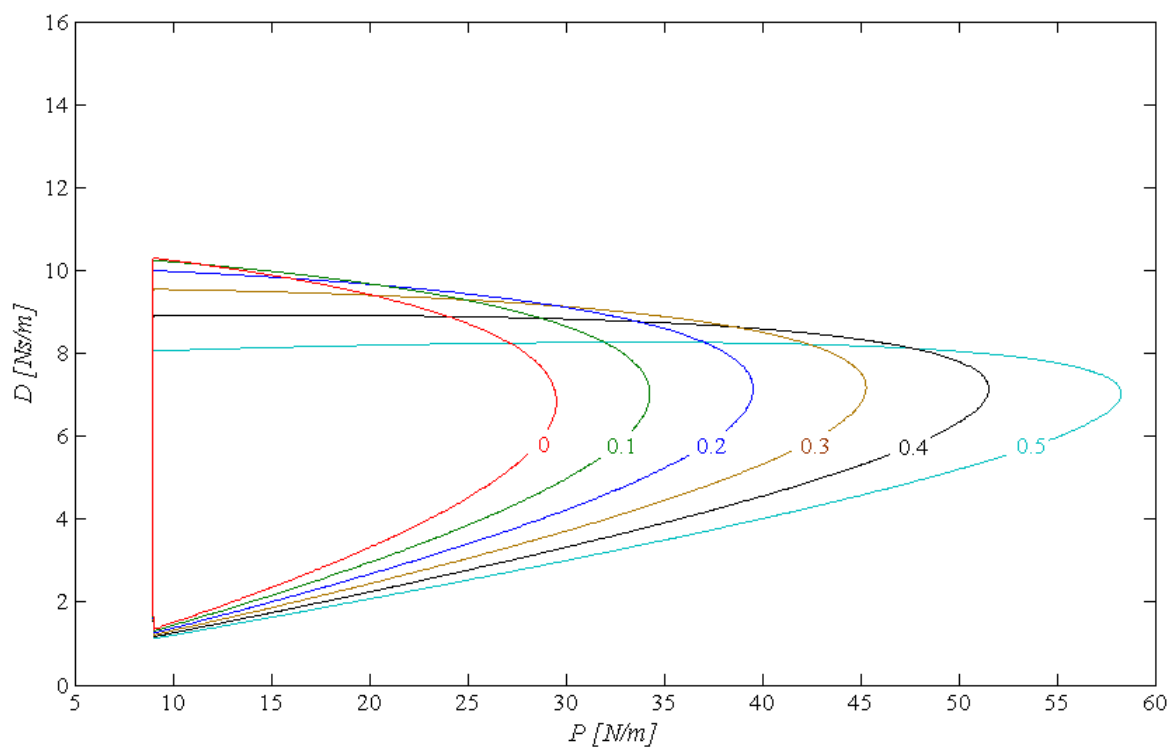
2.2.3.1 Numerikus sajátérték vizsgálat

A stabilitási tartományok numerikus úton is meghatározhatók $\underline{M}$ mátrix sajátértékeinek (2.22) reláció szerinti vizsgálatával. A (2.4.-2.5.) ábrákon látható stabilitási térképeket ilyen módon állítottuk elő.

Az alábbi diagramok $500 \times 500 \times 6$ pontban elvégzett sajátérték vizsgálattal lettek meghatározva. Az egyes szintfelületek különböző A értékekhez tartoznak.



(2.4.) ábra: A (2.7) egyenlet stabilitási térképe numerikus sajátérték vizsgálattal különböző A értékekre, erőfrissítés utáni visszacsatolás mellett, $\alpha=3$ [rad/s], $\Delta t=0.1$ [s] esetén



(2.5.) ábra: A (2.7) egyenlet stabilitási térképe numerikus sajátérték vizsgálattal különböző A értékekre, erőfrissítés előtti visszacsatolás mellett, $\alpha=3$ [rad/s], $\Delta t=0.1$ [s] esetén

2.2.3.2 Numerikus szimuláció

A numerikus szimuláció során az adott modell differenciálegyenletét negyedrendű Runge-Kutta numerikus eljárás segítségével oldottuk meg figyelembe véve a szabályozó erő késését és azt, hogy a szabályozó erő szakaszonként állandó. A számítási algoritmust úgy írtuk meg, hogy a szabályozásra jellemző mintavételezési időköz csak a numerikus eljárás lépésközének egész számú többszöröse lehet. A gyorsulásfüggvény ugrása a szimuláció során egy lépésköz alatt történik, ezért az erőugrás előtti illetve utáni mintavételezést, a lépésköz nagysága korlátozta. Minél több lépést végzünk tehát a szimuláció során egy mintavételezésnyi idő alatt annál pontosabb eredményt kapunk.

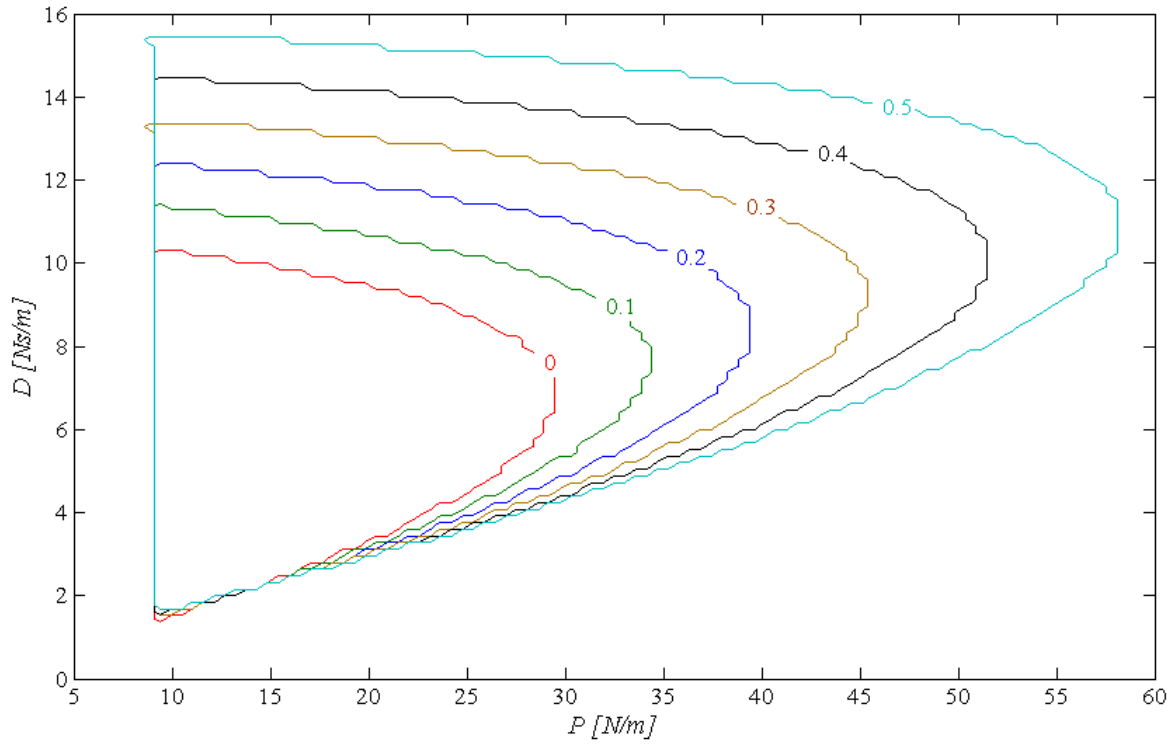
A numerikus szimuláció pontosságát a választott lépésköz nagyságán túl az időfüggvények stabilitását vizsgáló algoritmus minősége is befolyásolja. A stabilitást esetünkben úgy vizsgáljuk meg, hogy a szimuláció segítségével adott időintervallumban meghatározott függvényt felosztjuk. A felosztott időfüggvény első és utolsó negyedét kiválasztjuk, és mindkét esetben meghatározzuk a negyed tartományon belüli maximum és minimum érték közötti különbség abszolút értékét. Az első negyed esetén kapott értéket összevetjük az utolsó negyedben kapott értékkel és amennyiben az előbbi nagyobbak adódik, mint az utóbbi, akkor a függvényt stabilnak, ellenkező esetben pedig instabilnak ítéljük meg. A meghatározott időfüggvényről tudjuk, hogy csak abban az esetben nem fog az egyensúlyi helyzethez tartani, ha instabil, vagy ha a stabilitás határhelyzetében van. Ebből következően, ha megfelelően hosszú időintervallumban vizsgáljuk a függvényt, akkor a fent részletezett vizsgálat megfelelő lehet lineáris rendszerek stabilitásának megítélésére, hiszen azok mindig valamilyen burkológörbe mentén csillapodnak.

A (2.6.-2.7.) ábrákon látható stabilitási térképek $100 \times 100 \times 6$ pontban elvégzett időfüggvény vizsgálattal lettek meghatározva. Az időfüggvények értékeit minden esetben $h=0.5[\text{ms}]$ lépésközzel, $N=6000$ pontban számítottuk ki. Az egyes szintfelületek különböző A értékekhez tartoznak. Az eredmények megegyeznek a (2.4.-2.5.) ábrákon látható, numerikus stabilitásvizsgálat során kapott eredményekkel.

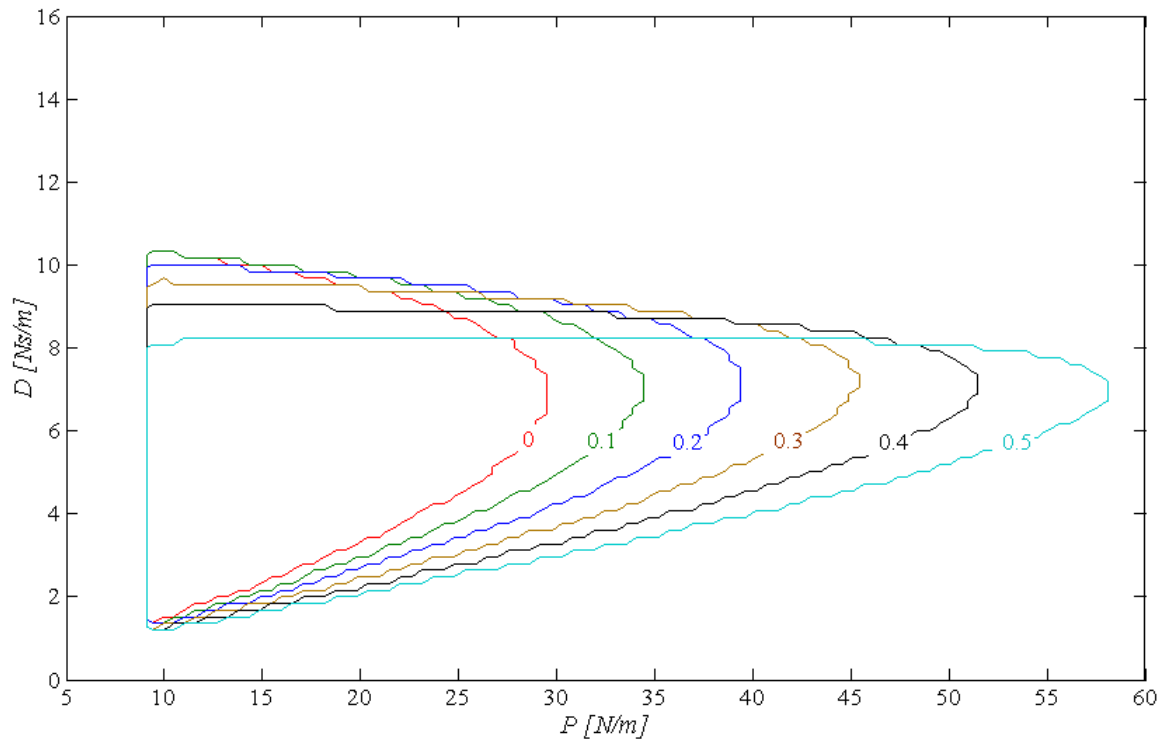
2.3 Összegzés

Az elkészített stabilitási térképek alapján elmondható, hogy a ZOH modellre épülő digitális pozíciószabályozással szabályozott oszcillátor stabilitási tartományát a gyorsulás visszacsatolása növeli. Ha a mintavételezés az erőugrás után történik, akkor jelentősen nagyobb stabil tartomány érhető el, mint ha ezt az erőugrás előtt tesszük.

A gyorsulás visszacsatolásának és az erőugrás után való mintavételezésnek a fizikai megvalósíthatósága azonban kérdéses.



(2.6.) ábra: A (2.7) egyenlet stabilitási térképe numerikus szimulációval különböző A értékekre, erőfrissítés utáni visszacsatolás mellett, $\alpha=3[\text{rad/s}]$, $\Delta t=0.1[\text{s}]$ esetén



(2.7.) ábra: A (2.7) egyenlet stabilitási térképe numerikus szimulációval különböző A értékekre, erőfrissítés előtti visszacsatolás mellett, $\alpha=3[\text{rad/s}]$, $\Delta t=0.1[\text{s}]$ esetén

3. Digitálisan szabályozott, késleltetett oszcillátor

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy késleltetett oszcillátor stabilitási tartománya hogyan változik, ha azt digitális szabályozással látjuk el. A szabályozó erőt a 2.2.2. fejezetben részletezett módon a pozíció, sebesség és gyorsulás mintavételezésének segítségével határozzuk meg. A digitális pozíciószabályozás tehát ismét a ZOH modell alapján történik.

3.1 Késleltetett oszcillátor stabilitási vizsgálata

Először vizsgáljuk meg a késleltetett oszcillátor viselkedését digitális szabályozó nélkül. Egy késleltetett, csillapított oszcillátor mozgásegyenlete konstans időkésséssel a következő:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 x(t - \tau). \quad (3.1)$$

Ennek a differenciálegyenletnek a stabilitási térképét az irodalom Hsu-Bhatt [2] stabilitási térképként ismeri.

Az differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 - b_0 e^{-\lambda \tau} = 0, \quad (3.2)$$

ahol a karakterisztikus exponens $\lambda = \gamma \pm i \omega$, $\omega \geq 0$.

Visszahelyettesítés után:

$$\gamma^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega + a_1\gamma + a_1i\omega + a_0 - b_0 e^{-\gamma\tau} [\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)] = 0. \quad (3.3)$$

Az egyenlet valós és képzetes részekre bontva:

$$\text{Re: } \gamma^2 - \omega^2 + a_1\gamma + a_0 - b_0 e^{-\gamma\tau} \cos(\omega\tau) = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{Im: } 2\gamma\omega + a_1\omega + b_0 e^{-\gamma\tau} \sin(\omega\tau) = 0. \quad (3.5)$$

A stabilitás határhelyzetében $\gamma=0$, ezt visszaírva a fenti egyenletekbe megkapjuk a stabilitás határgörbéit. Ezeket paraméteres alakban az (a_0, b_0) síkon a következő egyenletek írják le:

$$\omega\tau = 0, \quad k \in \mathbb{N} \rightarrow b_0 = a_0, \quad (3.6)$$

$$\omega\tau \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \rightarrow b_0 = -\frac{a_1\omega}{\sin(\omega\tau)}, \quad a_0 = -a_1\omega \cotg(\omega\tau) + \omega^2. \quad (3.7)$$

Először vizsgáljuk meg a csillapítatlan esetet ($a_1 = 0$), ekkor a határgörbék:

$$\omega\tau = k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \rightarrow b_0 = (-1)^k a_0 + (-1)^{k+1} \left(\frac{k\pi}{\tau} \right)^2, \quad (3.8)$$

$$\omega\tau \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \rightarrow b_0 = 0, \quad a_0 = \omega^2. \quad (3.9)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a stabilitás határhelyzetében, b_0 paraméter függvényében a stabilitás hogyan változik! Azt kell megvizsgálnunk, hogy λ komplex szám valós része (γ) b_0 függvényében, a $\gamma=0$ helyen (a határgörbén) a negatív, vagy a pozitív valós félsík felé „mozdul” el. Ezzel azt tudjuk megvizsgálni, hogy a határhelyzetben lévő gyökök b_0 paraméter

változásától függően a stabil, vagy instabil komplex félsíkba lépnek át. Ha a határhelyzetben $\omega=0$, akkor ott egy gyök lép át a stabil, vagy instabil félsíkba (nyeregpontról bifurkáció). Ha a határgörbén $\omega \neq 0$, akkor egy komplex konjugált gyökpár lépi át a stabilitás határát (Hopf bifurkáció).

A (3.4-5) egyenletek parciális deriváltjai b_0 szerint $a_1=0$ esetén:

$$2\gamma'_{b_0}\gamma - 2\omega'_{b_0}\omega - e^{-\gamma\tau}\cos(\omega\tau) + \gamma'_{b_0}b_0\tau e^{-\gamma\tau}\cos(\omega\tau) + \omega'_{b_0}b_0\tau e^{-\gamma\tau}\sin(\omega\tau) = 0, \quad (3.10)$$

$$2\gamma'_{b_0}\omega + 2\omega'_{b_0}\gamma + e^{-\gamma\tau}\sin(\omega\tau) - \gamma'_{b_0}b_0\tau e^{-\gamma\tau}\sin(\omega\tau) + \omega'_{b_0}b_0\tau e^{-\gamma\tau}\cos(\omega\tau) = 0. \quad (3.11)$$

Ezek a stabilitás határhelyzetében ($\gamma=0$):

$$\begin{bmatrix} b_0\tau\cos(\omega\tau) & b_0\tau\sin(\omega\tau) - 2\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_{b_0} \\ \omega'_{b_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) \\ -\sin(\omega\tau) \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

innen

$$\gamma'_{b_0} = \frac{b_0\tau - 2\omega\sin(\omega\tau)}{b_0^2\tau^2 + 4\omega^2 - 4\omega b_0\tau\sin(\omega\tau)}. \quad (3.13)$$

A határgörbék (3.8-9) felhasználva:

$$\omega\tau = k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \rightarrow \gamma'_{b_0} = \frac{b_0\tau}{b_0^2\tau^2 + 4\omega^2}, \quad (3.14)$$

$$\omega\tau \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \rightarrow \gamma'_{b_0} = -\frac{\sin(\omega\tau)}{2\omega}. \quad (3.15)$$

Ezek alapján

- $\omega\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ esetén $\text{sgn}(\gamma'_{b_0}) = \text{sgn}(b_0)$, ezért ezeken a határgörbéken pozitív b_0 irányban áthaladva,

ha $k=0$, akkor egy gyök lép át a negatívból a pozitív valós félsíkra (nyeregpontról bifurkáció),

ha $k \neq 0$, akkor egy gyökpár lép át a negatívból a pozitív valós félsíkra (Hopf bifurkáció),

- $\omega\tau \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $\omega = \sqrt{a_0}$, akkor

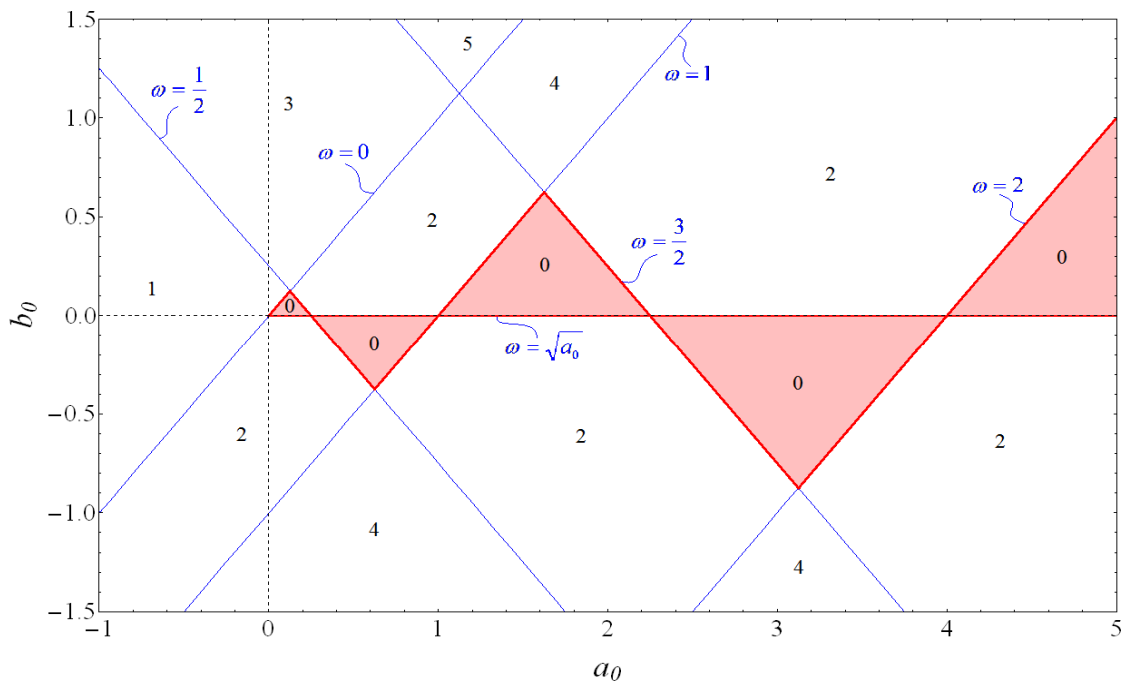
$$\gamma'_{b_0} < 0, \text{ ha } \left(\frac{2n\pi}{\tau}\right)^2 < a_0 < \left(\frac{(2n+1)\pi}{\tau}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.16)$$

ezek a tartományokon, a határgörbén b_0 irányban áthaladva egy instabil gyökpár stabillá válik (Hopf bifurkáció),

$$\gamma'_{b_0} > 0, \text{ ha } \left(\frac{(2n+1)\pi}{\tau}\right)^2 < a_0 < \left(\frac{(2n+2)\pi}{\tau}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.17)$$

ezek a tartományokon, a határgörbén b_0 irányban áthaladva egy stabil gyökpár instabillá válik (Hopf bifurkáció).

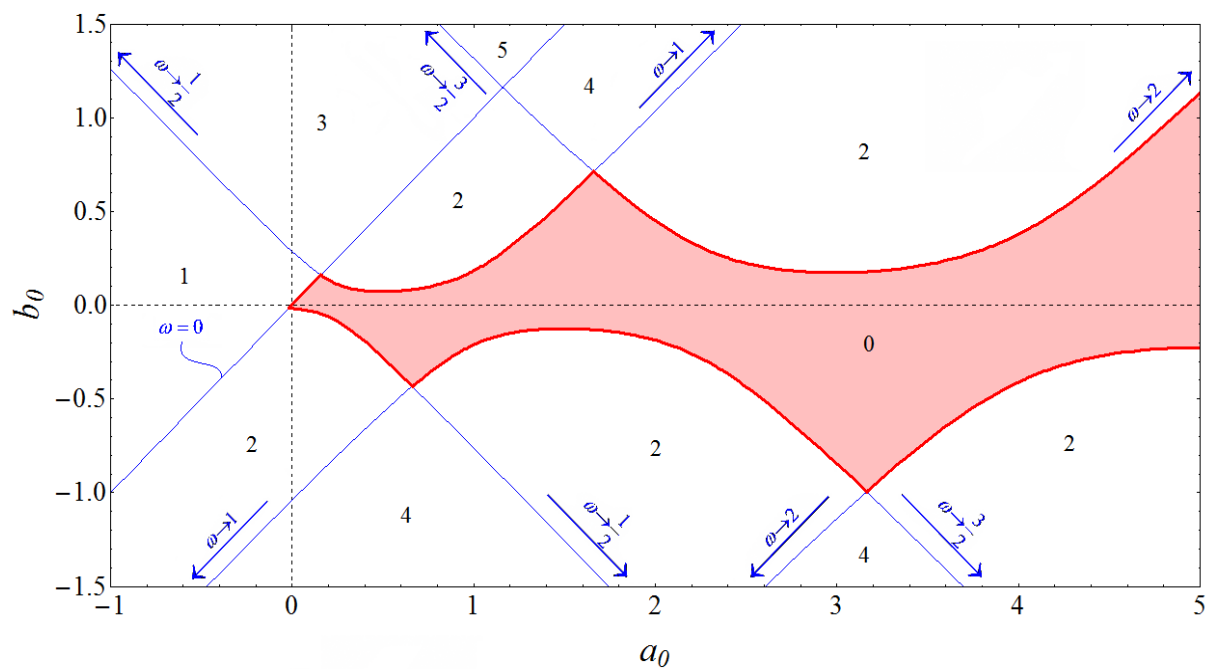
Ha $b_0 = 0$ és $a_0 < 0$, akkor egy közöséges differenciálegyenletet kapunk, amelynek megoldása (2.2), ennek egy instabil gyöke van. Ennek ismeretében és (3.14-15) deriváltak vizsgálata alapján a stabilitási térkép megrajzolható, amelyet a (3.1.) ábra mutat.



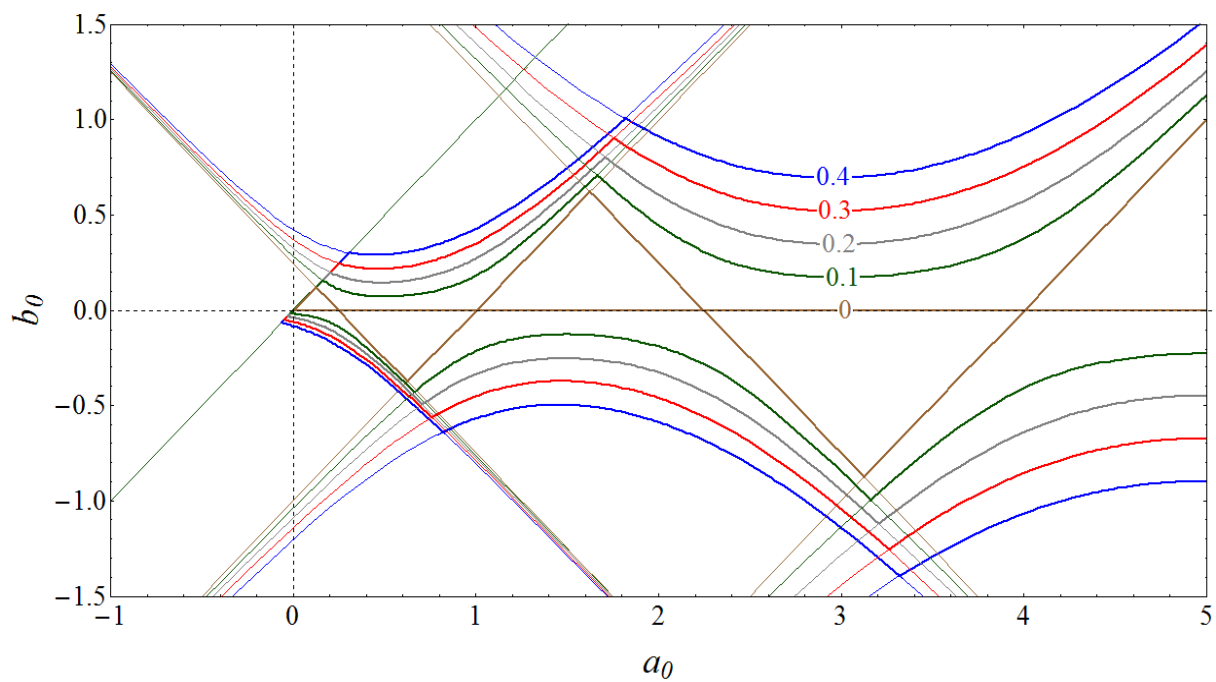
(3.1.) ábra: A (3.1) egyenlet stabilitási térképe $a_1=0$ és $\tau=2\pi$ mellett

A csillapítás figyelembe vételével meghatározott határgörbék (3.6-7) esetén a karakterisztikus exponensek a rendszerparaméterektől folytonosan függenek, ezért a csillapítás nélküli eset stabilitástartománya a csillapított eset stabilitási tartományának és az instabil gyökei számának meghatározásához felhasználható. A stabilitás határgörbéjét és az instabil gyökök számát a (3.2.) ábra mutatja a csillapítás figyelembevétele esetén. A stabilitás határgörbéit különböző a_1 értékekre a (3.3.) ábra szemlélteti.

Látható, hogy a csillapítás növeli a késleltetett oszcillátor stabilitását. Valós rendszerek esetén azonban a csillapítás értéke általában csak csekély mértékben növelhető. Ezt a stabilitási tartományt szeretnénk kibővíteni digitális erőszabályozás segítségével.



(3.2.) ábra: A (3.1) egyenlet stabilitási térképe $a_1=0.1$ és $\tau=2\pi$ mellett



(3.3.) ábra: A (3.1) egyenlet stabilitási térképe $\tau=2\pi$ mellett, különböző a_1 értékekre

3.2 Digitálisan szabályozott, késleltetett oszcillátor stabilitási vizsgálata

A digitális szabályozóval szabályozott, késleltetett oszcillátor mozgását az alábbi differenciálegyenlet írja le:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 x(t - \tau) - P \dot{x}(t_{j-1}) - D \ddot{x}(t_{j-1}) - A \ddot{x}(t_{j-1}), \quad (3.18)$$

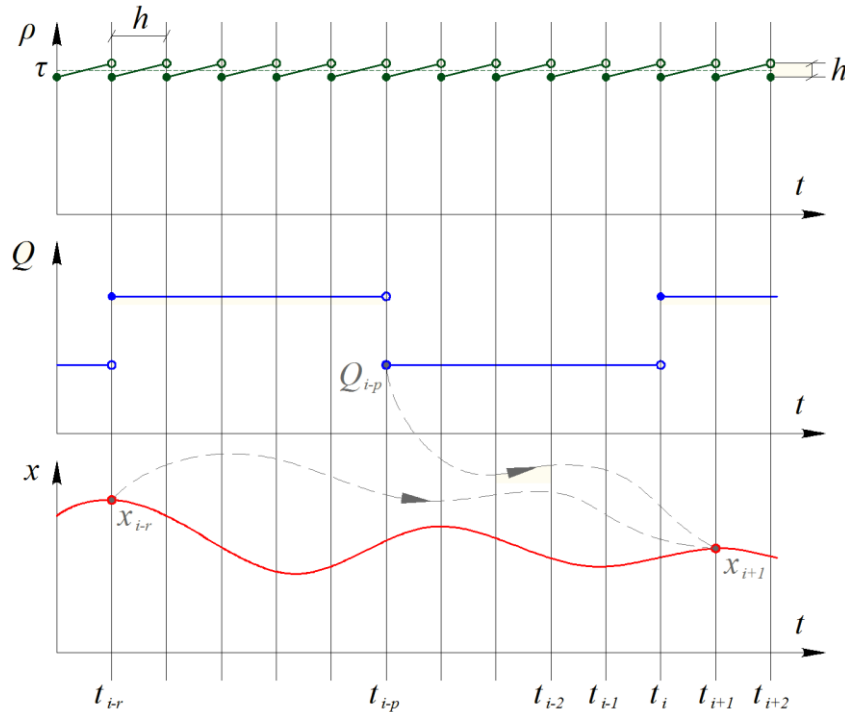
ahol $t \in [t_j, t_{j+1})$,

$t_{j+1} - t_j = \Delta t$ - a mintavételezési idő.

Ez egy paraméteresen gerjesztett, időkésleltetett differenciálegyenlet. Ennek a differenciálegyenletnek a stabilitási tartományát analitikus úton nem lehet meghatározni, csak numerikus közelítés segítségével. A stabilitási vizsgálathoz numerikus eljárásként a szemi-diszkretizációt használjuk majd.

A késleltetett differenciálegyenletek sajátossága, hogy végtelen dimenziójúak mivel megoldásukhoz egy kezdeti függvény, azaz végtelen sok kezdeti feltétel kell. Másképpen megfogalmazva a kezdeti feltétel időben folytonosan változik.

A szemi-diszkretizáció lényege, hogy a kezdeti függvényt diszkretizálva a késleltetett differenciálegyenletet elemi, közönséges differenciálegyenletekre bontja. A diszkretizációt az alábbi ábra szemlélteti.



(3.4.) ábra: A szemi-diszkretizációs módszer vázlata

3.2.1 Digitális szabályozás PD szabályozóval

A (3.4.) ábra alapján a következő közelítő differenciálegyenlet írható fel:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 x(t_{i-r}) - P x(t_{i-p}) - D \dot{x}(t_{i-p}), \quad (3.19)$$

ahol $t \in [t_i, t_{i+1})$,

$t_{i+1} - t_i = h$ - a numerikus módszer lépésköze,

$t_i - t_{i-p} = p h = \Delta t$ - a mintavételezési idő,

$t_i - t_{i-r} + h/2 = (r + 1/2)h = \tau$ - az eredeti időkézés,

$t_i - t_{i-r} + t = r h + t - t_i = \rho(t)$ - a közelítés időben változó időkézése,

$r/p = \kappa \in \mathbb{Z}^+$ - az időkézés felbontásának és a mintavételezés felbontásának aránya, a továbbiakban: időkézési arány (megjegyzendő, hogy nagy r esetén $r/p \approx \tau/\Delta t$).

A (3.19) egyenlet a következő, időben változó, időkézéssel rendelkező rendszerként kezelhető $t \in [t_i, t_{i+1})$ intervallumban:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 x(t - \rho(t)) - P x(t_{i-p}) - D \dot{x}(t_{i-p}), \quad (3.20)$$

A (3.4.) ábrán ábrázolt, $\rho(t)$ valós időkézést mutató függvényből látszik, hogy ha τ időkézésen belül a felosztást növeljük, akkor a „fűrészfogak” egyre jobban „rásimulnak” az átlagos időkézésre, amely megegyezik τ -val. Ha tehát $h \rightarrow 0$ és $r \rightarrow \infty$, akkor $\rho(t) \rightarrow \tau$.

A továbbiakban az $x(t_i)$ alakú jelölés helyett ismét az x_i alakú jelölést használjuk majd.

Írjuk át (3.19)-et elsőrendű rendszerré:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-r} \\ \dot{x}_{i-r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-p} \\ \dot{x}_{i-p} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Ez rövidebb formában:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{x}_{i-r} + \underline{C} \underline{x}_{i-p} = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{k} \quad (3.22)$$

A kezdeti feltétel:

$$\underline{x}(t_i) = \underline{x}_i. \quad (3.23)$$

A megoldást az állandók variálásának módszerével az alábbi formában keressük:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{g}(t). \quad (3.24)$$

Ezt idő szerint deriválva:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} e^{\underline{A}t} \underline{g}(t) + e^{\underline{A}t} \dot{\underline{g}}(t). \quad (3.25)$$

Visszaírva (3.22)-be:

$$e^{\underline{A}t} \dot{\underline{g}}(t) = \underline{k}. \quad (3.26)$$

Ebből az ismeretlen $\underline{g}(t)$ kifejezhető:

$$\underline{g}(t) = \int_{t_i}^t e^{-\underline{A}s} \underline{k} ds + \underline{K}. \quad (3.27)$$

A kezdeti feltételt felhasználva:

$$\underline{K} = e^{-\underline{A}t_i} \underline{x}_i, \quad (3.28)$$

ezzel

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_i)} \underline{x}_i + \int_{t_i}^t e^{\underline{A}(t-s)} \underline{k} ds. \quad (3.29)$$

Amennyiben az $\underline{A}$ mátrix invertálható, akkor az integrálás elvégzése után a differenciálegyenlet megoldása a következő alakba írható:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t-t_i)} \underline{x}_i - \underline{A}^{-1} (\underline{I} - e^{\underline{A}(t-t_i)}) \underline{k}, \quad (3.30)$$

amely a t_{i+1} időpontban

$$\underline{x}_{i+1} = e^{\underline{A}h} \underline{x}_i - \underline{A}^{-1} (\underline{I} - e^{\underline{A}h}) \underline{k}. \quad (3.31)$$

Vezessünk be új jelöléseket:

$$\underline{P} = e^{\underline{A}h}, \quad \underline{R} = -\underline{A}^{-1} (\underline{I} - e^{\underline{A}h}), \quad (3.32)$$

$$\underline{R}_1 = \underline{R} \underline{B}, \quad \underline{R}_2 = \underline{R} \underline{C}, \quad (3.33)$$

ezzel (3.31) az alábbi alakot ölti:

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{P} \underline{x}_i + \underline{R}_1 \underline{x}_{i-r} + \underline{R}_2 \underline{x}_{i-p}. \quad (3.34)$$

Ezzel egy diszkrét, lineáris leképezést kapunk. A következő differenciaegyenlet rendszer írható fel (3.34) alapján:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{i+1} \\ \underline{x}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{i-r+2} \\ \underline{x}_{i-r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P} & 0 & \cdots & 0 & \underline{R}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{R}_1 \\ \underline{I} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \underline{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_i \\ \underline{x}_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{i-p+1} \\ \underline{x}_{i-p} \\ \underline{x}_{i-p-1} \\ \underline{x}_{i-p-2} \\ \vdots \\ \underline{x}_{i-r+1} \\ \underline{x}_{i-r} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Rövidebb formában:

$$\underline{X}_{i+1} = \underline{G}_1 \underline{X}_i. \quad (3.36)$$

Ha a szabályozás erősítő tényezőit zérusnak választjuk, akkor $\underline{G}_I$ mátrix bármely i esetén azonos, így ez esetben elegendő lenne csak ennek a sajátértékeit vizsgálni a stabilitási határok kiszámításához.

A (3.18) differenciálegyenlet egy periodikus differenciálegyenlet, mivel a mintavételezés megfelel egy $\Delta t = ph$ periódusú időkézésnek. A (3.19) közelítő differenciálegyenletet azonban csak a $t \in [t_i, t_{i+1})$ időintervallumra, egy speciális esetre írtuk fel: arra az időpillanatra, amelyben a szabályozó erő értéke „frissül” (ahogyan ezt a (3.4.) ábra is mutatja). Mivel a digitális szabályozó a mintavételezett jel értékét Δt ideig tartja, így a felírt $\underline{G}$ mátrix minden egyes h lépésben változni fog p lépésen keresztül. Ezek alapján két erőugrás között a következő differencia egyenletrendszer írható fel:

$$\underline{X}_{i+p} = \underline{G}_p \underline{G}_{p-1} \dots \underline{G}_k \dots \underline{G}_2 \underline{G}_1 \underline{X}_i, \quad (3.37)$$

ahol $k = 1, 2, \dots, p$. A mátrix szorzások elvégzése után:

$$\underline{\underline{X}}_{i+p} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{X}}_i. \quad (3.38)$$

Ismét (2.21) alakú egyenlethez jutottunk, így az aszimptotikus stabilitás feltétele az, hogy Φ mátrix összes sajátértéke legyen kisebb egynél:

$$|\mu_{1,2,\dots,2r}| < 1 \quad (3.39)$$

Vizsgáljuk meg az egy lépéssel későbbi, $t \in [t_{i+1}, t_{i+2})$ időintervallumra a (3.4.) ábra segítségével felírható differenciálegyenletet:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 x(t_{i-r+1}) - P x(t_{i-p}) - D \dot{x}(t_{i-p}). \quad (3.40)$$

Ebből az alábbi differencia egyenletrendszert kapjuk t_{j+1} és t_{j+2} időpillanatok között:

[illegible]

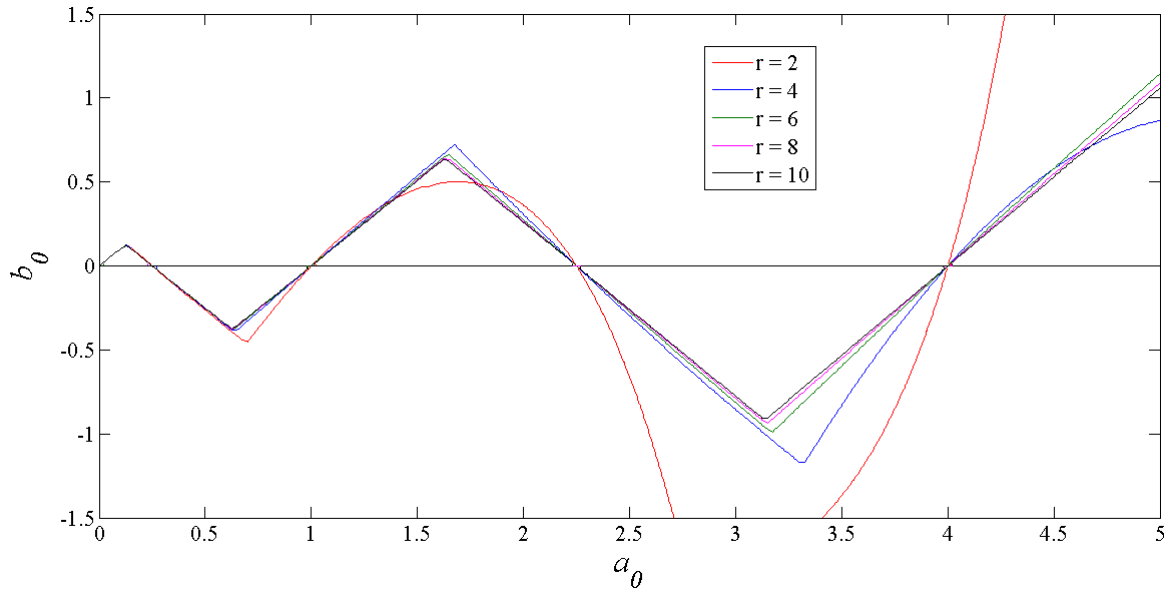
Látható, hogy itt $\underline{G}_2$ együtttható mátrix annyiban tér el $\underline{G}_1$ mátrixtól, hogy $\underline{R}_2$ részmátrix egy helyet jobbra „ugrott”. Az alábbi ábra azt mutatja, hogy $\underline{G}_k$ mátrixok első sora hogyan változik egy mintavételezés időtartama alatt.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc} \overbrace{P \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{p-1} & \overbrace{R_2 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^2 & \overbrace{\dots \quad 0}^3 & \overbrace{\dots \quad 0}^k & \overbrace{\dots \quad 0}^{k+1} & \overbrace{\dots \quad 0}^{p-1} & \overbrace{0 \quad 0}^p & \overbrace{0 \quad \dots \quad 0 \quad R_1}^{r-2p+1} \end{array} \right]$$

(3.5.) ábra: $\underline{G}_k$ mátrixok első sorának változása $\underline{G}_1$ mátrix aktuális értékeivel ábrázolva

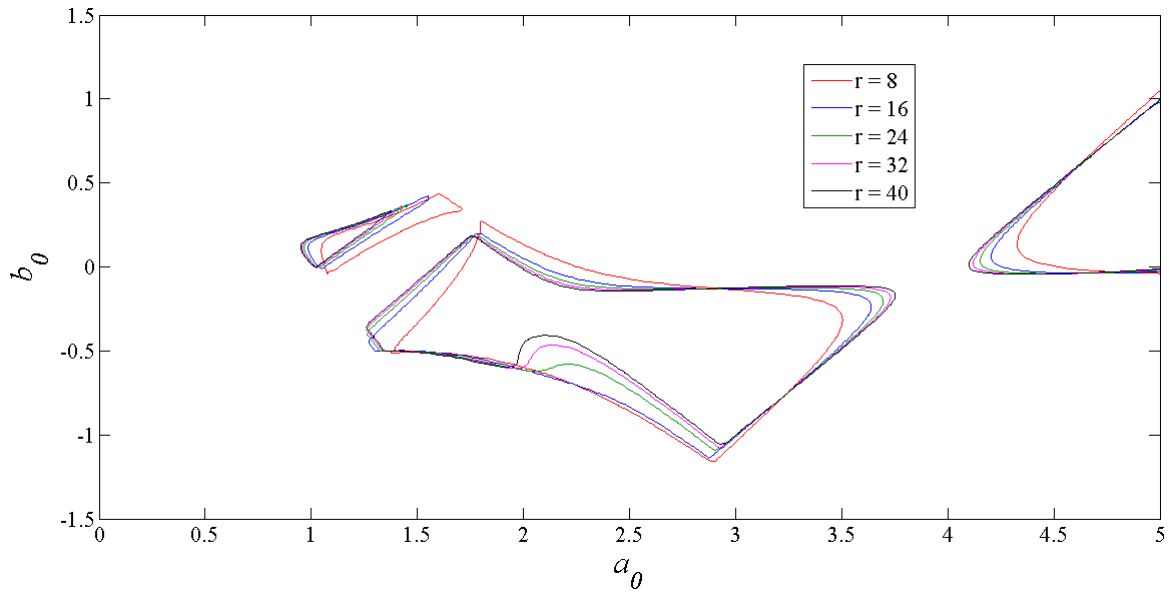
A stabilitási térképeket a 2.2.3.1. fejezetben már ismertett numerikus sajátérték vizsgálattal határozzuk meg $\underline{D}$ mátrix sajátértékeit vizsgálva.

Először vizsgáljuk meg az eljárás konvergenciáját, ha az erőszabályozástól eltekintünk. Azt vizsgáljuk, hogy hogyan függ a digitális szabályozó nélküli ($P=0$ és $D=0$) csillapítatlan rendszer ($a_1=0$) stabilitása a numerikus eljárás pontosságát meghatározó r paramétertől. A kapott stabilitási térképet a (3.6.) ábra mutatja a térkép területének 200×200 -es felosztása mellett. Összevetve a (3.1.) ábrával látható, hogy a konvergencia kis a_0 paraméterekre gyors. Már $r=4$ -nél majdnem teljesen visszanyertük az analitikus stabilitási térképet.



(3.6.) ábra: A (3.19) egyenlet stabilitása $a_1=0$, $P=0$, $D=0$, $\tau=2\pi$ esetén különböző r értékekre

Ha a digitális erőszabályozás hatását is figyelembe vesszük, akkor a pontosság nemcsak r -től függ, hanem p -től is, mivel ez szabja meg, hogy egy mintavételezésen belül hány lépésközt használunk. Itt fontos megemlíteni, hogy a pontosság nem, de a stabilitás függ κ időkésési aránytól, amely az időkésésen belüli mintavételezések száma, ezért állandó r mellett a konvergencia p -től való függését nem tudjuk vizsgálni. Nézzük meg, hogyan változik a stabilitási tartomány állandó κ és különböző p értékekre, ha P és D adott. A csillapítatlan rendszert ismét 200×200 -as felbontásban vizsgálva a (3.7.) ábrán látható stabilitási tartományhoz jutunk.

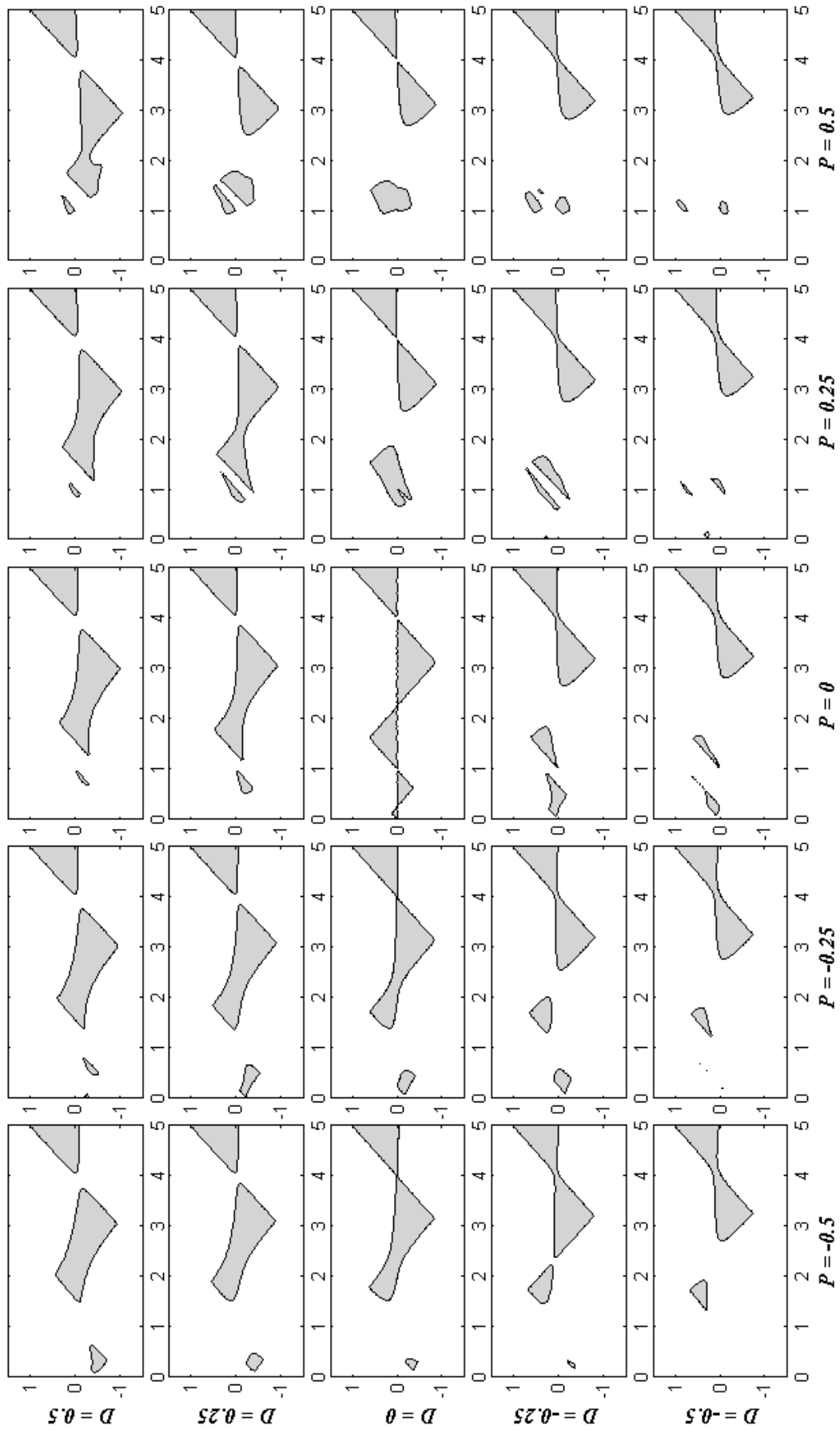


(3.7.) ábra: A (3.19) egyenlet stabilitása $a_l=0$, $P=0.5$, $D=0.5$, $\tau=2\pi$, $\kappa=2$ esetén különböző r értékekre

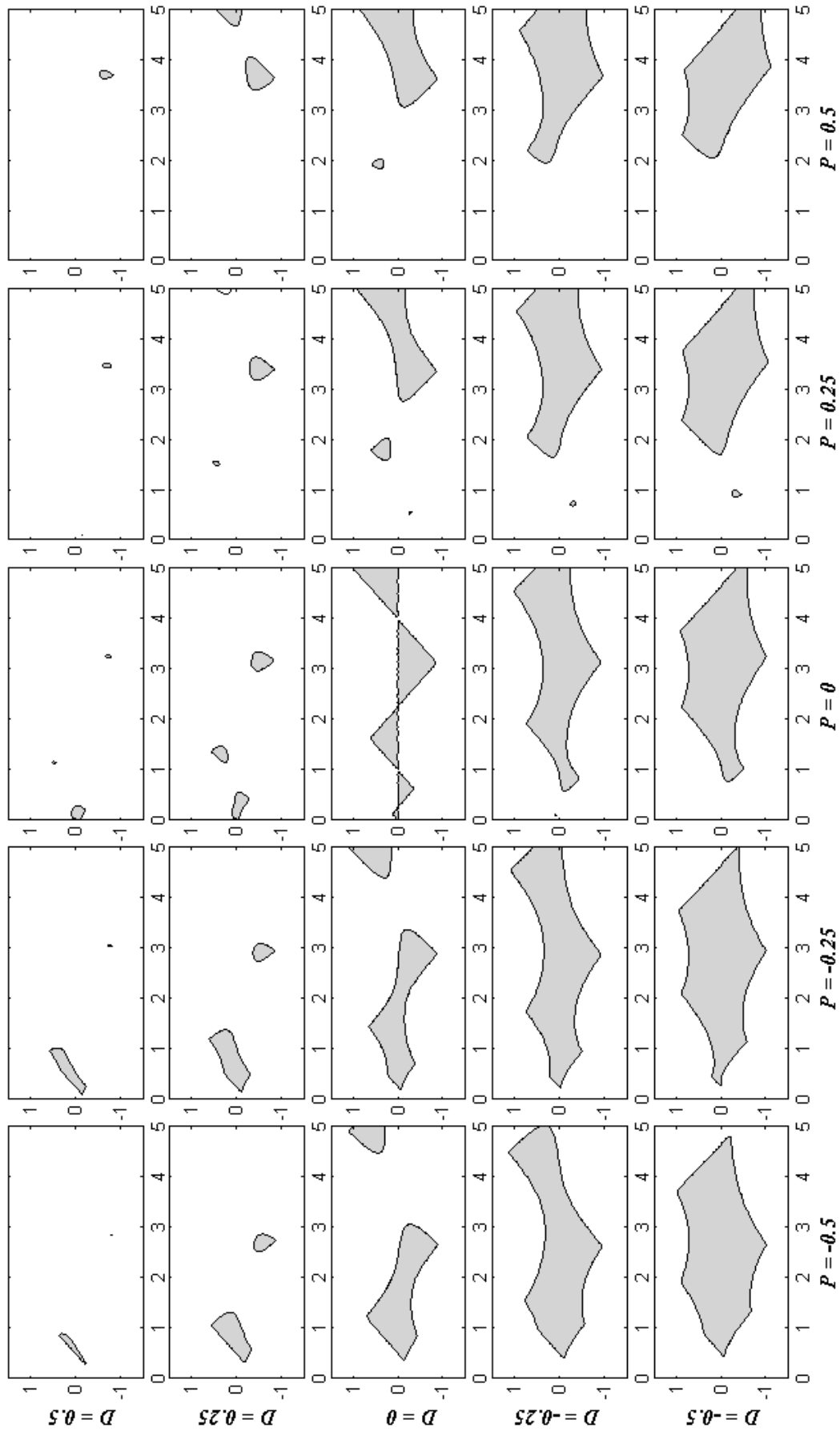
Látható, hogy bár a teljes felosztás és a mintavételezésen belüli felosztás is sűrűbb, mégis nagyobb eltérések vannak itt a pontosabb tartományok között, mint a (3.6.) ábrán.

A stabilitási határokat különböző P és D értékekre kirajzolva változtassuk κ -t és nézzük meg, hogyan változik a stabilitás. Minél kisebb a mintavételezési idő (minél nagyobb κ), a szabályozás annál jobban közelíti a folytonos szabályozást, amely esetén a P tag virtuális merevségként D pedig virtuális csillapításként kezelhető, így tehát arra számítunk, hogy a mintavételezési idő csökkentése a stabilitás növekedéséhez vezet majd.

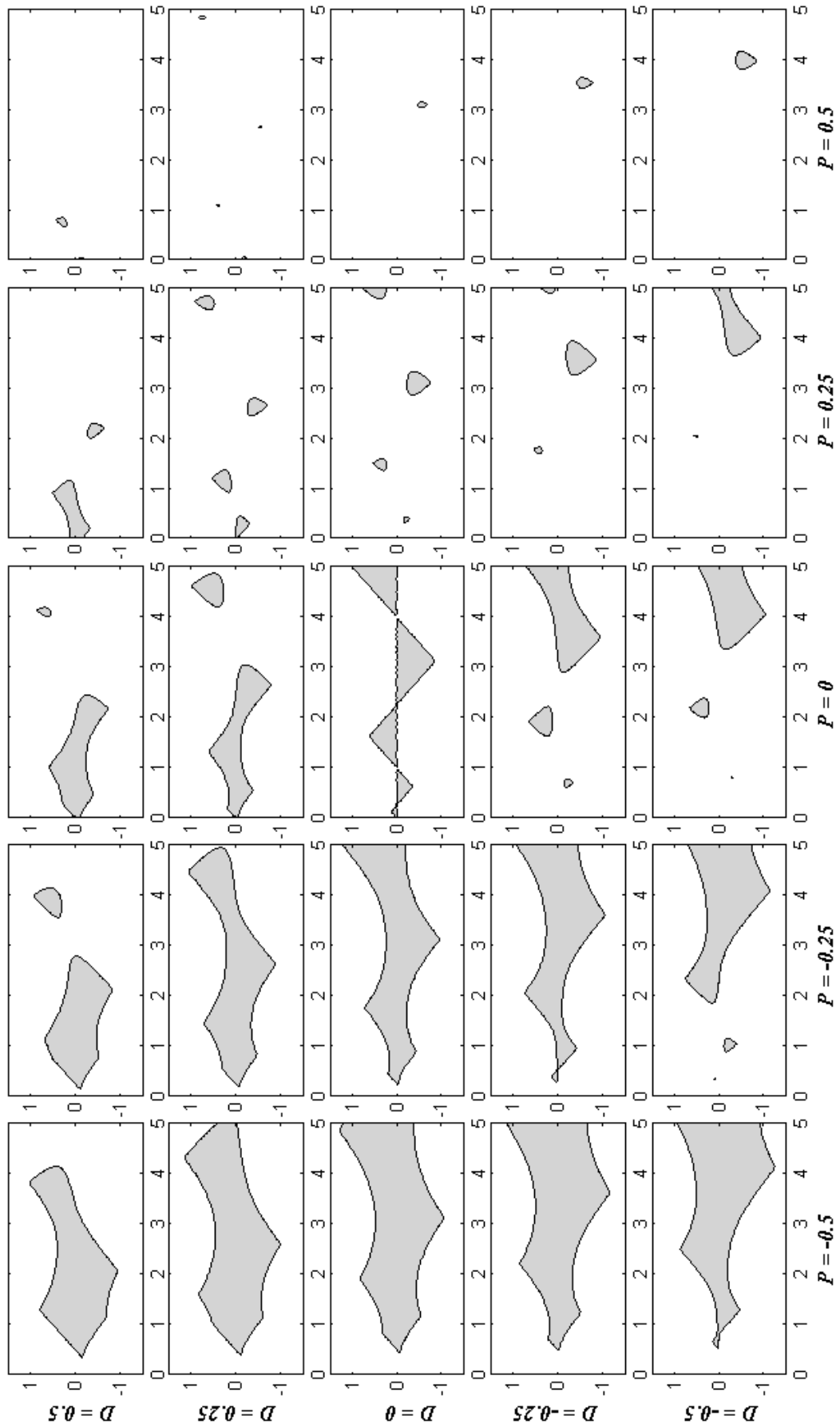
A (3.8-3.11.) ábrákat 100×100 -as felbontás mellett rajzoltuk ki. Az ábrákból látható, hogy $\kappa=5$ -nél negatív D , $\kappa=10$ -nél negatív P és $\kappa=20$ -nál pozitív D értékek növelték a stabilitási tartományt a vizsgált paramétertartományon. Azt tapasztaljuk, hogy ahogyan a mintavételezés frekvenciáját növeljük, a stabilizáló hatás a (P, D) síkon az óramutató járásával megegyezően elkezd „körbe forogni”. A stabilizáló hatás a (P, D) síkon csak egy fordulatot tesz meg, mivel ahogyan növeljük az időkézési arányt, úgy tartunk az időben folytonos szabályozáshoz. $\kappa=20$ -nál már a (3.2) ábrán látható tartományokhoz igen közeli stabilitási határokat kapunk. Pozitív D esetén a stabilitási tartományok megvastagodnak, tehát ahogyan azt előzetesen vártuk sűrű felosztásnál D virtuális csillapításként viselkedik. Megfigyelhetjük azt is, hogy pozitív P -k esetén a stabilitási határok a_0 (merevségi) tengely mentén balra elcsúsznak, vagyis P virtuális merevségként viselkedik.



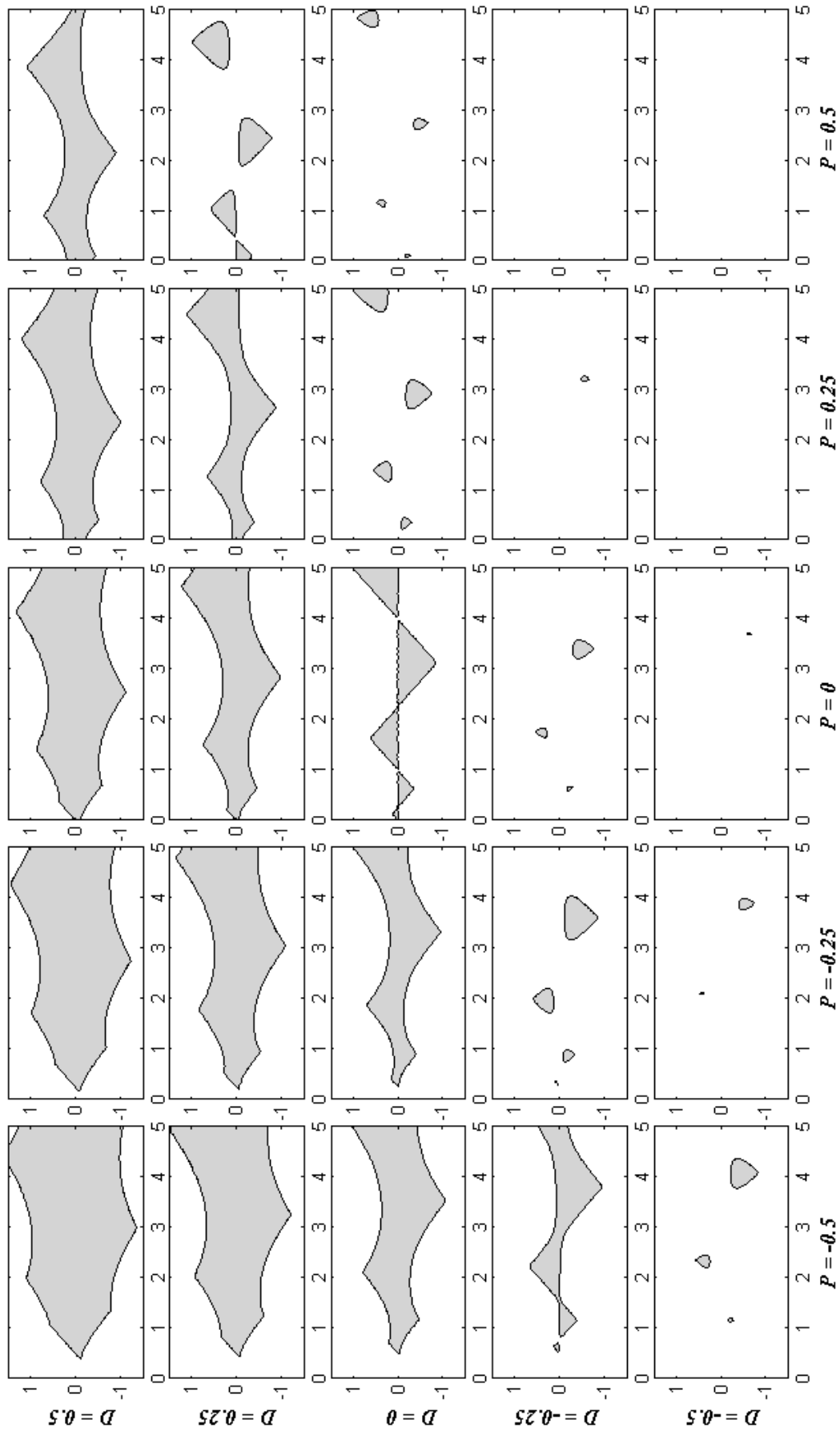
(3.8.) ábra: A (3.19) egyenlet stabilitása $a_1=0$, $\tau=2\pi$, $\kappa=2$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre



(3.9.) ábra: A (3.19) egyenlet stabilitása $a_I=0$, $\tau=2\pi$, $\kappa=5$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre



(3.10.) ábra: A (3.19) egyenlet stabilitása $a_1=0$, $\tau=2\pi$, $\kappa=10$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre



(3.11.) ábra: A (3.19) egyenlet *stabilitása* $a_1=0$, $\tau=2\pi$, $\kappa=20$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre

3.2.2 Digitális szabályozás PDA szabályozóval

Azt a 2. fejezetben láttuk, hogy egy egyszerű, instabil, lineáris oszcillátornál a digitális szabályozóban a gyorsulás visszacsatolása a stabilitási határokat növeli. A következőekben alkalmazzuk a gyorsulás visszacsatolását a késleltetett oszcillátor digitális pozíciósabályozására is és megvizsgáljuk, hogy lehetséges-e a stabilitási határok további kibővítése.

Ez esetben is igaz lesz a 2.2. fejezetben tett megállapítás, miszerint a gyorsulás értékében az erőugrások helyein törés lesz, így a mintavételezés helye nem egyértelmű. Az egyszerűség kedvéért mi a 2.2.2. fejezetben leírtakhoz hasonlóan azt feltételezzük, hogy a mintavételezés közvetlenül az erőugrás előtt történik.

Szemi-diszkrétizációval a vizsgált differenciálegyenlet:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 x_{i-r} - P x_{i-p} - D \dot{x}_{i-p} - A \ddot{x}_{i-p}, \quad (3.42)$$

ahol $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Ezt átírva elsőrendű rendszerre:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-r} \\ \dot{x}_{i-r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-p} \\ \dot{x}_{i-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i-p} \\ \ddot{x}_{i-p} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Rövidebb alakban:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{x}_{i-r} + \underline{C} \underline{x}_{i-p} + \underline{D} \dot{\underline{x}}_{i-p} = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{k}, \quad (3.44)$$

ennek megoldása (3.30.). A megoldást idő szerint deriválva:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} e^{\underline{A}(t-t_i)} \underline{x}_i + e^{\underline{A}(t-t_i)} \underline{k}. \quad (3.45)$$

A (3.30.) és (3.45.) összefüggések alapján a t_{i+1} időpontban:

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{P} \underline{x}_i + \underline{R}_1 \underline{x}_{i-r} + \underline{R}_2 \underline{x}_{i-p} + \underline{R}_3 \dot{\underline{x}}_{i-p} \quad (3.46)$$

$$\dot{\underline{x}}_{i+1} = \underline{P}^* \underline{x}_i + \underline{R}_1^* \underline{x}_{i-r} + \underline{R}_2^* \underline{x}_{i-p} + \underline{R}_3^* \dot{\underline{x}}_{i-p}, \quad (3.47)$$

ahol

$$\underline{P}^* = \underline{A} \underline{P}, \quad \underline{R}_3 = \underline{R} \underline{D}, \quad (3.48)$$

$$\underline{R}_1^* = \underline{P} \underline{B}, \quad \underline{R}_2^* = \underline{P} \underline{C}, \quad \underline{R}_3^* = \underline{P} \underline{D}. \quad (3.49)$$

A t_i és t_{i+1} időpontok között felírható differencia egyenletrendszer ezúttal a következő:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{i+1} \\ \dot{\underline{x}}_{i+1} \\ \underline{x}_i \\ \dot{\underline{x}}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{i-r+2} \\ \dot{\underline{x}}_{i-r+2} \\ \underline{x}_{i-r+1} \\ \dot{\underline{x}}_{i-r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{R}_2 & \underline{R}_3 & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{R}_1 & \underline{0} \\ \underline{P}^* & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{R}_2^* & \underline{R}_3^* & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{R}_1^* & \underline{0} \\ \hline \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \ddots & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_i \\ \dot{\underline{x}}_i \\ \underline{x}_{i-1} \\ \dot{\underline{x}}_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{i-p} \\ \dot{\underline{x}}_{i-p} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{x}_{i-r+1} \\ \dot{\underline{x}}_{i-r+1} \\ \underline{x}_{i-r} \\ \dot{\underline{x}}_{i-r} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Vezessük be a következő mátrixokat:

$$\underline{R}_I = \begin{bmatrix} \underline{R}_2 & \underline{R}_3 \\ \underline{R}_2^* & \underline{R}_3^* \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_I = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 & \underline{0} \\ \underline{R}_1^* & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{P}_I = \begin{bmatrix} \underline{P} & \underline{0} \\ \underline{P}^* & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

és

$$\underline{y}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_i \\ \dot{\underline{x}}_i \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

vektort. Így (3.50) a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_{i+1} \\ \underline{y}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{y}_{i-r+2} \\ \underline{y}_{i-r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_I & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{R}_I & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{R}_I \\ \hline \underline{I} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_i \\ \underline{y}_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{y}_{i-p+1} \\ \underline{y}_{i-p} \\ \underline{y}_{i-p-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{y}_{i-r+1} \\ \underline{y}_{i-r} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

ez rövidebb formában

$$\underline{Y}_{i+1} = \underline{J}_1 \underline{Y}_i. \quad (3.54)$$

Egy mintavételezés eleje és vége között ismét a (3.38) összefüggés írható fel, ahol

$$\underline{\Phi} = \underline{J}_p \underline{J}_{p-1} \dots \underline{J}_k \dots \underline{J}_2 \underline{J}_1, \quad k=1,2,\dots,p. \quad (3.55)$$

Itt $\underline{J}_k$ mátrix hasonló alakot ölt, mint $\underline{G}_k$ és ugyanolyan viselkedést mutat k változásával. A stabilitás vizsgálata a korábbiakhoz hasonlóan $\underline{\Phi}$ sajátértékeinek vizsgálatával történik. A vizsgált mátrix elemeinek száma 4-szerese a 3.2.1 fejezetben vizsgált mátrix elemszámának, ez a számítások időtartamát megnöveli. Vegyük észre azonban, hogy az $\underline{y}_i$ vektorban az $\dot{\underline{x}}$

skalár tag kétszer szerepel, ezért a $\underline{J}$ mátrix méretét lehet csökkenteni, ha az egyik $\dot{x}$ tagot kiküszöböljük.

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \overbrace{P}^{p-1} & 0 & \dots & 0 & \overbrace{R}^p & 0 & \dots & 0 & \overbrace{R}^{r-2p+1} & 0 & \dots & 0 & \overbrace{R}^p \\ \hline \underline{P}_I & 0 & \dots & 0 & \underline{R}_{II} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{R}_I \end{array} \right]$$

(3.12.) ábra: $\underline{J}_k$ mátrixok első sorának változása $\underline{J}_I$ mátrix aktuális értékeivel ábrázolva

A stabilitási vizsgálathoz szükséges differenciaegyenlet a (3.42) skalár differenciálegyenlet megoldásával is levezethető. Ekkor ismét a (3.53) formájú differenciaegyenlet rendszerhez jutunk. Ahol $\underline{J}_k$ a korábbiakkal megegyező viselkedést mutat k változásával. Ezúttal:

$$\underline{y}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \\ \ddot{x}_i \end{bmatrix}, \underline{P}_I = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 \\ P_{31} & P_{32} & 0 \end{bmatrix}, \underline{R}_{II} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}, \underline{R}_I = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & 0 & 0 \\ R_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

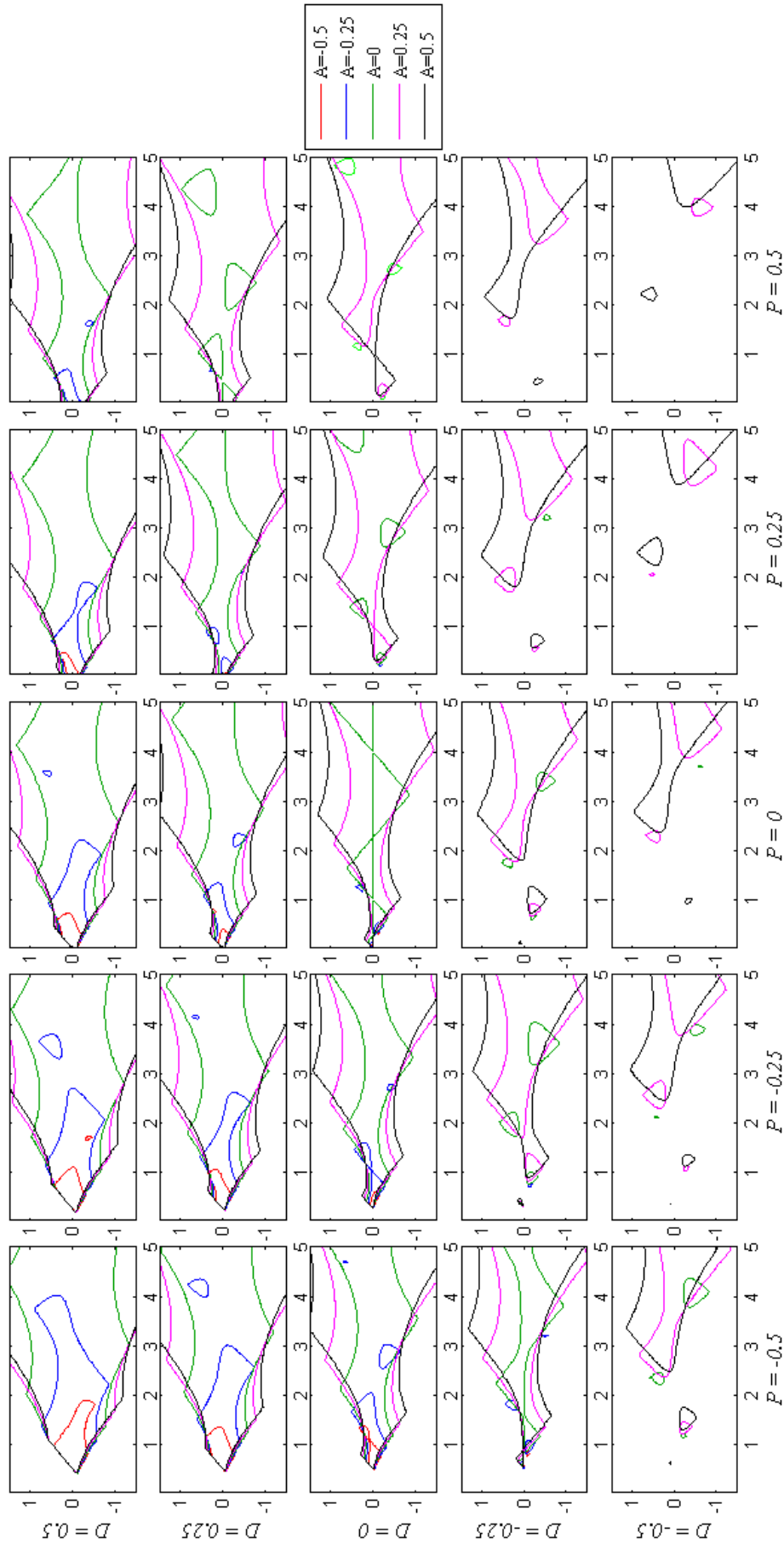
Az egyes konstansok értékei:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h}, & P_{12} &= -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h}, \\ P_{21} &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h}, & P_{22} &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h}, \\ P_{31} &= \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} - \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h}, & P_{32} &= -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h}, \\ T_{11} &= -\frac{P}{a_0} \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h} + 1 \right), & T_{12} &= \frac{D}{P} T_{11}, & T_{13} &= \frac{A}{P} T_{11}, \\ T_{21} &= -\frac{P}{a_0} \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h} \right), & T_{22} &= \frac{D}{P} T_{21}, & T_{23} &= \frac{A}{P} T_{21}, \\ T_{31} &= -\frac{P}{a_0} \left(-\frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 h} + \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 h} \right), & T_{32} &= \frac{D}{P} T_{31}, & T_{33} &= \frac{A}{P} T_{31}, \\ R_1 &= -\frac{b_0}{P} T_{11}, & R_2 &= -\frac{b_0}{P} T_{21}, & R_{33} &= -\frac{b_0}{P} T_{31}, \end{aligned}$$

ahol λ_1, λ_2 karakterisztikus exponensek a karakterisztikus egyenlet megoldásával határozhatók meg, értékük:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

A sajátérték vizsgálatot a korábbiakkal megegyező paraméterek mellett végrehajtva vizsgáljuk meg, hogy a gyorsulás visszacsatolása hogyan módosítja a (3.11.) ábrát. Látható, hogy pozitív A értékekre a gyorsulás visszacsatolása növeli a stabilitási tartományt, negatívra csökkenti azt.



(3.13.) ábra: A (3.42) egyenlet stabilitása $a_1=0$, $\tau=2\pi$, $\kappa=20$ és $r=60$ esetén különböző P , D és A értékekre

3.3 Összegzés

Az elkészített stabilitási térképek alapján elmondható, hogy a késleltetett oszcillátor stabilitása növelhető digitális pozíció szabályozás segítségével. A szabályozó egyes erősítő tagjai az időkézési arány függvényében különböző P és D értékre okoznak stabilitás-növekedést. Minél nagyobb frekvenciájú a mintavételezés a szabályozott rendszer időkézéséhez képest a digitális szabályozó erő annál jobban közelíti a folytonos szabályozó erőt, így nagyfrekvenciájú mintavételezés esetén P és D virtuális csillapításként és merevségként kezelhető. A gyorsulás visszacsatolásával a stabilitási tartományok ismét kibővíthetők pozitív A -k esetén.

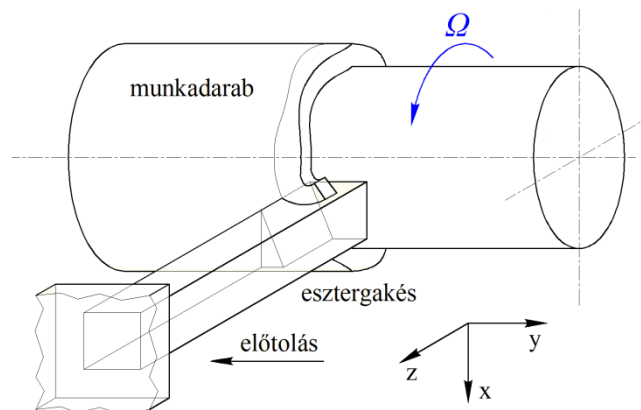
4. Esztergálás digitális szabályozással

Az esztergálási folyamat során a megmunkált munkadarab felületének minősége nagymértékben függ a szerszám gép dinamikai viselkedésétől. Megfigyelhető, hogy az esztergakés bizonyos fordulatszámok esetén nagy amplitúdójú rezgéseket végez. Ezek a rezgések rámásolódnak a munkadarab felszínére rontva annak minőségét.

Ez a megmunkálási probléma az esztergálási folyamat időkésésére vezethető vissza. Az időkésés jelenléte abból adódik, hogy a szerszám gép rezgéseket végez, amelyek rámásolódnak a munkadarab felszínére, így a munkadarab következő fordulatánál a szerszám egy hullámos felületen vág. Az esztergakés mozgását tehát annak egy fordulatnyi idővel korábbi állapota befolyásolja. Ez a folyamat megmunkálási paraméterektől függően gerjesztheti a rendszert, az így kialakuló rezgéseket öngerjesztett, regeneratív rezgéseknek nevezzük.

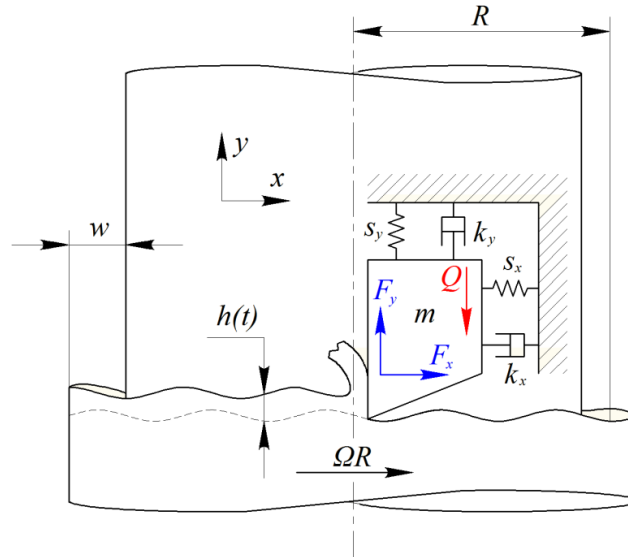
4.1 Esztergálási folyamat mechanikai modellezése

Az alábbiakban felrajzoljuk az esztergálási folyamat szakirodalomból jól ismert két szabadsági fokú mechanikai modelljét digitális pozíciószabályozás alkalmazása esetén. Majd felírjuk a mechanikai modell időbeni viselkedését leíró differenciálegyenleteket.



(4.1.) ábra: Esztergálási folyamat vázlata

A (4.1.) ábrán látható modell helyett mi egy 2 szabadsági fokú modellt vizsgálunk, így az esztergakés z irányú mozgását figyelmen kívül hagyjuk. A szerszámot a munkadarab megmunkált felületénél egy koncentrált paraméterű modellel helyettesítjük és modális paraméterekkel lineáris viselkedéssel vesszük figyelembe a (4.2.) ábra szerint.



(4.2.) ábra: Esztergálási folyamat két szabadsági fokú mechanikai modellje digitális pozíciószabályozással

Az ábrán a jelölések a következők:

w – fogásmélység,	F_x, F_y – forgácsoló erők,
h – forgácsvastagság,	m – modális tömeg,
Ω – fordulatszám,	s_x, s_y – modális merevség,
Q – szabályozó erő,	k_x, k_y – modális csillapítás.

Az esztergakést helyettesítő egyszerű két szabadsági fokú oszcillátor mozgásegyenlete a következő:

$$m\ddot{x}(t) + k_x \dot{x}(t) + s_x x(t) = F_x(t), \quad (4.1)$$

$$m\ddot{y}(t) + k_y \dot{y}(t) + s_y y(t) = F_y(t) - Q(t). \quad (4.2)$$

A forgácsoló erők a következő alakban adhatók meg:

$$F_x(t) = K_x w h^q(t), \quad (4.3)$$

$$F_y(t) = K_y w h^q(t), \quad (4.4)$$

ahol

K_x, K_y – forgácsolási erőállandó x és y irányban,

q – forgácsolási kitevő.

Itt megjegyezzük, hogy forgácsoló erő értékeire az irodalomban más összefüggések is megtalálhatók [1], [4].

Az időkésedelmet az egy fordulattal korábbi és a jelenlegi vágás között az alábbi egyenletből számíthatjuk ki:

$$\int_{t-\tau(t)}^t \frac{R 2\pi \Omega(s)}{60} ds = 2R\pi + x(t) - x(t - \tau(t)), \quad (4.5)$$

ahol Ω [ford./perc] mértékegységben értendő. Ha feltételezzük, hogy x elmozdulás elhanyagolhatóan kicsiny R sugárhoz képest ($x \rightarrow 0$), és hogy a fordulatszám időben állandó, akkor (4.5)-ből időkésésre a következő kifejezéshez jutunk:

$$\tau = \frac{60}{\Omega}. \quad (4.6)$$

A forgácsvastagság a következőképpen adható meg:

$$h(t) = v_e \tau + y(t - \tau) - y(t), \quad (4.7)$$

ahol v_e az előtolási sebesség. A szabályozó erőt az alábbi kifejezéssel számoljuk feltételezve, hogy a szabályozó erő folytonos:

$$Q(t) = P y(t) + D \dot{y}(t) + A \ddot{y}(t) \quad (4.8)$$

A fent leírtak figyelembevételével a (4.1), (4.2) mozgásegyenletek a következő alakot öltik:

$$m \ddot{x}(t) + k_x \dot{x}(t) + s_x x(t) = K_x w (v_e \tau + y(t - \tau) - y(t))^q, \quad (4.9)$$

$$m \ddot{y}(t) + k_y \dot{y}(t) + s_y y(t) = K_y w (v_e \tau + y(t - \tau) - y(t))^q - P y(t) - D \dot{y}(t) - A \ddot{y}(t). \quad (4.10)$$

Feltételezzük, hogy $x(t) = x_0$ és $y(t) = y_0$ kielégítik (4.8), (4.9) egyenleteket. Ekkor az általános megoldás $x(t) = x_0 + \xi(t)$ és $y(t) = y_0 + \eta(t)$ alakban írható fel. Ahol $\xi(t)$ és $\eta(t)$ ingadozás x_0 és y_0 körül.

A (4.9) és (4.10) egyenleteket linearizálva a konstans megoldások körül az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$m \ddot{\xi}(t) + k_x \dot{\xi}(t) + s_x \xi(t) = K_x w q (v_e \tau)^{q-1} (\eta(t - \tau) - \eta(t)) \quad (4.11)$$

$$m \ddot{\eta}(t) + k_y \dot{\eta}(t) + s_y \eta(t) = K_y w q (v_e \tau)^{q-1} (\eta(t - \tau) - \eta(t)) - P \eta(t) - D \dot{\eta}(t) - A \ddot{\eta}(t) \quad (4.12)$$

A (4.12) egyenlet határozza meg az esztergakés időbeli mozgásának stabilitását. Ez egy lineáris, késleltetett differenciálegyenlet. Látható, hogy az esztergálási folyamat regeneratív tulajdonsága időkésleltetés formájában jelentkezik a leíró differenciálegyenletben.

A (4.12) egyenletre új együtthatókat bevezetve:

$$\ddot{\eta}(t) + 2\zeta \omega_n \dot{\eta}(t) + \omega_n^2 \eta(t) = H(\eta(t - \tau) - \eta(t)) - \frac{P}{m} \eta(t) - \frac{D}{m} \dot{\eta}(t) - \frac{A}{m} \ddot{\eta}(t), \quad (4.13)$$

ahol

$$\omega_n = \sqrt{s_y / m} - \text{esztergakés sajátkör frekvenciája,}$$

$$\zeta = k_y / (2m\omega_n) - \text{esztergakés relatív csillapítása,}$$

$$H = K_y w q (v_e \tau)^{q-1} / m - \text{specifikus forgácsolási erőállandó.}$$

4.2 Stabilitási vizsgálat digitális pozíciószabályozás nélkül

Az alábbiakban meghatározzuk a felírt (4.13) mozgásegyenlet stabilitási térképét a technológiai paraméterek függvényében erőszabályozás nélküli esetben. Ez a stabilitási térkép az irodalomból jól ismert.

Szabályozó erő nélkül a (4.13) mozgásegyenlet formailag a (3.1) késleltetett oszcillátor egyenletének feleltethető meg. Mi azonban a (4.13) egyenletet a technológiai paraméterek függvényében vizsgáljuk. Ez egy paraméter transzformációt jelent (3.1) egyenletre nézve.

Az differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 + H(1 - e^{-\lambda\tau}) = 0, \quad (4.14)$$

ahol a karakterisztikus exponens $\lambda = \gamma \pm i\omega$, $\omega \geq 0$.

A stabilitás határhelyzetében $\gamma=0$, ezt visszaírva a fenti egyenletbe megkapjuk a stabilitás határgörbéit leíró egyenleteket:

$$\text{Re: } -\omega^2 + \omega_n^2 + H = H \cos(\omega\tau), \quad (4.15)$$

$$\text{Im: } 2\zeta\omega\omega_n = -H \sin(\omega\tau). \quad (4.16)$$

A két egyenletet négyzetre emelve, majd összeadva:

$$2H(-\omega^2 + \omega_n^2) + (\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\omega_n^2 = 0, \quad (4.17)$$

ebből

$$H = \frac{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\omega_n^2}{2(\omega^2 - \omega_n^2)}. \quad (4.18)$$

A (4.16) egyenletet elosztva (4.15) egyenlettel:

$$\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} = -\frac{\sin(\omega\tau)}{1 - \cos(\omega\tau)} = -\text{ctg}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \quad (4.19)$$

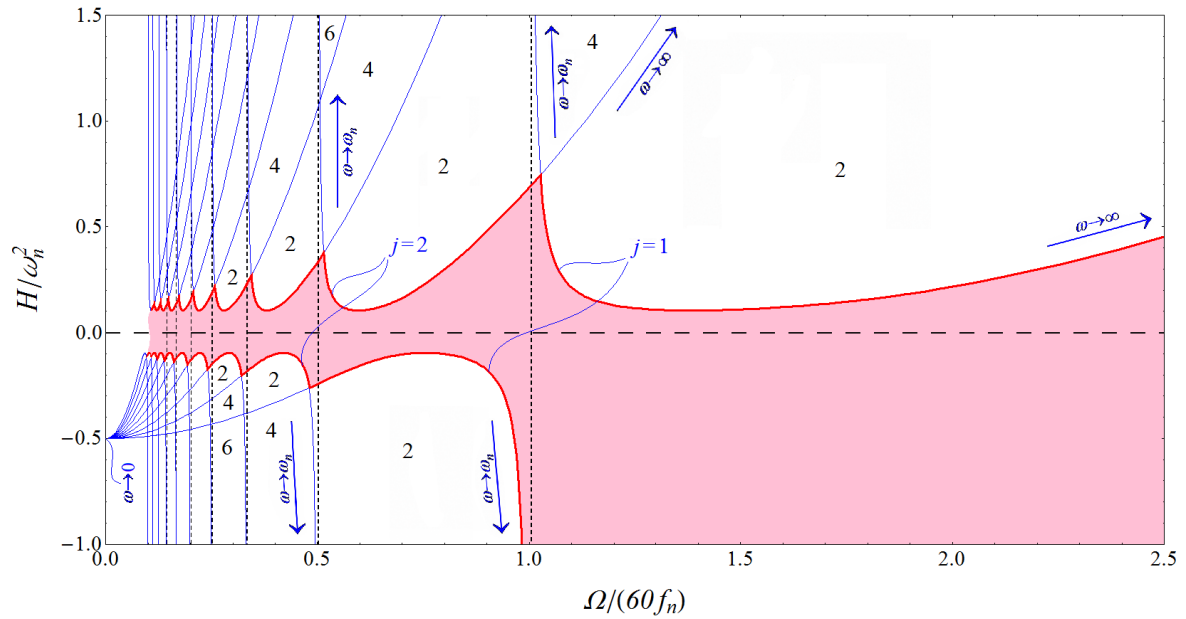
innen

$$\frac{\omega\tau}{2} = -\arctan\left(\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{2\zeta\omega\omega_n}\right) + j\pi. \quad (4.20)$$

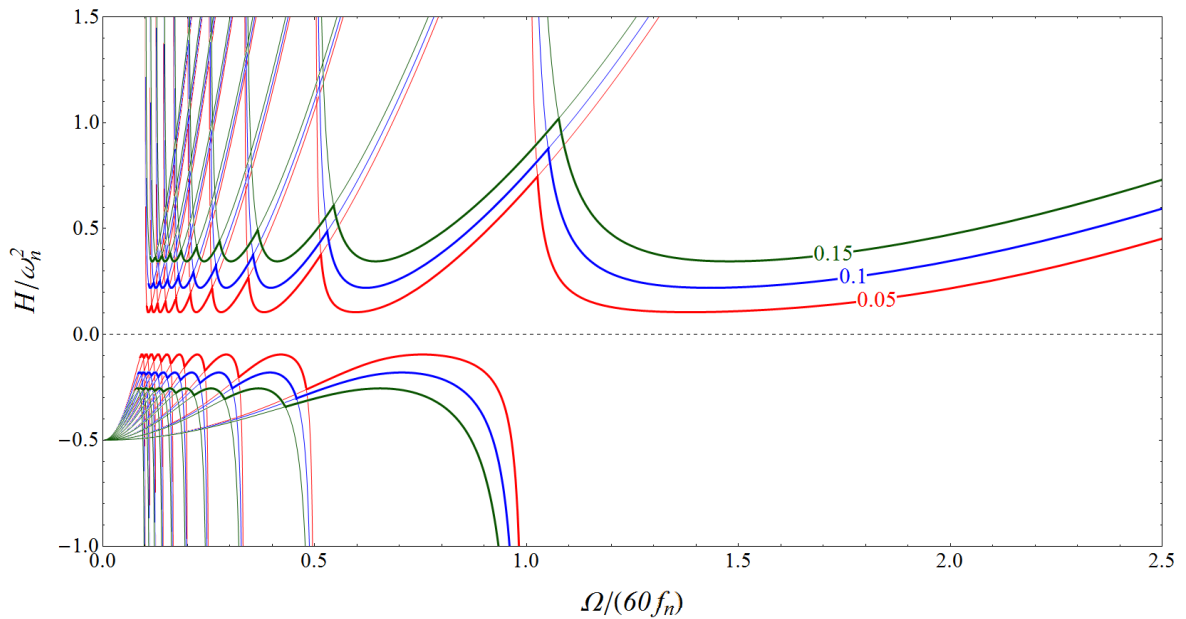
Ebből kifejezhető a fordulatszám:

$$\Omega = \frac{30\omega}{-\arctan\left(\frac{\omega^2 - \omega_n^2}{2\zeta\omega\omega_n}\right) + j\pi}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

A (4.18) és (4.21) kifejezések a stabilitás paraméteres határgörbéit adják meg a (H, ω) síkon. Ezeket az alábbi dimenziótlan térképekkel ábrázoljuk.



(4.3.) ábra: A (4.13) egyenlet stabilitási térképe $P=0$, $D=0$, $A=0$ és $\zeta=0.05$ mellett



(4.4.) ábra: A (4.13) egyenlet stabilitási térképe $P=0$, $D=0$, $A=0$ és különböző ζ értékek mellett

A csillapítás értékének növekedése a stabilitási tartományokat is növeli. Az esztergálás esetén azonban csak szűk határok között növelhető a csillapítás.

Megállapíthatjuk H definíciója alapján, hogy fizikailag csak a pozitív H értékeknek van jelentősége, hiszen az lineárisan függ a fogásmélységtől és negatív fogásmélységnek nincsen értelme. A pozitív H értékekhez tartozó görbéket ábrázoló stabilitási térképet a szakirodalom lobe diagramnak, a benne lévő csúcsokat pedig (4.21)-ből a j értékek alapján nevezi el lobe1-nek lobe2-nek és így tovább.

4.3 Stabilitási vizsgálat digitális pozíciószabályozás esetén

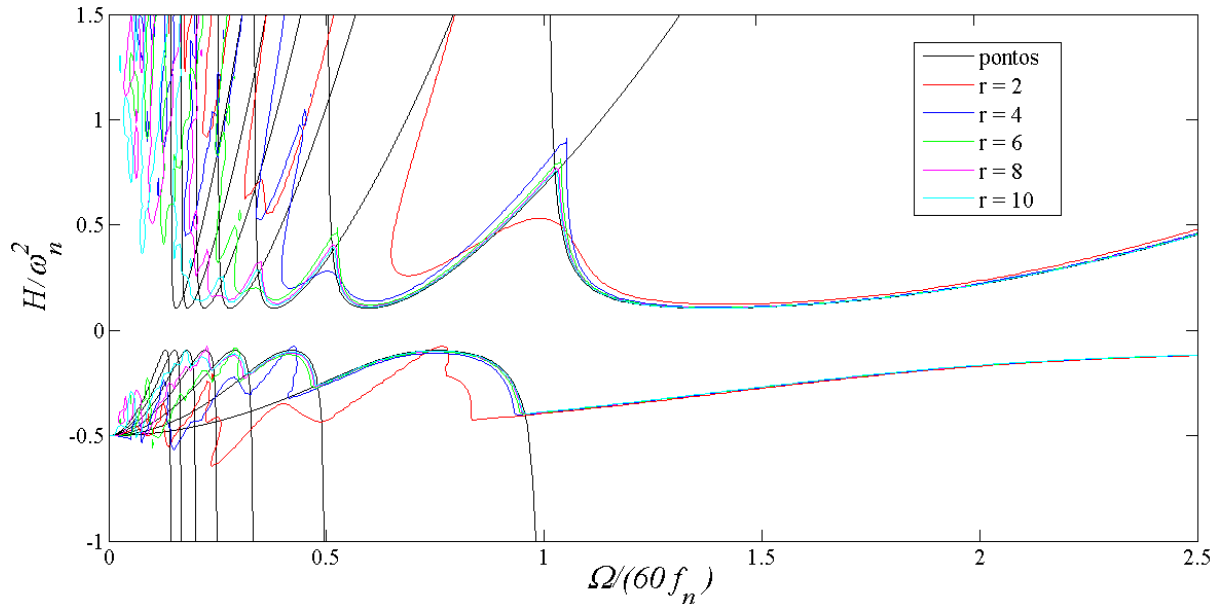
A mintavételezés figyelembevételével és a szemi-diszkretizáció alkalmazásával (4.13) a következő alakra hozható:

$$\ddot{\eta}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\eta}(t) + (H + \omega_n^2)\eta(t) = H\eta_{i-r} - P^*\eta_{i-p} - D^*\dot{\eta}_{i-p} - A^*\ddot{\eta}_{i-p}, \quad (4.22)$$

ahol P^* , D^* és A^* tömeggel dimenziótlanított erősítési tényezők.

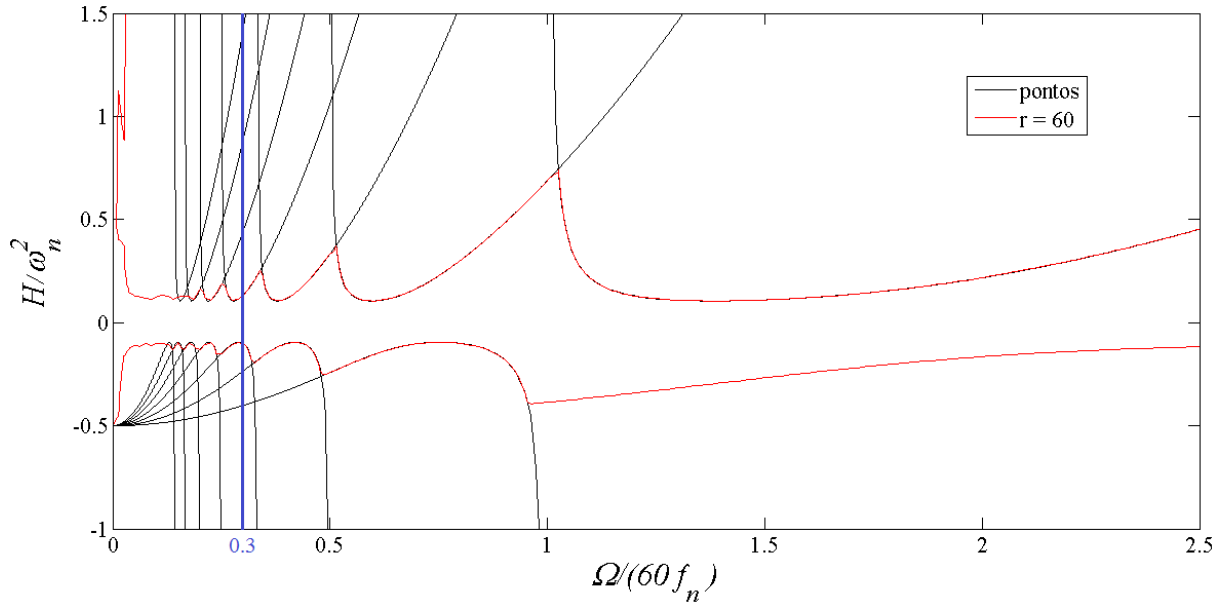
Ahogy az korábban is említettük az esztergálás egyenlete formailag megegyezik a késleltetett oszcillátor egyenletével, így (4.22) és (3.42) egyenleteket összevetve $a_1 = 2\zeta\omega_n$, $a_0 = H + \omega_n^2$, $b_0 = H$, $P = P^*$, $D = D^*$ és $A = A^*$ esetén a (3.50) differenciaegyenlet használható a stabilitási tartományok meghatározására a 3.2 fejezetben leírtak alapján.

Vizsgáljuk meg a numerikus módszer konvergenciáját, a stabilitási tartományok különböző r értékekre való meghatározásával. A kapott stabilitási térképet a (4.5.) ábra mutatja a térkép területének 200×200 -es felosztása mellett.



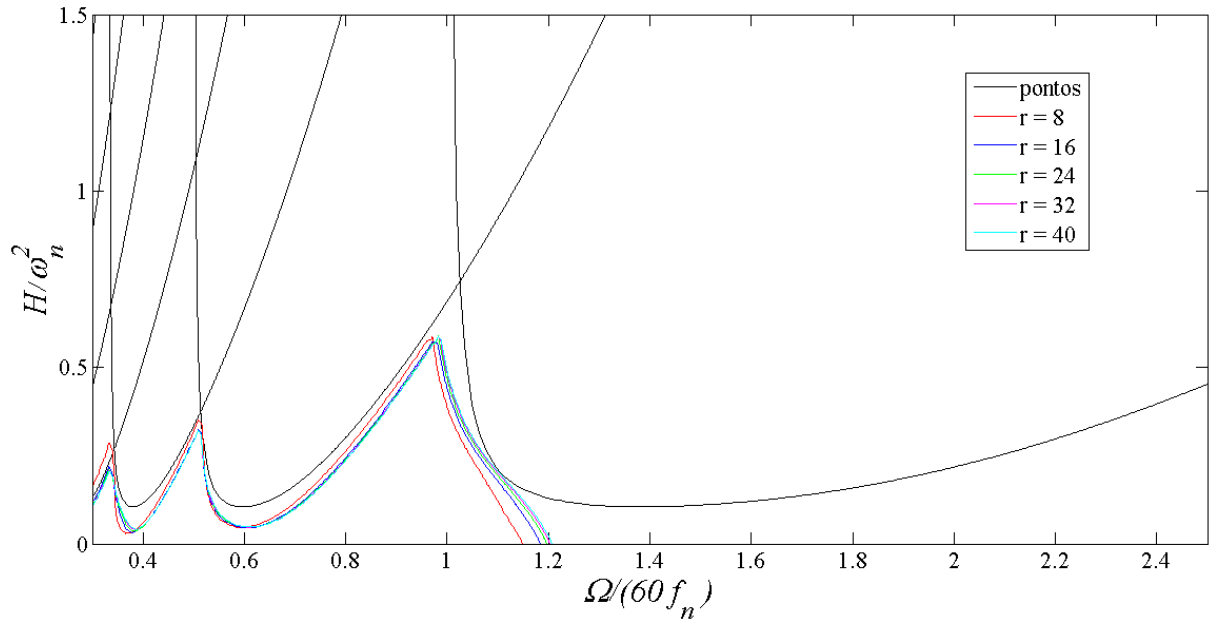
(4.5.) ábra: A (4.22) egyenlet stabilitási térképe $P=0$, $D=0$, $A=0$, $\zeta=0.05$ és különböző r értékek mellett, összehasonlítás a pontos térképpel

Látható, hogy a bal oldali görbék, amelyek (4.21)-ben egyre nagyobb j értékekhez tartoznak nagyobb numerikus hibával terheltek. Az első két lopera elfogadható eredményt kapunk $r=10$ esetén. Míg a (3.6) ábrán a_0 tengelyen $+\infty$ felé haladva kaptunk egyre nagyobb numerikus hibát, addig itt a paraméter transzformáció következtében a vízszintes tengelyen 0-hoz tartva kapunk egyre gyengébb közelítést. Célszerű tehát a pontos megoldás ismeretében a numerikus eredményekből „levágni”, vagyis elhagyni a nagy numerikus hibát tartalmazó részeket. Válasszuk meg a felosztást $r=60$ értékűre és vizsgáljuk meg, hogy mely tartományt célszerű elhagyni. A vizsgálatot 200×200 -as felosztással végezzük.



(4.6.) ábra: A (4.22) egyenlet stabilitási térképe $P=0$, $D=0$, $A=0$, $\zeta=0.05$ és $r=60$ értékek mellett, összehasonlítás a pontos térképpel

A (4.6) ábrán látható, hogy $r=60$ pontosságú közelítés csak körülbelül lobe3-ig jó. A továbbiakban ilyen felosztással számolunk, így a vizsgált diagram bal oldalát $\Omega/(60f_n)=0.3$ értéknél „levágjuk”. Nézzük meg, hogy változik-e a konvergencia, ha a szabályozó erő nem zérus. A stabilitási tartományt különböző pontosságú közelítésekre az alábbi ábra mutatja 200×200 -as felosztásban.

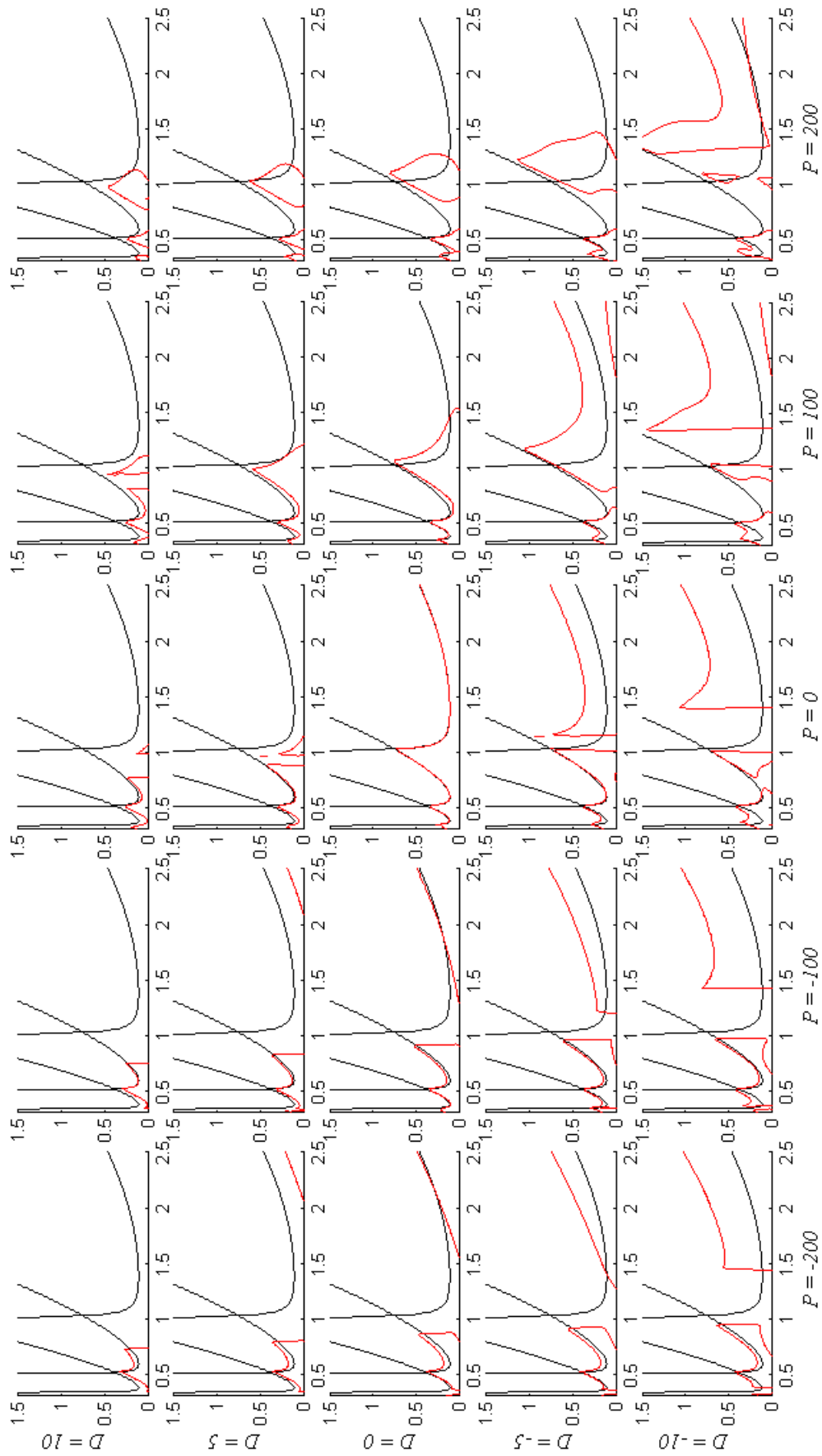


(4.7.) ábra: A (4.22) egyenlet stabilitási térképe $P=100$, $D=5$, $A=0$, $\kappa=2$, $\zeta=0.05$ és változó r értékek mellett, összehasonlítás a pontos térképpel

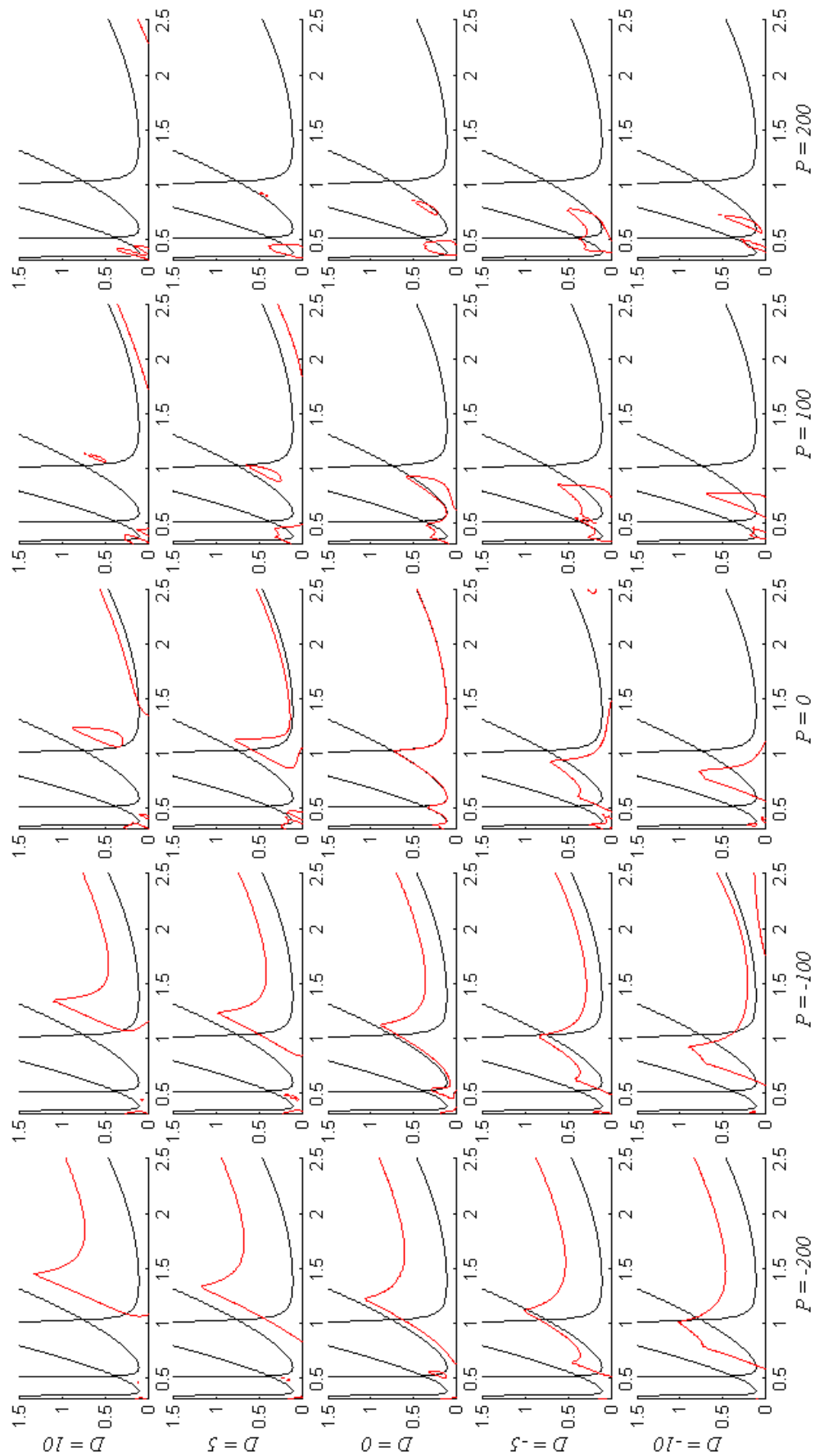
Látható, hogy bár a teljes felosztás és a mintavételezésen belüli felosztás is sűrűbb, mégis nagyobb eltérések vannak itt a pontosabb tartományok között, mint a (4.5.) ábrán.

CNC esztergák üzemi fordulatszám tartománya $\Omega=1000-5000$ [1/min] míg egy szabályozás mintavételezési ideje $\Delta t=1-10$ [ms], ezt figyelembe véve az időkézési arány $\kappa=1.2-60$ tartományban van. A korábbiakhoz hasonlóan vizsgáljuk meg hogyan változik a stabilitási tartomány különböző P , D és κ értékek esetén, $A=0$ -nál 100×100 -as felbontással. Az így meghatározott stabilitási térképeket a (4.8.-4.11.) ábrák mutatják, a vizsgált diagramok bal oldalait $\Omega/(60f_n)=0.3$ értéknél „levágtuk”.

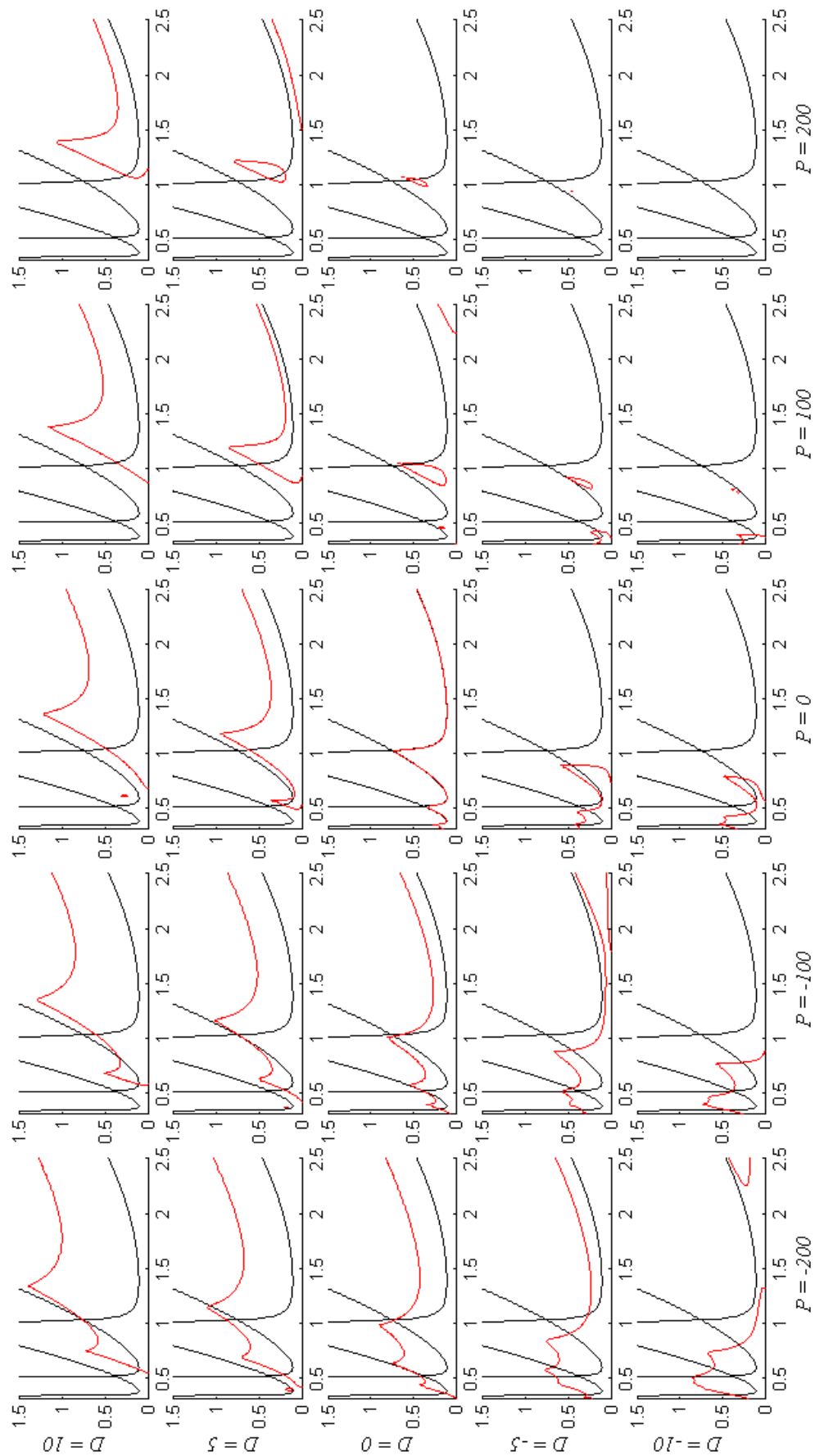
Ezekon a diagramokon azt figyelhetjük meg, hogy néhány helyen apró, rendezetlen „szigetek” jelennek meg. Ezen apróbb szigetek kiválásának okát nem tudjuk, azonban a késleltetett oszcillátoroknál tapasztalt viselkedés alapján ezek adódhatnak a numerikus közelítés hibáiból. Hiszen késleltetett oszcillátoroknál láttuk, hogy pozitív P értékekre a stabilitási határok balra tolódnak a merevségi tengelyen, így a különböző j értékekhez tartozó görbék is balra mozognak. Mivel a közelítés pontossága nagy j értékek esetén kicsi, így a görbék mozgásának következtében a nagy numerikus hibával terhelt területek általánosan nem határolhatók be egy adott tartományba. Egyenként azonban nagy κ értékek esetére a nagyobb numerikus hibával terhelt tartományok közelítőleg behatárolhatók, ha a digitális szabályozó erőt folytonos erővel közelítjük és feltételezzük, hogy a pontosságot csak r lépésköz befolyásolja.



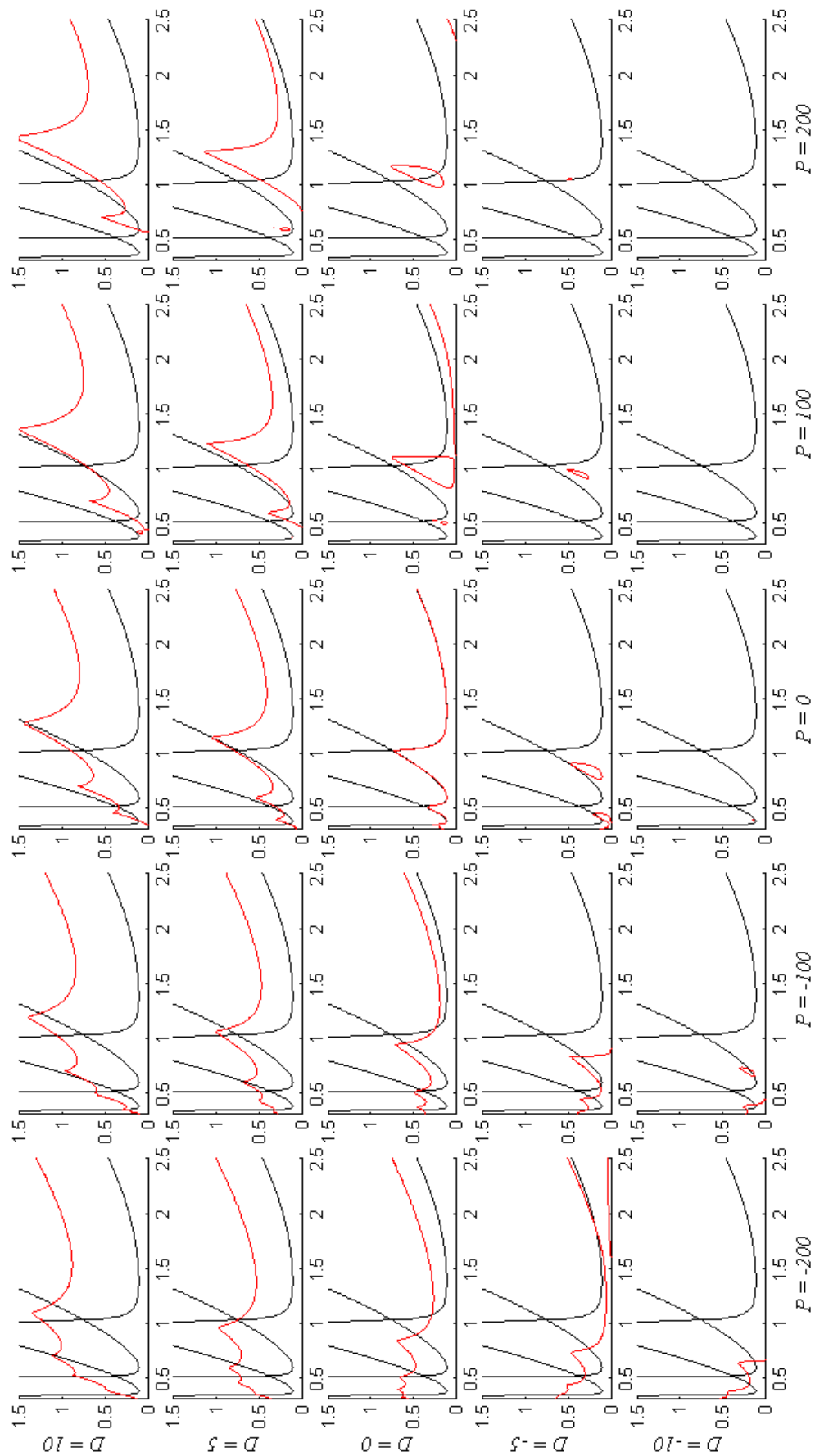
(4.8.) ábra: A (4.22) egyenlet stabilitása $A=0$, $\zeta=0.05$, $\kappa=2$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre, összehasonlítás a pontos, szabályozás nélküli térképpel



(4.9.) ábra: A (4.22) egyenlet stabilitása $A=0$, $\zeta=0.05$, $\kappa=5$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre, összehasonlítás a pontos, szabályozás nélküli térképpel



(4.10.) ábra: A (4.22) egyenlet stabilitása $A=0$, $\zeta=0.05$, $\kappa=10$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre, összehasonlítás a pontos, szabályozás nélküli térképpel



(4.11.) ábra: A (4.22) egyenlet stabilitása $A=0$, $\zeta=0.05$, $\kappa=20$ és $r=60$ esetén különböző P és D értékekre, összehasonlítás a pontos, szabályozás nélküli térképpel

4.4 Összegzés

Az ábrázolt stabilitási tartományok alapján látható, hogy az esztergálási folyamatot a regeneratív hatásokkal figyelembe vevő 2 szabadsági fokú modell stabilitási tartománya digitális PD szabályozás alkalmazása mellett kibővíthető megfelelő P , D és Δt értékek megválasztása mellett. A számítások helyenként nagy numerikus hibával terheltek a közelítés felbontásától függően. A pontosság növelése, és így a pontos számítások meggyorsítása érdekében magasabb rendű szemi-diszkretizációs módszer alkalmazása lenne célszerű.

5. Összefoglalás, további tervek

Dolgozatomban meghatároztam a gyorsulás visszacsatolását is figyelembe vevő digitális pozíciószabályozás stabilitási térképét instabil, lineáris oszcillátor esetére. Az eredményekből látszik, hogy a stabilitási határokat befolyásolja, hogy közvetlenül a szabályozó erő „frissülése” előtt vagy után történik a mintavételezés. Általánosságban elmondható, hogy a gyorsulás visszacsatolása növeli a szabályozás stabilitási határait, habár ez az ipari gyakorlatban ritkán alkalmazott.

Szemi-diszkretizációs közelítés segítségével meghatároztam a digitálisan szabályozott, késleltetett oszcillátor és a digitálisan szabályozott esztergálási folyamat egyszerűsített, két szabadsági fokú modelljének stabilitási határait. Mindkét esetben azt tapasztaltuk, hogy a stabilitási határok kibővíthetők bizonyos szabályozási paraméterek (P , D , A , Δt) mellett. A valós esztergálási folyamatra a digitális pozíciószabályozás fizikai megvalósíthatósága azonban kérdéses, ez további vizsgálatot igényel.

A későbbiekben tervezem az irodalomból megismerni annak okát, hogy a gyorsulás digitális pozíciószabályozásban történő visszacsatolása miért nem elterjedt, vagyis mik lehetnek ennek a szabályozásnak a korlátozó tényezői.

További tervem még az esztergálási folyamat stabilitási térképeinek meghatározása magasabb rendű szemi-diszkretizációs közelítéssel. A digitálisan szabályozott esztergálási folyamat gyorsulás visszacsatolásával való szabályozásának a vizsgálata arra az esetre, amikor a gyorsulás értékét közvetlenül az erő frissítése után mintavételezzük. Valamint az esztergálási folyamat folytonos időkéssel rendelkező szabályozó erővel való szabályozásának a vizsgálata.

6. Irodalomjegyzék

- [1] Dombovari Z, Wilson RE, Stepan G, *Estimates of the bistable region in metal cutting*. P Roy Soc A–Math Phy 464:3255–3271, 2008.
- [2] Hsu CS, Bhatt SJ, *Stability charts for second-order dynamical systems with time lag*. J Appl Mech–T ASME 33E:119–124, 1966.
- [3] Insperger T., Stépán G., *Semi-discretization for time-delay systems*. Springer, New York, 2011.
- [4] Kienzle O, *Spezifische Schnittkräfte bei der Metallbearbeitung*. Werkstattstechnik und Maschinenbau 47:224–225, 1957.
- [5] Sexton JS, Milne RD, Stone BJ, *A stability analysis of single point machining with varying spindle speed*. Appl Math Model 1:310–318, 1977.
- [6] Sims ND, *Vibration absorbers for chatter suppression: a new analytical tuning methodology*. J Sound Vib 301:592–607, 2000.
- [7] Stépán Gábor, *Robotok mechanikája*. Órai jegyzet, 2005.