



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék

TDK DOLGOZAT

Személygépjármű kanyarodása

Beregi Sándor
BSc hallgató

Konzulens:
Takács Dénes
tud. segédmunkatárs

2011.

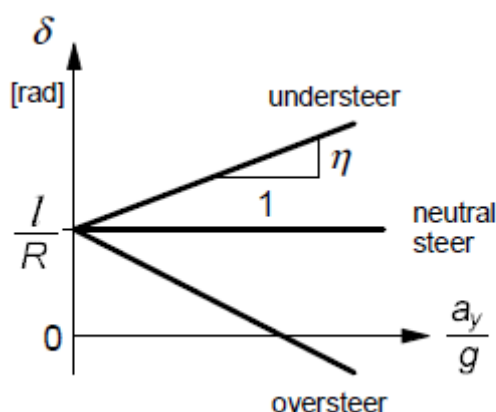
Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	1
1. Bevezetés.....	2
2. A bicikli modell.....	4
2.1. Geometria	4
2.2. Mozgásegyenletek	5
3. A kerékmodell	7
3.1. A kocsira a kerekekről átvadódó erők.....	7
3.2. A kocsira a kerekekről átvadódó koncentrált erőpárok.....	10
3.3. A kerekek csúszási szögének nagysága	11
3.4. A kerekekre ható függőleges irányú erő	12
4. A rendszer mozgásegyenleteinek felírása pszeudo sebességek segítségével.....	14
5. A stacionárius mozgás.....	16
5.1. Geometriai megoldás.....	16
5.2. A stacionárius mozgáshoz tartozó paraméterek keresése.....	19
5.3. Állandó sugarú körpályához tartozó megoldások keresése numerikus úton	20
5.4. Eredmények.....	22
6. A stacionárius megoldások stabilitása.....	26
6.1. Stabilitásvizsgálat.....	26
6.2. Eredmények.....	27
7. Szimuláció	29
7.1. Állandósult mozgás	29
7.2. Stabil tartomány	32
7.3. Rezgésesen stabil tartomány	35
7.4. Stabil tartomány	38
7.5. Rezgésesen stabil tartomány	40
7.6. Rezgésesen stabil tartomány	42
7.7. Rezgésesen instabil tartomány	44
7.8. Rezgésesen instabil tartomány	46
7.9. Rezgésesen stabil tartomány	48
7.10. Következtetések	49
8. Összefoglalás.....	51
9. Irodalomjegyzék:.....	52

1. Bevezetés

Személygépjárművek dinamikai vizsgálatánál az egyik legfontosabb szempont a járművek állandó sugarú köríven való kanyarodás közbeni stabilitása, illetve a járművek alul- vagy túlkormányzott viselkedésének megállapítása (ld. [1]). Hasonlóan fontos e jellemzők vizsgálata repülőgépek talajon végrehajtott manőverei során. Utóbbiak esetén a legújabb nemlineáris vizsgálatok új, érdekes eredményeket szolgáltatottak (ld. [3]).

Egy jármű alulkormányzott viselkedése alatt értjük, hogy a jármű állandó sugarú körpályán való haladásához nagyobb sebesség esetén nagyobb kormányyszögre van szükség, míg túlkormányzottság esetén a sebesség növelésével csökkenteni kell a kormányyszöget. Semleges viselkedésű járműről akkor beszélünk, ha tetszőlegesen nagy sebességek esetén is ugyanolyan kormányzási szögre van szükség az adott sugarú körpályán való maradáshoz. A fentieket az 1. ábra szemlélteti, amelyen az azonos R sugarú körpályához tartozó δ kormányzási szög nagysága látható a_y / g a jármű súlypontjának normális irányú gyorsulása (amely négyzetesen arányos a súlypont sebességének nagyságával), illetve a nehézségi gyorsulás hányadosában, különböző viselkedésű járművek esetén. Ekkor az egyenesek meredekségeként definiálható a jármű η alulkormányzottsági foka, amely síkbeli, linearizált jármű- és kerékmodell esetén a sebesség nagyságától független az adott járműre jellemző állandó (ld. [1]).



1. ábra, forrás: [1]

A dolgozatban a személygépjármű kanyarstabilitásának nemlineáris vizsgálatához, a négykerekű járművet három szabadságfokú, síkbeli mozgást végző rúdból és ehhez két végén kapcsolódó kerekekből összeállított (ún. bicikli) modellel helyettesítettem. Az autóiparban ez egy általánosan elfogadott módszer a járművek dinamikai vizsgálatának egyszerűsítésére. A járműre a kerekekről a kanyarodás közben átvitt erők meghatározásához egy nemlineáris ún. „kefe” kerékmodellt alkalmaztam, szemben a gyakorlatban legelterjedtebb lineáris rugó modellel. Így figyelembe vettem a kerekek részleges csúszását is, amely lehetőséget biztosított a nagyobb gumiköpeny deformációkkal járó járműmanőverek pontosabb vizsgálatához.

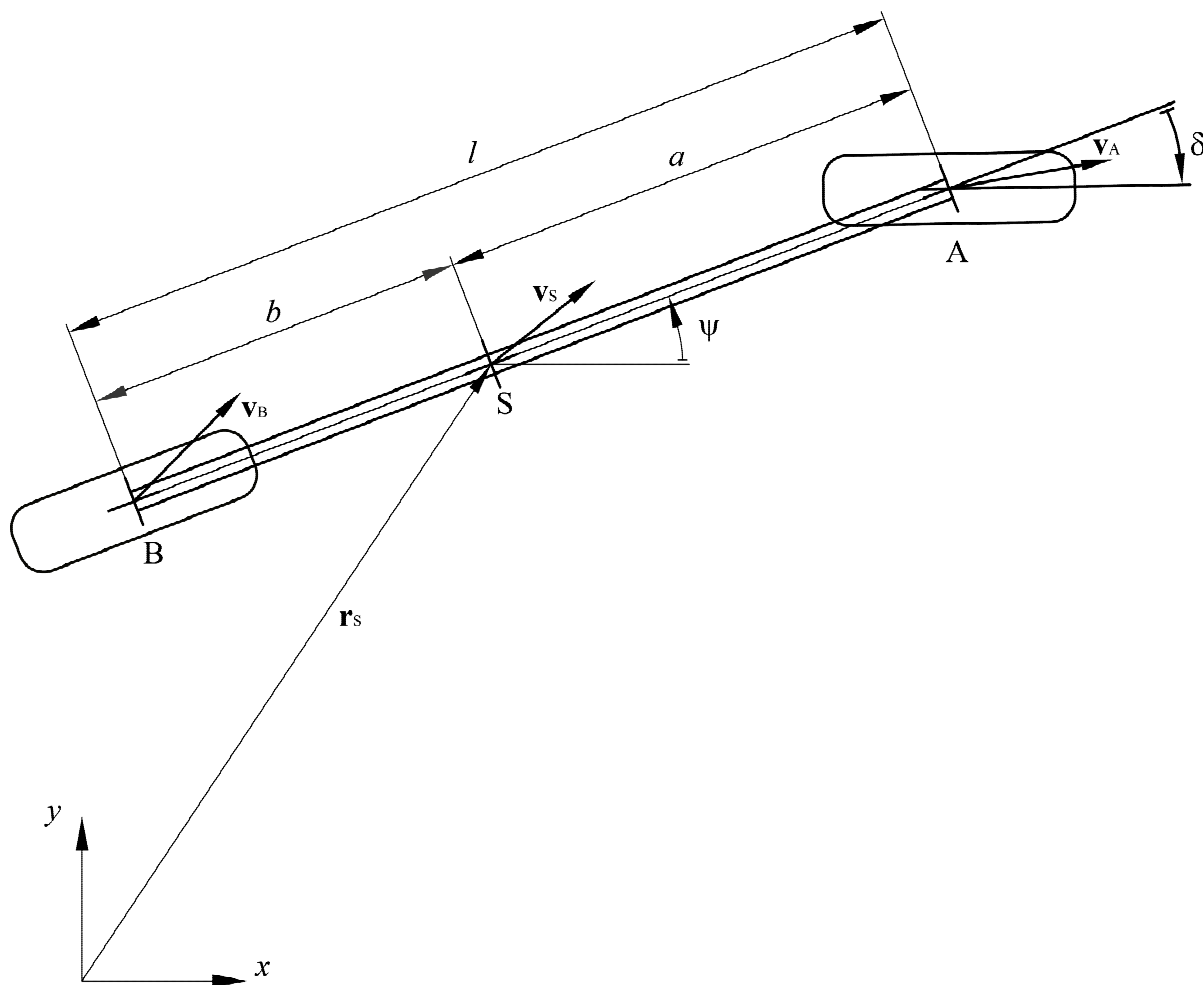
A rendszer mozgásegyenleteinek felírása után, numerikus úton kerestem az adott állandó sugarú körpályán, állandó sebességgel való mozgáshoz tartozó stacionárius megoldásokat. A stacionárius mozgás körül linearizálva meghatároztam azok stabilitását. Az eredményeket numerikus szimulációkkal hasonlítottam össze. A lineárisan instabil stacionárius mozgások körül kialakuló nemlineáris rezgéseket szintén szimulációk segítségével elemeztem.

A nemlineáris modell segítségével kapott eredmények közelítőleg visszaadják a szakirodalomban fellelhető lineáris modellek eredményeit kis gumi deformációkkal járó jármű manőverek esetén. Valamint megállapíthatóvá vált, hogy nagy kerékdeformációk esetén több stacionárius pálya is létezhet adott járműsebességek esetén.

2. A bicikli modell

2.1. Geometria

Egy személygépjármű vízszintes talajon végzett mozgásának leírásánál elterjedten alkalmazott megoldás, hogy a vizsgálatok leegyszerűsítésére a bonyolult térbeli modell helyett, a járművet síkbeli, három szabadságfokú, egy rúdból illetve a két végén hozzá kapcsolódó kerékből álló, ún. bicikli modellel helyettesítik. [1] (ld.2. ábra)



2. ábra: A bicikli modell

A dolgozatban a vizsgálatokhoz alkalmazott modell tehát egy $l = a + b$ hosszúságú rúdból áll, amely A és B végpontjaiban kapcsolódik a kerekéhez. Az első illetve, a hátsó kerék távolsága az S súlyponttól a , illetve b . A rúd helyzete a síkban egyértelműen meghatározható, ha ismerjük S súlypontjának helyvektorát $\mathbf{r}_s = [x_s \ y_s]^T$, valamint a rúd hossz tengelye és az x tengely által bezárt ψ szöget. Válasszuk ezeket általános koordinátáknak, így tehát az általános koordináta vektor:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

A kerekek közül az első kerék kormányzott, a rúd és az első kerék által bezárt δ kormányzási szöget az 2. ábra szerint értelmezzük. A súlypont sebessége:

$$\mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{r}}_s = \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

a jármű szögsebessége:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

illetve a súlypont gyorsulása:

$$\mathbf{a}_s = \ddot{\mathbf{r}}_s = \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{y}_s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

a jármű szöggyorsulása:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Ekkor a súlypont $\mathbf{v}_s$ sebessége, valamint a geometria ismeretében meghatározható a rúd A és B pontjainak sebessége $\mathbf{v}_A$ és $\mathbf{v}_B$:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{sA} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \cos \psi \\ a \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \dot{\psi} a \sin \psi \\ \dot{y} + \dot{\psi} a \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{sB} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -b \cos \psi \\ -b \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \dot{\psi} b \sin \psi \\ \dot{y} + \dot{\psi} b \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

2.2. Mozgásegyenletek

A rendszer mozgásegyenleteit előállíthatjuk, ha a rúd súlypontjára felírjuk a dinamika alaptételét.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}} & \dot{\mathbf{\Pi}}_s \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{M}_s \end{bmatrix}_s. \quad (2.8)$$

Az x, y és z irányú vetületi egyenletek:

$$m\ddot{x}_s = F_{x2} \cos \psi + F_{y2} \sin \psi + F_{y1} \sin(\psi - \delta), \quad (2.9)$$

$$m\ddot{y}_s = F_{x2} \sin \psi + F_{y2} \cos \psi + F_{y1} \cos(\psi - \delta), \quad (2.10)$$

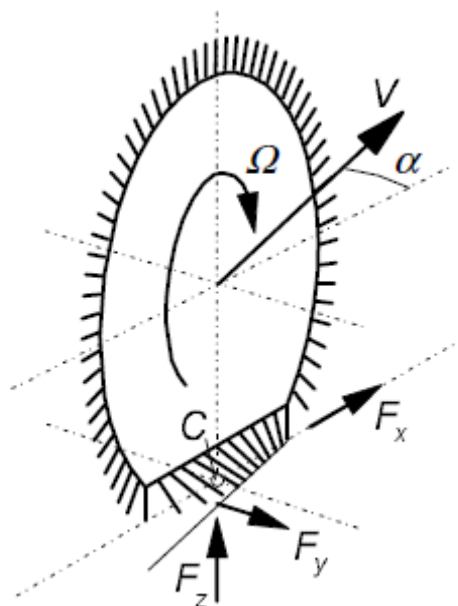
$$\Theta_{sz} \ddot{\psi} = M_{z1} + M_{z2} + F_{y1} a \cos \delta - F_{y2} b, \quad (2.11)$$

ahol F_{y1} , F_{y2} az első illetve a hátsó kerekekre ható, azok hossztengetyére merőleges erők, M_{z1} , M_{z2} a kerekekről a rúdra áradódó függőleges irányú koncentrált erőpárok, míg F_{x2} a rúd irányával párhuzamos hajtóerő. F_{y1} , F_{y2} , M_{z1} és M_{z2} nagysága az első illetve a hátsó kerék deformációjának mértékétől függenek, míg modellünkben F_{x2} konstans paraméter.

3. A kerékmodell

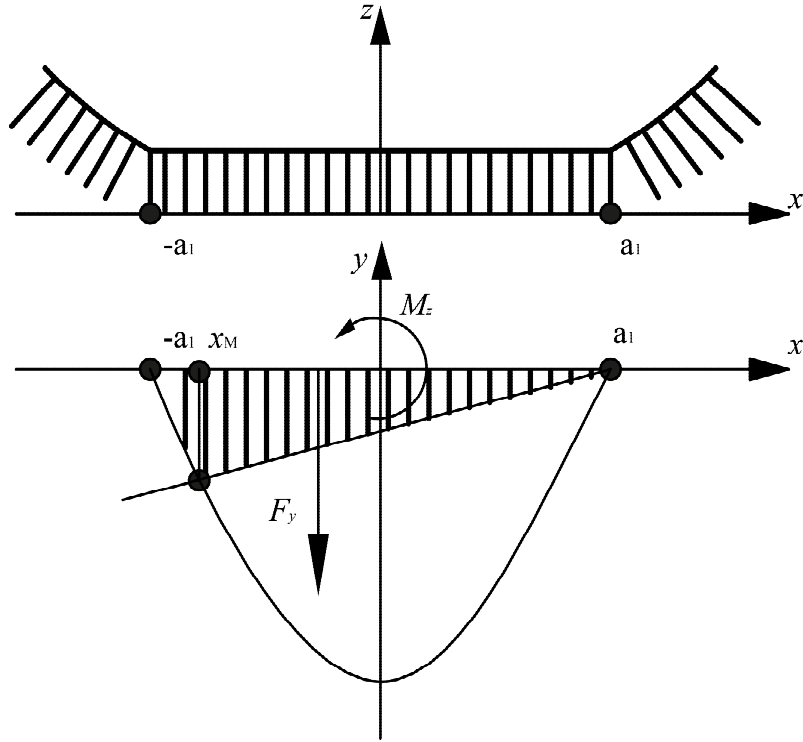
3.1. A kocsira a kerekekről átvitt erők

A kocsira a kerekekről átvitt a kerékdeformációból származó erők illetve forgatónyomatékok modellezéséhez, ún. kefe kerékmodellt alkalmaztunk. E szerint a rugalmas gumiköpenyt úgy képzeljük el, mintha a keréken sugárirányban lineáris gumirugók lennének (ld. 3. ábra).



3. ábra, A kefe modell, forrás: [1]

Ahogy a kerék gördül a talajon ezeknek a rugóknak a szabad vége egy bizonyos hosszúságban letapad az út felszínére, ezt a letapadt hosszt jelölje $2a_1$. Abban az esetben, ha a kerék oldalirányú sebességgel is rendelkezik (oldalirányban kúszik), azaz a pillanatnyi sebessége és a kerék hossz tengelye által bezárt α szög zérustól különböző, az úthoz letapadt rugók oldalirányban deformálódnak, ennek következtében a kerékre egy oldalirányú F_y erő fog hatni. A kerék oldalirányú deformációját egy egyenessel közelítjük kvázistacionárius állapotok esetén, melynek meredekségét α szög határozza meg. Azonban a letapadt hossz mentén a lehetséges legnagyobb tapadási súrlódási erőhöz tartozó erőintenzitás másodfokú függvény szerint változik, illetve azzal közelíthető (ld. [1]). Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az α meredekséggel rendelkező egyenes és az x tengely által közbezárt területet, az elméleti maximális súrlódási erőnek megfelelő parabola határolja. Az ezen kívül eső területen a kerék meg fog csúszni, vagyis a letapadt rugó végpontja megcsúszik a talajon és csak korlátozott erőt tud kifejteni a kerékre. A fentieket a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra: A gumikerék deformációból származó erő, illetve nyomaték

Összességében tehát látható, hogy a deformációból származó erő nagysága a parabola és az egyenes illetve az x -tengely által bezárt területtel lesz arányos. A terület meghatározásához integrálnunk kell a határoló görbét a $(-a_1, a_1)$ intervallumon. A határoló görbét a görbék x_M metszéspontjában felbonthatjuk két részre, így az első részen a parabolának majd a másodikban az egyenesnek kell képezni a határozott integrálját, majd a két integrál összege adja majd meg a teljes integrált.

A határológörbe $\alpha > 0$ esetén:

$$q(x) = \begin{cases} \tan \alpha x - a_1 \tan \alpha & x_M \leq x \leq a_1 \\ -\frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} \right) \frac{\mu}{s} & -a_1 \leq x \leq x_M \end{cases}, \quad (3.1)$$

ahol F_z a kerékre a talajra merőleges irányban ható erő, s a kerék hossz mentén megoszló rugómerevsége, μ a tapadási súrlódási együttható.

A metszéspontok helyét az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha = -\frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} \right) \frac{\mu}{s}, \quad (3.2)$$

amelyből:

$$x_1 = x_M = -a_1 + \frac{4}{3} \frac{a_1^3 s \tan \alpha}{\mu F_z}, \quad x_2 = a_1. \quad (3.3)$$

A kerékre ható oldalirányú erő nagyságát, úgy számíthatjuk ki, ha a $(-a_1, a_1)$ intervallumon integráljuk a kerék s hossz mentén megoszló rugómerevségének és a határoló görbék szorzatát. Az integrálást elvégezve:

$$F_y = \int_{-a_1}^{a_1} s q(x) dx = \int_{-a_1}^{x_M} s(-1) \frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right) \frac{\mu}{s} dx + \int_{x_M}^{a_1} s(\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha) dx, \quad (3.4)$$

ahol az első és a második integrált külön kiszámítva:

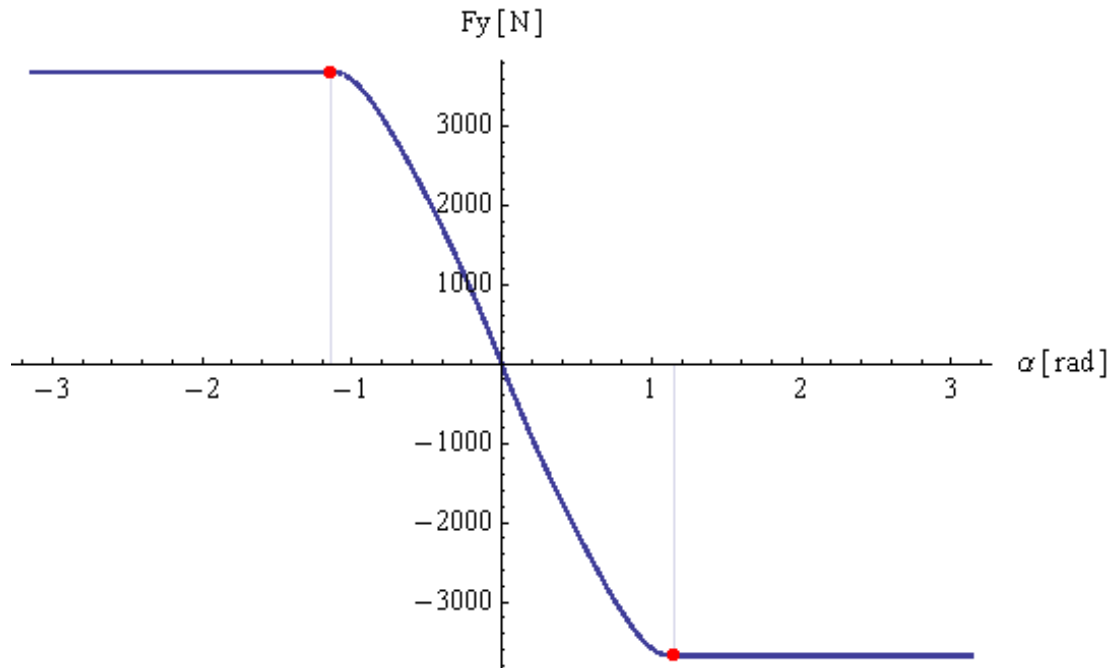
$$\int_{-a_1}^{x_M} s(-1) \frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right) \frac{\mu}{s} dx = \frac{16}{27} \frac{\tan^3 \alpha a_1^6 s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{4}{3} \frac{\tan^2 \alpha a_1^4 s^2}{F_z \mu}, \quad (3.5)$$

$$\int_{x_M}^{a_1} s(\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha) dx = -2s a_1^2 \tan \alpha + \frac{8}{3} \frac{a_1^4 s^2 \tan^2 \alpha}{F_z \mu} - \frac{8}{9} \frac{a_1^6 s^3 \tan^3 \alpha}{F_z^2 \mu^2}. \quad (3.6)$$

Ezeket összegezve a keréken ébredő laterális irányú erő:

$$F_y = \frac{16}{27} \frac{\tan^3 \alpha a_1^6 s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{4}{3} \frac{\tan^2 \alpha a_1^4 s^2}{F_z \mu} - 2s a_1^2 \tan \alpha + \frac{8}{3} \frac{a_1^4 s^2 \tan^2 \alpha}{F_z \mu} - \frac{8}{9} \frac{a_1^6 s^3 \tan^3 \alpha}{F_z^2 \mu^2} \quad (3.7)$$

Látható, hogy ha a kerék csúszási szöge, $\alpha < 0$, akkor mindkét görbét tükrözni kell az x tengelyre, tehát az integrálandó görbe alatti terület éppen -1-szeres lesz az $\alpha > 0$ esethez képest, azaz $F_y(-\alpha) = -F_y(\alpha)$.



5. ábra, A kerékre ható erő a csúszási szög függvényében

Az alábbi paraméterek esetén oldalirányú erő nagyságát a csúszási szög függvényében a 5. ábra mutatja.

$$\begin{aligned}
s &= 1000000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\
\mu &= 0,6, \\
a_1 &= 0,05 \text{ m}, \\
m &= 1250 \text{ kg}, \\
g &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ahol m a kocsí tömege, míg g a nehézségi gyorsulás. Illetve a kerékre ható z irányú erő:

$$F_z = \frac{mg}{2} = 6131,25 \text{ N}. \tag{3.9}$$

Az előzőekből következik, hogy a modellt csak az ábrán pirossal jelölt α_{krit} kritikus csúszási szög értékig tekinthetjük érvényesnek, amely annak az α csúszási szög értéknek felel meg, amikor az egyenes az a_1 pontban éppen érinti a parabolát, azaz a görbék két metszéspontja (ld. (3.3)) éppen egybe esik, azaz $x_1 = x_2$. Ezek alapján a kritikus csúszási szög nagysága:

$$\alpha_{\text{krit}} = \arctan \frac{3}{2} \frac{\mu F_z}{s a_1^2}. \tag{3.10}$$

Ennél nagyobb csúszási szög esetén, mivel az oldalirányú erő nagysága elérte a lehetséges maximumát, F_y továbbra is a teljes parabola alatti terület nagyságával lesz arányos. Ez az eset megfeleltethető annak, ha úgy tekintjük, hogy az egész kerék csúszik, azaz az oldalirányú erő a csúszási súrlódásnak megfelelően: $F_y = \mu_{\text{cs}} F_z$, és jelen esetben azt tételeztük fel, hogy a tapadási és a csúszási súrlódási együttható azonos, azaz $\mu = \mu_{\text{csúszási}} = \mu_{\text{tapadási}}$, tehát $F_y = \mu F_z$.

3.2. A kocsira a kerekekről átadódó koncentrált erőpárok

Belátható, hogy egy általános α csúszási szögnél a hossz mentén megoszló erőintenzitás görbe alatti terület súlypontja nem fog az y tengelyre esni (ld. 4. ábra), így a csúszási erőnek függőleges irányú, M_z nyomatéka lesz a kerék súlypontjára. A forgatónyomaték nagyságát $\alpha > 0$ esetén az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$M_z = \int_{-a_1}^{a_1} s x q(x) dx = \int_{-a_1}^{x_M} s x (-1) \frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} \right) \frac{\mu}{s} dx + \int_{x_M}^{a_1} s x (\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha) dx \tag{3.11}$$

$$\int_{-a_1}^{x_M} s x (-1) \frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2} \right) \frac{\mu}{s} dx = \frac{16}{27} \frac{a^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} - \frac{16}{9} \frac{a^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} + \frac{4}{3} \frac{a^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu} \tag{3.12}$$

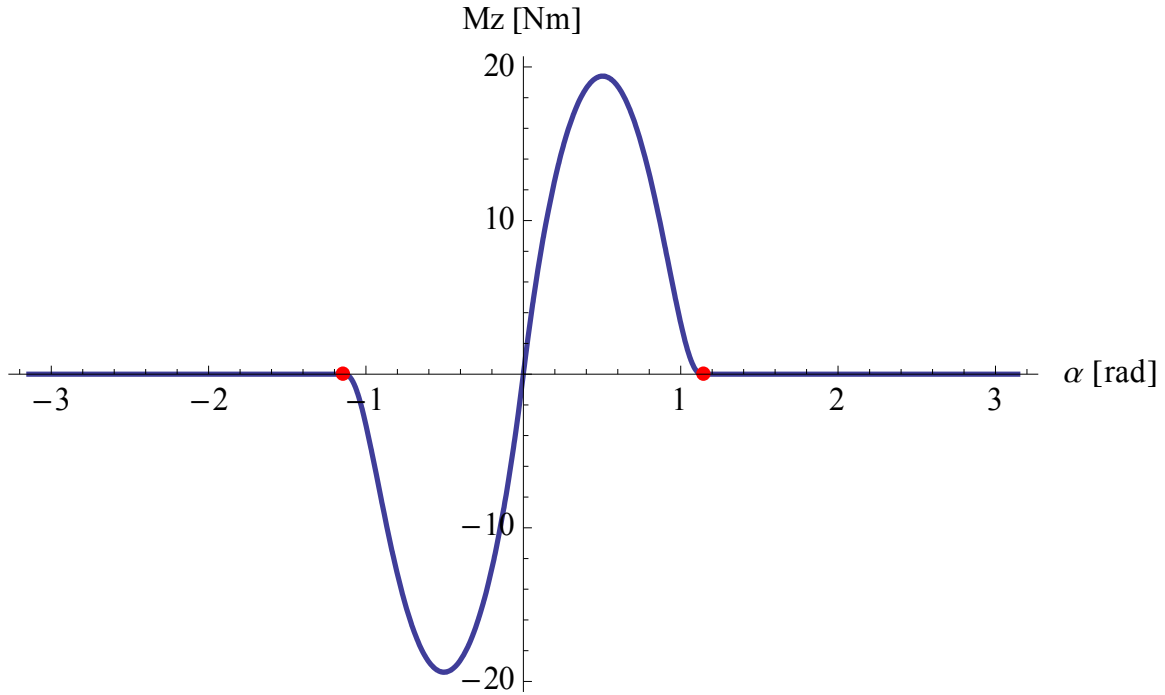
$$\int_{x_M}^{a_1} s x (\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha) dx = -\frac{64}{81} \frac{a^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} + \frac{8}{3} \frac{a^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{8}{3} \frac{a^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu} - \frac{2}{3} a^3 \tan \alpha s \tag{3.13}$$

Összegezve:

$$M_z = -\frac{16}{81} \frac{a^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} + \frac{8}{9} \frac{a^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{4}{3} \frac{a^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu} + \frac{2}{3} a^3 \tan \alpha s \quad (3.14)$$

Az oldalirányú erőkhöz hasonlóan, azok nyomatékra is belátható, hogy $M_z(-\alpha) = -M_z(\alpha)$.

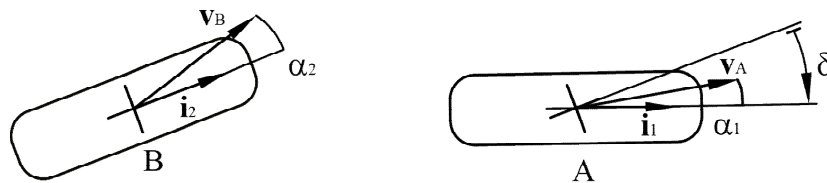
A 3.1 fejezetben megadottakkal azonos paraméterek esetén a nyomaték és a csúszási szög kapcsolatát a 6. ábra mutatja:



6. ábra, A forgatónyomaték nagysága a csúszási szög függvényében

Ebben az esetben is igaz az, hogy a modell csak a kritikus α értékig lesz érvényes, ennél nagyobb csúszási szögek esetén belátható, hogy az oldalirányú erő nyomatéka zérus lesz, hiszen ebben a tartományban az egész parabolát tekintjük érvényesnek, amelynek szimmetria tulajdonságai miatt a súlypontja az y tengelyre esik.

3.3. A kerekek csúszási szögének nagysága



7. ábra: A hátsó illetve az első kerék csúszási szöge

Jelöljük A pont sebességvektorának, illetve az első kerék hossz tengelyének közbezárt szögét α_1 -el, hasonlóképpen B pont sebességvektorának és a hátsó kerék hossz tengelyének közbezárt szögét α_2 -vel (ld. 7. ábra). A vektorok skaláris szorzatára vonatkozó összefüggés szerint:

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{i}_1}{|\mathbf{v}_A|}\right), \quad (3.15)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{i}_2}{|\mathbf{v}_B|}\right), \quad (3.16)$$

ahol $\mathbf{i}_1$ és $\mathbf{i}_2$ az első illetve hátsó tengely hossz tengelyeinek irányába mutató egységvektorok.

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi - \delta) \\ \sin(\psi - \delta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

A fentieket (3.15)-be és (3.16)-ba behelyettesítve:

$$\alpha_1 = \arccos\left[\frac{(\dot{x}_s - \dot{\psi}a \sin\psi) \cos(\psi - \delta) + (\dot{y}_s + \dot{\psi}a \cos\psi) \sin(\psi - \delta)}{\sqrt{(\dot{x}_s - \dot{\psi}a \sin\psi)^2 + (\dot{y}_s + \dot{\psi}a \cos\psi)^2}}\right], \quad (3.19)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left[\frac{(\dot{x}_s + \dot{\psi}b \sin\psi) \cos\psi + (\dot{y}_s - \dot{\psi}b \cos\psi) \sin\psi}{\sqrt{(\dot{x}_s + \dot{\psi}b \sin\psi)^2 + (\dot{y}_s - \dot{\psi}b \cos\psi)^2}}\right]. \quad (3.20)$$

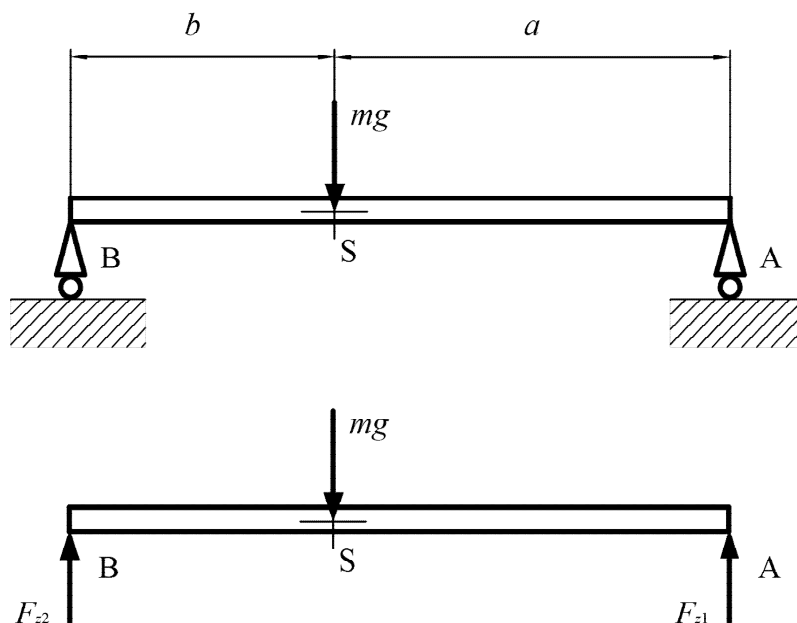
Egyszerűsítve:

$$\alpha_1 = \arccos\left[\frac{\dot{x}_s \cos(\psi - \delta) + \dot{y}_s \sin(\psi - \delta) - \dot{\psi}a \sin\delta}{\sqrt{(\dot{x}_s - \dot{\psi}a \sin\psi)^2 + (\dot{y}_s + \dot{\psi}a \cos\psi)^2}}\right], \quad (3.21)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left[\frac{\dot{x}_s \cos\psi + \dot{y}_s \sin\psi}{\sqrt{(\dot{x}_s + \dot{\psi}b \sin\psi)^2 + (\dot{y}_s - \dot{\psi}b \cos\psi)^2}}\right]. \quad (3.22)$$

3.4. A kerekre ható függőleges irányú erő

Az egyes kereket terhelő függőleges irányú erőket úgy határozhatjuk meg, hogy a rudat két végén görgőkkel alátámasztott tartóként kezeljük, és annak statikai egyensúlyát vizsgáljuk. (ld. 8. ábra). Ezzel persze feltételeztük, hogy a dinamikus hatások nem játszanak komoly szerepet vizsgálataink során.



8. ábra A kereket terhelő, függőleges erők meghatározásához alkalmazott statikai modell (fent), valamint a szabadtest ábra (lent).

Ebben az esetben a rúdról első kerékre ható erő nagysága F_{z1} , illetve a hátsó kerékre ható erő nagysága F_{z2} reakcióerőkként meghatározhatóak. (Hiszen a hatás-ellenhatás elve miatt értékük megegyező, míg irányuk ellentétes a megfelelő reakcióerővel.). A szükséges statikai egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: \quad mga - B(a+b) &= 0 \\ \sum M_B = 0: \quad -mgb + A(a+b) &= 0' \end{aligned} \quad (3.23)$$

ahol A és B az ismeretlen reakcióerők. Ebből:

$$A = \frac{mga}{a+b} \quad \text{és} \quad B = \frac{mgb}{a+b}. \quad (3.24)$$

A kerekre ható függőleges irányú terhelő erők:

$$F_{z1} = \frac{mga}{a+b} \quad \text{és} \quad F_{z2} = \frac{mgb}{a+b}. \quad (3.25)$$

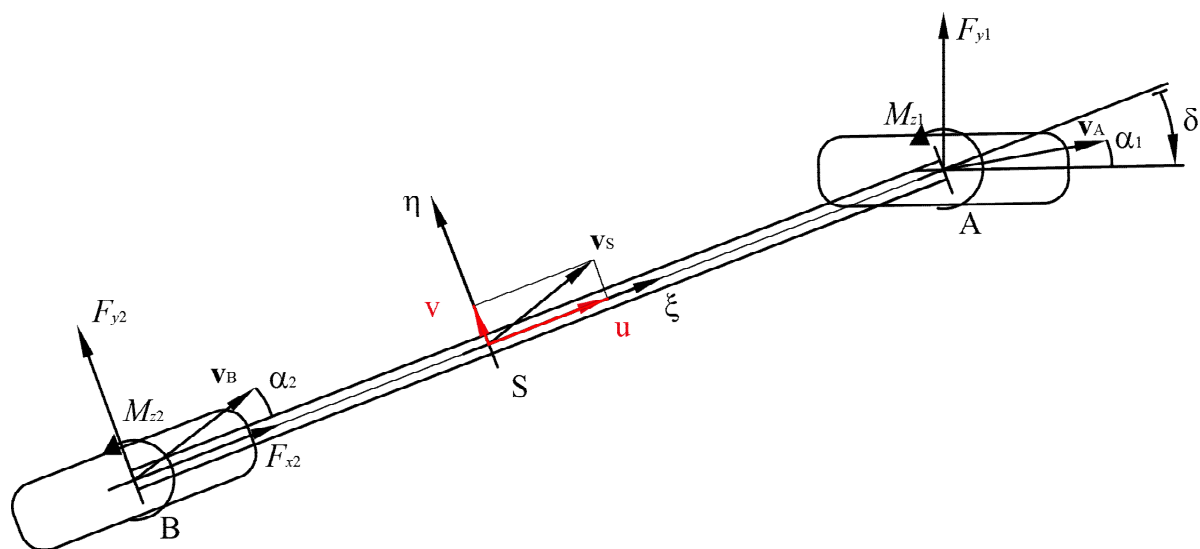
Az első és a hátsó kerek eltérő függőleges terhelését így figyelembe vettük, ezzel szemben eltekintünk attól, hogy az első és a hátsó kerék eltérő terhelése esetén az úttestre letapadt a_1 hosszúság sem lesz azonos, ezt mindkét kerék esetén azonos értékűnek tételezzük fel, illetve mindkét kerék esetén azonos hossz mentén megoszló s rugómerevséget feltételezünk.

4. A rendszer mozgásegyenleteinek felírása pszeudo sebességek segítségével

Ahogy (2.9), (2.10), (2.11) alapján látható a rendszer mozgásegyenleteiben (az oldalirányú erőkre, ill. a nyomatékokra vonatkozó összefüggéseket is figyelembe véve), a súlypont helyvektorának x_s , y_s koordinátái nem szerepelnek, csak az idő szerinti első és második deriváltjaik. Célszerű tehát a differenciálegyenlet-rendszer vizsgálatának egyszerűsítésére egy új

$$\sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \beta \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ún. pszeudo sebességek tartalmazó állapotvektort felvenni, ld [1]. (ld. 9. ábra)



9. ábra

Bontsuk fel az S súlypont v_s abszolút vonatkoztatási rendszerben értelmezett sebességét egy a kocssal együtt mozgó (ξ, η, ζ) koordináta-rendszerben. A ξ koordináta a kocssal párhuzamos, η a kocsi merőleges irányba mutat, míg ζ a mozgás síkjára merőleges (azaz $\zeta = z$). Így, v_s ξ irányú vetülete (a rúd hossztengeleyével párhuzamos sebességkomponens, azaz a jármű súlypontjának longitudinális sebessége) lesz u , η irányú vetülete (a rúd hossztengeleyére merőleges sebességkomponens, azaz a jármű súlypontjának laterális sebessége) v . Tehát:

$$\begin{cases} u = \dot{x}_s \cos \psi + \dot{y}_s \sin \psi \\ v = -\dot{x}_s \sin \psi + \dot{y}_s \cos \psi \end{cases} \quad (4.2)$$

Mivel a rúd ω szögsebessége a mozgás síkjára merőleges irányú, így

$$\beta = \dot{\psi} \quad (4.3)$$

Az előzőekhez hasonló módon a súlypont a_s gyorsulását is szeretnénk felbontani (ξ, η, ζ) koordináta-rendszerben.

$$\mathbf{a}_s = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Ebből:

$$\mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} \dot{u} - v\beta \\ \dot{v} + u\beta \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi, \eta, \zeta)}. \quad (4.5)$$

Így tehát, ha ismét alkalmazzuk a dinamika alaptételét a súlypontra (2.8) felírhatjuk (ξ, η, ζ) koordináta rendszerben a mozgásegyenleteket.

$$m(\dot{u} - v\beta) = F_{x2} + F_{y1} \sin \delta \quad (4.6)$$

$$m(\dot{v} + u\beta) = F_{y1} \cos \delta + F_{y2} \quad (4.7)$$

$$\Theta_{Sz} \dot{\beta} = M_{z1} + M_{z2} + F_{y1} a \cos \delta - F_{y2} b \quad (4.8)$$

A pszeudo sebességek segítségével az első és a hátsó kerék α_1 , illetve α_2 csúszási szögét is egyszerűen kifejezhetjük:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{v + a\beta}{u}\right) + \delta, \quad (4.9)$$

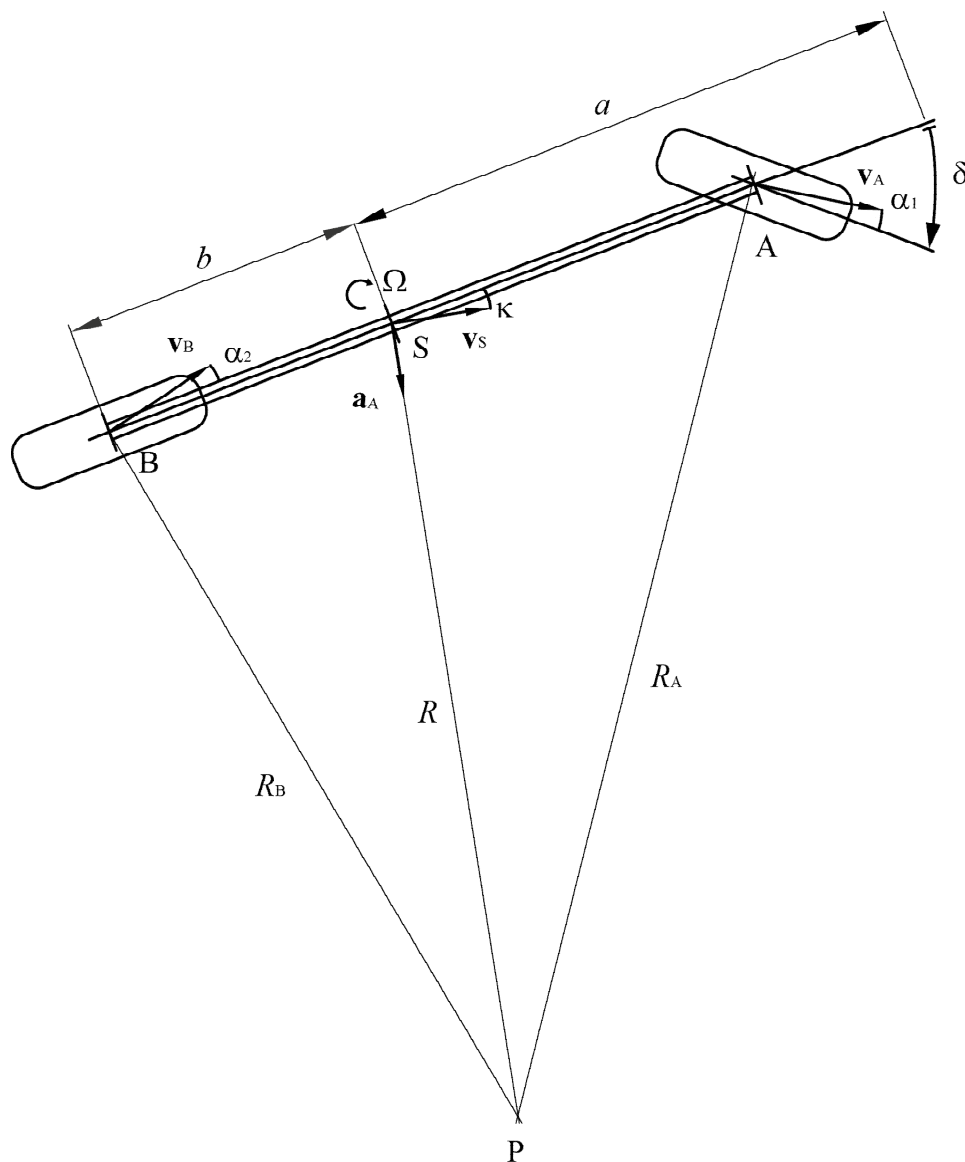
$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{v - b\beta}{u}\right). \quad (4.10)$$

Ezzel mind a mozgásegyenletekre, mind pedig a csúszási szögekre lényegesen egyszerűbb összefüggéseket kaptunk összevetve az abszolút vonatkoztatási rendszerben felírt (2.9), (2.10), (2.11) illetve (3.21), (3.22) összefüggésekkel.

5. A stacionárius mozgás

5.1. Geometriai megoldás

A (4.6), (4.7), (4.8) mozgásegyenlet-rendszert, mint elsőrendű differenciálegyenletet vizsgálva szeretnénk meghatározni az egyensúlyi helyeit, azaz azokat a megoldásokat, amelyekre u, v, β időben állandóak. Azt feltételezzük, hogy az ilyen megoldások állandó sugarú körpályán való állandó nagyságú sebességgel való haladáshoz tartoznak, ezeket keressük geometriai úton.



10. ábra: Az állandó sugarú körpályán mozgó jármű

Az állandó sugarú körpályán mozgó járművet a 10. ábra mutatja. A súlypont sebességvektorára, illetve A és B pontok sebességvektoraira merőlegest állítva, ezek metszéspontjaként meghatározhatjuk a jármű P sebességpólusát. A sebességpólus és a súlypont távolsága a körpálya R sugara, míg A és B pontok pályájának görbületi sugarát jelöljük R_A val, illetve R_B -vel. Tehát:

$$\begin{aligned}
R &= |\overline{PS}|, \\
R_A &= |\overline{PA}|, \\
R_B &= |\overline{PB}|.
\end{aligned}
\tag{5.1}$$

A súlypont pályájának R sugarát kifejezhetjük BP és SB szakaszok hosszával, azaz R_B -vel és b -vel, és a közbezárt szögük nagyságával amennyiben az SPB háromszögre felírjuk a cosinus-tételt:

$$R^2 = R_B^2 + b^2 - 2bR_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right), \tag{5.2}$$

ebből:

$$R = \sqrt{R_B^2 + b^2 - 2bR_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)}. \tag{5.3}$$

A súlypont $\mathbf{v}_S$ sebessége és a rúd által közbezárt szöget jelöljük κ -val, a 10. ábra alapján belátható, hogy R és b közbezárt szögének nagysága: $\frac{\pi}{2} - \kappa$. Írjuk fel az SPB háromszögre a sinus tételt:

$$\frac{R_B}{R} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \kappa\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)}, \tag{5.4}$$

átrendezve:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \kappa\right) = \frac{R_B}{R} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right), \tag{5.5}$$

valamint kihasználva, hogy $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$, κ -ra a következő eredményt kapjuk:

$$\kappa = \arcsin\left(\frac{R_B}{R} \cos \alpha_2\right) - \frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{R_B}{R} \cos \alpha_2\right). \tag{5.6}$$

Állandó nagyságú sebességgel, állandó sugarú körpályán való mozgás esetén tudjuk, hogy a súlypont sebességének nagysága: $|\mathbf{v}|_S = R\omega = R\beta$, irányát pedig κ szöggel fejezhetjük ki a (ξ, η, ζ) koordináta rendszerben, azaz:

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -R\beta \begin{bmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Mivel a kocsi síkmozgást végez a sebesség, illetve gyorsulásvektoroknál elegendő a ξ és η irányú komponenseket kiírni, a $\zeta = z$ irányú zérus komponenst a továbbiakban elhagyjuk.

Az (5.7) összefüggésbe (5.6)-ot behelyettesítve:

$$\mathbf{v}_s = -R\beta \begin{bmatrix} \frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \\ -\sin \left[\arcsin \left(\frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \right) - \frac{\pi}{2} \right] \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Mivel tudjuk, hogy $\sin(-x) = -\sin x$, és $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$:

$$\mathbf{v}_s = -R\beta \begin{bmatrix} \frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \\ \cos \left[-\arcsin \left(\frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \right) \right] \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

illetve $\cos(-x) = \cos x$:

$$\mathbf{v}_s = -R\beta \begin{bmatrix} \frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \\ \cos \left[\arcsin \left(\frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \right) \right] \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Felhasználva, hogy $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$:

$$\mathbf{v}_s = -R\beta \begin{bmatrix} \frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \\ \sqrt{1 - \sin^2 \left[\arcsin \left(\frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \right) \right]} \end{bmatrix} = -R\beta \begin{bmatrix} \frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \\ \sqrt{1 - \left(\frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \right)^2} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Közös nevezőre hozva, és $1/R$ -et kiemelve a gyökjel alól:

$$\mathbf{v}_s = -R\beta \begin{bmatrix} \frac{R_B}{R} \cos \alpha_2 \\ \frac{\sqrt{R^2 - R_B^2 \cos^2 \alpha_2}}{R} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

R -el egyszerűsítve, valamint R helyére behelyettesítve (5.3)-t:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= -\beta \begin{bmatrix} R_B \cos \alpha_2 \\ \sqrt{R_B^2 + b^2 - 2bR_B \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) - R_B^2 \cos^2 \alpha_2} \end{bmatrix} \\ &= -\beta \begin{bmatrix} R_B \cos \alpha_2 \\ \sqrt{R_B^2 \sin^2 \alpha_2 - 2bR_B \sin \alpha_2 + b^2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

Azaz $\mathbf{v}_s$ -re a következőt kapjuk:

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -\beta \begin{bmatrix} R_B \cos \alpha_2 \\ R_B \sin \alpha_2 - b \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

A stacionárius mozgás esetén létrejövő szögsebesség legyen Ω , úgy, hogy pozitív u kocsi irányú sebesség esetén pozitív értéket vegyen fel:

$$\beta \equiv -\Omega, \quad (5.15)$$

tehát a stacionárius mozgás során a kocsi szögsebessége állandó, így $\dot{\beta} = 0$. A stacionárius szögsebességet (5.14)-be behelyettesítve:

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Omega R_B \cos \alpha_2 \\ \Omega (R_B \sin \alpha_2 - b) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

A súlypont gyorsulására (4.4) szerint, (5.14)-t és (5.15)-t behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$\mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} \dot{u} - v\beta \\ \dot{v} + u\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 (R_B \sin \alpha_2 - b) \\ -\Omega^2 R_B \cos \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

ahol $\dot{u}$ és $\dot{v}$ zérus, hiszen a sebesség nagysága nem változik. Belátható, hogy $\mathbf{a}_s$ -t a geometriából származtatva ugyanezen eredményre jutnánk.

5.2. A stacionárius mozgáshoz tartozó paraméterek keresése

Amennyiben a (4.6), (4.7) és (4.8) mozgásegyenletekbe behelyettesítjük az előzőekben kapott megoldásokat ((5.15), (5.16) és (5.17)), akkor az elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer helyett algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$m\Omega^2 (R_B \sin \alpha_2 - b) = F_{x2} + F_{y1} \sin \delta, \quad (5.18)$$

$$-\Omega^2 m R_B \cos \alpha_2 = F_{y1} \cos \delta + F_{y2}, \quad (5.19)$$

$$0 = M_{z1} + M_{z2} + F_{y1} a \cos \delta - F_{y2} b, \quad (5.20)$$

ahol, F_{y1} és M_{z1} az α_1 csúszási szög, illetve F_{y2} és M_{z2} az α_2 csúszási szög függvénye.

Az első kerék α_1 csúszási szögét a pszeudo-sebességekkel (4.9) szerint egyszerűen kifejezhetjük:

$$\alpha_1 = \arctan \left(\frac{v + a\beta}{u} \right) + \delta. \quad (5.21)$$

Ebbe behelyettesítve (5.15), (5.16), (5.17)-t:

$$\alpha_1 = \arctan \left(\frac{\Omega (R_B \sin \alpha_2 - b) - a\Omega}{\Omega R_B \cos \alpha_2} \right) + \delta. \quad (5.22)$$

Adott jármű és kerék paraméterek (m tömeg, a kocsi súlypontjára számított Θ_{sz} tehetetlenségi nyomaték, s a kerék hosszmentén megoszló rugómerevsége, a súlypont és az első kerék a , valamint a súlypont és a hátsó kerék b távolsága, illetve a gumiköpeny a_1 letapadt félhossza) esetén a stacionárius mozgást öt paraméter befolyásolja: $\alpha_2, \delta, \Omega, F_{x2}$, és R_B . Bár a stacionárius pályához tartozó súlypont sebességre megadott (5.16) összefüggés a hátsó kerék pályájának görbületi sugarával írható fel tömörebb alakban, a fizikai

szemléletesség miatt használjuk inkább a súlypont pályájának görbületi sugarát, ami az (5.3) összefüggés szerint:

$$R = \sqrt{R_B^2 + b^2 - 2bR_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)}, \quad (5.23)$$

illetve a kocsi szögsebessége helyett vegyük a súlypont sebességének abszolút értékét:

$$\Omega = \frac{v_s}{R}, \quad (5.24)$$

ahol, $v_s = |\mathbf{v}_s|$. Ezzel a stacionárius pályát megadó paramétereink $\alpha_2, \delta, v_s, F_{x2}$ és R lesznek. Mivel 5 paraméterről van szó, melyek értékét (5.18), (5.19) és (5.20) által alkotott nemlineáris (transzcendens) egyenletrendszerből határozhatjuk meg, így a paramétereink közül kettőt szabadon rögzíthetünk. Utóbbiak megválasztását követően a transzcendens egyenletrendszer megoldását numerikus úton állítottuk elő.

5.3. Állandó sugarú körpályához tartozó megoldások keresése numerikus úton

Az egyenletrendszer numerikus megoldásához a kocsi geometriájára, illetve a gumikerék merevségére vonatkozó paraméterekre a következő értékeket adtuk meg:

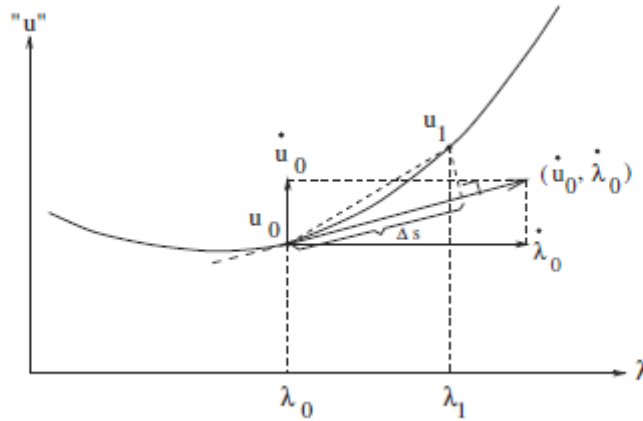
$$\begin{aligned} m &= 1250 \text{ kg}, \\ a &= 1,25 \text{ m}, \\ b &= 1,25 \text{ m}, \\ s &= 1000000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ \mu &= 0,6, \\ a_1 &= 0,05 \text{ m}, \\ g &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Így azt feltételeztük, hogy a két kerék merevsége, illetve az egyes kerekeknél a letapadt hossz azonos, valamint, hogy a kocsi súlypontja a rúd közepén van ($a = b$), amely a szakirodalomban lévő közelítő modell szerint semleges (se nem túlkormányzott se nem alulkormányzott) viselkedést mutat. ld. [1].

A körpálya sugarát $R = 25 \text{ m}$ -re választottuk, azaz az ilyen sugarú köríven való kanyarodást vizsgáljuk. Ezek után a numerikus megoldáskeresés célja, hogy adott diszkrét v_s sebességértékekhez meg tudjuk határozni az állandósult mozgáshoz szükséges δ kormányzóg, F_{x2} kocsi irányú hajtóerő, valamint α_2 a hátsó kerék csúszási szögének nagyságát. Ez szemléletesen annak a meghatározását jelenti, hogy egy adott R sugarú kanyar különböző sebességekkel való bevételehez milyen kormányzóg, gázpedálállásra (hajtóerőre), van szükség, illetve információt nyerünk a kerekekben ébredő oldalirányú deformáció mértékéről. A numerikus gyökkereséshez Wolfram Mathematica 7.0 programot használtunk, melyben a különböző sebességekhez tartozó stacionárius megoldások

meghatározásához egy numerikus követő algoritmust („pseudo-arclength”, ld. [2]) implementáltunk.

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk az alkalmazott numerikus követő módszer lényegét, amelynek matematikai alapjai részletesen megtalálhatók a [2] számú szakirodalomban.



11. ábra (forrás: [2])

A gyökkereső módszer lényegét a 11. ábra szemlélteti, vagyis, ha egy $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$ egyenletrendszerrel megadott görbének ismerjük egy $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ pontját, valamint ebben a pontban az $\dot{\mathbf{x}}_0 = (\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\lambda}_0)$ irányvektorát, akkor a görbe egy következő $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{u}_1, \lambda_1)$ pontját az alábbi egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg [2]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \lambda_1) &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)^T \dot{\mathbf{u}}_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \dot{\lambda}_0 - \Delta s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

ahol Δs a lépésköz. Az egyenletrendszer numerikus megoldásához Newton-Rhapson iterációt alkalmazhatunk.

Az így meghatározott új pontban az irányvektort a következő módon definiálhatjuk [2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{u}}^1 & \mathbf{G}_{\lambda}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_0^T & \dot{\lambda}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

ahol, $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}^1$ a $\mathbf{G}$ egyes elemeinek, az $\mathbf{u}$ elemei szerinti parciális deriváltjait tartalmazó mátrix az $\mathbf{u}_1$ helyen, míg $\mathbf{G}_{\lambda}^1$ a $\mathbf{G}$ elemeinek szintén az $\mathbf{u}_1$ helyen vett λ szerinti parciális deriváltjait tartalmazó oszlopvektor.

Esetünkben $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$, az (5.18), (5.19), (5.20) egyenletrendszer nullára rendezett alakja, míg $\mathbf{u}^T = [\alpha_2, \delta, F_{x_2}]$, illetve $\lambda = v_s$.

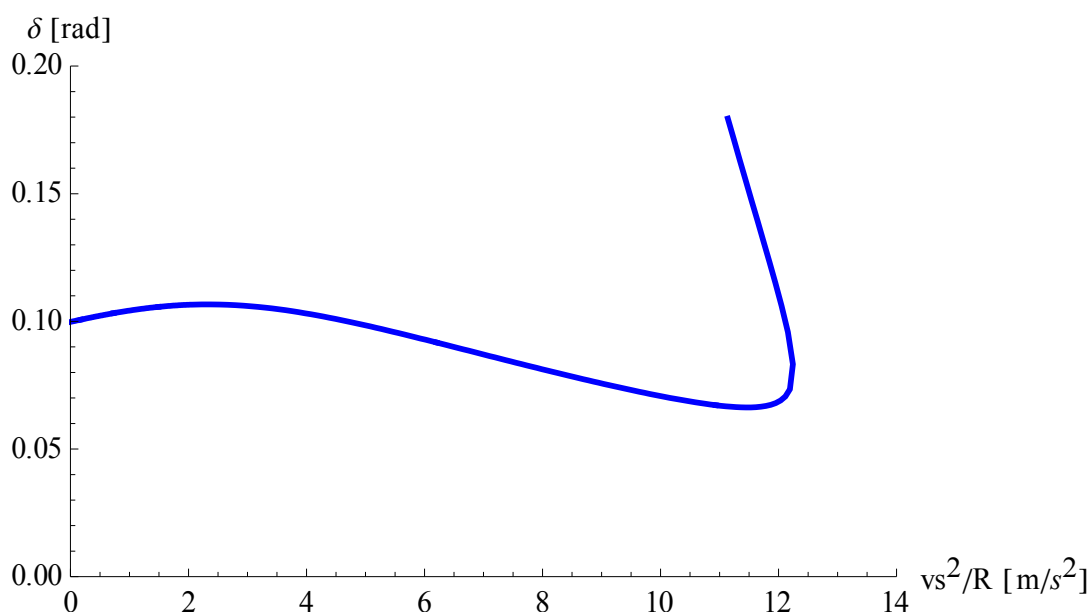
5.4. Eredmények

A (5.25) szerinti adatokkal az előzőekben leírt numerikus gyökkereső eljárással, a görbe következő pontjához a megkívánt pontossággal való konvergenciához szükséges iterációs lépések számától függően változó lépésközzel, összesen 18000 pontban határoztuk meg az adott sebességhez tartozó értékeket. Fontos megjegyezni, hogy a megoldások keresése során a numerikus megoldás egyszerűsítésére azzal a feltételezéssel éltünk, hogy egyik kerék sem csúszik meg teljesen, vagyis az első illetve a hátsó kerék α_1 és α_2 csúszási szögének nagysága nem haladja meg a kritikus értéket (ld. (3.10)). Ennek a feltételnek teljesülését a program futtatása után utólagosan ellenőriztük (α_2 -t közvetlenül meghatároztuk, míg α_1 kiszámításához (4.9) szerint az egyes pontokra kapott értéket helyettesítettük be), azaz csak azokat a pontokat vettük figyelembe, amelyekre teljesül:

$$\alpha_1, \alpha_2 < \alpha_{\text{krit}} \quad (5.28)$$

Az eredmények szemléltetéséhez az egyes pontokhoz tartozó kormányyszög, tolóerő, illetve csúszási szög értékeket külön diagramon ábrázoltuk.

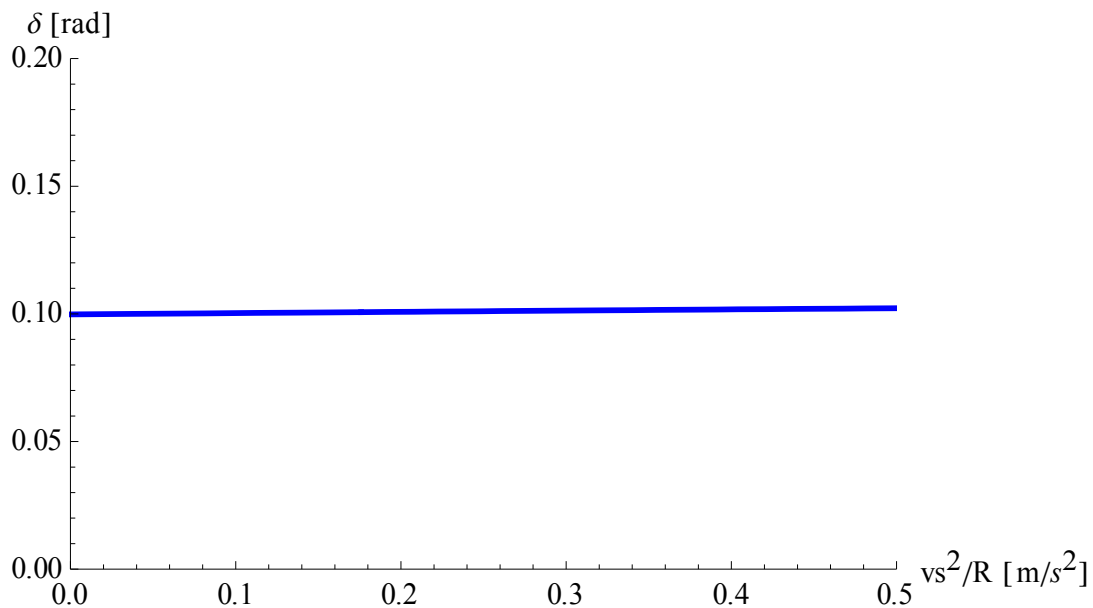
A lineáris kerék- illetve járműmodellel [1] való összehasonlítás céljából, a δ kormányyszöget nem a v_s sebesség, hanem a normális irányú gyorsulás $a_n = v_s^2 / R$ függvényében ábrázoltuk, ld. 12. ábra. A görbe meredekségéből következtethetünk a kocszi alul vagy felülkormányzottságára: pozitív meredekség esetén a kocszi alulkormányzott módon, míg negatív meredekség esetén túlkormányzott módon viselkedik. Látható, hogy nagy sebességek esetén egy adott sebességhez létezhet több stacionárius megoldás is.



12. ábra: A stacionárius mozgáshoz tartozó kormányyszög értékek a súlypont normális gyorsulásának függvényében

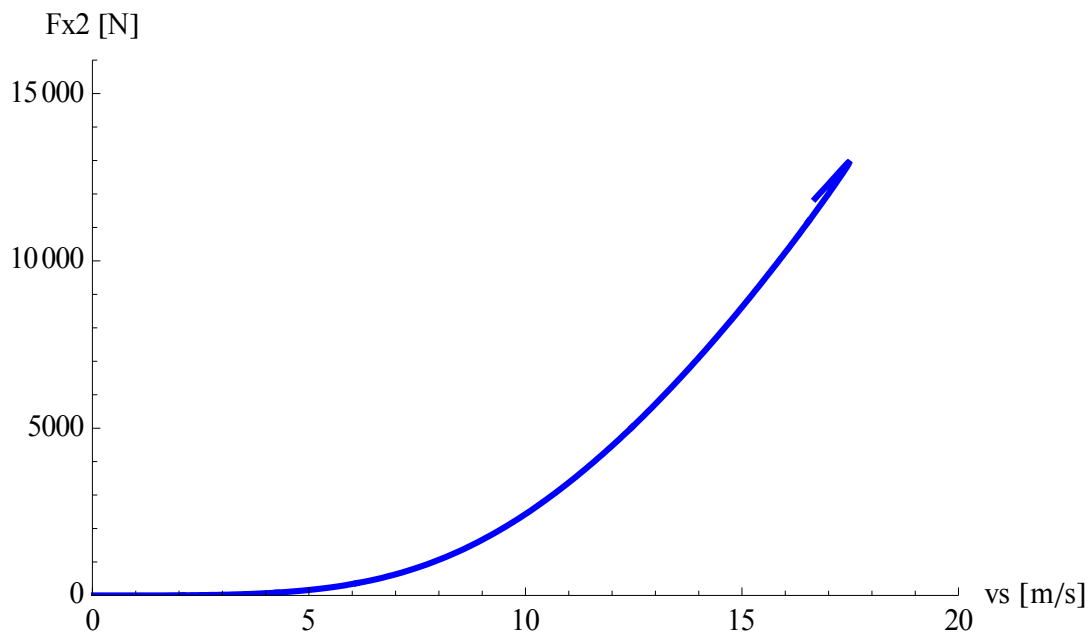
Hasonlítsuk össze a kapott eredményeket a linearizált kerék- illetve járműmodellel [1], amely szerint az (5.25)-ben megadott adatokkal (azonos első, és hátsó kerék merevség, azonos függőleges irányú terhelő erő az egyes kerekeken) a kocszi minden sebességtartományban semlegesen viselkedik, azaz a szükséges kormányyszög nem változik a sebesség

függvényében. Esetünkben azonban ezen állítás nem igazolódik, az egyszerűsített lineáris járműmodellhez képes jelentős eltéréseket tapasztalunk. Alacsonyabb sebességtartományban a kocsí alulkormányzott módon viselkedik, tehát a megadott pályán való tartós haladáshoz, ha növeljük a sebességet, növelni kell a kormányoszöget, míg nagyobb sebességi tartományban túlkormányzottság jellemző, vagyis gyorsításkor csökkenteni kell a kormányoszöget az állandó köríven maradáshoz. Megállapítható viszont, hogy a görbe meredeksége a $v_s = 0$ hely környezetében közel zérus, tehát nagyon kis sebességeknél a modell közelítőleg visszaadja a közelítő lineáris kerékmodell szerinti viselkedést (ld.13. ábra.)



13. ábra

Az állandósult mozgáshoz szükséges F_{x2} kocsí irányú tolóerőt a v_s sebesség függvényében ábrázolva (14. ábra) látható, hogy minél nagyobb sebességgel szeretnénk kanyarodni, annál nagyobb tolóerőre van szükségünk. Ennek oka, hogy a kefe-kerékmodell a haladás során a kerékdeformáció mértékével arányosan emészti az energiát, ugyanis ha a talajhoz letapadt megnyúlt rugó megcsúszik, akkor a benne tárolt energiát a csúszósúrlódás hővé alakítja, és ezzel energiát von el a rendszertől.

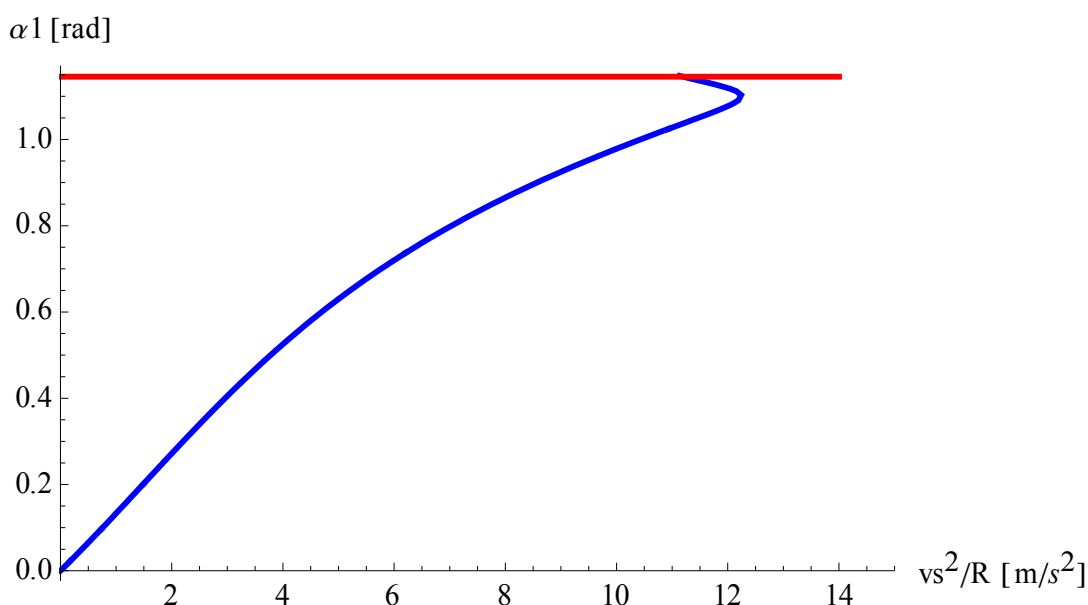


14. ábra: A stacionárius mozgáshoz tartozó kocsí irányú tolóerő nagysága a sebesség függvényében

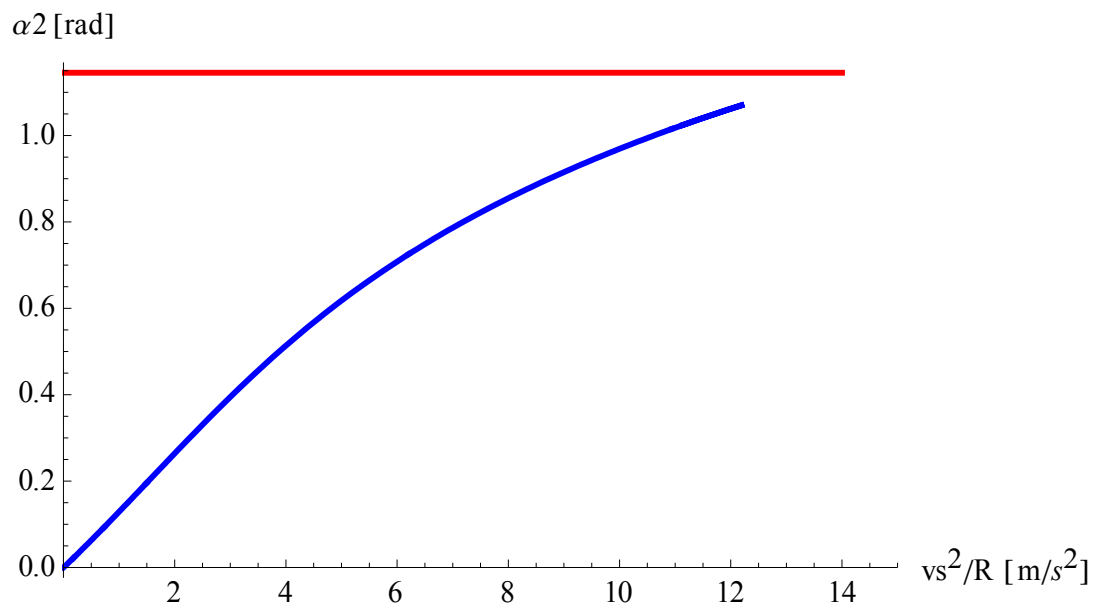
Az előzőekhez hasonlóan az α_1 és α_2 az első illetve a hátsó kerék csúszási szögét ábrázolva (15. ábra és 16. ábra) az egyes v_s sebességértékeknél láthatjuk, hogy ezeknek értéke a görbe mentén folyamatosan növekszik, vagyis a görbe „visszaforduló” szakaszán azonos sebességek mellett nagyobb csúszási szögek fognak fellépni. A két diagramon pirossal tüntettük fel azt az α_{krit} kritikus csúszási szög értéket, amelynél már az egész kerék megcsúszna. Ennek értéke a (3.10) összefüggésbe a (5.25)-ben megadott paramétereket behelyettesítve:

$$\alpha_{krit} = 1,145 \text{ rad}, \quad (5.29)$$

amelyet az érvényesnek tekintett tartományban egyik csúszási szög értéke sem lép át, azaz teljesül az (5.28) feltétel.



15. ábra: Az első kerék csúszási szögének változása a súlypont normális gyorsulásának függvényében



16. ábra: A hátsó első kerék csúszási szögének változása a súlypont normális gyorsulásának függvényében

6. A stacionárius megoldások stabilitása

6.1. Stabilitásvizsgálat

A megoldások stabilitásának vizsgálatát az előzőekhez hasonlóan Wolfram Mathematica 7.0 programban implementáltuk. Az alábbiakban egy adott tetszőleges megoldás vizsgálatának módját mutatjuk be.

Térjünk vissza a rendszer (4.6), (4.7), (4.8) mozgásegyenleteihez,

$$m(\dot{u} - v\beta) = F_{x2} + F_{y1} \sin \delta, \quad (6.1)$$

$$m(\dot{v} + u\beta) = F_{y1} \cos \delta + F_{y2}, \quad (6.2)$$

$$\Theta_{Sz} \dot{\beta} = M_{z1} + M_{z2} + F_{y1} a \cos \delta - F_{y2} b, \quad (6.3)$$

amelyekben az F_{y1} , F_{y2} erőkre, illetve M_{z1} , M_{z2} nyomatékokra vonatkozó (3.7), (3.14) összefüggésekben a megfelelő α_1 és α_2 csúszási szögek szerepelnek, ezeket (4.9) és (4.10) szerint fejezzük ki a pszeudo sebességek, azaz u , v és β függvényeként:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{v + a\beta}{u}\right) + \delta, \quad (6.4)$$

hasonlóan:

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{v - b\beta}{u}\right). \quad (6.5)$$

Fejezzük ki a mozgásegyenlet rendszer egyes egyenleteiből a pszeudo sebességek $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{\beta}$ idő szerinti deriváltjait:

$$\dot{u} = \frac{F_{x2}}{m} + \frac{F_{y1} \sin \delta}{m} + v\beta, \quad (6.6)$$

$$\dot{v} = \frac{F_{y1} \cos \delta}{m} + \frac{F_{y2}}{m} - u\beta, \quad (6.7)$$

$$\dot{\beta} = \frac{M_{z1}}{\Theta_{Sz}} + \frac{M_{z2}}{\Theta_{Sz}} + \frac{F_{y1} a \cos \delta}{\Theta_{Sz}} - \frac{F_{y2} b}{\Theta_{Sz}}, \quad (6.8)$$

ezzel $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ alakú ún. autonóm differenciálegyenlet-rendszerhez jutottunk. Ekkor az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer az autonóm egyenlet $\mathbf{x}_0$ egyensúlyi helyéhez tartozó ún. variációs rendszere, ahol $\mathbf{A}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ $\mathbf{x}$ egyes elemei szerinti parciális deriváltakat tartalmazó mátrix az $\mathbf{x}_0$ helyen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (6.9)$$

ahol $\mathbf{x}_0^T = [u_0, v_0, \beta_0]$, és u_0, v_0, β_0 a stacionárius mozgáshoz tartozó súlypont sebességek, illetve a szögsebesség, melyeket az egyes pontokban a numerikus gyökkeresés során kapott $\alpha_2, \delta, F_{x_2}$, illetve az adott ponthoz tartozó v_s és R értékekből számíthatunk, a (5.16), (5.3), (5.15) és (5.24) összefüggésekbe való behelyettesítéssel.

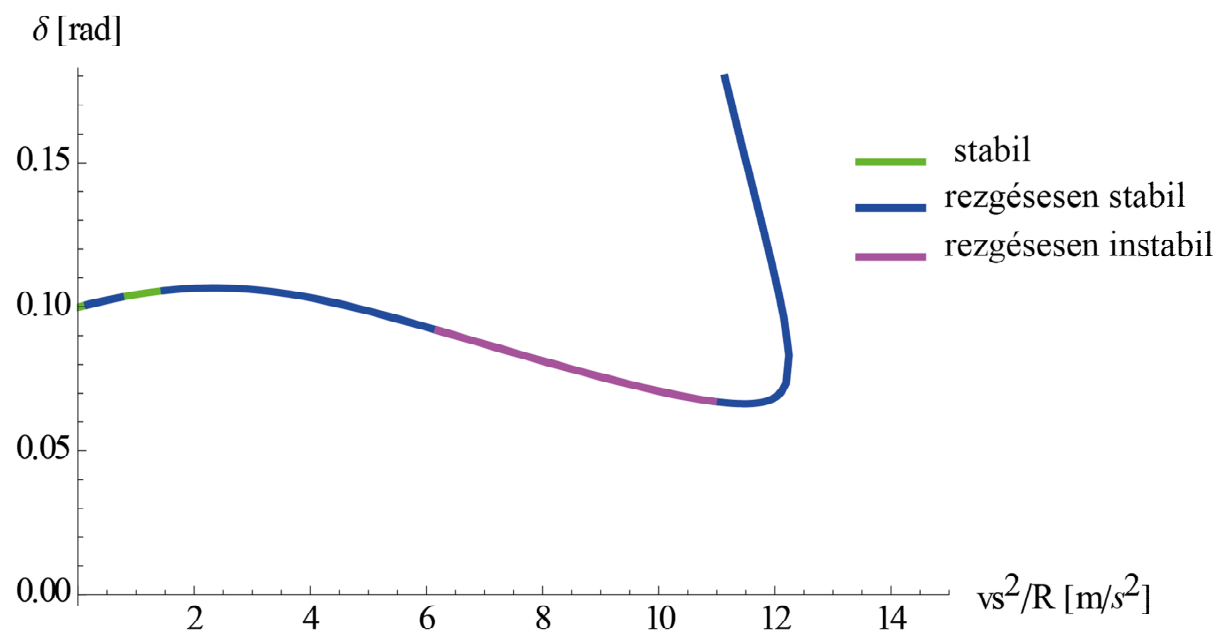
Ezek után meg kell határoznunk az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. A rendszer stabilitásának feltétele, hogy mindhárom sajátértékre teljesüljön:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0. \quad (6.10)$$

Ha (6.10) mellett az $\operatorname{Im} \lambda_i = 0$ feltétel is igaz, akkor a stacionárius mozgáshoz egy stabil csomó tartozik a fázistérben (statikusan stabil), ellenkező esetben pedig egy stabil fókusz, azaz kismértékű zavarás hatására csillapodó rezgéssel tér vissza a stacionárius mozgáshoz a rendszer (rezgésesen stabil). Hasonlóan mondhatjuk, hogy ha (6.10) összefüggés nem teljesül, akkor a rendszer instabil, $\operatorname{Im} \lambda_i = 0$ feltétel mellett instabil csomó (statikusan instabil), míg $\operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$ esetben instabil fókusz, azaz egyre növekvő amplitúdóval rezegve fog stabilitást veszíteni a stacionárius mozgás (rezgésesen instabil).

6.2. Eredmények

A programot lefuttatva a 5.4 fejezetben meghatározott megoldásgörbe pontjaira megvizsgáltuk a megoldások lineáris stabilitását. A különböző stabilitási tartományokat a 17. ábra mutatja; a zölddel jelölt szakaszokon a megoldások statikusan stabilak, a késsel jelölt szakaszokon még mindig stabilak, de a rendszer kismértékű zavarás hatására csillapodó rezgésekkel tér vissza az egyensúlyi sebességértékekhez, míg a lilával jelölt szakaszon a rendszer instabil és egyre nagyobb amplitúdóval rezeg az egyensúlyi helyzet körül.



17. ábra A megoldások stabilitása

7. Szimuláció

7.1. Állandósult mozgás

Az előző fejezetben tárgyalt stabilitásvizsgálat eredményeinek ellenőrzésére numerikus szimulációkkal vizsgáltuk a rendszer mozgását, kezdeti feltételként egy adott a 5. fejezetben meghatározott állandósult megoldáshoz tartozó sebességértékeket megadva. Az eredmények könnyebb megjeleníthetősége végett visszatértünk a rendszer mozgásegyenleteinek abszolút vonatkoztatási rendszerben felírt alakjához (2.9), (2.10), (2.11). Az $F_{x1}, F_{x2}, M_{z1}, M_{z2}$ erőkre illetve nyomatékokra vonatkozó összefüggésben (3.7), (3.14) szereplő α_1 és α_2 csúszási szögek helyére a (4.9), (4.10) szerinti behelyettesítést végeztük el. Ekkor megjelennek az egyenletrendszerben a pszeudo sebességek is, így ezeket még ki kell fejeznünk az abszolút vonatkoztatási rendszerben (4.2) és (4.3) szerint, ezzel egy x, y és ψ szerinti másodrendű differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk.

A differenciálegyenlet-rendszert numerikus úton, Wolfram Mathematica 7.0 programmal, explicit Runge-Kutta módszert alkalmazva oldjuk meg.

A kiindulási helyzetre vonatkozó kezdeti feltételeket a következők szerint adjuk meg:

$$x(0) = 0, \quad (7.1)$$

$$y(0) = 0, \quad (7.2)$$

$$\psi(0) = 0. \quad (7.3)$$

Ennek nagy előnye, hogy a kocsinak ebben a helyzetében ($\psi = 0$), az abszolút vonatkoztatási rendszerbeli és a pszeudo sebességei éppen azonosak lesznek, hiszen ekkor a relatív ξ tengely a valós x -szel, az η tengely, pedig y -nal fog egybe esni. Ezek alapján a kezdősebességekre vonatkozó kezdeti feltételek:

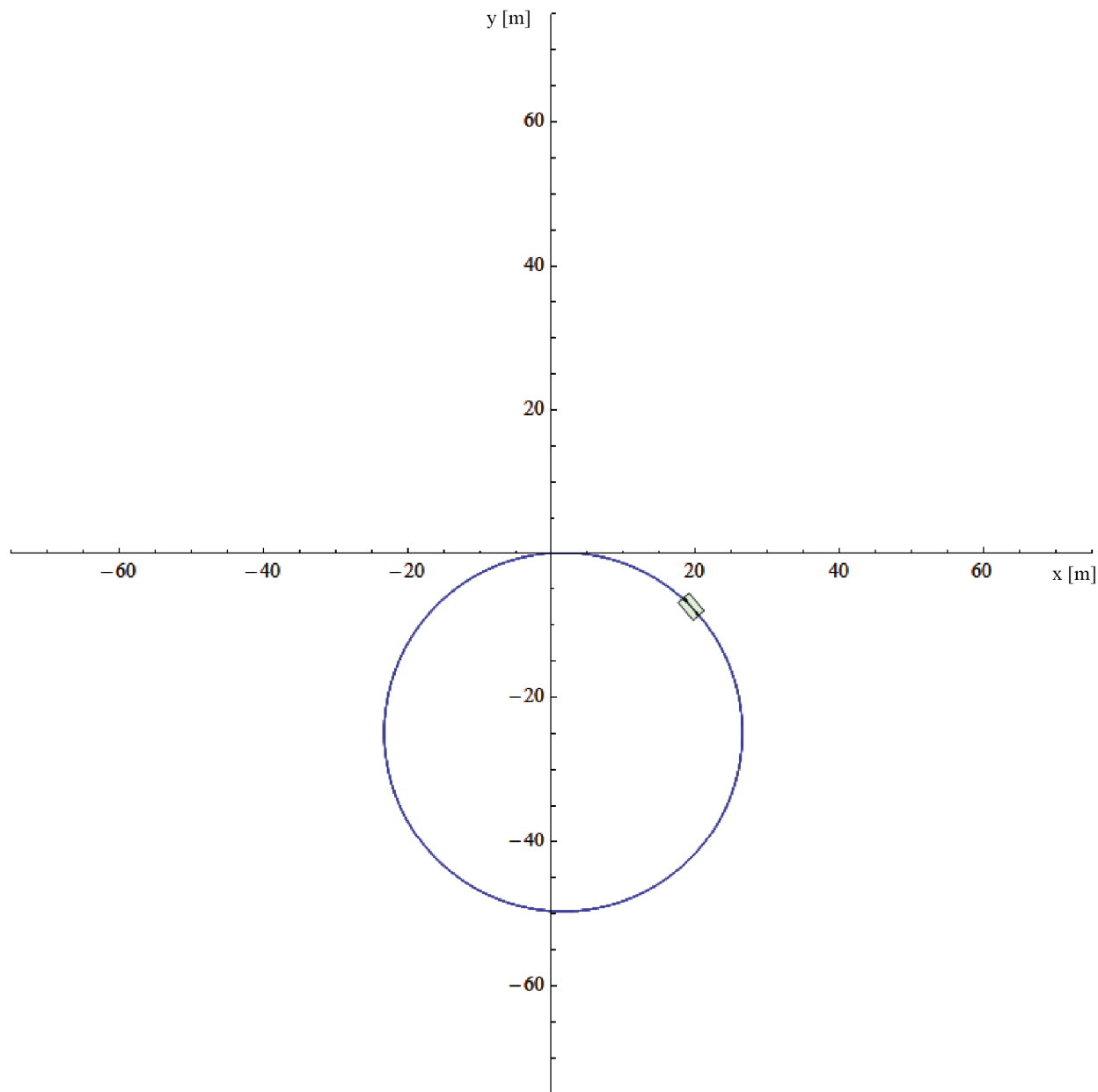
$$\dot{x}(0) = u_0, \quad (7.4)$$

$$\dot{y}(0) = v_0, \quad (7.5)$$

$$\dot{\psi}(0) = \beta_0. \quad (7.6)$$

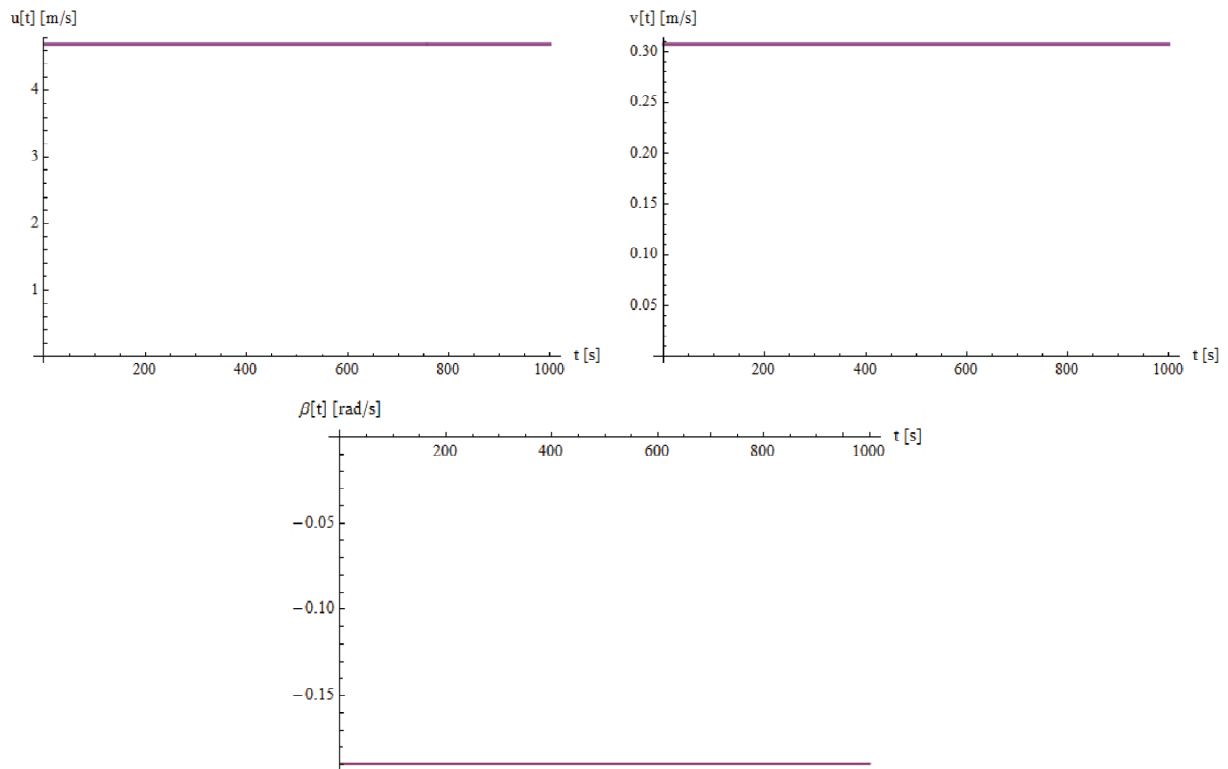
A fentiek szerint választott kezdeti feltételekkel numerikusan megoldva a differenciálegyenletet, a kocsivalóban állandó sugarú körpályán mozog (ld. 18. ábra), amennyiben az u_0, v_0 és β_0 értékét a 5. fejezetben meghatározott stacionárius megoldásnak megfelelően választjuk. Az ábrán vázolt esetben, a kezdeti feltételként megadott sebességértékek:

$$\begin{aligned} u_0 &= 4,697 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ v_0 &= 0,307 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ \beta_0 &= -0,1893 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$



18. ábra: A jármű súlypontjának pályája állandósult állapotban

Az x , y és ψ megoldásfüggvényeket visszahelyettesítve a pszeudo sebességekre vonatkozó összefüggésekbe (4.2), (4.3), és azokat az idő függvényében ábrázolva látható, hogy értékük időben állandó, és a stacionárius sebességeknek megfelelő (ld. 19. ábra).



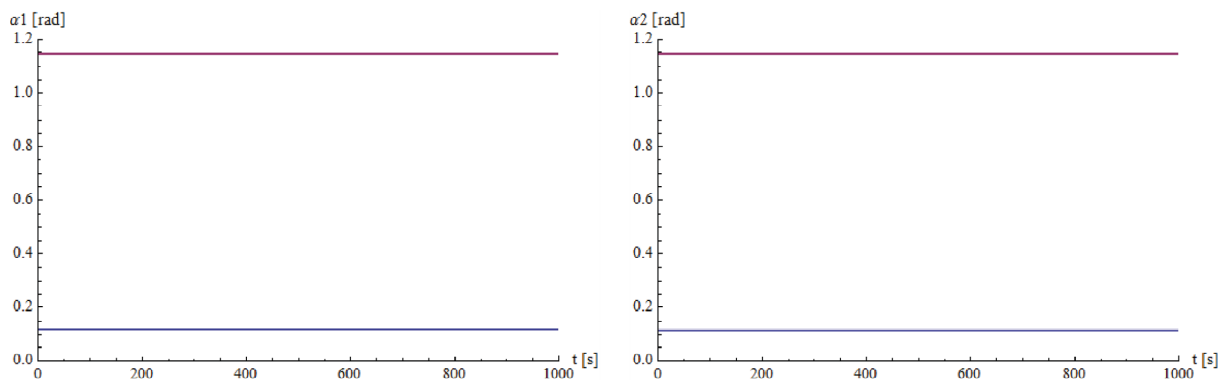
19. ábra: A kocsí súlypontjának sebessége illetve szögsebessége állandósult állapotban

Az előbbiekhöz hasonlóan, ha az α_1 -re illetve α_2 -re vonatkozó (4.9), (4.10) összefüggésekbe visszahelyettesítjük a pszeudo sebesség függvényeket, megkaphatjuk a csúszási szögek időfüggvényét, amelyek ebben az esetben szintén időben állandóak lesznek (ld 20. ábra).

A vizsgált esetben az első illetve hátsó kerék csúszási szögének nagysága:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0,119 \text{ rad}, \\ \alpha_2 &= 0,115 \text{ rad}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Az ábrán (és a dolgozatban a további hasonló diagramokon is) kékkel jelöltük a $\alpha_1(t)$ illetve $\alpha_2(t)$ értékét, míg lilával, a kerekek megcsúszásának határhelyzetét jelző α_{krit} kritikus csúszási szög értékét jelöljük (ld. (5.29)).



20. ábra: Az első illetve hátsó kerék csúszási szöge állandósult állapotban

Ahhoz, hogy a mozgás stabilitásáról is információt nyerjünk, a szimulációt az egyensúlyi sebességekhez képest kis zavarással kell indítanunk. A következőekben a 17. ábra

által mutatott görbe különböző stabilitási tulajdonságokkal rendelkező pontjaiból indított szimulációk eredményeit mutatjuk be. A szimulációk során a δ kormányzási szög, valamint az F_{x2} tolóerő nagyságát végig időben állandó, az adott v_s sebességhez tartozó értéken rögzítettük. A perturbációt minden esetben az egyensúlyi szögsebességtől egy $\beta_p < \beta_0$ -val eltérő érték kezdeti feltételként való megadása jelenti.

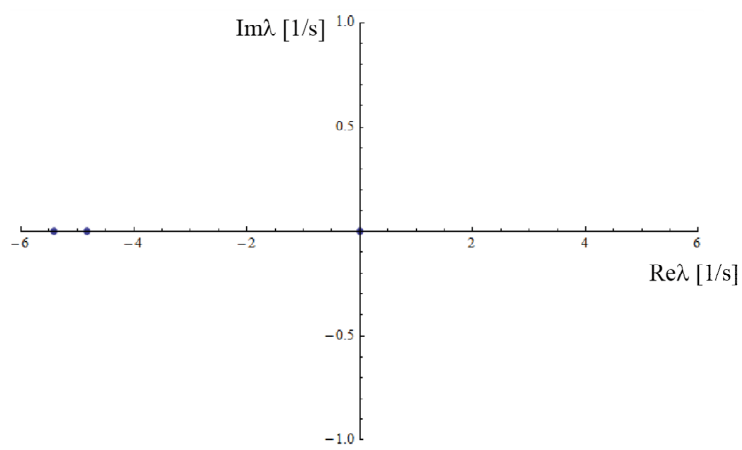
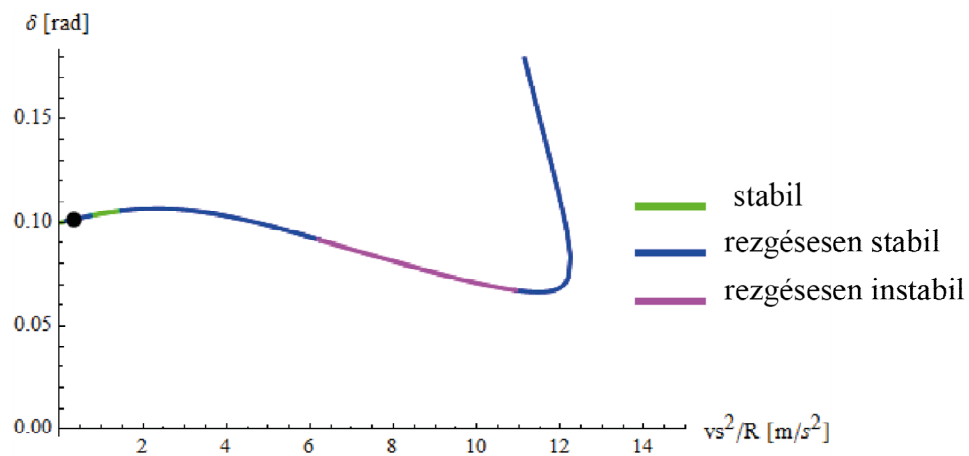
Az egyes vizsgálati pontokra vonatkozóan ábrázoljuk az adott pont helyét a 17. ábra szerinti, stacionárius megoldásokat szemléltető görbén, valamint a ((6.6), (6.7), (6.8)) differenciálegyenlet-rendszer jobboldalának Jacobi-mátrixának (6.9) sajátértékeit. Ezen túlmenően minden vizsgálati pontban ábrázoljuk a jármű súlypontjának pályáját, u, v sebességének, β szögsebességének, valamint az első és a hátsó kerék α_1 és α_2 csúszási szögének idő szerinti változását.

7.2. Stabil tartomány

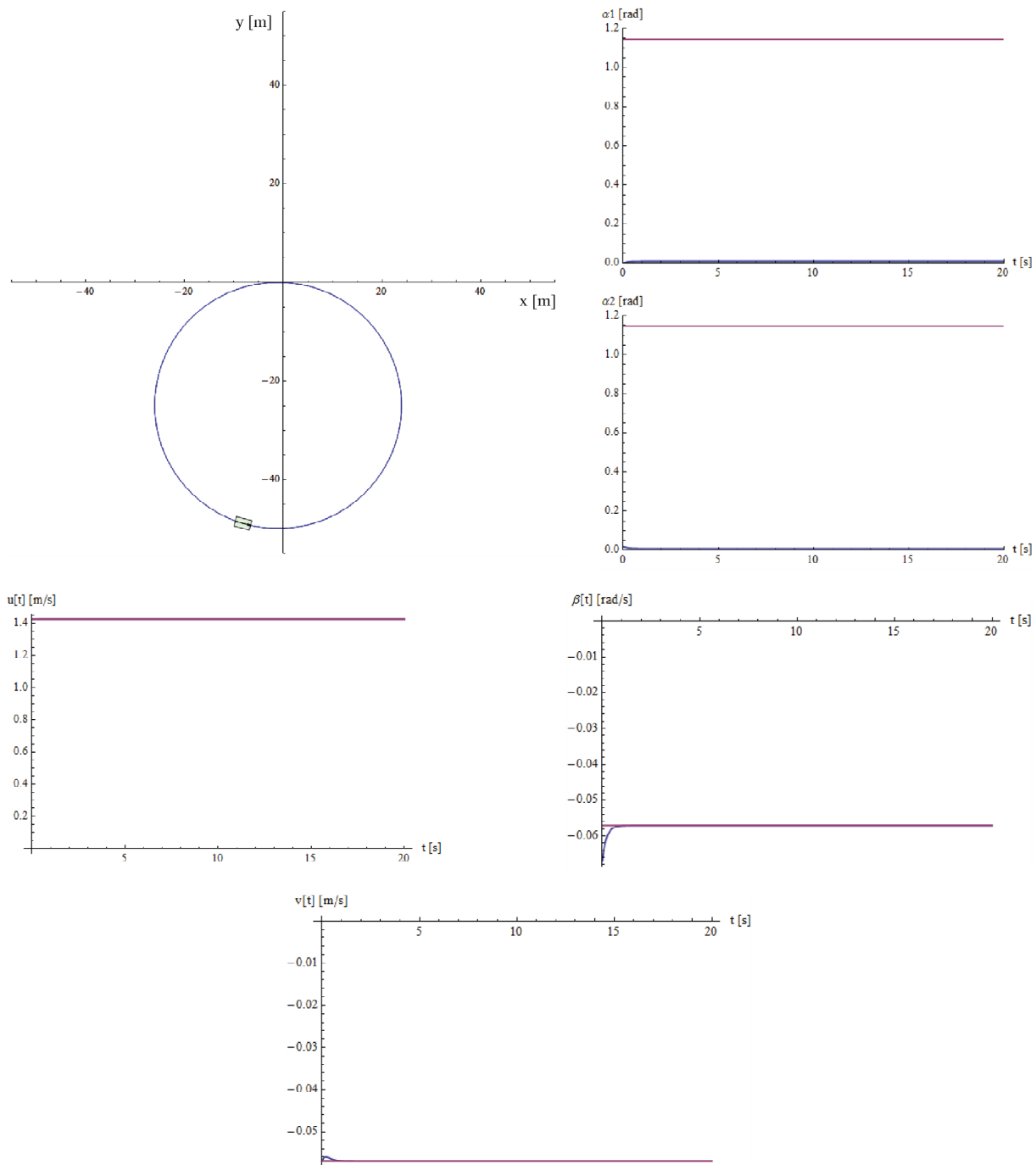
Adatok:

$$\begin{aligned}
 v_s &= 1,426 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \delta &= 0.1002 \text{ rad}, \\
 F_{x2} &= 1,110 \text{ N}, \\
 u_0 &= 1,4239 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 v_0 &= -0,0569 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \beta_0 &= -0,0570 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \alpha_1 &= 0,0104 \text{ rad}, \\
 \alpha_2 &= 0,0101 \text{ rad}, \\
 t_{sz} &= 500 \text{ s},
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pseudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



21. ábra



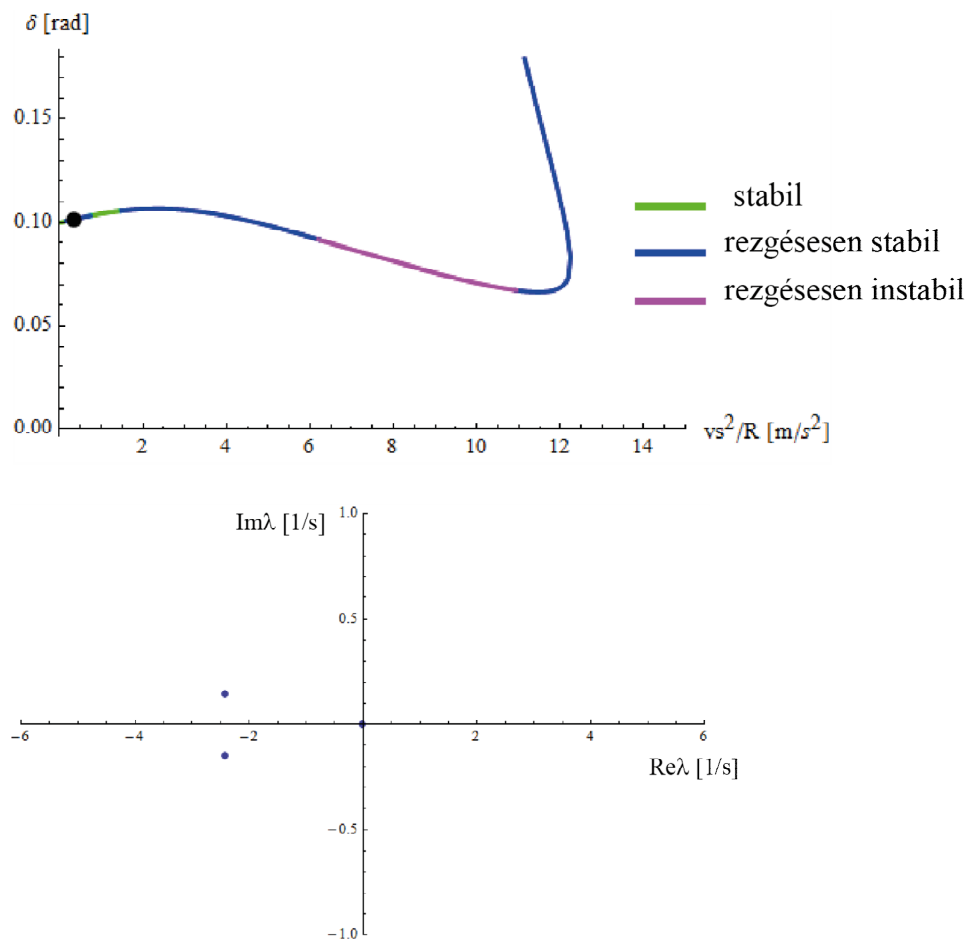
22. ábra

7.3. Rezgésesen stabil tartomány

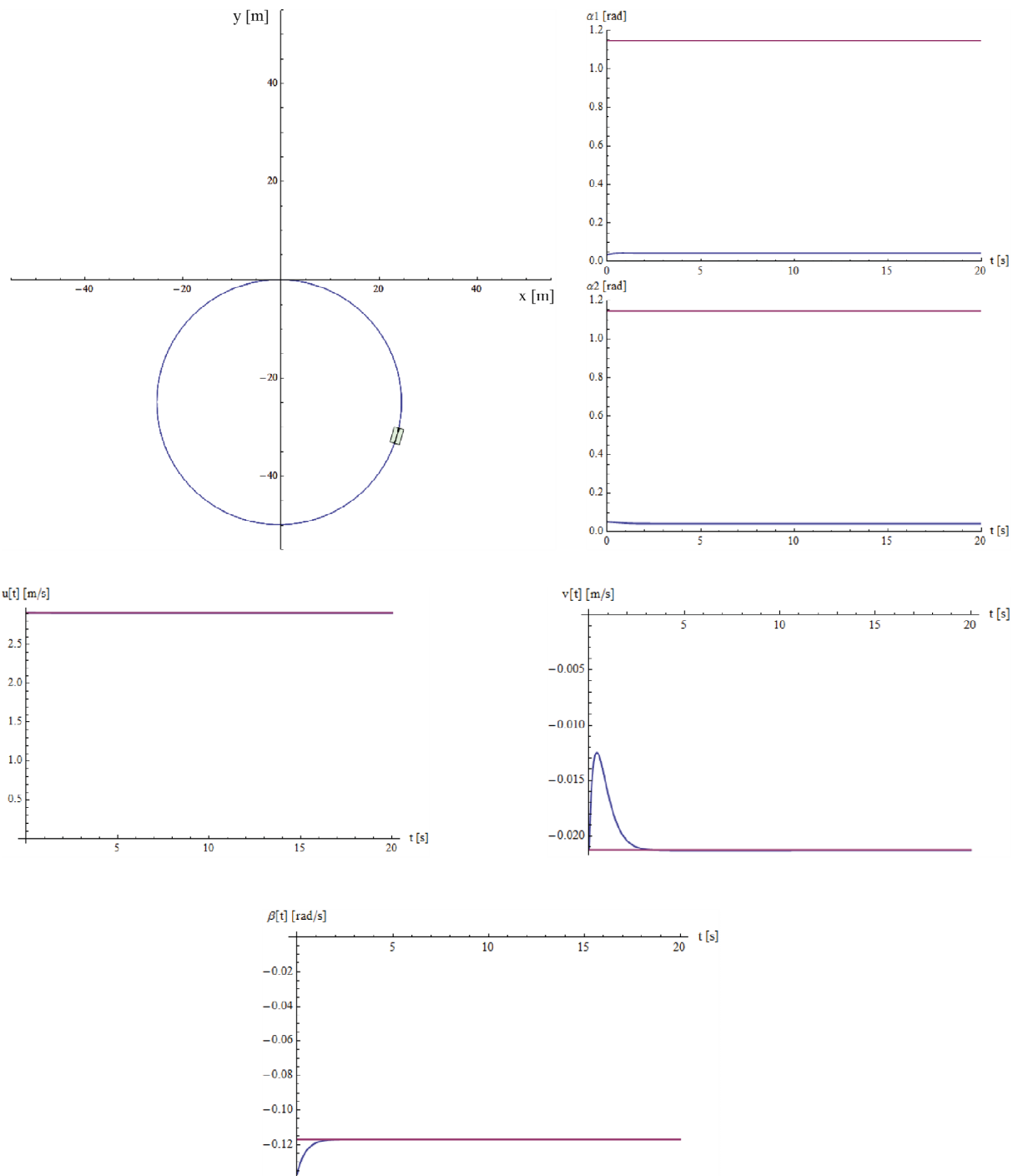
Adatok:

$$\begin{aligned}v_s &= 2,919 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ \delta &= 0,1014 \text{ rad}, \\ F_{x2} &= 18,82 \text{ N}, \\ u_0 &= 2,913 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ v_0 &= -0,0212 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ \beta_0 &= -0,1167 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \alpha_1 &= 0,0441 \text{ rad}, \\ \alpha_2 &= 0,0427 \text{ rad}, \\ t_{sz} &= 500 \text{ s},\end{aligned}\tag{7.10}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pszeudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



23. ábra



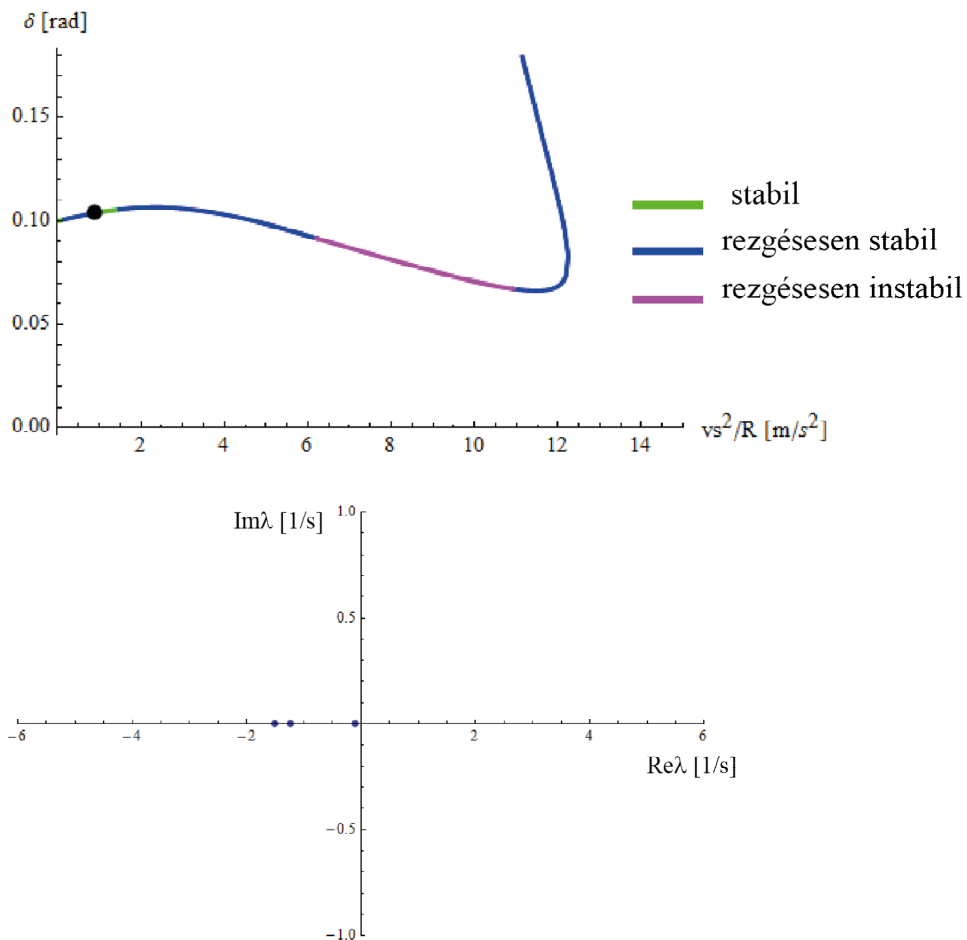
24. ábra

7.4. Stabil tartomány

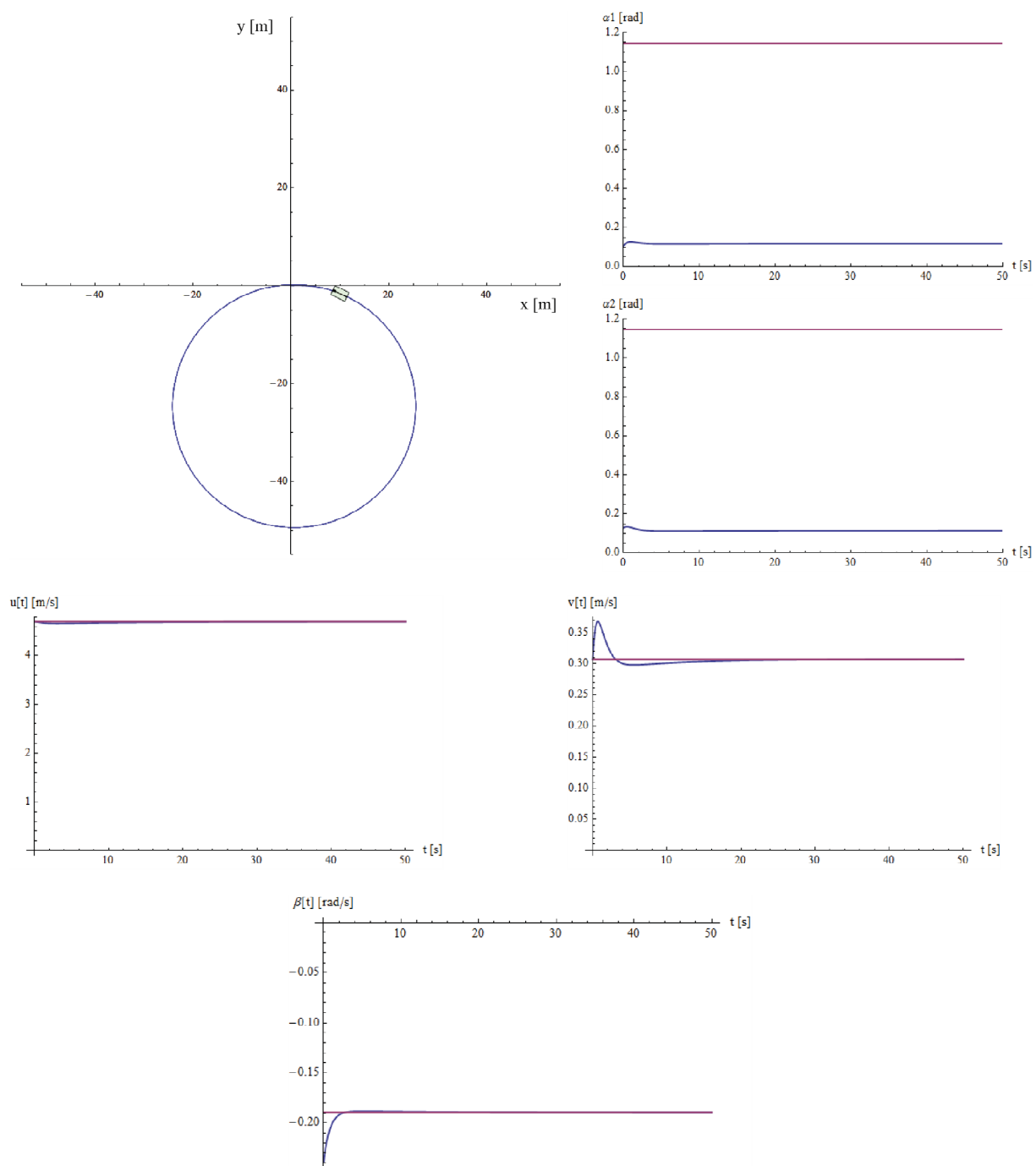
Adatok:

$$\begin{aligned}
 v_s &= 4,734 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \delta &= 0,1039 \text{ rad}, \\
 F_{x2} &= 131,41 \text{ N}, \\
 u_0 &= 4,697 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 v_0 &= 0,307 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \beta_0 &= -0,1893 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \alpha_1 &= 0,1189 \text{ rad}, \\
 \alpha_2 &= 0,1153 \text{ rad}, \\
 t_{sz} &= 500 \text{ s},
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pszeudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



25. ábra



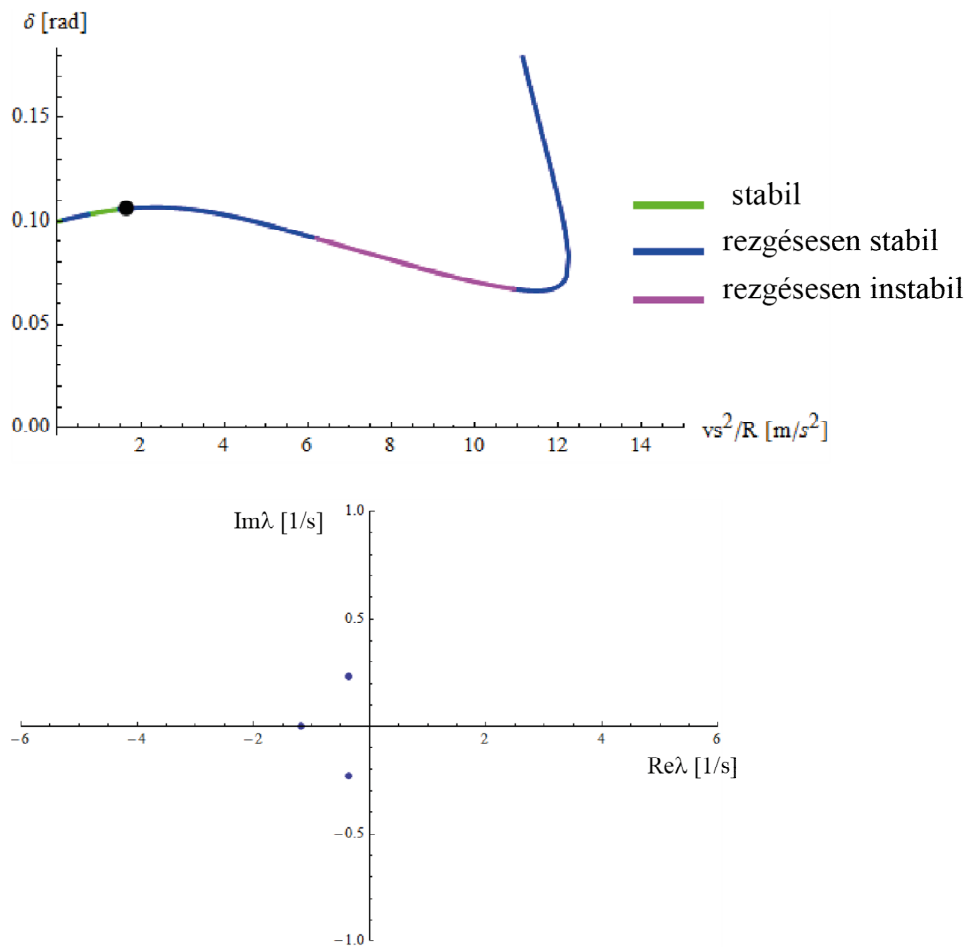
26. ábra

7.5. Rezgésesen stabil tartomány

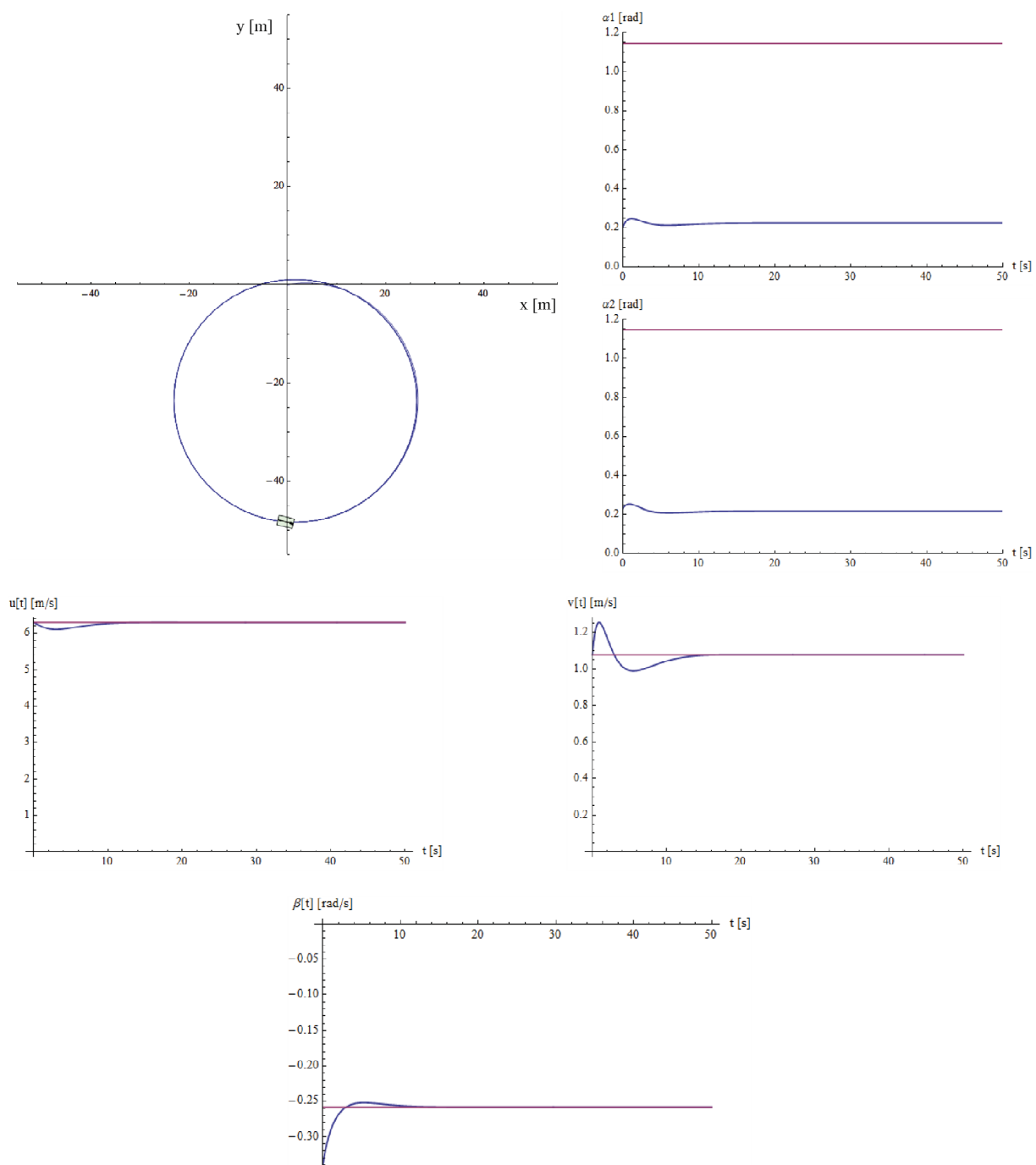
Adatok:

$$\begin{aligned}
 v_s &= 6,451 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \delta &= 0,1060 \text{ rad}, \\
 F_{x2} &= 456,42 \text{ N}, \\
 u_0 &= 6,292 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 v_0 &= 1,0767 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \beta_0 &= -0,2580 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \alpha_1 &= 0,2253 \text{ rad}, \\
 \alpha_2 &= 0,2188 \text{ rad}, \\
 t_{sz} &= 500 \text{ s},
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pszeudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



27. ábra



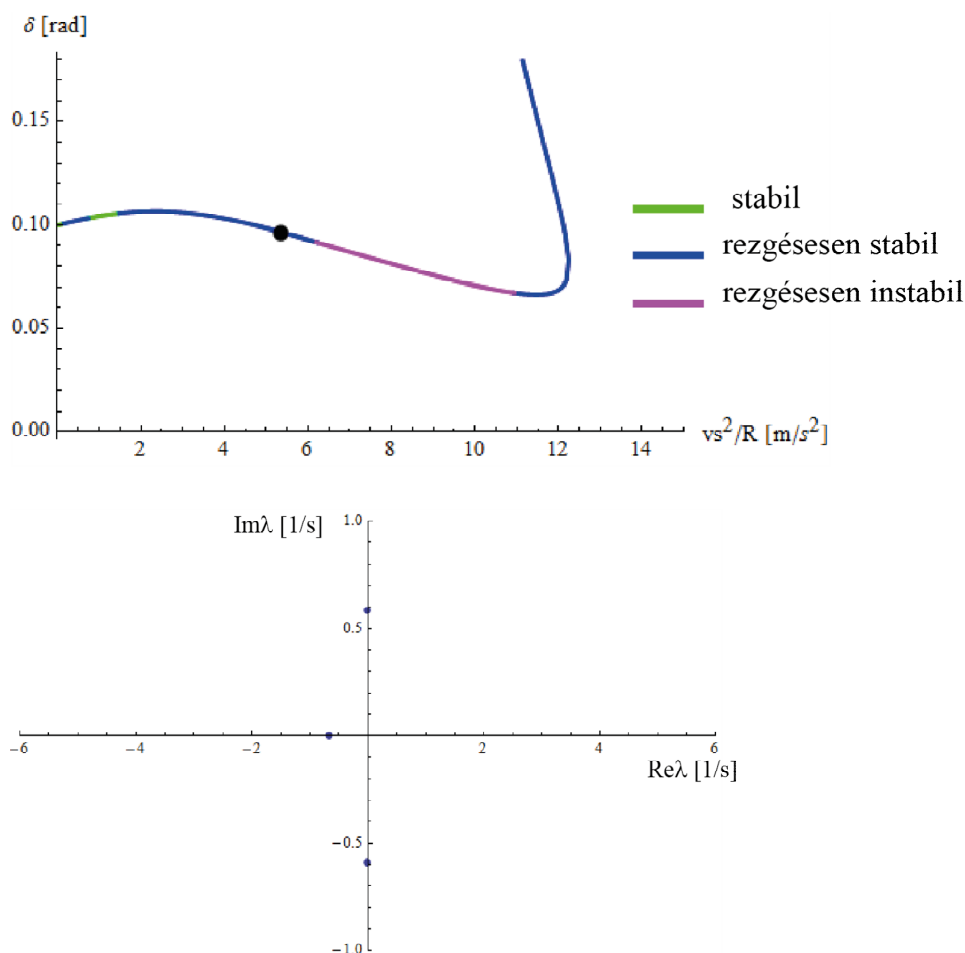
28. ábra

7.6. Rezgésesen stabil tartomány

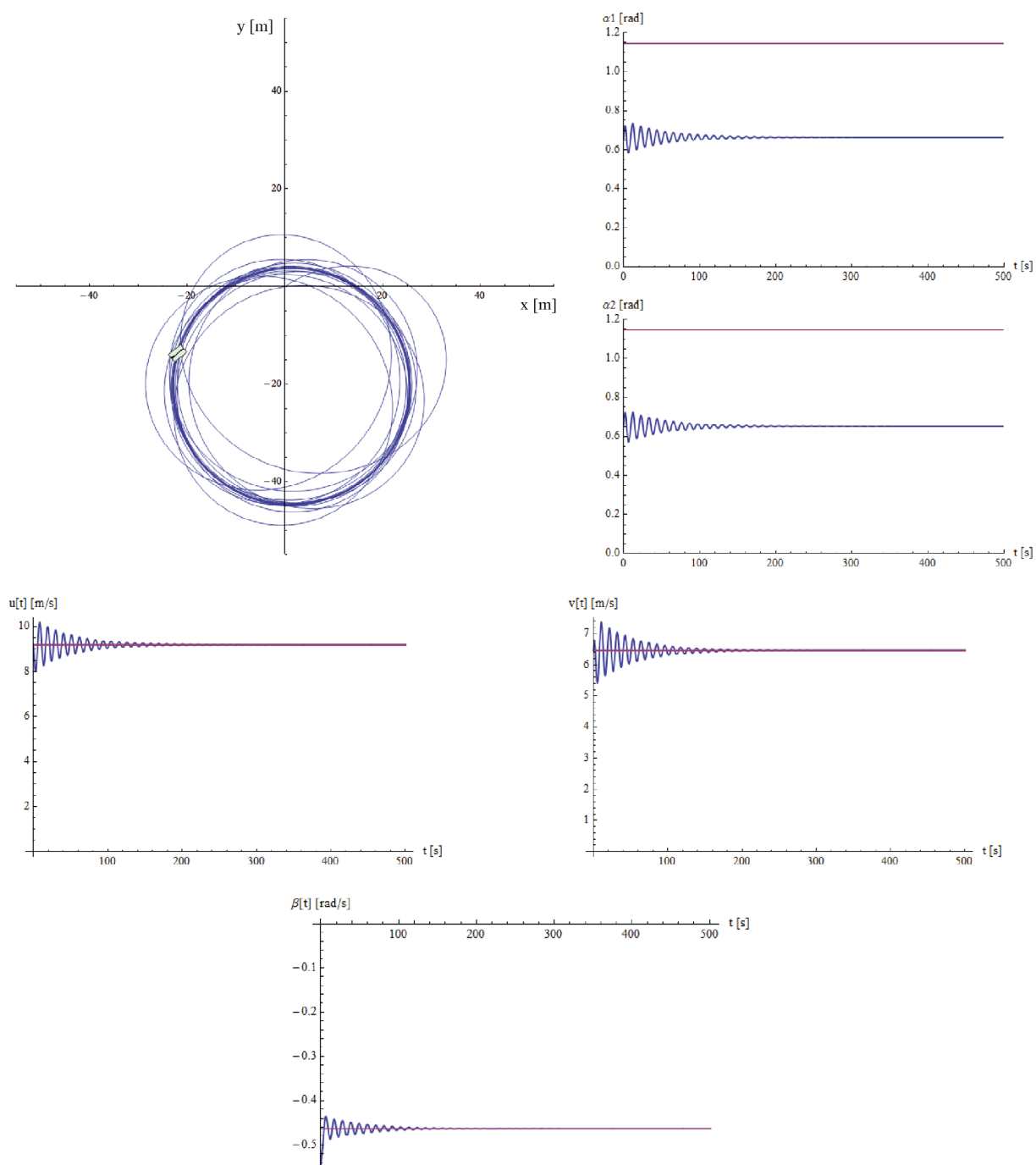
Adatok:

$$\begin{aligned}
 v_s &= 11,585 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \delta &= 0,0965 \text{ rad}, \\
 F_{x2} &= 3998 \text{ N}, \\
 u_0 &= 9,203 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 v_0 &= 6,456 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \beta_0 &= -0,4633 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \alpha_1 &= 0,6647 \text{ rad}, \\
 \alpha_2 &= 0,6526 \text{ rad}, \\
 t_{sz} &= 500 \text{ s},
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pszeudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



29. ábra



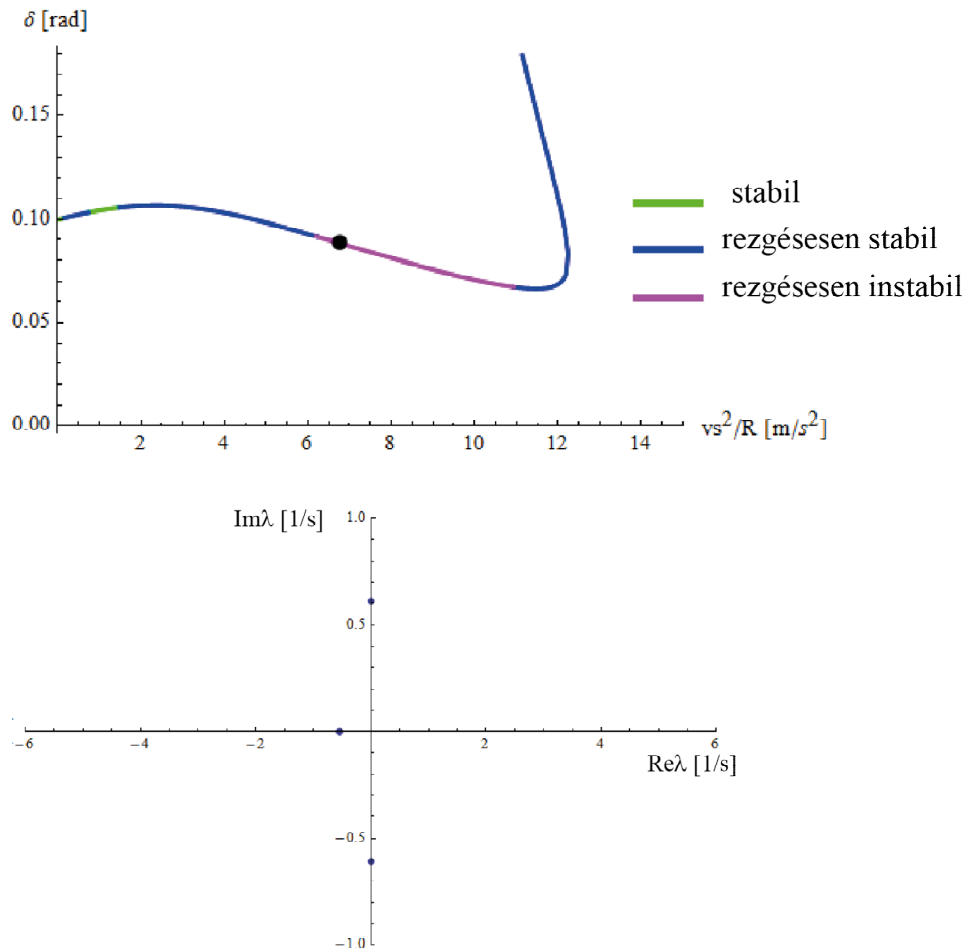
30. ábra

7.7. Rezgésesen instabil tartomány

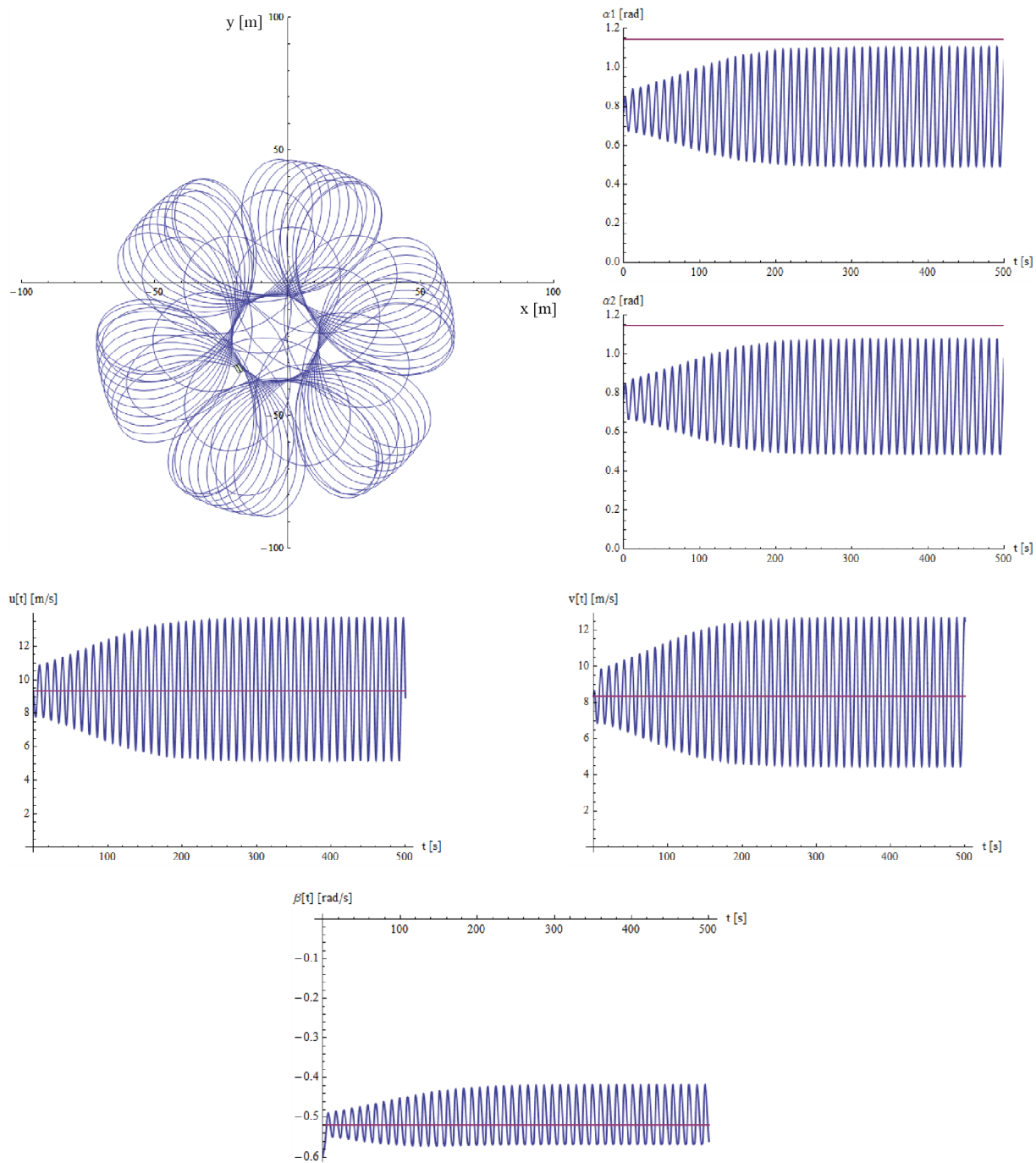
Adatok:

$$\begin{aligned}
 v_s &= 12,988 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \delta &= 0,0885 \text{ rad}, \\
 F_{x2} &= 5708 \text{ N}, \\
 u_0 &= 9,346 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 v_0 &= 8,372 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \beta_0 &= -0,5195 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \alpha_1 &= 0,7791 \text{ rad}, \\
 \alpha_2 &= 0,7677 \text{ rad}, \\
 t_{sz} &= 800 \text{ s},
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pszeudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



31. ábra



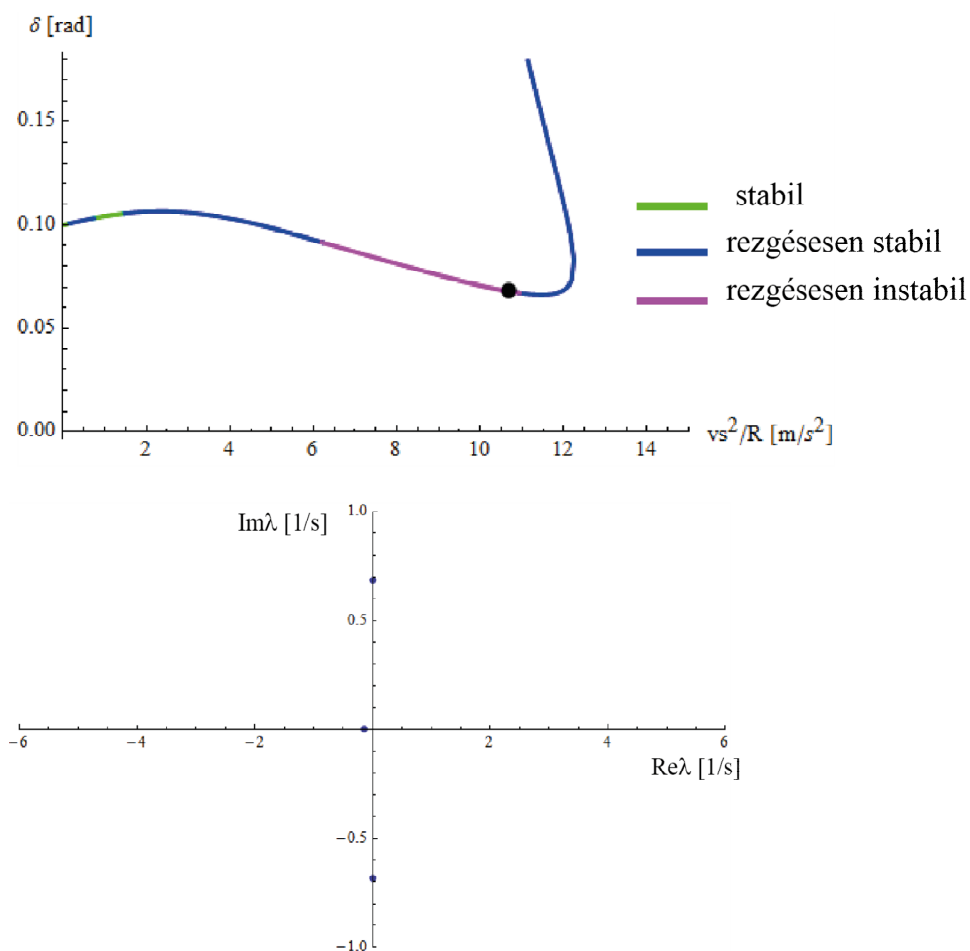
32. ábra

7.8. Rezgésesen instabil tartomány

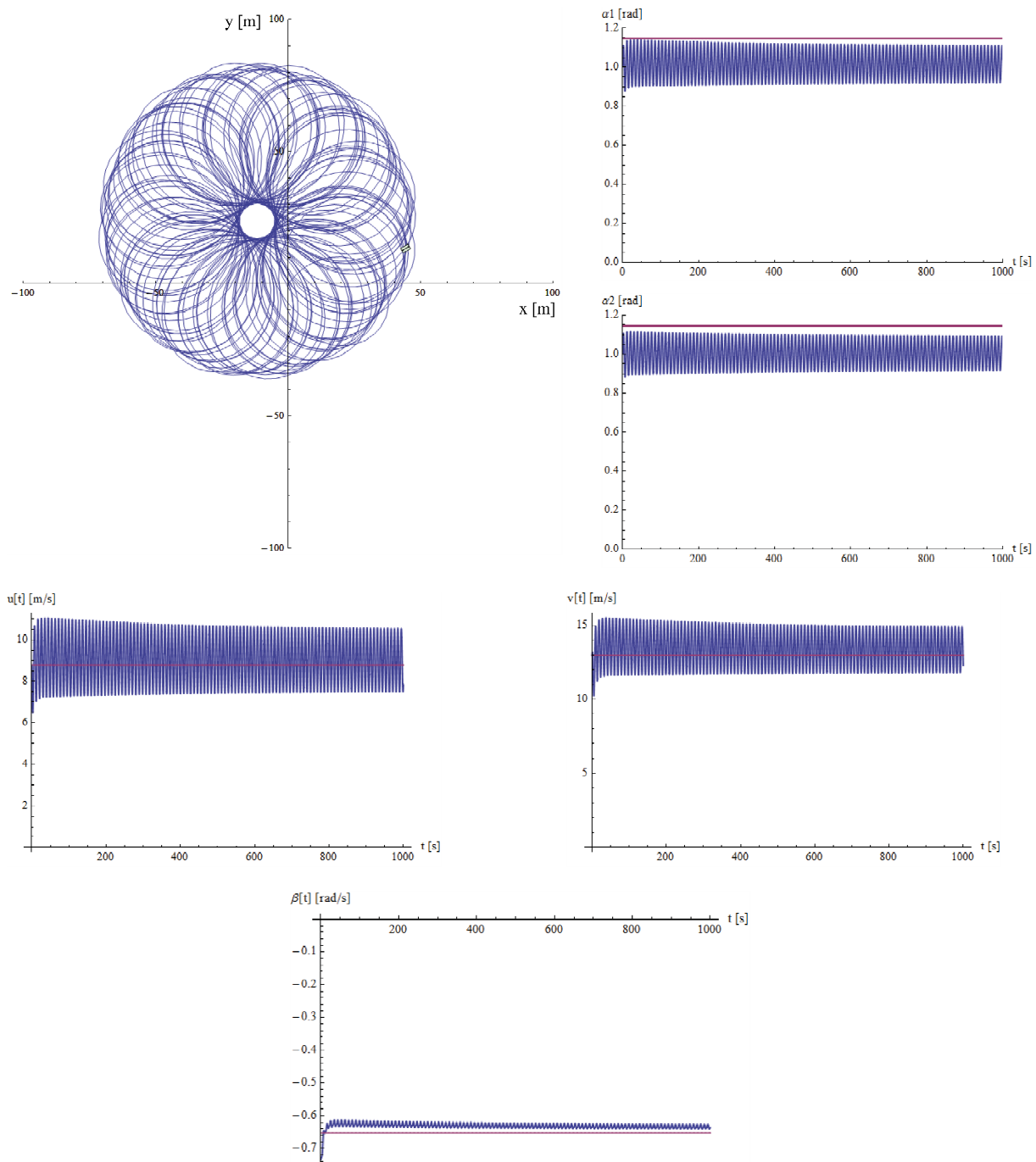
Adatok:

$$\begin{aligned}
 v_s &= 16,338 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \delta &= 0,0679 \text{ rad}, \\
 F_{x2} &= 10833 \text{ N}, \\
 u_0 &= 8,793 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 v_0 &= 12,961 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \beta_0 &= -0,6535 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \alpha_1 &= 1,0121 \text{ rad}, \\
 \alpha_2 &= 1,0028 \text{ rad}, \\
 t_{sz} &= 1000 \text{ s},
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pszeudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



33. ábra



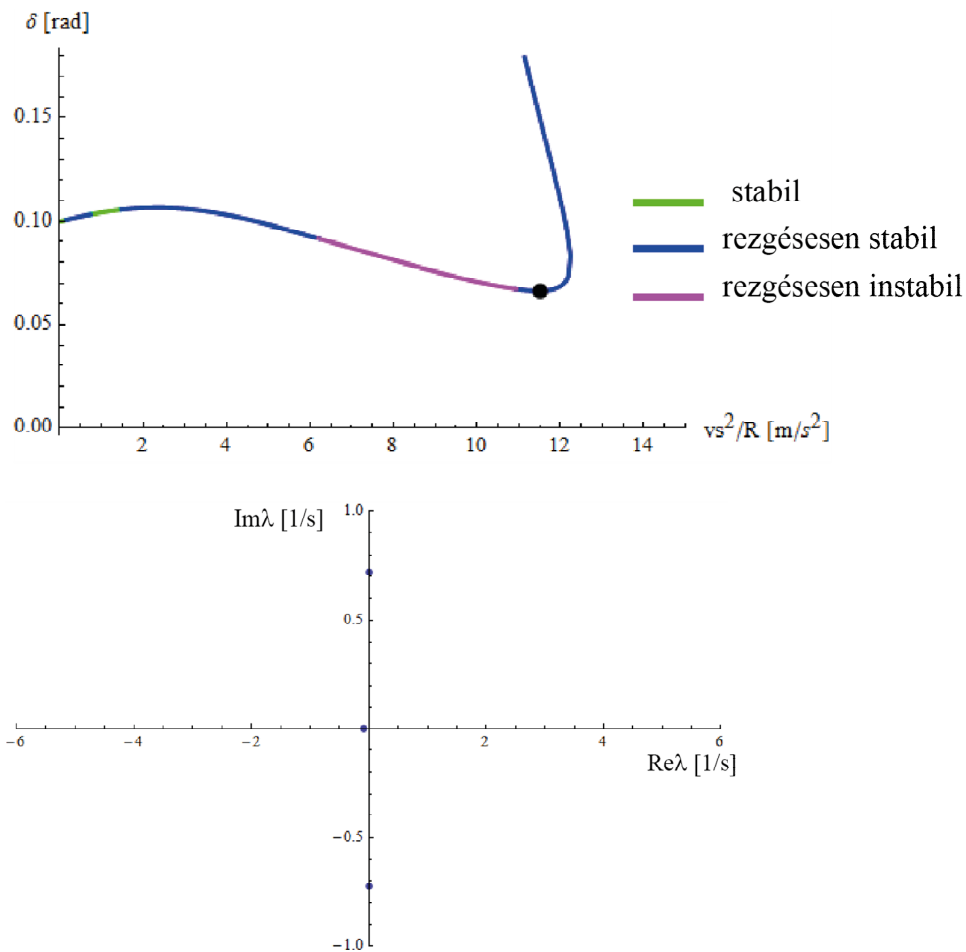
34. ábra

7.9. Rezgésesen stabil tartomány

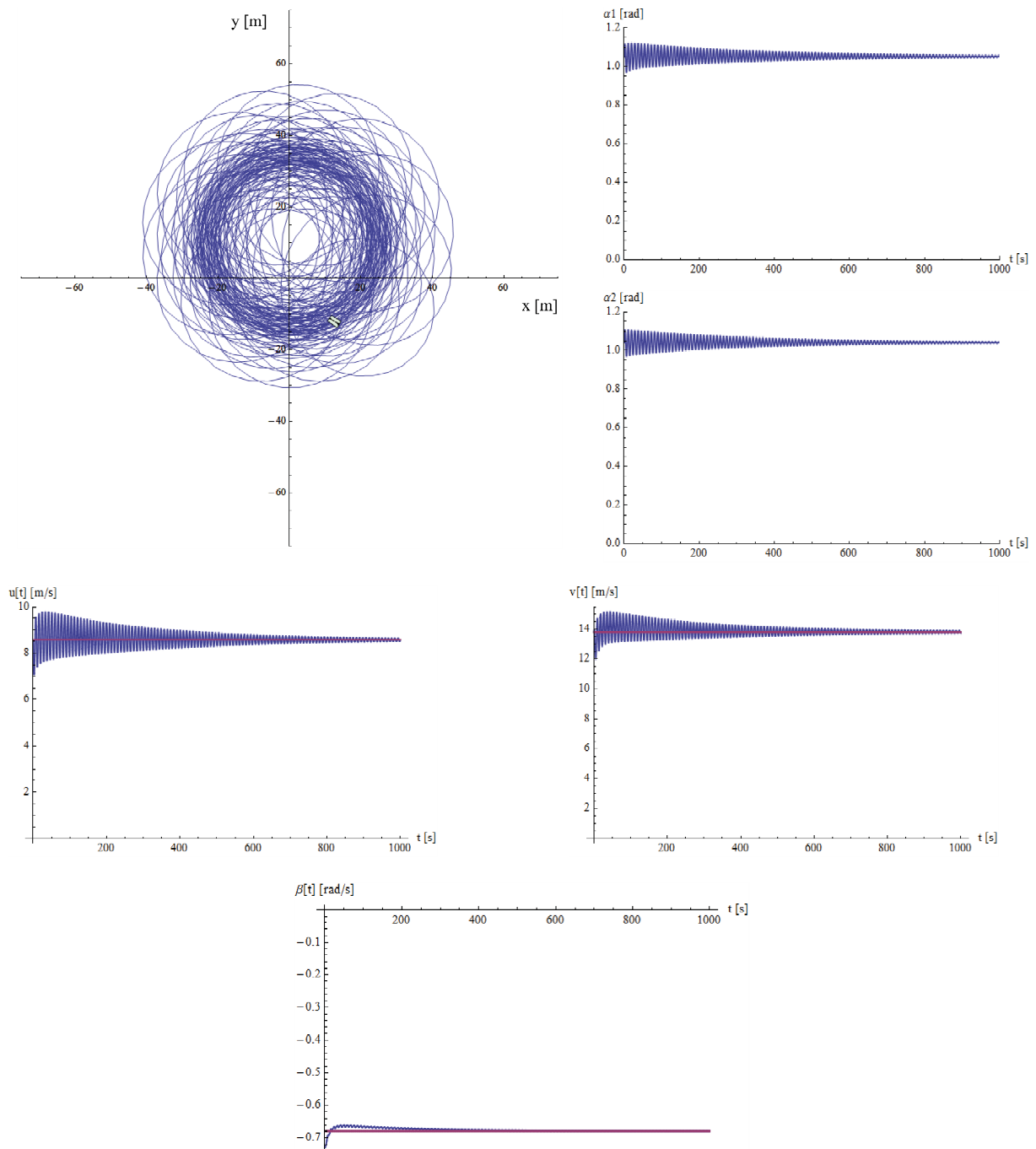
Adatok:

$$\begin{aligned}
 v_s &= 16,979 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \delta &= 0,0663 \text{ rad}, \\
 F_{x2} &= 11972 \text{ N}, \\
 u_0 &= 8,501 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 v_0 &= 13,817 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\
 \beta_0 &= -0,6793 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \alpha_1 &= 1,053 \text{ rad}, \\
 \alpha_2 &= 1,042 \text{ rad}, \\
 t_{sz} &= 1000 \text{ s},
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

ahol, v_s az adott ponthoz tartozó súlyponti sebesség, δ a kormányzási szög, F_{x2} a kocsi irányú tolóerő u_0, v_0, β_0 az adott ponthoz tartozó egyensúlyi pszeudo sebességek, α_1 és α_2 az állandósult mozgáshoz tartozó csúszási szögek, míg t_{sz} a szimuláció futtatási időtartama.



35. ábra



36. ábra

7.10. Következtetések

Jól látható, hogy a numerikus szimuláció visszaadja a stabilitásvizsgálat eredményeit, megállapítható, hogy a jármű a stabilitásvizsgálat szerint stabil pontokhoz tartozó kezdeti feltételektől kis kitéréssel indítva vissza fog térni az állandó sugarú körpályán való mozgáshoz, míg az instabil pontokhoz tartozó sebességekről indítva, zavarás hatására le fog térni róla.

Jól nyomon követhető, hogy egyre nagyobb sebességek esetén az egyes megoldásokhoz tartozó (6.9) Jacobi-mátrix sajátértékeinek valós részének abszolút értéke, amely a rezgések csillapódásának mértékét mutatja meg, egyre inkább csökken. Ennek

megfelelően, a görbe első szakaszán ahol létre is jöhet rezgés, az túlcillapított jellegű, így lényegében a rendszer viselkedése itt is hasonló a statikusan stabil tartományokhoz. Viszont nagyobb sebességtartományokban, ahogy egyre kisebb a csillapítás, egyre lassabban tér vissza a rendszer a megzavarás után az egyensúlyi állapotába.

Megállapítható, hogy rezgésesen instabil tartományban a rendszer az egyensúlyi állapotából kitérítve egyre növekvő amplitúdójú rezgéssel veszít stabilitást, ugyanakkor egy bizonyos pont után rááll egy ún. stabil határciklusra, azaz állandósult amplitúdóval rezeg az instabil stacionárius mozgás körül.

8. Összefoglalás

Összességében a kapott eredmények alapján elmondható, hogy a vizsgált lineáris esetben semleges viselkedésű járműmodell alul vagy felülkormányzottsága jelentősen függ a jármű sebességétől, illetve a kerekek csúszási szögének nagyságától. Megállapítható, hogy állandó sugarú körpályán kis sebességek, illetve kis csúszási szögek esetén a jármű stabilan tud kanyarodni, instabilitás illetve tartós lengés, csak olyan nagy csúszási szögekkel járó manőverek esetén jöhet létre, amelyek egy hétköznapi használatban lévő személygépjárműnél nem vagy csak ritkán lépnek fel.

A témával kapcsolatban további vizsgálatok tárgya lehet, a megoldásgörbe követésének folytatása, olyan sebességtartományokban, ahol az egyik, vagy akár mindkét kereke megcsúszik a járműnek, valamint az ott létrejövő állandósult mozgás stabilitásának megállapítása. Ezen kívül még érdekes lenne megvizsgálni különböző jármű paraméterek, illetve kerékparaméterek (a súlypont helyének megváltoztatása, más gumimerevség, illetve az útfelület és a kerék közötti súrlódási együttható megváltozásának) hatását a jármű viselkedésére, valamint a kanyarstabilitásra.

Az egyszerű bicikli modellről egy érdekes továbblépési lehetőség, egy személygépjárműből és egy utánfutóból álló rendszer mozgásának, kanyarodás közbeni viselkedésének vizsgálata, (amelynek például napjainkban lakókocsik tervezésénél, illetve terhelhetőségének meghatározásánál van fontos szerepe). Hasonló továbbfejlesztési lehetőséget rejt magában egy összetettebb kerékmodell implementálása is.

9. Irodalomjegyzék:

- [1] Pacejka, H.B., Tyre and Vehicle Dynamics, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
- [2] Krauskopf, B., Otinga, H. M., Galán-Vioque, J., Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems, Springer, Bristol, 2007.
- [3] Coetzee, E., Nonlinear Aircraft Ground Dynamics, Airbus Technical Report, March 2006.

Köszönetnyilvánítás:

A munka szakmai tartalma kapcsolódik a "Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen" c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az ÚMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatja.