

Az Euler-féle φ -függvény általánosítása többváltozós polinomok egy rendszerére vonatkozóan

Szerző: Csizmazia Norbert
Pécsi Tudományegyetem TTK

Témavezető: Dr. Tóth László egyetemi tanár

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Általános eredmények	3
3. Speciális esetek	4
3.1. A $\varphi_k(n)$ függvény	5
3.2. A $\varphi'_k(n)$ függvény	5
3.3. A $\varphi_{k,\mathbf{a}}(n)$ függvény	6
3.4. A $\phi_{k,\mathbf{a}}(n)$ függvény	6
3.5. A $\phi'_k(n)$ függvény	7
4. További lemmák és a bizonyítások	8
Hivatkozások	17

1. Bevezetés

Definíció szerint az Euler-féle $\varphi(n)$ függvény azoknak az $x \in \{1, \dots, n\}$ számoknak a száma, amelyekre $\text{luko}(x, n) = 1$. Jólismert képlet szerint minden $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ esetén

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ahol a szorzat az n szám p prímosztóira vonatkozik.

A $J_k(n)$ -nel jelölt k -adrendű Jordan-függvény, ahol $k \in \mathbb{N}$, az Euler-függvény egy általánosítása és ez úgy definiált, mint azoknak az $(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ rendezett szám k -asoknak a száma, amelyekre $\text{lko}(x_1, \dots, x_k, n) = 1$. Itt minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$$

és $J_1(n) = \varphi(n)$.

Az Euler-féle φ -függvénynek sok más általánosítása ismert. Lásd pl. [13]. Legyen $f(x)$ egy egész együtthatós polinom. Menon [10] vezette be 1967-ben a $\phi_f(n)$ függvényt, amely megadja azoknak az $x \in \{1, \dots, n\}$ számoknak a számát, amelyekre $\text{lko}(f(x), n) = 1$. Minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\phi_f(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{N_f(p)}{p}\right),$$

ahol $N_f(p)$ jelöli az $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldásainak a számát (p prím). Ha $f(x) = x$, akkor visszkapjuk az Euler függvényt.

A következő szerzők által, a Menon [10] cikktől függetlenül (jóval annak megjelenése előtt, illetve után) bevezett függvények mind speciális esetei a Menon-függvénynek a megjelölt polinomokra nézve:

- Alder [1] (1958), Nagell [11] (1923): $f(x) = x(m - x)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- Garcia, Ligh [7] (1983): $f(x) = s + (x - 1)d$, ahol s és d relatív prím egészek,
- Schemmel [12] (1869): $f(x) = x(x - 1) \cdots (x - m + 1)$, $m \in \mathbb{N}$.

Ugyanakkor a Menon-függvény nem tartalmazza speciális esetként a k -adrendű Jordan-függvényt. Legyen $F = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ egész együtthatós polinomok egy rendszere. 1971-ben Stevens [14] definiálta és vizsgálta, a Menon [10] cikkre való hivatkozás nélkül, a $\phi_F(n)$ függvényt, amely azoknak az $(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ rendezett szám k -asoknak a száma, amelyekre $\text{lko}(f_1(x_1), \dots, f_k(x_k), n) = 1$. Ha $f_1(x) = \dots = f_k(x) = x$, akkor visszkapjuk a $J_k(n)$ függvényt. Több más speciális eset is tanulmányozható. Lásd még Chidambaraswamy [4, 5] cikkeit.

Tekintsük most a következő k -dimenziós ($k \in \mathbb{N}$) általánosított Euler-függvényt:

$$\phi_k(n) = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k : \text{lko}(x_1^2 + \dots + x_k^2, n) = 1\}, \quad (1.1)$$

amelyet Calderón, Grau, Oller-Marcén és Tóth [3] vizsgált 2015-ben.

Egy további hasonló függvény a $\varphi_k(n)$ ($k \in \mathbb{N}$), ahol

$$\varphi_k(n) = \#\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k : \text{lko}(x_1 \cdots x_k, n) = \text{lko}(x_1 + \dots + x_k, n) = 1\}, \quad (1.2)$$

lásd Tóth [17] (2022).

Ha $k = 1$, akkor $\phi_1(n) = \varphi_1(n) = \varphi(n)$ az Euler-függvény. De figyeljük meg, hogy a $\phi_k(n)$ és $\varphi_k(n)$ függvényeket nem tartalmazza az előbbi Stevens-féle általánosítás.

Ebben a dolgozatban egy új, az irodalomban még nem vizsgált általánosított Euler-függvényt definiálunk a következőképpen. Legyen $F = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k))$ egész együtthatós k -változós (nemkonstans) polinomok egy adott rendszere, ahol $k, m \in \mathbb{N}$. Jelölje $\Phi_F(n)$ azoknak az $(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ rendezett szám k -asoknak a számát, amelyekre

$$\text{lko}(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k), n) = 1.$$

Innen visszkapjuk a fentiekben szereplő függvények mindegyikét. Az (1.1) és (1.2) képletekkel definiált $\phi_k(n)$ és $\varphi_k(n)$ függvények az $m = 1$ és $f_1(x_1, \dots, x_k) = x_1^2 + \dots + x_k^2$, illetve $f_1(x_1, \dots, x_k) = x_1 \cdots x_k(x_1 + \dots + x_k)$ polinomok esetén adódnak.

A dolgozatban explicit képletet adunk $\Phi_F(n)$ kiszámítására és levezetünk egy maradéktagos aszimptotikus formulát a $\sum_{n \leq x} \Phi_F(n)$ összegre minden, egy enyhe megszorító feltételnek eleget tevő F polinomrendszer esetén. Vizsgáljuk a fenti speciális eseteket és más olyan speciális polinomrendszerekhez tartozó függvényeket, amelyek nem ismertek az irodalomban. Ugyanakkor rövid, új bizonyításokat adunk az (1.1) és (1.2) képletekkel definiált $\phi_k(n)$ és $\varphi_k(n)$ függvényekre vonatkozó ismert explicit formulákra. A bizonyítások során szükségünk van p prímmodulusú kongruenciák, illetve kongruenciarendszerek megoldásszámának a meghatározására, amelyet a p -edik komplex egységgyökök hatványösszegeinek vizsgálatával végzünk el. Kvadrátikus Gauss-összegek is szerepet kapnak.

2. Általános eredmények

Jelölje $N_F(n)$ az $f_1(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{n}, \dots, f_m(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{n}$ kongruencia-rendszer $(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ megoldásainak számát. Az $n \mapsto N_F(n)$ függvény multiplikatív, lásd a 4.1 Lemmát. Jelölje μ a Möbius-függvényt.

2.1. Tétel. *Minden F polinomrendszer esetén az $n \mapsto \Phi_F(n)$ függvény multiplikatív és minden $n \in \mathbb{N}$ számra*

$$\Phi_F(n) = n^k \sum_{d|n} \frac{\mu(d) N_F(d)}{d^k} \quad (2.1)$$

$$= n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{N_F(p)}{p^k} \right). \quad (2.2)$$

Itt (2.2) azt mutatja, hogy speciális polinomrendszerek esetén elegendő az $N_F(p)$ értékek ismerete a p prímekre ahhoz, hogy explicit képletet tudjunk adni a megfelelő Euler-függvényekre.

Megjegyezzük, hogy vizsgálható a következő még általánosabb függvény is:

$$P_{F,h}(n) = \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k} h(\text{lko}(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k), n)),$$

ahol $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tetszőleges függvény. Ha $h(1) = 1$, $h(n) = 0$, ahol $n > 1$, akkor visszakapjuk a $\Phi_F(n)$ függvényt. Ha $k = m = 1$, $f_1(x_1) = x_1$ és $h(n) = n$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor a

$$P(n) = \sum_{x=1}^n \text{luko}(x, n)$$

luko-összegfüggvény (Pillai-függvény) adódik, lásd a [15] összefoglaló cikket.

2.2. Tétel. *Legyen F tetszőleges polinomrendszer és h tetszőleges függvény. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra*

$$P_{F,h}(n) = n^k \sum_{d|n} \frac{(\mu * h)(d) N_F(d)}{d^k}, \quad (2.3)$$

ahol $*$ a konvolúciót jelöli. Ha h multiplikatív függvény, akkor az $n \mapsto P_{F,h}(n)$ függvény is multiplikatív.

Ebben a dolgozatban nem foglalkozunk a $P_{F,h}(n)$ függvény további tulajdonságaival és speciális eseteivel.

A $\Phi_F(n)$ Euler-típusú függvény aszimptotikus viselkedésére vonatkozik a következő tétel.

2.3. Tétel. *Ha az F polinomrendszer olyan, hogy minden $1 \leq i \leq m$ esetén az $f_i(x_1, \dots, x_k)$ polinom együtthatói relatív prímek, akkor*

$$\sum_{n \leq x} \Phi_F(n) = x^{k+1} \prod_p \left(1 - \frac{N_F(p)}{p^{k+1}} \right) + O(x^{k+1-1/t+\varepsilon}), \quad (2.4)$$

ahol a szorzat az összes p prímre vonatkozik, t az $f_i(x_1, \dots, x_k)$ ($1 \leq i \leq m$) polinomok fokszámai közül a legkisebb és $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Speciálisan választott F polinomrendszerek esetén az előbbi maradéktag javítható. Például, a [3] dolgozatban a szerzők igazolták, hogy az (1.1) képlettel definiált $\phi_k(n)$ függvényre a megfelelő aszimptotikus képlet maradéktagja $O(x^k \log x)$, ha k páros és $O(x^k (\log x)^{2/3} (\log \log x)^{4/3})$, ha k páratlan. Ez utóbbi a $\varphi(n)$ Euler-függvényre vonatkozó ismert Walfisz-féle maradéktag következménye. Ugyanakkor a [17] dolgozat szerint a (1.2) képlettel adott $\varphi_k(n)$ függvényre a maradéktag $O(x^k (\log x)^{k+1})$ minden $k \geq 2$ esetén.

A $\phi_k(n)$ függvény további aszimptotikus tulajdonságait Banerjee és szerzőtársai vizsgálták a [2] (2024) cikkben.

3. Speciális esetek

A továbbiakban a $\Phi_F(n)$ függvény következő speciális eseteit vizsgáljuk:

3.1. A $\varphi_k(n)$ függvény

Tekintsük a (1.2) képlettel definiált $\varphi_k(n)$ függvényt. Ez az általános $\Phi_F(n)$ függvénynek az $m = 1$ és $f_1(x_1, \dots, x_k) = x_1 \cdots x_k(x_1 + \cdots + x_k)$ polinomra vonatkozó esete. Szükségünk van a következő lemmára.

3.1. Lemma. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és p prím. Az*

$$x_1 \cdots x_k(x_1 + \cdots + x_k) \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruencia megoldásainak a száma

$$N_k(p) = p^k - \frac{1}{p} \left((p-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(p-1) \right). \quad (3.1)$$

Ennek alkalmazásával adódik a következő formula.

3.2. Tétel. *Minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\begin{aligned} \varphi_k(n) &= n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\left(1 - \frac{1}{p} \right)^k - \frac{(-1)^k}{p^k} \right) \\ &= n^{k-1} \varphi(n) \prod_{p|n} \left(\left(1 - \frac{1}{p} \right)^k - \frac{(-1)^k}{p^k} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

A (3.2) képletet a [17] dolgozatban a szerző más módszerrel, k -szerinti indukció alkalmazásával bizonyította.

3.2. A $\varphi'_k(n)$ függvény

Most tekintsük az $m = 2$ és $f_1(x_1, \dots, x_k) = x_1 \cdots x_k$, $f_2(x_1, \dots, x_2) = x_1 + \cdots + x_k$ esetet, amely a következő általánosított Euler-függvényre vezet:

$$\varphi'_k(n) = \#\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k : \text{lko}(x_1 \cdots x_k, x_1 + \cdots + x_k, n) = 1\}. \quad (3.3)$$

Ennek vizsgálata nem szerepel az irodalomban.

3.3. Lemma. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és p prím. Az*

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_k &\equiv 0 \pmod{p} \\ x_1 + \cdots + x_k &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

kongruenciarendszer megoldásainak a száma

$$N'_k(p) = p^{k-1} - \frac{1}{p} \left((p-1)^k + (-1)^k(p-1) \right).$$

A következő formulát kapjuk:

3.4. Tétel. Minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi'_k(n) &= n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k-1} + \frac{(-1)^k}{p^k}\right) \\ &= n^{k-1} \varphi(n) \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k-1} + \frac{(-1)^k}{p^k}\right).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Megjegyzés. Itt $\varphi'_1(n) = \varphi(n)$, $\varphi'_2(n) = J_2(n)$ a másodrendű Jordan-függvény és

$$\varphi'_3(n) = n^3 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{p}\right).$$

3.3. A $\varphi_{k,\mathbf{a}}(n)$ függvény

Legyen $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ és

$$\varphi_{k,\mathbf{a}}(n) = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k : \text{lko}(a_1x_1 + \dots + a_kx_k, n) = 1\},$$

amely függvény az $m = 1$ eset és az $f_1(x_1, \dots, x_k) = a_1x_1 + \dots + a_kx_k$ polinom választásával adódik.

3.5. Lemma. Az $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldásainak száma p^k , ha $p \mid \text{lko}(a_1, \dots, a_k)$, egyébként pedig p^{k-1} .

3.6. Tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ és $n \in \mathbb{N}$. Akkor

$$\varphi_{k,\mathbf{a}}(n) = n^k \prod_{\substack{p|n \\ p \nmid \text{lko}(a_1, \dots, a_k)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).\tag{3.5}$$

Következik, hogy ha $\text{lko}(a_1, \dots, a_k) = 1$, akkor $\varphi_{k,\mathbf{a}}(n) = n^{k-1} \varphi(n)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

3.4. A $\phi_{k,\mathbf{a}}(n)$ függvény

Legyen most $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ és

$$\phi_{k,\mathbf{a}}(n) = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k : \text{lko}(a_1x_1^2 + \dots + a_kx_k^2, n) = 1\},$$

amely általánosabb, mint a Bevezetésben megadott $\phi_k(n)$ függvény. Ez utóbbi az $a_1 = \dots = a_k = 1$ választással adódik.

Az $a_1x_1^2 + \dots + a_kx_k^2 \equiv 0 \pmod{n}$ négyzetes kongruencia megoldásszámára vonatkozó formulák ismertek az irodalomban. Lásd például a [16] összefoglaló cikket. A következőkben nem hivatkozunk ezekre a formulákra, hanem a 3.1 és 3.5 Lemmák bizonyításában bemutított polinomos módszerrel közvetlenül meghatározzuk a kongruencia megoldásszámát prím modulusra.

3.7. Lemma. *Legyen $\text{lnko}(a_1 \dots a_k, p) = 1$. Ha p páratlan prímszám, akkor az $a_1x_1^2 + \dots + a_kx_k^2 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldásszáma*

$$p^{k-1} \left(1 + \frac{p-1}{p^{k/2}} \left(\frac{(-1)^{k/2} a_1 \dots a_k}{p} \right) \right), \quad (3.6)$$

ha k páros, ahol $\left(\frac{a}{p}\right)$ a Legendre-szimbólum, és p^{k-1} , ha k páratlan. Ha $p = 2$, akkor a megoldásszám 2^{k-1} .

3.8. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ és $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\text{lnko}(a_1 \dots a_k, n) = 1$. Ha k páratlan, akkor*

$$\phi_{k,\mathbf{a}}(n) = n^{k-1} \varphi(n), \quad (3.7)$$

ha k páros, akkor

$$\phi_{k,\mathbf{a}}(n) = n^{k-1} \varphi(n) \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \left(1 - \frac{1}{p^{k/2}} (-1)^{k(p-1)/4} \left(\frac{a_1}{p} \right) \dots \left(\frac{a_k}{p} \right) \right), \quad (3.8)$$

ahol $\left(\frac{a_i}{p}\right)$ a Legendre-szimbólumot jelöli ($1 \leq i \leq k$).

Ha $a_1 = \dots = a_k = 1$, akkor innen visszkapjuk [3, Th. 1] képletét, amelynek ott más módszerrel való bizonyítása szerepel.

3.5. A $\phi'_k(n)$ függvény

Legyen $k \in \mathbb{N}$, és

$$\phi'_k(n) = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \{1, \dots, n\}^k : \text{lnko}(x_1 \dots x_k, x_1^2 + \dots + x_k^2, n) = 1\},$$

amely nem szerepel az irodalomban.

3.9. Lemma. *Az*

$$\begin{cases} x_1 \dots x_k \equiv 0 \pmod{p} \\ x_1^2 + \dots + x_k^2 \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

kongruenciarendszer megoldásszáma az alábbi táblázatokban látható:

	$p \equiv 1 \pmod{4}$
k páros	$\frac{1}{p} (p^k - (p-1)^k + \frac{p-1}{2} (2\sqrt{p}^k - (\sqrt{p}+1)^k - (\sqrt{p}-1)^k))$
k páratlan	$\frac{1}{p} (p^k - (p-1)^k + \frac{p-1}{2} ((\sqrt{p}+1)^k - (\sqrt{p}-1)^k))$

	$p \equiv -1 \pmod{4}$
k páratlan	$\frac{1}{p} \left(p^k - (p-1) \left((p-1)^{k-1} + \sum_{0 \leq n \leq k}^{n \text{ páros}} \binom{k}{n} (-1)^{\frac{k-n}{2}} \sqrt{p}^n \right) \right)$
k páros	$\frac{1}{p} \left(p^k + (p-1) \left(\sqrt{p}^k - (-1)^{\frac{k}{2}} (p-1)^{k-1} - \sum_{0 \leq n \leq k}^{n \text{ páros}} \binom{k}{n} (-1)^{\frac{k-n}{2}} \sqrt{p}^n \right) \right)$

Innen, az előző esetekhez hasonlóan, közvetlen formula adható $\phi'_k(n)$ kiszámítására a (2.2) képletet alkalmazva.

4. További lemmák és a bizonyítások

4.1. Lemma. Az $n \mapsto N_F(n)$ függvény multiplikatív.

A 4.1 Lemma bizonyítása. Legyenek a és b tetszőleges pozitív egészek, amelyekre $\text{lko}(a, b) = 1$. Vegyük a következő kongruenciarendszereket:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{a} \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{a} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{b} \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{b} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{ab} \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{ab}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Tegyük fel, hogy $(x_1, \dots, x_k)$ megoldása (4.1)-nek és $(x'_1, \dots, x'_k)$ megoldása (4.2)-nek. Ezeknek a megoldásoknak a száma rendre $N_F(a)$ és $N_F(b)$. A Kínai maradéktétel szerint bármely $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén az

$$\begin{cases} x \equiv x_i \pmod{a} \\ x \equiv x'_i \pmod{b} \end{cases}$$

kongruenciarendszernek pontosan egy $x = x_i'' \in \{1, \dots, ab\}$ megoldása létezik. Az így kapott $(x_1'', \dots, x_k'')$ szám k -asok száma tehát $N_F(a)N_F(b)$. Mivel egy polinom megőrzi a kongruenciát, bármely i -re $f_i(x_1'', \dots, x_k'') \equiv f_i(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{a}$ és $f_i(x_1'', \dots, x_k'') \equiv f_i(x_1', \dots, x_k') \equiv 0 \pmod{b}$. Ebből következik, hogy $f_i(x_1'', \dots, x_k'') \equiv 0 \pmod{ab}$, vagyis (4.3)-nak előállítottuk $N_F(a)N_F(b)$ számú megoldását. Már csak azt kell belátnunk, hogy ez az összes megoldás. Ez rögtön következik abból, hogy ha $(x_1, \dots, x_k)$ megoldása (4.3)-nak, akkor megoldása (4.1)-nek és (4.2)-nek. Tehát $N_F(ab) = N_F(a)N_F(b)$. Ezt akartuk belátni. $\square$

A 2.1 Tétel bizonyítása. Használjuk a Möbius-függvény egyik alaptulajdonságát, amely szerint

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1, \\ 0, & \text{ha } n > 1. \end{cases}$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} \Phi_F(n) &= \sum_{\substack{1 \leq x_1, \dots, x_k \leq n \\ \text{lko}(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k), n) = 1}} 1 \\ &= \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_k \leq n} \sum_{d | \text{lko}(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k), n)} \mu(d) \\ &= \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_k \leq n} \sum_{\substack{d | n \\ d | f_i(x_1, \dots, x_k), 1 \leq i \leq m}} \mu(d) \\ &= \sum_{d | n} \mu(d) \sum_{\substack{1 \leq x_1, \dots, x_k \leq n \\ f_i(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{d}, 1 \leq i \leq m}} 1 \\ &= \sum_{d | n} \mu(d) N_F(d) \left(\frac{n}{d} \right)^k, \end{aligned}$$

amely a (2.1) formulát adja. Itt az utolsó lépésben felhasználtuk azt, hogy ha $d | n$, akkor az $f_i(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{d}$ ($1 \leq i \leq m$) kongruenciarendszer megoldásainak száma az $\{1, \dots, n\}^k$ halmazon éppen $N_F(d) \left(\frac{n}{d} \right)^k$.

Mivel az $N_F(n)$ függvény multiplikatív, lásd a 4.1 Lemmát, következik, hogy a $\Phi_F(n)$ függvény is multiplikatív, mint multiplikatív függvények konvolúciója. Prímhatványokra

$$\Phi_F(p^\alpha) = p^\alpha \sum_{d | p^\alpha} \frac{\mu(d) N_F(d)}{d^k} = p^{\alpha k} - N_F(p) p^{(\alpha-1)k} = p^{\alpha k} \left(1 - \frac{N_F(p)}{p^k} \right),$$

és ez azonnal a (2.2) azonosságra vezet. $\square$

A 2.2 Tétel bizonyítása. Azt használjuk, hogy $h(n) = \sum_{d|n} (\mu * h)(d)$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. A 2.1 Tétel bizonyításához hasonlóan,

$$\begin{aligned}
P_{F,h}(n) &= \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_k \leq n} \sum_{d | \text{lko}(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k), n)} (\mu * h)(d) \\
&= \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_k \leq n} \sum_{\substack{d|n \\ d|f_i(x_1, \dots, x_k), 1 \leq i \leq m}} (\mu * h)(d) \\
&= \sum_{d|n} (\mu * h)(d) \sum_{\substack{1 \leq x_1, \dots, x_k \leq n \\ f_i(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{d}, 1 \leq i \leq m}} 1 \\
&= \sum_{d|n} (\mu * h)(d) N_F(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k,
\end{aligned}$$

ami a (2.3) formulát adja.

Ha h multiplikatív függvény, akkor következik, hogy a $P_{F,h}(n)$ függvény is multiplikatív, mint multiplikatív függvények konvolúciója. $\square$

Az aszimptotikus képlet bizonyítása során a maradéktagok becsléséhez szükségünk lesz a következő lemmákra.

4.2. Lemma. ([9, Lemma 2.3]) *Legyen $f(x_1, \dots, x_k)$ olyan k -változós t -edfokú ($k, t \geq 1$) egész együtthatós polinom, amelynek nem minden együtthatója osztható p -vel. Akkor az*

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

prímhatvány modulusú kongruencia $N_f(p^\alpha)$ megoldásszámára

$$N_f(p^\alpha) \leq C(\alpha + 1)^{k-1} \cdot p^{\alpha(k-1/t)},$$

ahol $C = C(k, t)$ egy csak k -től és t -től függő konstans.

4.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy az F polinomrendszerre az $f_i(x_1, \dots, x_k)$ polinom együtthatói relatív prímek minden $1 \leq i \leq m$ esetén. Legyen t az $f_i(x_1, \dots, x_k)$ polinomok fokszámai közül a legkisebb. Akkor*

$$N_F(n) = O(n^{k-1/t+\varepsilon}),$$

ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Bizonyítás. Az $f_i(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ ($1 \leq i \leq m$) kongruenciarendszer megoldásainak $N_F(p^\alpha)$ száma kisebb vagy egyenlő, mint bármely $f_i(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ kongruencia megoldásszáma. Válasszuk azt a kongruenciát, amelyre az $f_i(x_1, \dots, x_k)$ polinom foka a legkisebb. Ez fogja a legjobb becslést adni a 4.2 Lemma alapján. Kapjuk, hogy

$$N_F(p^\alpha) \leq C(\alpha + 1)^{k-1} \cdot p^{\alpha(k-1/t)},$$

és használva N_F multiplikativitását,

$$N_F(n) \leq C^{\omega(n)} \tau(n)^{k-1} n^{k-1/t},$$

ahol $\omega(n)$ az n különböző prímosztóinak száma és $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Használva az ismert $\tau(n) = O(n^\varepsilon)$ becslést, lásd pl. [6, 6.4.5. Tétel], [8, Th. 315], és az ebből adódó $C^{\omega(n)} = (2^{\omega(n)})^{\log_2 C} \leq \tau(n)^{\log_2 C} = O(n^\varepsilon)$ becslést kapjuk, hogy

$$N_F(n) = O(n^{k-1/t+\varepsilon}),$$

ahol k rögzített és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. □

4.4. Lemma. *Fennállnak a következő jólismert becslések:*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} n^s &= \frac{x^{s+1}}{s+1} + O(x^s), \quad s \geq 0, \\ \sum_{n \leq x} n^{-s} &= O(x^{1-s}), \quad 0 < s < 1, \\ \sum_{n > x} n^{-s} &= O(x^{1-s}), \quad s > 1. \end{aligned}$$

A 2.3 Tétel bizonyítása. A (2.1) formula és a 4.4 Lemma első becslése alapján

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi_F(n) &= \sum_{de=n \leq x} \mu(d) N_F(d) e^k = \sum_{d \leq x} \mu(d) N_F(d) \sum_{e \leq x/d} e^k \\ &= \sum_{d \leq x} \mu(d) N_F(d) \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{x}{d} \right)^{k+1} + O \left(\left(\frac{x}{d} \right)^k \right) \right) \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d) N_F(d)}{d^{k+1}} + O \left(x^k \sum_{d \leq x} \frac{N_F(d)}{d^k} \right) \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) N_F(d)}{d^{k+1}} + O \left(x^{k+1} \sum_{d > x} \frac{N_F(d)}{d^{k+1}} \right) + O \left(x^k \sum_{d \leq x} \frac{N_F(d)}{d^k} \right), \end{aligned}$$

ahol a fellépő sor abszolút konvergencia, mert a 4.3 Lemma szerint

$$\frac{|\mu(d)| N_F(d)}{d^{k+1}} \ll \frac{1}{d^{1+1/t-\varepsilon}}$$

és válasszuk meg ε -t úgy, hogy $\varepsilon < 1/t$ legyen. Itt

$$C_F := \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) N_F(d)}{d^{k+1}} = \prod_p \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\mu(p^a) N_F(p^a)}{(p^a)^{k+1}} = \prod_p \left(1 - \frac{N_F(p)}{p^{k+1}} \right),$$

Euler-szorzatként írva, kihasználva az $N_F(n)$ függvény multiplikativitását. Továbbá, a 4.4 Lemmát is használva,

$$x^k \sum_{d \leq x} \frac{N_F(d)}{d^k} \ll x^k \sum_{d \leq x} \frac{d^{k-1/t+\varepsilon}}{d^k} = x^k \sum_{d \leq x} d^{-1/t+\varepsilon} \ll x^{k+1-1/t+\varepsilon},$$

$$x^{k+1} \sum_{d > x} \frac{N_F(d)}{d^{k+1}} \ll x^{k+1} \sum_{d > x} \frac{d^{k-1/t+\varepsilon}}{d^{k+1}} = x^{k+1} \sum_{d > x} d^{1-1/t+\varepsilon} \ll x^{k+1-1/t+\varepsilon},$$

és ez lesz a maradéktag. $\square$

A 3.1 Lemma bizonyítása. Először meghatározzuk azoknak a megoldásoknak a számát, melyekben az x_i változók közül legalább az egyiknek az értéke p . Az ilyen megoldások számát megkapjuk, ha az összes lehetséges esetből kivonjuk azokat, melyekben egyik x_i sem p , így az eredmény

$$p^k - (p-1)^k.$$

Most számoljuk össze a többi megoldást, ahol $x_i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Ebben az esetben a kongruencia egyenértékű az $x_1 + \dots + x_k \equiv 0 \pmod{p}$ kongruenciával. Ennek megoldásszámának meghatározásához minden x_i változóhoz rendeljük hozzá az $x + x^2 + \dots + x^{p-1}$ polinomot, melyben a foksámok x_i lehetséges értékei. Ekkor a megoldások száma az

$$F(x) = (x + x^2 + \dots + x^{p-1})^k$$

polinom kifejtett alakjában a p -vel osztható foksámú tagok együtthatóinak összege. Ezt pedig a következő módszerrel határozhatjuk meg: Legyenek $\alpha_j := e^{\frac{2\pi i j}{p}}$, $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ a p -edik komplex egységgyökök. A keresett együtthatók összege a $\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} F(\alpha_j)$ számtani közép lesz. Ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} F(\alpha_j) &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{k(p-1)} a_m (\alpha_j)^m = \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{k(p-1)} a_m \left(\sum_{j=0}^{p-1} (\alpha_j)^m \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\sum_{\substack{m=0 \\ p|m}}^{k(p-1)} a_m \left(\sum_{j=0}^{p-1} (\alpha_j)^m \right) + \sum_{\substack{m=0 \\ p \nmid m}}^{k(p-1)} a_m \left(\sum_{j=0}^{p-1} (\alpha_j)^m \right) \right) = \frac{1}{p} \sum_{\substack{m=0 \\ p|m}}^{k(p-1)} a_m p = \sum_{\substack{m=0 \\ p|m}}^{k(p-1)} a_m \end{aligned} \quad (4.4)$$

Itt felhasználtuk a komplex egységgyököknek azt a jól ismert tulajdonságát, miszerint

$$\sum_{j=0}^{p-1} (\alpha_j)^m = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \nmid m \\ p, & \text{ha } p \mid m. \end{cases}$$

A mértani sor összegképletét felhasználva kapjuk, hogy

$$F(\alpha_j) = \begin{cases} (p-1)^k, & \text{ha } j = 0 \\ \left(\frac{\alpha_j^p - \alpha_j}{\alpha_j - 1}\right)^k = (-1)^k & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezeket behelyettesítve az összegbe:

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} F(\alpha_j) = \frac{1}{p} ((p-1)^k + (p-1)(-1)^k).$$

A kétféle megoldások számát összeadva éppen az állításban szereplő formulát kapjuk. $\square$

A 3.2 Tétel bizonyítása. A 3.1 Lemma alapján

$$1 - \frac{N_k(p)}{p^k} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k - \frac{(-1)^k}{p^k} \right),$$

és a (2.2) képletre tekintettel rögtön adódik (3.2). $\square$

A 3.3 Lemma bizonyítása. A kongruenciarendszer megoldásainak száma pontosan annyi, mint az $x_1 + \dots + x_k \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia azon megoldásainak száma, amelyekben legalább az egyik változó p -vel egyenlő. Ennek meghatározásához a kongruencia összes megoldásából vonjuk ki a "rosszakat", amelyekben a változók lehetséges értékei $1, \dots, p-1$. Az összes megoldás száma p^{k-1} , ugyanis az $x_1, \dots, x_{k-1}$ értékeket tetszőlegesen megválaszthatjuk az $1, \dots, p$ halmazból, de ezzel x_k értéke egyértelműen meghatározott. A "rossz" megoldások számát az előző lemma bizonyításakor már meghatároztuk:

$$\frac{1}{p} ((p-1)^k + (-1)^k(p-1))$$

A kettő különbségét véve éppen az állításban szereplő formulát kapjuk. $\square$

A 3.4 Tétel bizonyítása. Rögtön adódik a 3.3 Lemma alapján, a (2.2) képletet alkalmazva. $\square$

A 3.5 Lemma bizonyítása. Legyen $x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Minden $a_i x_i$ számhoz rendeljük hozzá az

$$F_i(x) = 1 + x^{a_i} + x^{2a_i} + \dots + x^{(p-1)a_i}$$

polinomot, amely $a_i x_i$ lehetséges értékeit tartalmazza az x változó kitevőiben.

$$F_i(x) = \begin{cases} p, & \text{ha } x^{a_i} = 1 \\ \frac{x^{pa_i} - 1}{x^{a_i} - 1} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $F(x) := \prod_i F_i(x)$. Így ismét F -nek a p -edik egységgyököknél vett helyettesítési értékeinek számtani közepe adja a megoldások számát. $F(1) = p^k$, egyéb α_j egységgyökre pedig $F_i(\alpha_j)$ értéke 0, ha $p \nmid a_i$ és p , ha $p \mid a_i$. Tehát az $F(\alpha_2), \dots, F(\alpha_p)$ értékek közt csak akkor nincs 0, ha $p \mid \text{luko}(a_1, \dots, a_k)$. Így $p \mid \text{luko}(a_1, \dots, a_k)$ esetén

$$\frac{F(1) + F(\alpha_2) + \dots + F(\alpha_p)}{p} = \frac{p^k + p^k + \dots + p^k}{p} = p^k,$$

különben pedig

$$\frac{F(1) + F(\alpha_2) + \dots + F(\alpha_p)}{p} = \frac{p^k + 0 + \dots + 0}{p} = p^{k-1},$$

ahogy azt állítottuk. □

A 3.6 Tétel bizonyítása. Rögtön adódik a 3.5 Lemma alapján, alkalmazva a (2.2) képletet. □

A 3.7 Lemma bizonyítása. Legyen p páratlan prím. Először meghatározzuk az $x_1^2 + \dots + x_k^2 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldásszámát, majd megmutatjuk, hogy az eredeti kongruencia megoldásszáma hogyan függ az $a_1, \dots, a_k$ értékektől. Minden x_i^2 értékhez rendeljük hozzá a

$$\sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) x^n$$

polinomot, ahol $\left(\frac{n}{p} \right)$ a Legendre-szimbólumot jelöli. Pl. $p = 7$ esetben ez így néz ki: $1 + 2x + 2x^2 + 2x^4$. A kitevők értékei x_i^2 lehetséges értékei modulo p , az együtthatók pedig azt fejezik ki, hogy hányszor veszi fel az adott értéket x_i^2 , ahogyan x_i végigfut a $0, 1, \dots, p-1$ számokon. Így az

$$F(x) = \left(\sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) x^n \right)^k$$

polinom p -edik komplex egységgyököknél vett értékeinek számtani közepe adja meg a kongruencia megoldásszámát:

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) \alpha_j^n \right)^k.$$

Itt $g(j; p) := \sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) \alpha_j^n$ definíció szerint a kvadratikuss Gauss-összeg. Így

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) \alpha_j^n \right)^k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (g(j; p))^k$$

$j = 0$ esetén $g(j; p) = p$, egyébként $g(j; p) = \left(\frac{j}{p}\right) g(1; p)$. Így

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (g(j; p))^k = \frac{1}{p} \left(p^k + \sum_{j=1}^{p-1} \left(\left(\frac{j}{p}\right) g(1; p) \right)^k \right).$$

Ha $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor $g(1; p) = \sqrt{p}$, ha $p \equiv -1 \pmod{4}$, akkor $g(1; p) = i\sqrt{p}$. Tehát $p \equiv 1 \pmod{4}$ esetben

$$\frac{1}{p} \left(p^k + \sum_{j=1}^{p-1} \left(\left(\frac{j}{p}\right) \sqrt{p} \right)^k \right) = \frac{1}{p} \left(p^k + \frac{p-1}{2} ((\sqrt{p})^k + (-\sqrt{p})^k) \right).$$

Itt a Legendre-szimbólum értékei szerint válogattuk szét a szummatagokat. A $p \equiv -1 \pmod{4}$ esetben az eredmény hasonlóan, behelyettesítéssel adódik:

$$\frac{1}{p} \left(p^k + \frac{p-1}{2} ((i\sqrt{p})^k + (-i\sqrt{p})^k) \right) = \frac{1}{p} \left(p^k + \frac{p-1}{2} \sqrt{p}^k (i^k + (-i)^k) \right).$$

Ez páratlan k -ra p^{k-1} , $k \equiv 0 \pmod{4}$ esetben

$$\frac{1}{p} (p^k + (p-1)p^{k/2}),$$

$k \equiv 2 \pmod{4}$ esetben

$$\frac{1}{p} (p^k - (p-1)p^{k/2}).$$

Az előző két, páros k -ra vonatkozó formula együtt is írható:

$$\frac{1}{p} (p^k + (p-1)(-p)^{k/2}). \quad (4.5)$$

Most nézzük az eredeti kongruenciát. Minden $a_i x_i$ számhoz rendeljük a lehetséges értékeit kitevőként tartalmazó

$$\sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p}\right) + 1 \right) x^{a_i n}$$

polinomot. Így a következőképpen adódik a megoldásszám:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\prod_{i=1}^k \sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) \alpha_j^{a_i n} \right) &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\prod_{i=1}^k g(a_i j; p) \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i j}{p} \right) g(1; p) \right) \\ &= p^{k-1} + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p-1} \left(\left(\frac{j}{p} \right)^k \prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{p} \right) g(1; p) \right). \end{aligned}$$

Ha k páros, akkor $\left(\frac{j}{p} \right)^k$ értéke mindig 1. Ezért $p \equiv 1 \pmod{4}$ esetben

$$p^{k-1} + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p-1} \left(\left(\frac{j}{p} \right)^k \prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{p} \right) g(1; p) \right) = p^{k-1} + \frac{\sqrt{p}^k}{p} (p-1) \left(\frac{a_1 \cdots a_k}{p} \right),$$

és $p \equiv -1 \pmod{4}$ esetben

$$p^{k-1} + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p-1} \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{p} \right) g(1; p) \right) = p^{k-1} + (-1)^{k/2} \frac{\sqrt{p}^k}{p} (p-1) \left(\frac{a_1 \cdots a_k}{p} \right).$$

A Legendre-szimbólum tulajdonságait felhasználva a kétféle megoldás azonos formulával is megadható:

$$p^{k-1} \left(1 + \frac{p-1}{p^{k/2}} \left(\frac{(-1)^{k/2} a_1 \cdots a_k}{p} \right) \right).$$

Ha k páratlan, akkor $\left(\frac{j}{p} \right)^k$ értéke $\frac{p-1}{2}$ -szer -1 és ugyanennyiszor 1, ahogyan j végigfut az $1, 2, \dots, p-1$ számokon. Ezért ebben az esetben a megoldások száma p^{k-1} .

Végül nézzük meg külön a $p = 2$ esetben az eredeti kongruencia megoldásszámát. $\square$

A 3.9 Lemma bizonyítása. A megoldásszám meghatározható úgy, hogy az alsó kongruencia már korábban meghatározott összes megoldásának számából kivonjuk azon megoldások (a továbbiakban "rossz megoldások") számát, amelyekben minden x_i a $\{0, 1, \dots, p-1\}$ halmazból való. A rossz megoldások számolásakor annyi módosítást kell elvégezni a korábbi polinomokhoz képest, hogy bármely x_i -hez a

$$\sum_{n=1}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{p-1} \left(\left(\frac{n}{p} \right) + 1 \right) x^n \right) - 1$$

kifejezést rendeljük, tehát a nulladfokú tag eltűnt. Így a szokásos módszer nem számolja azokat a megoldásokat, amelyekben előfordul $x_i = 0$ valamely i esetén. Vesszük ennek k -adik hatványát, majd kiszámítjuk a számtani középértéket:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{n=0}^{p-1} \left(\binom{n}{p} + 1 \right) \alpha_j^n - 1 \right)^k &= \frac{1}{p} \left((p-1)^k + \sum_{j=1}^{p-1} \left(\binom{j}{p} g(1;p) - 1 \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{p} \left((p-1)^k + \frac{p-1}{2} ((\sqrt{p}-1)^k + (-\sqrt{p}-1)^k) \right), \end{aligned}$$

ha $p \equiv 1 \pmod{4}$.

A $p \equiv -1 \pmod{4}$ esetben

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{n=0}^{p-1} \left(\binom{n}{p} + 1 \right) \alpha_j^n - 1 \right)^k = \frac{1}{p} \left((p-1)^k + \frac{p-1}{2} ((i\sqrt{p}-1)^k + (-i\sqrt{p}-1)^k) \right).$$

A k paritására való tekintettel a binomiális tételt felhasználva innen levezethetőek a táblázatban szereplő formulák. Így a kongruenciarendszer megoldásainak számát megkapjuk a korábbi négyzetes kongruencia megoldásszámának és a rossz megoldások számának különbségeként. $\square$

Hivatkozások

- [1] H. L. Alder, A generalization of the Euler ϕ -function, *Amer. Math. Monthly* **65** (1958), 690–692.
- [2] D. Banerjee, B. Chahal, S. Chaubey, K. Khurana, Distribution of values of general Euler totient function, *J. Math. Anal. Appl.* **530** (2024), Paper No. 127660, 21 pp.
- [3] C. Calderón, J. M. Grau, A. M. Oller-Marcén, L. Tóth, Counting invertible sums of squares modulo n and a new generalization of Euler’s totient function, *Publ. Math. Debrecen* **87** (2015), 133–145.
- [4] J. Chidambaraswamy, Totients with respect to a polynomial, *Indian J. Pure Appl. Math.* **5** (1974), 601–608.
- [5] J. Chidambaraswamy, Totients and unitary totients with respect to a set of polynomials, *Indian J. Pure Appl. Math.* **10** (1979), 287–302.
- [6] Freud R., Gyarmati E., *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

- [7] P. G. Garcia, S. Ligh, A generalization of Euler's ϕ -function, *Fibonacci Quart.* **21** (1983), 26–28.
- [8] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Sixth edition, Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [9] L. K. Hua, *Additive Theory of Prime Numbers*, Transl. Math. Monogr., Vol. 13, Amer. Math. Society, Providence, 1965.
- [10] P. Kesava Menon, An extension of Euler's function, *Math Student* **35** (1967), 55–59.
- [11] T. Nagell, Verallgemeinerung eines Satzes von Schemmel, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I. Math.-Naturv. Klasse* **13** (1923), 23–25.
- [12] V. Schemmel, Über relative Primzahlen, *J. Reine Angew. Math.* **70** (1869), 191–192.
- [13] R. Sivaramakrishnan, The many facets of Euler's totient. II. Generalizations and analogues, *Nieuw Arch. Wisk.* (4) **8** (1990), no. 2, 169–187.
- [14] H. Stevens, Generalizations of the Euler ϕ -function, *Duke Math. J.* **38** (1971), 181–186.
- [15] L. Tóth, A survey of gcd-sum functions, *J. Integer Seq.* **13** (2010), Article 10.8.1, 23 pp.
- [16] L. Tóth, Counting solutions of quadratic congruences in several variables revisited, *J. Integer Seq.* **17** (2014), Article 14.11.6, 23 pp.
- [17] L. Tóth, Another generalization of Euler's arithmetic function and Menon's identity. *Ramanujan J.* **57** (2022), 811–822.