

Országos Tudományos Diákköri Dolgozat

**Szuper-Eddington korongok vizsgálata
árapálykatasztrófák környezetében
A numerikus módszer validációja**

Szabó Domonkos

ELTE, Csillagászat MSc, I. évfolyam

Témavezetők:

Kovács-Stermeczky Zsófia

Tudományos segédmunkatárs, Konkoly Thege Miklós Csillagászati
Intézet, HUN-REN CSFK

Kovács Gábor

Tudományos segédmunkatárs, Konkoly Thege Miklós Csillagászati
Intézet, HUN-REN CSFK
ELTE Gothard Asztrofizikai Observatórium



ELTE

Budapest, 2025

Kivonat

Az árapály-katasztrófa események során egy szupernagy tömegű fekete lyuk árapály ereje szétszakít egy csillagot. Az így létrejött törmelékfelhő egy nagyon forró akkréciós koronggá alakul, ami a várakozásokkal ellentétben optikai tartományban figyelhető meg. A jelenség egy fontos eszköze a szupernagy tömegű fekete lyukak detektálásának és tömegbecslésének távoli galaxisokban. Elméleti leírásuk azonban mind a mai napig vitatott. Az egyik modell, amely a TiDE kód alapját képezi, szuper-Eddington korongra és szélre bontja az objektumot, azonban az emögött lévő fizikát szabad paraméterekkel kezelik, mert magát a korong fizikáját kellene modellezni.

Dolgozatom célja ennek a szuper-Eddington korongmodellezésnek az előkészítése, a szükséges numerikus apparátus implementálása, és tesztelése. Dolgozatomban a modellezéshez szükséges peremérték problémát megoldó shooting-módszert implementáltam, melyben a peremérték iterációját felező-módszerrel biztosított Newton-Raphson módszerrel oldottam meg, míg a differenciálegyenletek megoldására egy negyedrendű Runge-Kutta módszert implementáltam. A módszeremet sikeresen validáltam egy ferde hajítás és egy harmonikus oszcillátor probléma megoldásával.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. TDE események modellezése	3
1.2. A Szuper-Eddington korong (SED) modell	6
2. A kutatás menete és a dolgozat célja	9
3. A shooting módszer	10
3.1. A Newton-Raphson módszer	11
3.2. Felező (Bisection) módszer	12
3.3. Numerikus deriválás	12
3.4. Negyedrendű Runge-Kutta módszer	13
4. A módszer implementációja	14
5. Eredmények: az implementált módszer numerikus validációja	17
5.1. A Runge-Kutta módszer validációja	18
5.2. Ferde hajítás esete	18
5.3. Harmonikus rezgőmozgás esete	21
6. Kitekintés, jövőbeli lépések	23
7. Összefoglalás és Diszkusszió	23
Hivatkozások	26
Függelék	27
A. Saját eredmények	27

1. Bevezetés

Az árapály-katasztrófa események vagy rövidítve TDE (Tidal Disruption Event) lényege, hogy egy csillag túl közel kerül egy szupernagy tömegű fekete lyukhoz. A csillag az árapály-erő miatt részben vagy teljesen szétszakad, majd a csillagmaradvány egy része gravitációsan kötött marad a fekete lyukhoz (Rees, 1988). Ebből a kötött anyagból fog képződni egy akkréciós korong a fekete lyuk körül (Evans és Kochanek, 1989; Phinney, 1989; Rees, 1988; Ulmer, 1999). A kötött anyag a szétesés pillanatában különböző elliptikus pályákra áll, így amikor a legbelsőbb pályán lévő anyag körbeér, nekiütközik az útjában lévő maradék anyagnak, ami egy heves felfényléshez, és az akkréciós korong kialakulásához vezet, igen nagy akkréciós rátával. Később, amikor az akkréciós ráta olyan nagy, hogy meghaladja az Eddington határt – ahol a fekete lyuk akkréciós luminozitása olyan nagy, hogy a sugárzásból származó nyomás erősebb, mint a gravitációs erő – akkor a korong instabillá válik és ez egy úgynevezett szuper-Eddington szelet hoz létre, amit a korong kontinuum-sugárzása hajt. A széllal együtt a kötött anyag jelentős része el fogja hagyni a rendszert (Strubbe és Quataert, 2009).

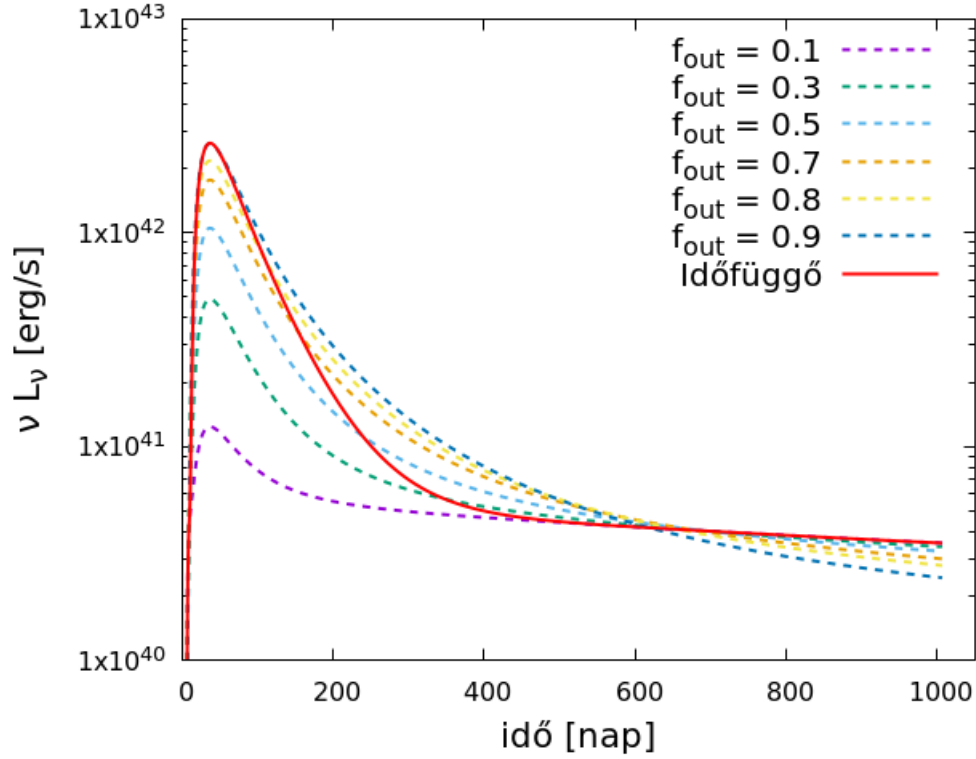
1.1. TDE események modellezése

Az esemény nagymértékű felfényléssel jár és fénygörbéjének vizsgálata hozzájárul a fekete lyukak detektálásához a nem aktív galaxismagokban vagy akár a fekete lyuk tömegbecslésére is tudjuk használni. A TDE-k érdekessége, hogy a korong nagy hőmérséklete ellenére optikai tartományban látszik, azaz a szuper-Eddington szél egy úgynevezett „reprocessing” folyamatban elnyeli az eredeti sugárzást, és hosszabb hullámhosszokon sugározza azt ki. A Lodato és Rossi (2011) szerint az egyik lehetséges magyarázata a reprocessing jelenségnek az előbb említett szuper-Eddington szél kialakulása. Léteznek más modellek is: Mockler és mtsai. (2019) elveti a szuper-Eddington szél lehetőségét, az ő modelljükben a reprocessing oka a kihulló anyag elnyelése, Shiokawa és mtsai. (2015) a felfénylést a behulló anyag okozta lökeshullámoknak tulajdonítják, míg Bonnerot és Lu (2020) szerint a lökeshullámokat a korong és a kihulló anyag kölcsönhatása okozza.

Lodato és Rossi (2011) TDE modelljét Kovács-Stermeczky és Vinkó (2023) implementálta az ún. TiDE kódban. A TiDE egy C++ programozási nyelvben íródott szimulációs program, ami képes kiszámolni a TDE események monokromatikus fénygörbéjét (Kovács-Stermeczky és Vinkó, 2023). A program számos szabad paramétert használ, ezek közt szerepel az ún. f_{out} , ami azt mondja meg, hogy a visszahulló akkréciós ráta mekkora része vesz részt a szuper-Eddington szélben. Ez a paraméter lehet konstans (időtől független), de a TiDE-ban lehetőség van arra is, hogy egy „időfüggő” változatot használjunk, amit a következő egyenlet ír le (Lodato és Rossi, 2011):

$$f_{\text{out}} = \frac{2}{\pi} \arctan \left[\frac{1}{7,5} \left(\frac{\dot{M}_{\text{fb}}}{\dot{M}_{\text{Edd}}} - 1 \right) \right] \quad (1)$$

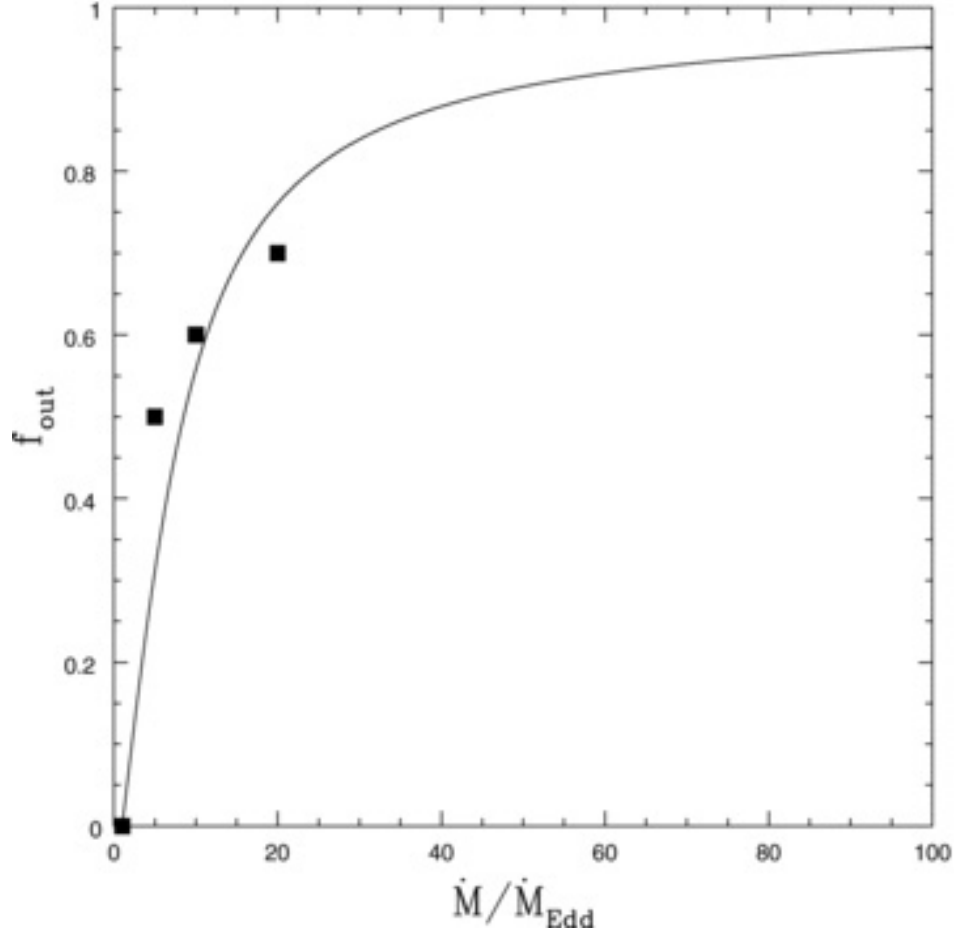
ahol $\dot{M}_{\text{fb}}$ a visszahulló akkréciós ráta és $\dot{M}_{\text{Edd}}$ az Eddington akkréciós ráta. Ez a modell stacionárius korongot ír le minden időpillanatban, azonban f_{out} paramétert azért hívjuk időfüggőnek, mert $\dot{M}_{\text{fb}}$ változón keresztül különböző időpontokra más és más értékeket kapunk rá. A paraméter változtatása nagy mértékben befolyásolja a fénygörbék alakját, lecsengését (lásd 1. ábra).



1. ábra. Az (1) egyenletben definiált időfüggő f_{out} (piros, folytonos görbe) valamint a különböző konstans f_{out} (szaggatott görbék) paraméterrel számolt fénygörbék összehasonlítása (Szabó, 2024).

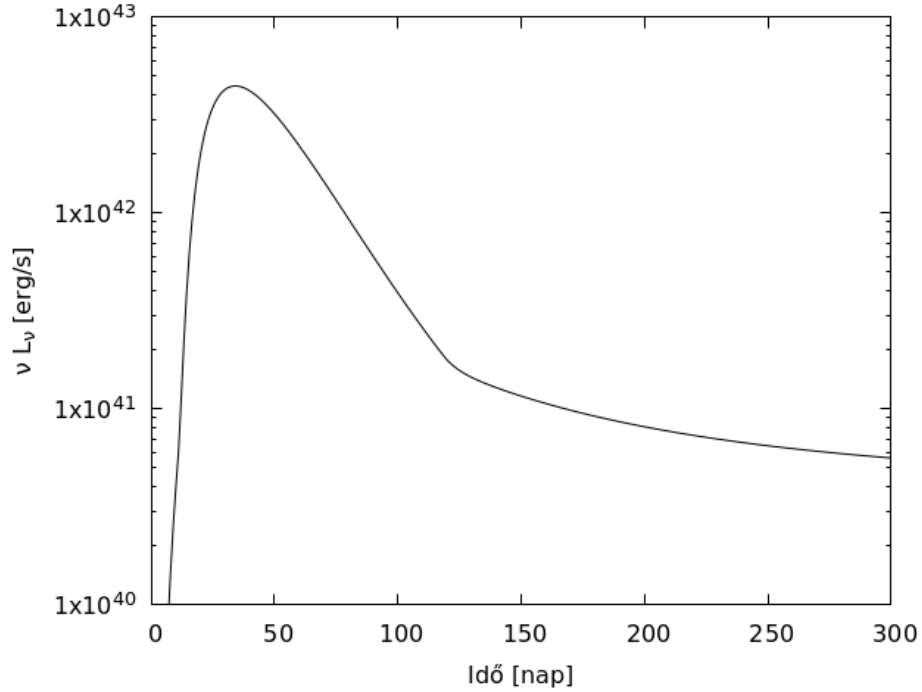
A másik fontos paraméter, az f_w , ami azt adja meg, hogy a szuper-Eddington szél sebessége hányszorosa a szél kiindulási pontjában lévő szökési sebességnek.

Ezeket a paramétereket szuper-Eddington korongmodellekből kaphatjuk meg. Az f_{out} paraméter időfüggő változatát először Lodato és Rossi (2011) vezeti be, amihez a Dotan és Shaviv (2011) eredményeit használják fel. Ebben a cikkben numerikus módszerekkel vizsgálják a szélre vonatkozó akkréciós ráta arányát a teljes akkréciós rátához viszonyítva. Lodato és Rossi (2011) az innen származó 4 adatpontra illeszt egy $\arctg$ függvényt (lásd 2. ábra).



2. ábra. f_{out} paraméter és $\dot{M}_{\text{fb}}/\dot{M}_{\text{Edd}}$ közötti kapcsolatot ábrázoló függvényillesztés (Lodato és Rossi, 2011)

Lodato és Rossi (2011) f_{out} paraméterre való illesztése (1. egyenlet) matematikailag negatív értékeket ad, amikor $\dot{M}_{\text{fb}} < \dot{M}_{\text{Edd}}$, ami fizikailag értelmetlen a paraméter definíciójából adódóan, miszerint megadja a széllel eltávozó anyag mennyiségét. Ennek kiküszöbölése érdekében a TiDE konstans $f_{\text{out}} = 0,1$ értéket használ attól az időponttól, amikor az időfüggő változat ennél kisebb értéket venne fel (Kovács-Stermeczky és Vinkó, 2023). Ez egy mesterséges törést okoz a fénygörbében (lásd a 3. ábra), ami illesztések alkalmával erősen befolyásolhatja a kapott eredményt.



3. ábra. TDE esemény monokromatikus luminozitása optikai g sávban az idő függvényében a TiDE kóddal. $t \approx 125$ -nél látható a konstans f_{out} érték miatt bekövetkező mesterséges törés a fénygörbében. A törés pontos időpontja függ a TiDE kódban lévő paraméterbeállításoktól. Az ehhez a példához választott paraméterek a Kovács-Stermeczky és Vinkó (2023) által készített kutatás 2. táblázatában szereplő M2-es modell paraméterei.

Ezen felül fontos megemlíteni, hogy Dotan és Shaviv (2011) cikkéből származó adatpontok egy része csillagtömegű fekete lyukra lett kiszámítva. Ezzel szemben TDE eseményeknél szupernagy tömegű fekete lyukakról beszélünk, ami szintén befolyásolhatja a kapott eredményeket.

A fenti információkat figyelembe véve megállapítható, hogy a szél komponens által elszállított anyagmennyiség időfüggő változata, ami jelentős befolyással van a fénygörbére, korrigálásra szorul. f_w paraméter a TiDE jelenlegi változatában egy konstans, időtől független érték. Ezen felül f_{out} és f_w esetében is igaz, hogy teljesen szabad paraméterek, amelyek a valóságban kapcsolatban lehetnek egyéb, a modellben megjelenő paraméterekkel, mint például a fekete lyuk akkréciós hatásfokával, méretével. Így legfőbb motivációja a munkámnak ezen paraméterek meghatározása nagyobb pontossággal, Dotan és Shaviv (2011) modelljének segítségével.

1.2. A Szuper-Eddington korong (SED) modell

A kompakt objektumok akkréciójához korábban a Shakura-Sunyaev (Shakura és Sunyaev, 1973) modellt alkalmazták, ami egy geometriailag vékony és optikailag vastag korongmodell. Ez esetben a korong relatíve alacsony hőmérsékletű tud maradni, mivel a korongban lévő turbulens viszkozitásból származó energiát effektíven ki tudja sugározni. Így geometriailag vékony lesz a korong. Azonban extrém magas vagy extrém alacsony akkréciós rátákra a modell szétesik. Nagyon alacsony akkréciós ráta esetén a korong optikailag vékony lesz és nem fogja tudni kisugározni a disszipatív energiát. Emiatt az energia az anyagáramlással együtt fog utazni. Nagyon magas akkréciós ráta esetén

a korong sugárzása konvektív instabilitáshoz vezet, ezért térfogata megnő és már geometriailag vastaggyá válik. Szuper-Eddington esetben a sugárnyomás erősebb a gravitációnál, a korongot saját luminozitása fújja el. Egy Kepler-féle korongban az energia kibocsátási ráta a következő lesz:

$$\frac{GM_{\text{BH}}\dot{m}}{2r} \quad (2)$$

ahol M_{BH} a fekete lyuk tömege, $\dot{m}$ az akkréciós ráta és r a sugár. Ez összemérhető az Eddington luminozitással:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi cGM_{\text{BH}}}{\kappa} \quad (3)$$

Az Eddington luminozitás az a maximális luminozitás, ahol a sugárnyomás és a gravitációs erő kiegyenlíti egymást. Így tehát itt még hidrosztatikai egyensúlyban van a korong. Az Eddington luminozitásból meghatározható a kritikus akkréciós ráta:

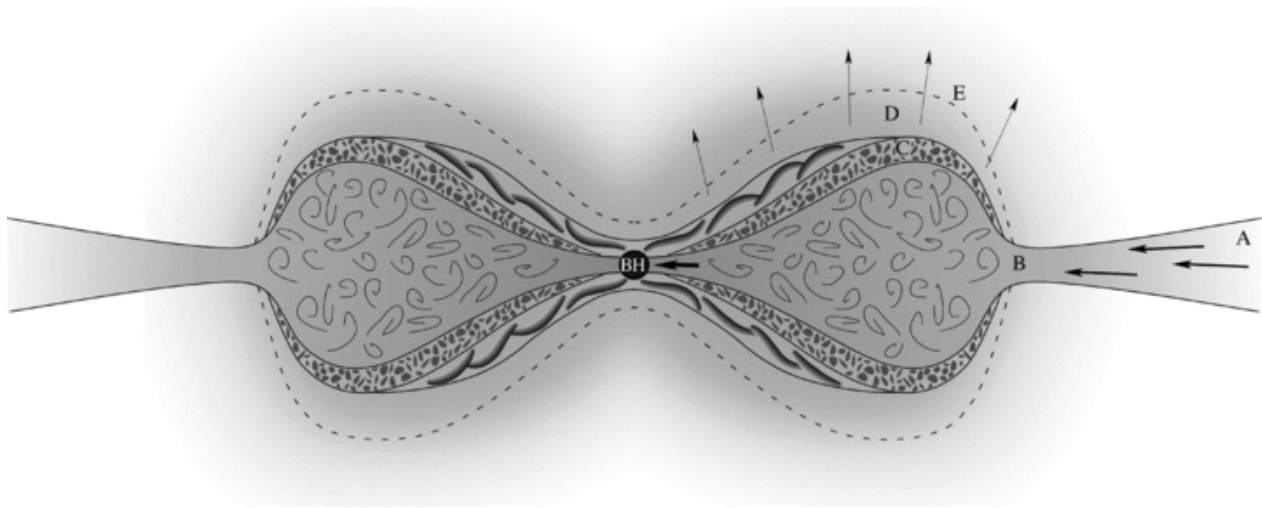
$$\dot{m}_{\text{krit}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\eta_0 c^2} \quad (4)$$

ahol η_0 a fekete lyukak standard akkréciós hatásfoka. Ennél nagyobb akkréciós ráta esetén a geometriailag vékony korongmodell már nem lesz érvényes, és a többletenergia kibocsátása megközelíti az Eddington limitet. A Shakura-Sunyaev modell szerint egy objektum nem haladhatja meg az Eddington luminozitást anélkül, hogy ne lenne erőteljesen dinamikus. A szuper-Eddington korongok nem maradhatnak sztatikusak sokáig, hiszen az akkretálódott anyag nagy része el fogja hagyni a rendszert. Ennek ellenére az észlelések azt mutatták, hogy ez az állapot sokkal tovább fennmaradhat, mint ahogyan azt a klasszikus modell megjósolta (Shaviv, 2001). Dotan és Shaviv (2011) ezért bevezet egy porózus réteget a korong külső részén, ami csökkenti az effektív opacitását a korongnak, illetve egy korong kontinuum-sugárzás által hajtott szelet, ami miatt a korong lokális luminozitása az Eddington limit alatt tud maradni. Így a korongok stabilak tudnak maradni akkor is, ha globálisan a sugárzásuk szuper-Eddington. A korongok dinamikailag instabillá válnak amint a sugárzásuk megközelíti az Eddington határt, a kialakuló mágneses buborékok, és konvektív fluxus következtében az effektív opacitás viszont csökkenni fog, így lokálisan a széteséssel szemben stabil szub-Eddington állapotban maradnak. A SED objektumok külső régióinál, ahol a sűrűség kellően alacsony, az opacitást csökkentő inhomogenitások megszűnnek, szuper-Eddington szelek fognak keletkezni. Fontos megjegyezni, hogy a szuper-Eddington szél optikailag vastag, a fotoszféra így a szél belsejében helyezkedik el.

Tehát a Dotan és Shaviv (2011) modellnek négy fő tulajdonsága van (4. ábra):

1. Geometria: Az akkréció megoldását olyan koronggeometriával írjuk le, ahol a vertikális skálamagasság sokkal kisebb, mint a horizontális kiterjedtsége a korongnak, de nem elhanyagolható, ún. „karcsú korong” (angolul „slim disk”). Az ilyen korong leírása 2 dimenziós lesz, de a Shakura-Sunyaev modellhez hasonlóan szeparálható a megoldás a két irányra. Ezáltal vertikális és horizontális megoldásra bontjuk a problémát.
2. Porozitás: A korongban lévő inhomogenitások csökkentik az effektív opacitást, ami lehetővé teszi, hogy a klasszikusan szuper-Eddington korong adott pontban szub-Eddington luminozitással rendelkezzen, így stabil maradjon. Emiatt a modell egy fontos része a porózus réteg, amit figyelembe kell venni az opacitás számításánál.

3. Konvekció: A nagy sugárzási fluxusok következtében konvekció lép fel a korong sűrűbb régiójában, amint a fluxus megközelíti az Eddington-limitet. Ezzel a szuper-Eddington fluxushoz tartozó energiafluxus egy részét a sugárzás helyett a konvektív fluxus viszi a fősíktól kifelé.
4. Egy adott magasságban a porózus réteg sűrűsége olyan kicsi, hogy már nem alakulnak ki azok az inhomogenitások, amik az opacitást csökkentik, így ebben a magasságban a tényleges és klasszikus Eddington-határ megegyezik, a sugárnyomás elkezd lefújni a korong anyagát. Ez lesz a szuper-Eddington szél. Mivel a szél általában optikailag vastag, ezért a fotoszféra a kiáramló anyagon belül fog elhelyezkedni.



4. ábra. A Dotan és Shaviv (2011) korong modell metszete. A: szub-Eddington vékony korong (Shakura-Sunyaev korong), B: Beljebb haladva a korongban a sugárnyomás dominálni fog, C: A korong kevésbé sűrű régiójában egy porózus réteg fog létrejönni, D: Abban a magasságban, ahol a porózus réteg ritkább, létrejön a szuper-Eddington szél, E: A szél optikailag vastag, ezért a fotoszféra a szelen belül helyezkedik el.

Mivel a modellben lévő korong keskeny, ezért a probléma részben felosztható radiális és vertikális struktúrára, de minden radiális pontra jut egy teljes vertikális megoldás. A modellben a radiális differenciál-egyenletrendszer amit meg kell oldanunk a következő:

1. tömegmegmaradás egyenlete
2. impulzusmegmaradás egyenlete
3. impulzusmomentum-megmaradás egyenlete
4. energiamegmaradás egyenlete

A modell külső határfeltételéhez a Shakura és Sunyaev (1973) korongmodell megoldása van felhasználva. A belső peremfeltétel pedig az, hogy az ún. szónikus pont, ahol a vertikális sebesség nagysága eléri a hangsebességet, 2-3 Schwarzschild sugár közé essen. Az egyenletek termodinamikai változói a korong teljes vastagságára integráltak szerepelnek, hasonlóan a Shakura és Sunyaev

(1973) modellhez. Ezek meghatározásához, minden pontban szükség van a vertikális struktúra megoldására, az ehhez tartozó differenciál-egyenletrendszer pedig a következő lesz:

1. hidrosztatikus egyenlet
2. energiamegmaradás egyenlete
3. $\kappa \approx \kappa_{\text{eff}}$ -nél a stacionárius szél egyenletei (Impulzus és energiamegmaradás)

A modell vertikális peremfeltételét a fotoszféra fluxusa adja. Így a modell egy olyan peremérték probléma, amelynek megoldásakor minden horizontális lépésre jut egy vertikális szerkezet peremérték probléma. A modell megoldásához két egymásba ágyazott egyváltozós peremértékproblémát kell megoldani, így a számítási igénye indokolja a saját numerikus implementáció használatát. Ezen felül a könnyen elérhető megoldások (lásd például Press és mtsai., 2007), általában többváltozós problémákra készülnek, ami szintén szükségessé teszi a saját numerikus implementáció alkalmazását.

2. A kutatás menete és a dolgozat célja

Mint láthattuk a bevezetésben, f_{out} paraméter nem tisztázott a mai napig, míg ennek a paraméternek a helyes leírása szükséges ahhoz, hogy megfelelően tudjuk modellezni az árapály-katasztrófák során megfigyelhető fénygörbét. Dotan és Shaviv (2011) egy „karcsú” szuper-Eddington korongmodellt épít fel, ami egy közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel oldható meg két dimenzióban. Azonban ennek megoldása nagy számítási igényt, és valamelyest speciális numerikus megoldóprogramot igényel. Ennél fogva a kutatás öt főbb lépésre bontható a következők szerint:

1. Numerikus módszer kidolgozása: egyváltozós peremértékproblémára vezető differenciálegyenlet-rendszerek megoldására szolgáló algoritmus kidolgozása. Ide tartozik a Runge-Kutta módszer, shooting-módszer, Newton-Raphson módszer és a felező-módszer (lásd 3. és 4. fejezet).
2. Módszer validációja egyszerű differenciálegyenlet-rendszerekre: A kidolgozott differenciálegyenlet-rendszer megoldó algoritmus tesztelése egyszerű differenciálegyenlet-rendszerekre. A teszteseteknek annyiban kell egyezniük a később megoldandó karcsú korongmodellel, hogy matematikailag azonosan egyváltozós peremértékproblémának kell lenniük. Ebben a dolgozatban a ferde hajítás és a harmonikus rezgőmozgás a két teszteset (lásd 5. fejezet).
3. Shakura&Sunyaev modell: Miután sikeresen implementáltam az algoritmust és a tesztesetekre működik, implementálni fogom a Shakura&Sunyaev korongmodellt, ami egy geometriailag vékony korongot ír le. Ez a modell egyrészt elengedhetetlen a karcsú korongmodell implementációjához, másrészt felírható egy teljesen analóg problémaként, amivel a már említett egymásba ágyazott peremértékmegoldást és az algoritmus optimalizációját is el lehet végezni.
4. Dotan modell implementáció: Az ezt követő lépésben a 1.2. fejezetben részletezett karcsú korongmodell implementálása következik.
5. f_{out} és f_w vizsgálata $\dot{M}_{\text{fb}}$ függvényében: A kutatás végső célja az f_{out} és f_w vizsgálata $\dot{M}_{\text{fb}}$ függvényében, aminek jelentőségét a 1. fejezetben fejtettem ki.

Jelen dolgozatom célja a felsorolt lépések közül a 1. és 2. lépés, tehát kifejleszteni az ehhez az egyenletrendszerhez szükséges numerikus apparátust és validálni azt egyszerű analitikus differenciálegyenlet-rendszerekkel. Mivel nem a Dotan és Shaviv (2011) modell egy részproblémáját használom validációnak, lehetőség nyílik a numerikus módszer tesztelésének és a megoldandó probléma implementációjának szétválasztására, így gyorsabban fejleszthető ki a modell. A numerikus módszer implementációjához moduláris programozási alapelven C programnyelvben végzem el. A 3. fejezetben ismertetem a numerikus implementációhoz szükséges módszereket, mint a shooting módszer, Newton-Raphson módszer, Runge-Kutta módszer, felező módszer és a numerikus deriválás. A 4. fejezetben bemutatom az implementációt, illetve az algoritmus moduljai közti összefüggéseket és működésüket. Az 5. fejezetben ismertetem a kifejlesztett algoritmus által kapott eredményeket és összehasonlítom azokat az általam kiszámolt analitikus eredményekkel.

3. A shooting módszer

A shooting módszer egy numerikus differenciálegyenlet-rendszer megoldó módszer, amit peremérték problémákra lehet alkalmazni (Press és mtsai., 2007). A módszer lényege, hogy a kétoldali peremfeltételek közül, az egyik oldalon az ismeretlen határfeltételt szabad paraméterként változtatva kezdeti érték problémaként megoldjuk a differenciálegyenlet-rendszert, és ellenőrizzük a túloldali peremfeltétel teljesülését. Ezt iterálva eljuthatunk az egyenletrendszer helyes megoldásáig. Tehát N db elsőrendű differenciálegyenletet kell megoldanunk, amik az x_1 pontban n_1 db peremfeltételt, illetve x_2 pontban $n_2 = N - n_1$ db peremfeltételt elégítenek ki. A differenciálegyenlet-rendszer, amit meg kell oldani:

$$\frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \quad (5)$$

ahol $i = 0, 1, \dots, N - 1$. x_1 pontnál a megoldás ki kell elégítse a

$$B_{1j}(x_1, y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = 0 \quad (6)$$

peremfeltételeket, ahol $j = 0, 1, \dots, n_1 - 1$ illetve x_2 pontnál a

$$B_{2k}(x_2, y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = 0 \quad (7)$$

peremfeltételeket, ahol $k = 0, 1, \dots, n_2 - 1$. Általános esetben, mivel $n_1 < N$, az x_1 pontban n_2 darab olyan változónk van, aminek határfeltételeit B_{2k} írja le. Ezt az n_2 darab változót x_1 -ben szabad paraméterként kezeljük.

Az integrálás x_1 és x_2 pont között történik és arra törekszünk, hogy x_2 -nél lévő peremérték meg egyezzen az integrálás során kapott értékkel. Ennek ellenőrzésére bevezetjük az ún. hibafüggvényt $F_k(v)$ alakban, ahol $v_k = y_k(x = x_1)$ -ben, azaz a szabad változónak választott paramétereink. v_k -t behelyettesítve B_{1j} -be, kapunk egy lehetséges megoldást $y(x_2)$ -re. Ezt behelyettesítve $B_{2k}(x, y)$ -ba ellenőrizhetjük a határfeltétel teljesülését. Tehát a hibafüggvényünk:

$$F_k(v) = B_{2k}(x_2, y) \quad (8)$$

Az egyenlethez tartozó y megoldás pedig x_1 pontban:

$$y_i(x_1) = y_i(x_1, v_0, v_1, \dots, v_{n_2}), \quad \text{és} \quad B_{1j}(x_1, y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = 0 \quad (9)$$

Ezzel tehát a problémát, egy nem-lineáris egyenletrendszer megoldásának problémájára jutunk, hiszen meg kell oldani, az

$$F_k(v_0, v_1, \dots, v_{n_2}) = 0 \quad \text{ahol} \quad k = 0, \dots, n_2 \quad (10)$$

egyenletrendszert.

Ehhez a módszer közben frissítenünk kell a szabad paramétert úgy, hogy egy adott konvergencia kritérium teljesüljön. Mindaddig, amíg nem teljesül a kritérium, iteratíván elvégezzük az egyes lépéseket.

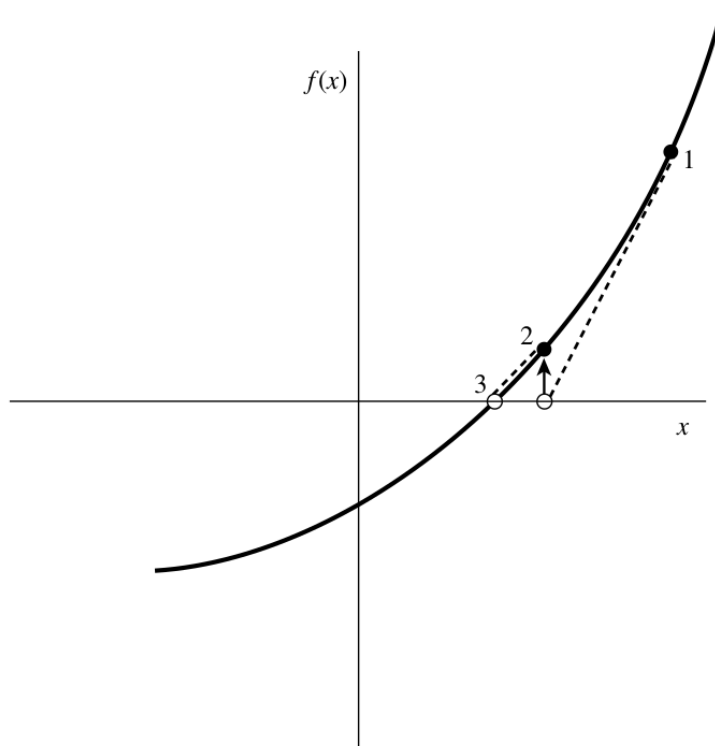
A problémát egyszerűsíti a Dotan és Shaviv (2011) modell esetén, hogy $n_2 = 1$, ezáltal a (10) egyenletrendszer, egyetlen egyenlet megoldására redukálódik. A probléma megoldásához ezért egy-dimenziós Newton-Raphson módszert választottam, míg az (5) megoldását pedig negyedrendű Runge-Kutta módszerrel végzem el.

3.1. A Newton-Raphson módszer

A shooting módszerben a Newton-Raphson módszert (Press és mtsai., 2007) alkalmazom ahhoz, hogy a szabad paraméterünket megfelelően tudjuk változtatni. Ez egy iteratív gyökkeresési algoritmus, aminek lényege, hogy egy adott $f(x) = 0$ nem-lineáris egyenlet egyik gyökét megtaláljuk. Iteratív, formulája a következő:

$$x_{n+1} = x_n + \delta \quad (11)$$

ahol $\delta = -f(x)/f'(x)$. A módszer geometriai jelentése, hogy x_n pontnál lévő függvényértékhez húzott érintőt meghosszabbítjuk úgy, hogy metsze $f(x) = 0$ -t, ezután a metszéspontnál lévő értékünk lesz a következő becslésünk a gyökre, vagyis x_{n+1} .



5. ábra. A módszer az adott pontban lévő deriváltat használja a következő zérushely becslésére. (Press és mtsai., 2007)

A folyamat kvadratikusan konvergál (Press és mtsai., 2007), viszont nem globális a konvergenciája: a megoldás érzékeny a kezdőérték közelében lévő extremumokra ($f'(x) = 0$ miatt), illetve, bizonyos esetekben végtelen ciklusba kerülhet. Ilyen esetben az algoritmust ki kell egészíteni egy ún. felező módszerrel, amit a 3.2 fejezetben részletezek.

3.2. Felező (Bisection) módszer

Egy előre ismert intervallumban az adott függvényünknek zérushelye van, ha az intervallum egy pontján előjelet vált. Az intervallum felénél kiértékeljük a függvényünket és megnézzük, hogy mi lesz az előjele ezen a felezőponton. A pont az intervallum új határa lesz attól függően, hogy az intervallum melyik határának előjelével egyezik meg a felezőpont előjele. n db iteráció után, ha tudjuk, hogy a gyök egy ϵ_n méretű intervallumon belül lesz megtalálható, akkor a következő iteráció után egy $\epsilon_{n+1} = \epsilon_n/2$ nagyságú intervallumon belül lesz a megoldás. A módszer globálisan konvergál, de konvergenciája csak lineáris, függ az intervallum nagyságától, így önmagában nem lenne elég gyors a mi problémánkhoz. Mindazonáltal, biztosítható vele a Newton-Raphson módszer konvergenciája.

3.3. Numerikus deriválás

3.1 fejezetben láttuk, hogy a Newton-Raphson módszer alkalmazásához szükség van a numerikus derivált értékére. A numerikus deriválás módszerével úgy számítjuk ki a függvény adott pont-

jához húzott érintő meredekségét, hogy megnézzük mennyit változik a függvény egy kicsi Δx intervallumon. A módszer formulája:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\epsilon_{\text{num}}^{1/2}) \quad (12)$$

ahol $O(\epsilon_{\text{num}}^{1/2})$ a numerikus hiba. A hiba oka a kicsi $\Delta x \approx \epsilon_{\text{num}}$ -mal való osztás. Az így bevezetett numerikus hiba nagy. ϵ_{num} egyúttal a numerikus ábrázolás pontossága is lesz.

3.4. Negyedrendű Runge-Kutta módszer

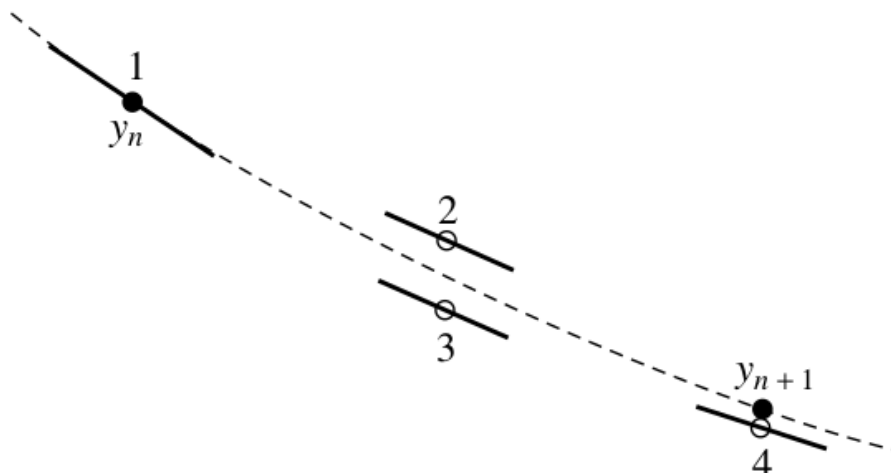
A Runge-Kutta módszer egy numerikus differenciálegyenlet megoldó módszer, amit kezdeti érték feladatokra alkalmazunk (Press és mtsai., 2007). Az N db egyenletből álló egyenletrendszerünk alakja:

$$\frac{dy_i}{dx} = f(x, y_0, \dots, y_N) \quad (13)$$

$$y_i(x = x_0) = y_{0,i} \quad \text{ahol } i = 0, \dots, N \quad (14)$$

A módszer lényege, hogy egy adott h lépésközon belül több helyen kiértékeljük a derivált értékét, majd a derivált értékeket összegezve megkapjuk a valódi függvényértéket. Negyedrendű Runge-kutta esetén minden h lépésközon belül négyszer számoljuk ki a deriváltat: egyszer az intervallum elején, kétszer az intervallum közepén, majd utoljára az intervallum végén:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5) \end{aligned} \quad (15)$$

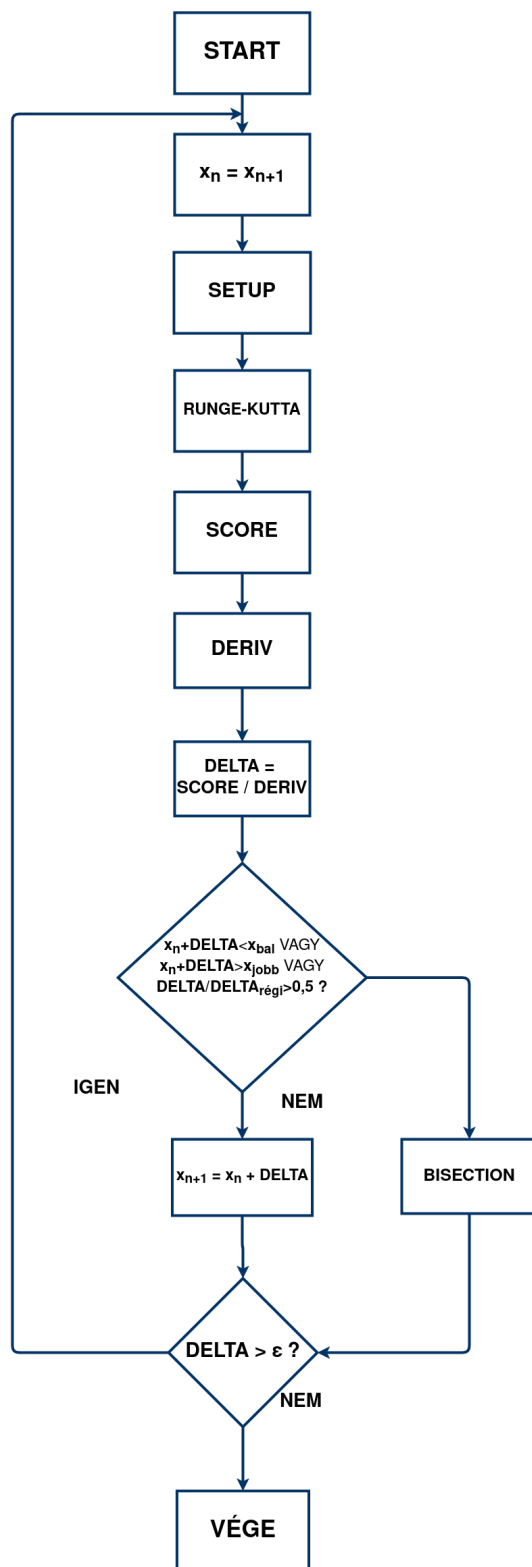


6. ábra. Minden negyedrendű Runge-Kutta lépésben négyszer számítjuk ki a derivált értékét. (Press és mtsai., 2007)

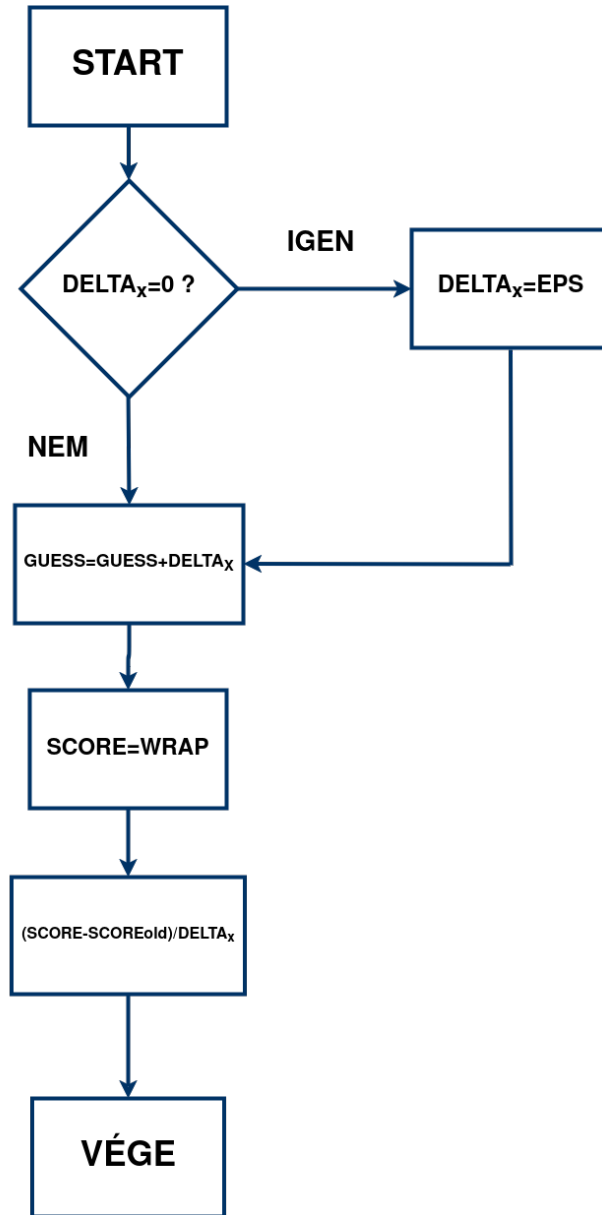
4. A módszer implementációja

Egy C programozási nyelvben készült programkódban megvalósítottam a shooting módszert, és a shooting módszerhez szükséges, a 3. fejezetben tárgyalt algoritmusokat. A programkód készítésekor moduláris programozást használtam, vagyis külön-külön is működő modulokból építettem fel a program egészét. Emiatt a programom modulonként is tesztelhető, így általános és független a megoldandó problémától. A shooting módszer folyamatábráját a 7. ábrán mutatom be.

A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer egy WRAP függvénybe kerül, ahol az éppen aktuális SETUP, SCORE és a RUNGE-KUTTA függvények működnek. A shooting-módszeren belül a Newton-Raphson módszer lesz az, ami a $WRAP = 0$ gyököt fogja keresni. A kezdeti becslésünk x_n lesz, melyet a B_1 határfeltételekkel együtt át kell adnunk a RUNGE-KUTTA megoldó függvényünknek. Ezután az átadott szabad paraméterrel és az előre ismert peremfeltételekkel megoldjuk a differenciálegyenletet a negyedrendű RUNGE-KUTTA megoldó függvényünkkel. Az integrálás végén kapunk egy értéket, amit össze kell hasonlítanunk az előre meghatározott végső peremértékkel, erre szolgál a SCORE függvény. A SCORE függvény nem lesz más mint az $F_k(v)$ hibafüggvényünk, ami megmondja milyen távol vagyunk a helyes megoldástól. Ha a SCORE függvényünk kisebb, mint 0, akkor az intervallum baloldali határa az éppen aktuális x_n értéke lesz, ha viszont SCORE értéke nagyobb vagy egyenlő, mint 0, akkor az intervallum jobb oldali határának új értéke lesz az éppen aktuális x_n . Ez az intervallumváltoztatás a konvergenciát biztosító felező módszer része. A hibafüggvényünket ezután numerikusan deriválnunk kell a DERIV függvénnyel. DELTA értéke pedig a SCORE/DERIV hányados lesz, amivel frissítenünk kell x_n értékét. Ezután ellenőrizzük, hogy a frissített érték (x_{n+1}) nagyobb-e, mint az intervallum jobb oldali határa, vagy esetleg kisebb-e, mint az intervallum bal oldali határa. Ez az ellenőrzés véd abban az esetben, ha a Newton-Raphson lépés ($F'(v) \approx 0$ miatt) elszállna. Amennyiben az intervallumon belül marad a megoldás, ellenőriznünk kell, hogy a megoldásunk konvergál-e, és nem került-e a Newton-Raphson végtelen ciklusba. A gyors konvergencia feltétele



7. ábra. A shooting módszer folyamatábrája beépített felező módszerrel.

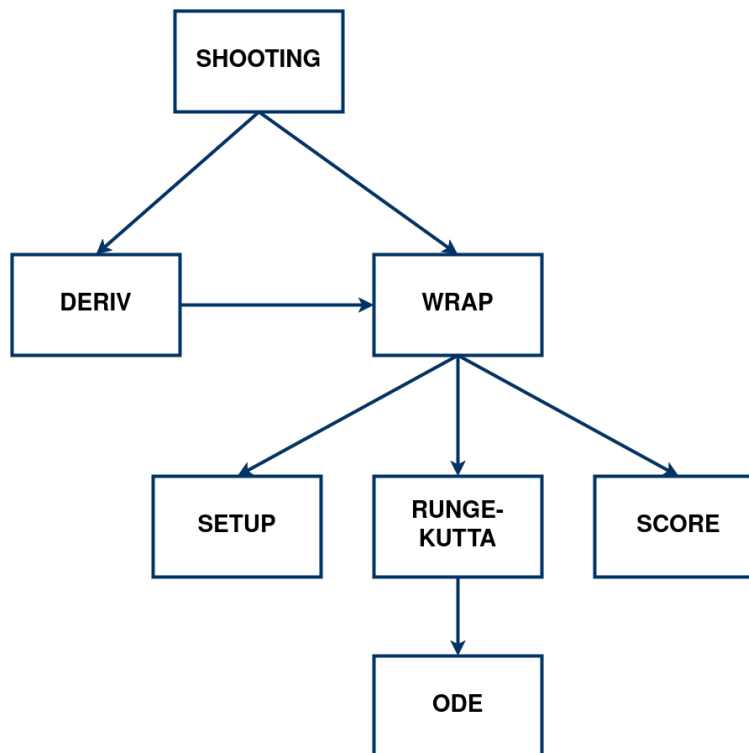


8. ábra. A numerikus deriválás modul folyamatábrája.

a következő (Press és mtsai., 2007):

$$\frac{|F(v_n)|}{|F'(v_n)|} \times \frac{|F'(v_{n-1})|}{|F(v_{n-1})|} > 0.5 \quad (16)$$

ami a folyamatábra jelöléseit használva: $\text{abs}(\text{DELTA}/\text{DELTAOLD}) > 0.5$. Ha bármelyik feltételvizsgálat teljesül, akkor $x_{n+1} = (x_{\text{bal}} + x_{\text{jobb}})/2$ és $\text{DELTA} = (x_{\text{bal}} + x_{\text{jobb}})/2$. Ez az utóbbi lépés biztosítja nekünk, hogy a Newton-Raphson megoldásunk mindenképpen konvergáljon (lásd 3.2. fejezet). Végül konvergencia kritériumot ellenőrzünk a $\text{DELTA} > \epsilon$ feltételvizsgálattal. Ha igaz, akkor újra kezdjük a lépéssorozatot, ha nem, akkor pedig megtaláltuk a helyes megoldást, tehát a $\text{WRAP} = 0$ gyököt.



9. ábra. A programban lévő függvények moduldiagramja. Az ábrán látszik, hogy a WRAP modulra hat a SHOOTING modul és a DERIV modul is, ebből kifolyólag a RUNGE-KUTTA modul egy futtatás alatt kétszer kerül meghívásra, így kétszer történik az adott differenciál-egyenlet hívása és integrálása. Ebből is látható, hogy nagy számítási igényű folyamatról van szó.

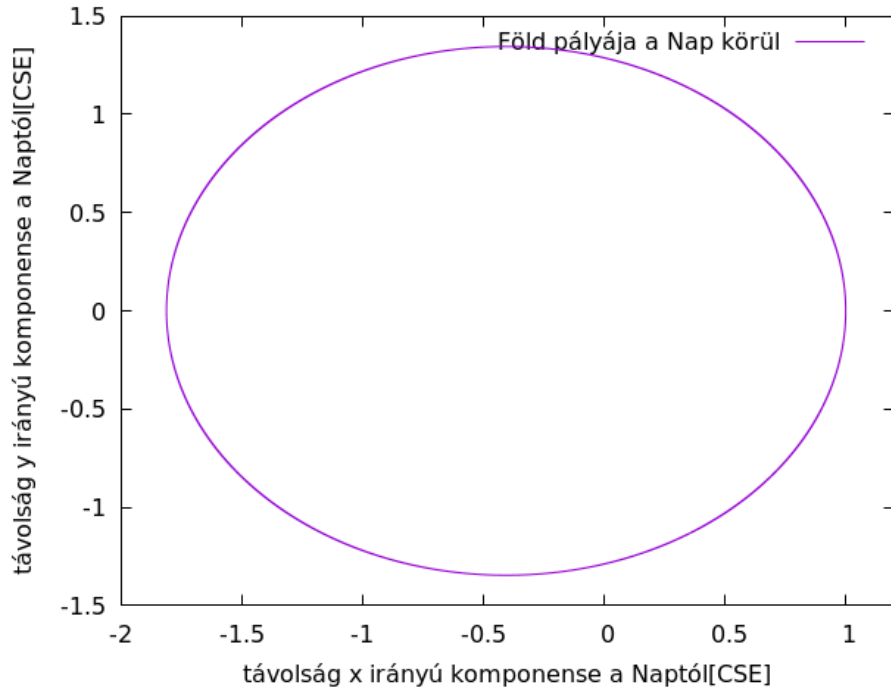
5. Eredmények: az implementált módszer numerikus validációja

A módszer validációját nem Dotan és Shaviv (2011) karcsú korongmodelljének részproblémájával végeztem, mivel egyrészt nincs hozzá analitikus megoldás, így ellenőrizhetetlen lenne a programkód megfelelő működése a probléma részeredményére tesztelve, másrészt ahogyan a 2. fejezetben említettem így gyorsabban kifejleszthető a modell. Ezért analóg, egyszerűbb differenciálegyenlet-rendszerekkel validálom a numerikus módszert, mivel az egyszerűbb esetek vizsgálatával tökéletesen ellenőrizhető az algoritmus helyes működése, ezzel validálva az implementált módszert. Más jellegű, például hidrodinamikai kódok esetében jellemzően adiabatikus modellekkel, illetve Sedov-lökéshullámmal végzik a numerikus validációt (lásd Geroux és Deupree, 2011).

Az algoritmust két próbafeladatra teszteltem. A két tesztet a ferde hajítás és a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlet-rendszere volt. Ezekhez a feladatokhoz analitikusan kiszámoltam a szükséges peremfeltételeket, illetve a szabad paraméter helyes eredményét. Ezt követően pedig az általam írt algoritmussal kiszámoltam a tesztesetek numerikus megoldását. A fejezet további szakaszában ezeket az eredményeket fogom ismertetni.

5.1. A Runge-Kutta módszer validációja

A validáció bemutatásához elengedhetetlen az algoritmusban lévő Runge-Kutta módszer helyes működése. A 10. ábrán az egycentrum-probléma megoldását látjuk negyedrendű Runge-Kutta módszerrel. Fontos kiemelni, hogy itt csak és kizárólag a RUNGE-KUTTA modul részét használtam az algoritmusnak a kezdeti érték feladat megoldásához.



10. ábra. Az egycentrum-probléma megoldása Runge-Kutta módszerrel.

A tesztelt feladat a Föld Nap körüli pályájának integrálása volt, ahol a kezdeti értékek $\mu = 2.29591 \times 10^{-4} [M_{\odot}]$ a redukált tömeg, $T = 1000[\text{középnep}]$ az integrálás hossza, $H = 0.01[\text{középnep}]$ lépésközzel. A kezdeti hely- és sebességvektorok értékét az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. Az egycentrum problémához tartozó kezdeti hely és sebesség vektorok.

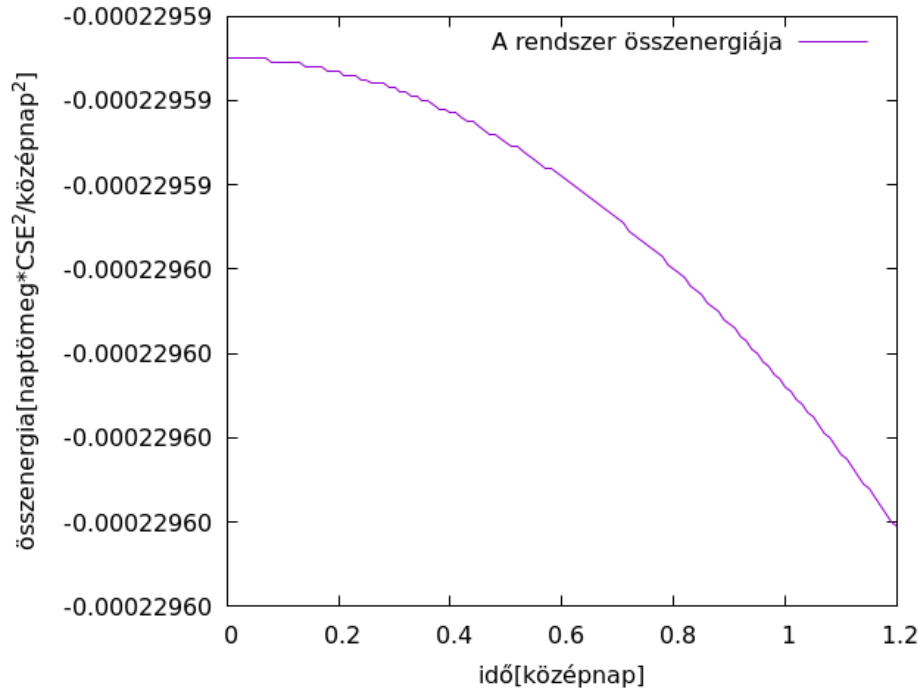
komponens	$r_0[\text{CSE}]$	$v_0[\text{CSE/középnep}]$
x	1	0
y	0	$1,72 \times 10^{-2}$
z	0	0

A 10. és 11. ábrákról leolvasható, hogy a Runge-Kutta módszer helyesen végzi el az integrálást és nincsen plusz energia a rendszerben.

5.2. Ferde hajítás esete

A ferde hajítás differenciálegyenlete:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 \\ a_y(t) &= -g \end{aligned} \tag{17}$$



11. ábra. A Föld-Nap rendszer összenergiája az integrálás során.

ahol $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a földfelszínen lévő gravitációs gyorsulás $a_x(t)$ és $a_y(t)$ az x és y irányú komponensei a gyorsulásnak.

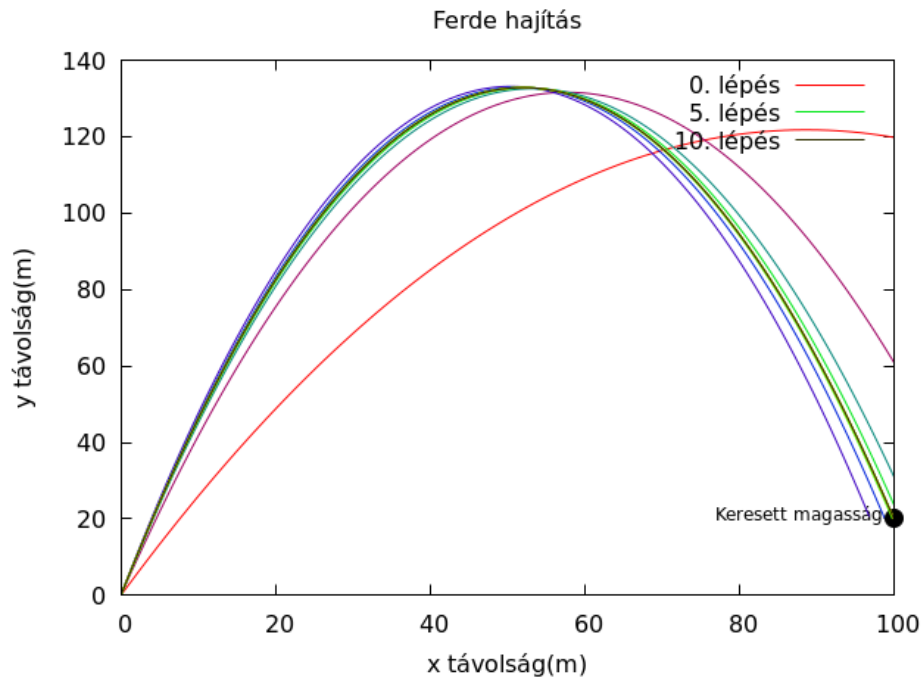
A peremértékekhez szükséges egyenletek pedig a következők:

$$\begin{aligned}
 v_{0x} &= v_0 \cos \alpha \\
 v_{0y} &= v_0 \sin \alpha \\
 s_x &= v_{0x} t \\
 s_y &= v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}
 \end{aligned} \tag{18}$$

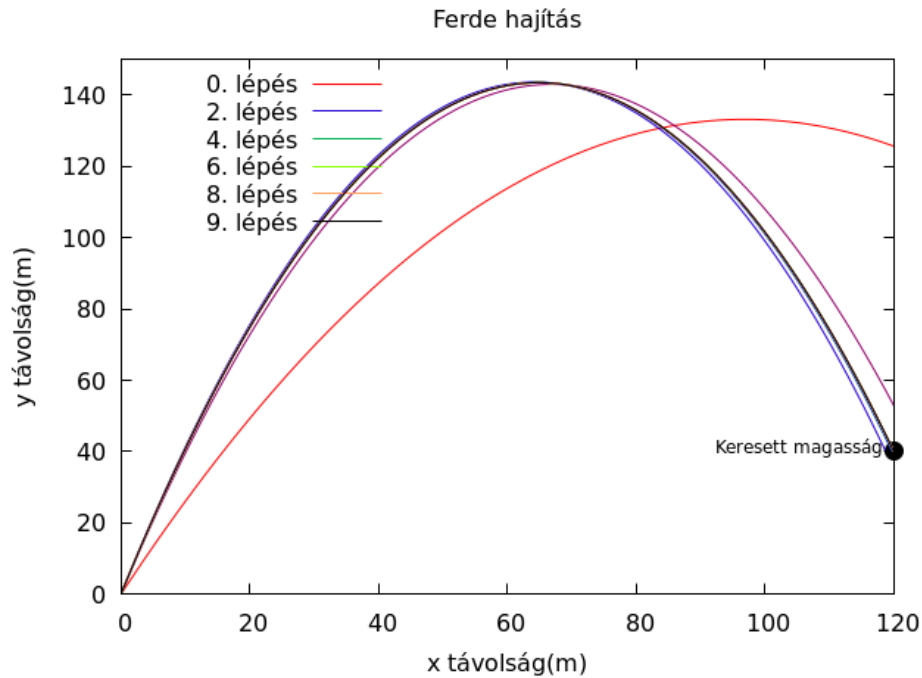
A tesztfeladatban tehát ismert v_0 nagyságú sebességgel dobunk, és a dobás α szögét kell meghatározni.

Az egyes esethez tartozó peremértékeket a 2. táblázatban tüntettem fel, illetve a folyamat során elvégzett lépések és a felező módszerrel megtett lépések arányát a 3. táblázatban ismertetem. Minden példánál a kezdeti bal és jobb oldali határ 50° és 90° volt. Az első esethez tartozó eredményeket a 12. ábra mutatja, a második esetet a 13. ábrán mutatom be, végül a harmadik esetet a 14. ábra szemlélteti.

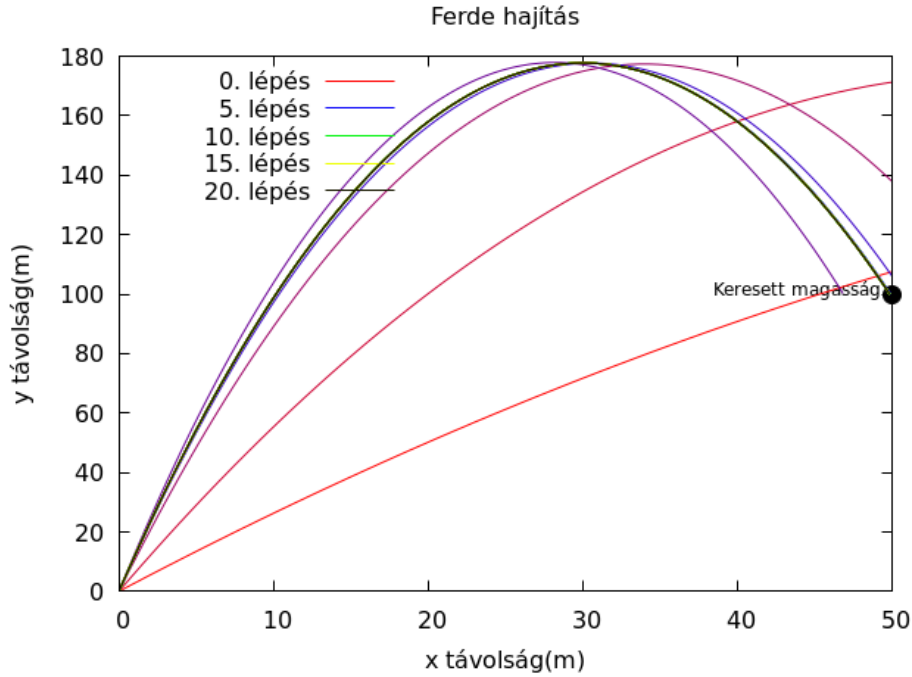
A 12-14. ábrákon látható numerikus megoldások az analitikus megoldásokkal összevetve működnek, tehát programképes a helyes paraméterbecslésre erre a differenciálegyenlet-rendszerre.



12. ábra. $y(10) = 20$ magasság eltalálása az α szög meghatározásával. A függőleges tengely jelöli az y, a vízszintes tengely jelöli az x koordinátáját az elhajított testnek.



13. ábra. $y(10) = 40$ magasság eltalálása az α szög meghatározásával. A tengelyek megegyeznek a 12. ábrával.



14. ábra. $y(10) = 100$ magasság eltalálása az α szög meghatározásával. A tengelyek megegyeznek a 12. ábráéval.

2. táblázat. Egyes ferde hajítási esetek és az ahhoz tartozó peremértékek (12-14. ábra).

Példa	$t[s]$	$y[m]$	$v_0[m/s]$
1.	10	20	52,4414197
2.	10	40	54,39027946
3.	10	100	59,26130694

5.3. Harmonikus rezgőmozgás esete

A harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete:

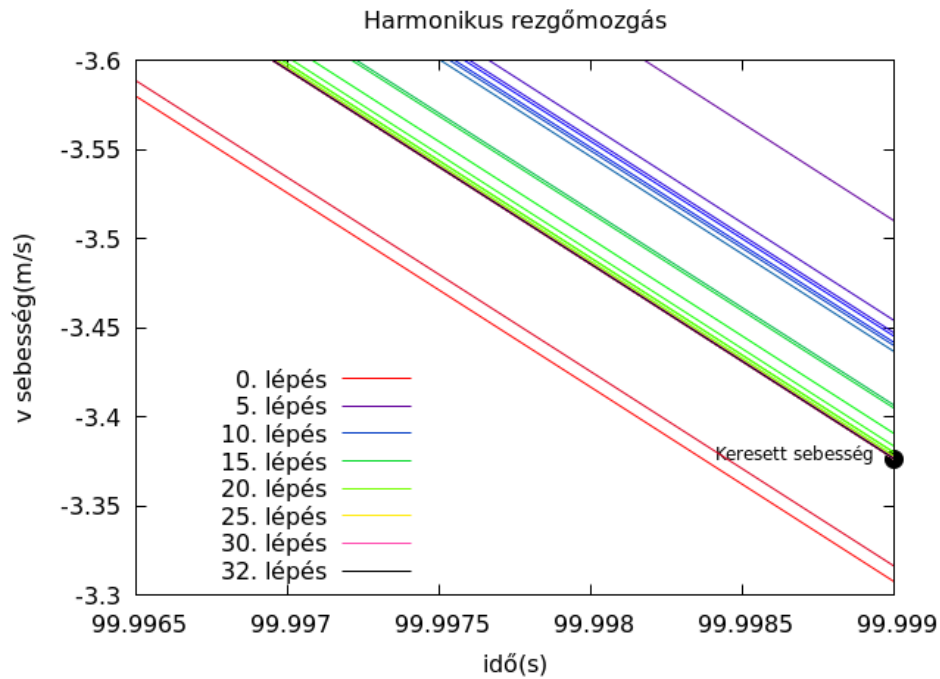
$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x \quad (19)$$

ahol D a rugóállandó és m az adott test tömege. A differenciálegyenlet megoldása:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (20)$$

$$v(t) = -A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (21)$$

Az itt lévő tesztelésben $D = 100 \text{ N/m}$, $m = 2 \text{ kg}$ és $t = 0$ előre meghatározott, ebből $x(0)$ értékét ismerem, illetve $t = 100 \text{ s}$ -ban $v(100) = -3,37661665 \text{ m/s}$ értéke is ismert. A megoldáshoz $v(0)$ szabad paramétert kell változtatni a megoldáshoz. Érdekes megjegyezni, hogy a SCORE függvény deriváltja ebben az esetben konstans: $\partial v(t)/\partial v_0|_{t=100} = \cos(100\omega) = 0,7660$. Emiatt a derivált értéke a kicsi Δx miatt könnyen 0 lehet, ezért ez a probléma alkalmas a nehezen konvergáló eset tesztelésére.



15. ábra. Egy m tömegű test v sebességének meghatározása $T = 100[s]$ időpillanatban.

A 15. ábrán látszik, hogy az egyes lépések megoldása követi az analitikus megoldás görbéjét.

3. táblázat. Ferde hajítási esetekhez és a harmonikus oszcillátorhoz tartozó összes megtett lépés és a felező módszerrel tett lépések arányát szemléltető táblázat(12-15. ábra). Látható, hogy a Newton-Raphson módszer könnyen konvergál a megoldáshoz.

Hajítás	Lépések	Felező módszer	Arány
1. eset	11	1	9,091%
2. eset	10	0	0%
3. eset	21	4	19,048%
Rezgőmozgás	33	15	45,46%

6. Kitekintés, jövőbeli lépések

A jövőben összehasonlítom a Brent módszert a Newton-Raphson módszerrel, ugyanis az előbbi módszer nem használ deriváltakat, és az utóbbihoz hasonlóan szuperlináris a konvergenciája. A numerikus deriválás kikerülése a határértékprobléma megoldásának pontosságát javítaná, azonban kérdés, futási időben mennyit veszünk a lassabb konvergencia miatt. Mindemellett következő lépésként tervezem kiegészíteni adaptív lépésközzel a negyedrendű Runge-Kutta módszert, hogy az adott problémának megfelelő lépésközt használja a program. A programom végső tesztje a Shakura-Sunyaev korongmodell lesz, ugyanis ez a modell analitikus megoldása mellett a Dotan és Shaviv (2011) koronghoz hasonlóan parametrizálható. A sikeres tesztet követően a Dotan modellt is implementálom, amivel pontosabb képet kapok a 2. fejezetben leírt f_{out} paraméter problémáról, valamint időfüggő egyenletet állíthatok fel a szél sebességét leíró f_w paraméterre is.

7. Összefoglalás és Diszkusszió

Jelen dolgozatomban ismertettem az árapály-katasztrófák (Rees, 1988) jelenségét, amely jelenségek teljes elméleti leírása jelenleg a csillagászat megoldatlan problémái közé tartozik.

A TDE-k által okozott fényjelenség egyik lehetséges modellje, amit a TiDE kód (Kovács-Stermeczky és Vinkó, 2023) is használ egy szuper-Eddington korongból és a hozzá tartozó szélkomponensből áll (Lodato és Rossi, 2011). Azonban, a korong fizikája, kifejezetten a szélkomponenssel távozó anyag mennyisége (f_{out}) és sebessége (f_w) alig ismert, pontos leírásához egy szuper-Eddington korongmodellre van szükség. A szakirodalomban legrészletesebben kidolgozott ilyen modell a Dotan és Shaviv (2011) által felépített karcsú korongmodell, melyet kvalitatív módon bemutattam.

Leírtam, hogy az ehhez a korongmodellhez tartozó differenciálegyenlet-rendszer két-dimenziós egyváltozós peremérték-problémára vezet, amelyhez saját numerikus megoldó algoritmust implementáltam. Az algoritmus egy egyváltozós shooting-módszer, amelyben egy felező-módszerrel biztosított globális konvergenciájú Newton-Raphson módszer végzi a hibafüggvény megoldását, míg minden lépéshez negyedrendű Runge-Kutta módszert használok a differenciálegyenletek megoldásához. A hibafüggvény deriválását numerikus deriválással valósítom meg.

Ezt követően az implementált algoritmusomat teszteltem két egyszerűbb differenciálegyenlet-rendszerre, a ferde hajításra és a harmonikus oszcillátor problémájára. Bemutattam, hogy a programkódom sikeresen megoldja ezeket a differenciálegyenleteket. Tehát az általam implementált numerikus algoritmus működik.

A kutatásom következő lépése lesz a Shakura és Sunyaev (1973) modell implementálása, amely már hasonló differenciálegyenlet-rendszer, mint a Dotan és Shaviv (2011) modell. Az így kapott eredmények kiindulási alapja a szuper-Eddington korongoknak is, így a jövőben az itt kifejlesztett numerikus apparátussal modellezhetem a szuper-Eddington akkréciós korongok viselkedését, tisztázva az f_{out} és f_w paraméterek viselkedését, időbeli lefolyását, árapálykatasztrófák esetén.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Kovács Gábornak a numerikus implementáció és a fizikai háttér megértésében nyújtott segítségéért és építő kritikáiért. Továbbá köszönettel tartozom Kovács-Stermeczky Zsófiának a téma felvetéséért, a téma megértésében nyújtott segítségéért és építő kritikáiért.

Hivatkozások

- Bonnerot, Clément és Wenbin Lu (2020. jún.). „Simulating disc formation in tidal disruption events”. MNRAS 495.1, 1374–1391. old. doi: 10.1093/mnras/staa1246. arXiv: 1906.05865 [astro-ph.HE].
- Dotan, Calanit és Nir J. Shaviv (2011. máj.). „Super-Eddington slim accretion discs with winds”. MNRAS 413.3, 1623–1632. old. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.18235.x. arXiv: 1004.1797 [astro-ph.HE].
- Evans, Charles R. és Christopher S. Kochanek (1989. nov.). „The Tidal Disruption of a Star by a Massive Black Hole”. ApJ 346, L13. old. doi: 10.1086/185567.
- Geroux, Chris M. és Robert G. Deupree (2011. ápr.). „Radial Stellar Pulsation and Three-dimensional Convection. I. Numerical Methods and Adiabatic Test Cases”. ApJ 731.1, 18. old. doi: 10.1088/0004-637X/731/1/18. arXiv: 1102.1923 [astro-ph.SR].
- Kovács-Stermeczky, Zsófia V. és József Vinkó (2023. márc.). „Comparison of Different Tidal Disruption Event Light Curve Models with TiDE, a New Modular Open Source Code”. PASP 135.1045, 034102, 34102. old. doi: 10.1088/1538-3873/acb9bb. arXiv: 2302.08441 [astro-ph.HE].
- Lodato, Giuseppe és Elena M. Rossi (2011. jan.). „Multiband light curves of tidal disruption events”. MNRAS 410.1, 359–367. old. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.17448.x. arXiv: 1008.4589 [astro-ph.CO].
- Mockler, Brenna, James Guillochon és Enrico Ramirez-Ruiz (2019. febr.). „Weighing Black Holes Using Tidal Disruption Events”. ApJ 872.2, 151, 151. old. doi: 10.3847/1538-4357/ab010f. arXiv: 1801.08221 [astro-ph.HE].
- Phinney, E. S. (1989. jan.). „Manifestations of a Massive Black Hole in the Galactic Center”. *The Center of the Galaxy*. Szerk. Mark Morris. 136. köt., 543. old.
- Press, William H., Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling és Brian P. Flannery (2007). *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. kiad. USA: Cambridge University Press. ISBN: 0521880688.
- Rees, Martin J. (1988. jún.). „Tidal disruption of stars by black holes of 10^6 – 10^8 solar masses in nearby galaxies”. Nature 333.6173, 523–528. old. doi: 10.1038/333523a0.
- Shakura, N. I. és R. A. Sunyaev (1973. jan.). „Black holes in binary systems. Observational appearance.” A&A 24, 337–355. old.
- Shaviv, Nir J. (2001. szept.). „The theory of steady-state super-Eddington winds and its application to novae”. MNRAS 326.1, 126–146. old. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.04574.x. arXiv: astro-ph/0008489 [astro-ph].
- Shiokawa, Hotaka, Julian H. Krolik, Roseanne M. Cheng, Tsvi Piran és Scott C. Noble (2015. máj.). „General Relativistic Hydrodynamic Simulation of Accretion Flow from a Stellar Tidal Disruption”. ApJ 804.2, 85, 85. old. doi: 10.1088/0004-637X/804/2/85. arXiv: 1501.04365 [astro-ph.HE].
- Strubbe, Linda E. és Eliot Quataert (2009. dec.). „Optical flares from the tidal disruption of stars by massive black holes”. MNRAS 400.4, 2070–2084. old. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15599.x. arXiv: 0905.3735 [astro-ph.CO].
- Szabó (2024). „Árapály-katasztrófák optikai fénygörbéinek vizsgálata”. Dipl. Eötvös Lóránd tudomány Egyetem - Természet Tudományi Kar.

Ulmer, Andrew (1999. márc.). „Flares from the Tidal Disruption of Stars by Massive Black Holes”.
ApJ 514.1, 180–187. old. doi: 10.1086/306909.

Függelék

A. Saját eredmények

C programozási nyelvben lekodoltam és alkalmaztam a negyedrendű Runge-Kutta módszert, a numerikus deriválás módszerét és a Newton-Raphson módszert, illetve a felező módszert. Ezek lefedik a shooting módszer egészét. A módszerek alapja a Press és mtsai. (2007) könyvből származik, de az ebben szereplő implementáció nem kifejezetten az általam kezelt tudományos problémára készült. Ebből kifolyólag, ahogyan a dolgozatban is kifejtem, saját algoritmust kellett terveznem. Tehát a numerikus megoldó program megtervezése, a részelemek összeállítása és az egész C programnyelvbeli implementáció az én munkám eredménye. Implementáltam minden feladathoz a SCORE és SETUP, illetve az ODE függvényeket és a WRAP függvényt. A teljes algoritmus validációjához szükséges feladatokhoz, ami a ferde hajítás és harmonikus oszcillátor példája, kiszámoltam analitikusan az eredményeket majd összehasonlítottam a numerikus eredményekkel, illetve ábrákat készítettem a Gnuplot ábrázoló programmal. A Runge-Kutta módszer validációjához kiszámítottam a numerikus eredményt és ábrázoltam azt. A dolgozatban szereplő moduldiagram és folyamatábrák is az én munkám eredményei. A dolgozatot, az ábrák elhelyezkedését és megjelenését, a feladatokhoz szükséges táblázatokat a LaTeX szövegformázó kódban szerkesztettem.