

A ciszlunáris NRHO pályák numerikus
generálása és a Lunar Gateway
TDK 2024

Szuchovszky Bertalan (V7D1XI)*

*Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi kar
Fizika Bsc. 2022. évfolyam*



Beadási határidő: 2025.01.08.

*Témavezető: Dr. Süli Áron, egyetemi adjunktus, *ELTE Fizikai és Csillagászati Intézet*

Kivonat

A cikk célja a korlátozott kör háromtest-probléma dinamikai modelljében periodikus, ciszlunáris NRHO pályák generálására egy korrekciós eljárás részletes ismertetése. A motiváció a korrekciós eljárás segítségével a Lunar Gateway űrállomás pályájának megbecslése, illetve a pályastabilitás elemi vizsgálata. A cikk törekszik az NRHO pályacsaládok elemi vizsgálatával magyarázatot adni a Lunar Gateway küldetés pályaválasztásának egy lehetséges okára, ezzel igazolva, hogy saját eszközökkel és modellekkel ki lehet találni, miért ezt a pályát választotta a NASA.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Elmélet, módszerek	3
2.1. Korlátozott kör háromtest-probléma	3
2.2. Lagrange-pontok	5
2.3. Newton-iteráció/Newton-módszer	6
2.4. Az L_1 és L_2 Lagrange-pontok stabilitása	7
2.5. Periodikus pályák	8
2.5.1. Differenciális korrekció	9
2.5.2. Numerikus folytatás	11
2.5.3. Poincaré-metszet	12
3. Eredmények	14
3.1. Első generálás	14
3.2. Lunar Gateway	14
3.3. Pályacsaládok generálása	17
3.3.1. L_2 NRHO család	17
3.3.2. L_1 NRHO család	18
4. Összefoglalás	19
5. Függelék	21
5.1. Táblázatok	21

1. Bevezetés

A NASA Lunar Gateway küldetésre (NASA [2024]) kijelölt pálya egy ciszlunáris NRHO pálya, ami az angol *Near-Rectilinear Halo Orbit* elnevezésből alkotott betűszó és magyarul "közel egyenes vonalú halo pálya". A ciszlunáris tér valójában a Föld és a Hold közötti űrre utal, de az L_2 (Hold külsőbbi terében található) Lagrange-pont felőli NRHO pályákat is ciszlunárisnak hívják még. Ez alatt olyan pályákat értünk, melyek az yz tengelymetszetben nagy e excentricitású nagyon megnyúlt ellipszis pályáknak tűnnek. Valójában ezek a pályák közel sem ellipszisek, sokkal komplexebb geometriával rendelkeznek, de a nevük és megkülönböztetésük innen származik.

A cél egy saját program írása az L_1 és L_2 NRHO családok numerikus generálása, és ezek a generált periodikus pályák közül a küldetésre kijelölt pálya kiválasztása a korlátozott háromtest-probléma modelljében. Kiderül, hogy ezek a pályacsaládok nem kerülnek meg a megfelelő Lagrange-pontokat, de mégis azokhoz tulajdonítjuk őket. Ennek az oka az, hogy az L_1 és L_2 NRHO pályacsaládokat az L_1 és L_2 halo családból származtatjuk, melyeknek jelentős része megkerüli a megfelelő Lagrange-pontját. Az eredményül kapott pályának adatait összehasonlítom a NASA által megadottakkal (NASA [2024]), az eltérésekre magyarázatot adok. Vizsgálom még elemi szinten a pályacsaládok stabilitását. Az általam írt program segítségével magyarázatot keresek arra, hogy miért az L_2 pályacsaládot választották a küldetésre.

A kód dinamikai alapjának a korlátozott kör háromtest-problémát (kkhttp/khttp, *circular restricted three-body problem*) vettem. Ez egy egyszerűsített modell, amiben majd a korrekciót elvégezve az eredményül kapott pálya pár periódusig periodikusan viselkedik. Ezért a tulajdonságáért ezt a modellt gyakran használják különböző küldetések valódi pályájának kiválasztására. A JWST L_2 - és a SOHO L_1 Lagrange-pont 'körüli' halo pályáját hasonlóképp választották ki a Nap-Föld rendszerben. Általában a kkhttp modellben generált pályák közül kiválasztanak bizonyos pályákat, például pályastabilitási index, vagy periódusidő alapján, amiket tovább vizsgálnak nagyobb pontosságú modellekben (Spreen [2021] 25. oldal: N-test efemerisz modell). Fontos kihangsúlyozni, hogy a kkhttp modellben kapott adatok és a valódi pályák adatai nem fognak egyezni, mert a kkhttp csak egy egyszerűsített modell. A valódi és a kkhttp adatok összehasonlítása a kutatásnak nem tartozik a céljai közé.

2. Elmélet, módszerek

2.1. Korlátozott kör háromtest-probléma

A korlátozott háromtest-probléma (kkhttp) során két primér (P_1, P_2) pontszerű test és egy elhanyagolható $m_3 \ll m_2$ és $m_3 \ll m_1$ tömegű, így P_1 és P_2 -re elhanyagolható hatású, P_3 harmadik tömegpont newtoni dinamikáját vizsgáljuk. A kör korlátozott háromtest-probléma során a két primér test, P_1 és P_2 , körpályán mozog. A két primér test koordinátáját baricentrikus koordinátarendszerben adjuk meg, azaz a közös tömegközéppontjuk lesz a $\mathbf{x} = (0, 0)$ koordináta. A két primér tömegpont koordinátáját a $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ tömegparaméter segítségével adjuk meg. A Föld-Hold rendszer tömegparaméterét Williams [n.d.] adatai alapján határoztam meg.

$$\begin{aligned}\mu &= 1.21505 \cdot 10^{-2}, \\ x_{P_1} &= (\mu, 0, 0), \\ x_{P_2} &= (\mu - 1, 0, 0),\end{aligned}$$

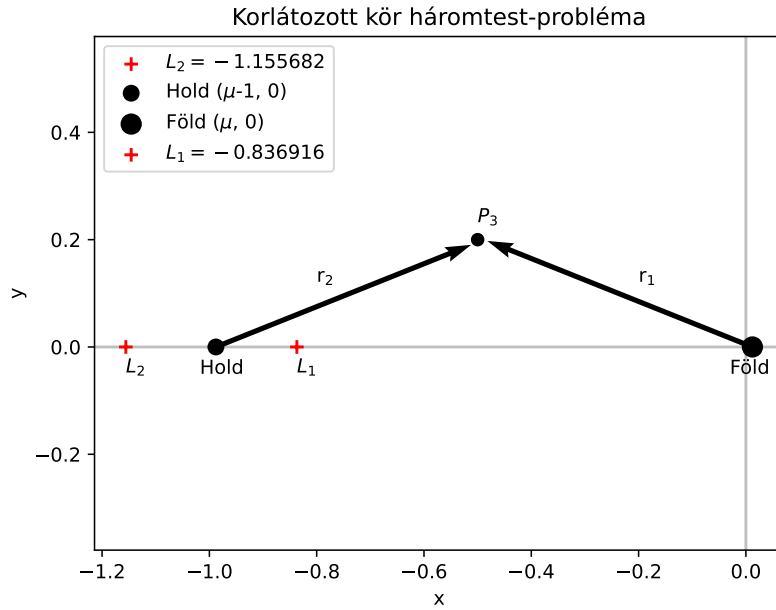
ahol x_{P_1} a nagyobb tömegű primér égitest x koordinátája. Ezzel definiáltuk a 3D térben a forgó koordinátarendszert melynek $x - y$ síkja a keringési sík. Egységrendszerben dolgozunk, ahol a

$d_{\text{Föld-Hold}} = 384400 \text{ km} = 1$ a Föld-Hold távolság és $n = k^2 = 1$ így az idő $t[nd]$ dimenziótlan mennyiség. Ebben a koordinátarendszerben P_1 és P_2 nyugalomban van.

A két primér tömegpontból P_3 -ra mutató vektorok hosszai legyenek r_1 és r_2 . Ezek a következő módon fognak kinézni a 3D koordinátarendszerünkben:

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.1.1)$$

$$r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.1.2)$$



2.1.1. ábra. 2D kkhtp ábra a kapott adatokkal a cislunáris térről.

Felírható a Newton-törvények alapján a potenciál:

$$\Omega = \frac{1}{2}((1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (2.1.3)$$

A potenciál alapján meghatározható P_3 minden pályájára egy konstans érték, a Jacobi-konstans

$$C = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.1.4)$$

A potenciál ismeretében felírhatóak a P_3 test mozgásegyenletei:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \mu \frac{(x + 1 - \mu)}{r_2^3}, \quad (2.1.5)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y \left(1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right), \quad (2.1.6)$$

$$\ddot{z} = -z \left(\frac{(1 - \mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right). \quad (2.1.7)$$

A numerikus integrálások során a kkhtp mozgásegyenleteinek első rendű differenciálegyenletekre visszavezetett modelljére volt szükségünk, ami így egy 6 dimenziós problémára vezet. Az állapotvektor $\mathbf{x}(t) = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)_t$ formában írható fel. Ez tartalmazza a P_3 tömegpont koordinátáit és a sebességkomponenseit egy adott t pillanatban. Az első rendű differenciálegyenlet-rendszerre visszavezetett modell a következő módon fog alakulni:

$$\dot{x} = v_x, \quad (2.1.8)$$

$$\dot{y} = v_y, \quad (2.1.9)$$

$$\dot{z} = v_z, \quad (2.1.10)$$

$$\dot{v}_x = 2v_y + x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \mu \frac{(x+1-\mu)}{r_2^3}, \quad (2.1.11)$$

$$\dot{v}_y = -2v_x + y \left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right), \quad (2.1.12)$$

$$\dot{v}_z = -z \left(\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right). \quad (2.1.13)$$

Látszik hogy ez az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor deriváltja lesz. Így ez a csatolt differenciálegyenlet-rendszer felírható egy ilyen egyszerű formában is:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.1.14)$$

ahol $\mathbf{f}$ -et a mozgásegyenletek alapján konstruáljuk. Ennek a differenciálegyenlet-rendszernek *Henri Poincaré* 1887-ben bebizonyította, hogy ez a differenciálegyenlet-rendszer nem integrálható.

Az idő szerinti numerikus integráláshoz meg kell adnunk egy tetszőleges $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ kezdőfeltételeket tartalmazó állapotvektort, ahogy vártuk is egy első rendű differenciálegyenlet-rendszerből. Ha időben ($t_0 \rightarrow t_f$, ahol $t_f = t_{\text{final}}$) propagáljuk ezt a kezdeti állapotot a megfelelő egyenletek ($\mathbf{f}$) szerint, a P_3 tömegpontnak az $\mathbf{x}_0$ -hoz tartozó pályáját fogjuk megkapni eredményül.

2.2. Lagrange-pontok

A Lagrange-pontokat *Joseph Louis Lagrange* fedezte fel 1772-ben. A Lagrange-pontok olyan pontok ahol P_3 a primér tömegpontok által kifejtett gravitációs erőterben relative egyensúlyban van. Ezek a pontok a potenciál gradienséből határozhatóak meg,

$$\nabla\Omega = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \frac{\partial\Omega}{\partial z} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.2.1)$$

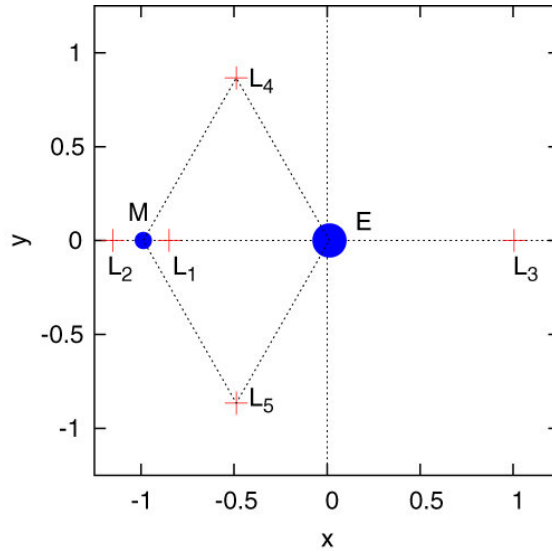
Ennek az egyenletnek 5 pont lesz a megoldása. Az L_1, L_2, L_3 Lagrange-pontok a P_1 és P_2 tömegpontokkal kollineáris pontok (Euler által meghatározott pontok). L_4 és L_5 pedig egyenlő oldalú háromszögeket fognak bezárni a két primér tömegponttal (2.2.1 ábra).

A ciszlunáris térben az L_1 és L_2 kollineáris Lagrange-pontokra lesz csak szükségünk. Ezen pontok helyét az x tengelyen ötödfokú egyenletek fogják meghatározni [Érdi Bálint \[1993\]](#) alapján.

$$\xi^5 + \epsilon(3-\mu)x^4 + (3-2\mu)x^3 - \mu x^2 - 2\epsilon\mu x - \mu = 0, \quad (2.2.2)$$

$$x_{L_1} = \mu - 1 - \xi, \quad (2.2.3)$$

$$x_{L_2} = \mu - 1 + \xi, \quad (2.2.4)$$



2.2.1. ábra. Lagrange-pontok elhelyezkedése a Föld-Hold kkhtp-ben. Forrás: [Barrabés et al. \[2013\]](#)

ahol $\epsilon = 1 \rightarrow L_2$ és $\epsilon = -1 \rightarrow L_1$ pontok x koordinátáit fogja megadni. Az y és z koordináták értéke 0, mivel kollineárisak P_1 és P_2 -vel (x tengelyen helyezkednek el).

A Lagrange-egyenletre (2.2.2) ötödfokú mivoltából nincs megoldóképlet (Abel-tétel), viszont Descartes-tétel alapján biztosan van 1db valós gyöke.

Iteratív módszerrel lehetséges a polinom valós gyökét meghatározni.

2.3. Newton-iteráció/Newton-módszer

A Newton-módszer egy iteratív zérushely közelítő módszer valós, nem lineáris függvényekre. A Lagrange-egyenlet megoldására ezt a módszert alkalmaztam. Az iterációhoz szükség van a Lagrange-polinomra (most f) és annak a deriváltjára,

$$f = \xi^5 + \epsilon(3 - \mu)\xi^4 + (3 - 2\mu)\xi^3 - \mu\xi^2 - 2\epsilon\mu\xi - \mu = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{df}{d\xi} = f' = 5\xi^4 + 4\epsilon(3 - \mu)\xi^3 + 3(3 - 2\mu)\xi^2 - 2\mu\xi - 2\epsilon\mu. \quad (2.3.2)$$

Az iteráció képlete:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \frac{f(\xi_i)}{f'(\xi_i)}. \quad (2.3.3)$$

A gyakorlatban még meg szokás adni egy tol toleranciaértéket (a kódban 10^{-14}), ha i léptetés után a következő (2.3.4) összefüggés igaz, akkor elmentjük ξ értékét mint zérushely.

$$f(\xi_i) < tol. \quad (2.3.4)$$

Ezen kívül fontos lekövetni $f'(\xi_i)$, a függvény deriváltjának is az értékét mielőtt megtennénk az $i \rightarrow i + 1$ léptetést, nehogy 0-val osszunk. Ebben az esetben $f'(\xi_i) = 0$, nincs megoldás, hibaüzenettel jelezzük!

Az iterációnak természetesen meg szokás adni még egy maximális iterációs számot, ha az alatt nincs konvergencia azt egy hibaüzenettel lehet jelezni.

A gyorsabb konvergencia érdekében fontos jó kezdőértékeket megadni. Egy jó becslési lehetőség mi esetünkben az f Lagrange-polinom μ szerinti sorbafejtése.

A ciszlunáris térben az L_1 és az L_2 pontok relevánsak, az x tengelyen a helyzetüket egy táblázatba (2.3.1) foglaltam, és feltüntettem Zimovan [2017] cikk 22. oldalán (2.2-es táblázat) található eredményeket is. Látható, hogy az eredmények 5 tizedes jegyig egyeznek. Az eltérést a μ tömeg-

x értékek	Saját	Zimovan [2017]
$ x_{L_2} $ []	1.155682	1.155682
$ x_{L_1} $ []	0.836916	0.836915

2.3.1. táblázat. Az x_{L_1} -hez tartozó ξ érték 8 iteráció után volt kisebb a toleranciaértéknél, az x_{L_2} -höz tartozó ξ érték 23 iteráció után.

paraméter értékében, illetve a tol toleranciaértékben való eltérés okozhatja.

2.4. Az L_1 és L_2 Lagrange-pontok stabilitása

A stabilitásvizsgálatnál lineáris közelítést alkalmaztam. A Lagrange-pontok fix pontok, azaz olyan $\mathbf{x}^*$ pontok, ahol $-\nabla\Omega(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$ (Tél and Gruiz [2006] 87. oldal). Fixpont környezetében első rendben sorba fejtve $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$ -et megkapjuk a lineáris közelítést,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*). \quad (2.4.1)$$

A stabilitás a $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)$ előjelétől függ. Az $\mathbf{F}$ erőtvénnyt a(z) 2.1.14 egyenlet tartalmazza. A mozgásegyenletek a Lagrange-féle fix pontok ($\mathbf{x}^* = (x^*, 0)$) körül

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \approx \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_{x^*} + x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \Big|_{x^*} + y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \Big|_{x^*} = x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \Big|_{x^*} + y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \Big|_{x^*}, \quad (2.4.2)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \approx y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \Big|_{x^*} + x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \Big|_{x^*}, \quad (2.4.3)$$

$$\Omega_{xx} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \Big|_{x^*}, \quad \Omega_{yy} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \Big|_{x^*}, \quad \Omega_{xy} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \Big|_{x^*}. \quad (2.4.4)$$

Definiáljuk a $\hat{\Omega}_{xx}$ mátrixot, ami a potenciál második parciális deriváltjait tartalmazza. Ezek alapján már fel lehet írni a két dimenziós $\hat{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mátrixot,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & 0 & 2 \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I}_{2 \times 2} \\ \hat{\Omega}_{xx} & \hat{C} \end{pmatrix}, \quad (2.4.5)$$

ahol $\hat{C}$ a Coriolis-erőből fakadó tagokat tartalmazza. A mátrixokkal felírt verzió 3 dimenzióra is érvényes az identitásmátrix $\hat{I}_{n \times n}$ dimenziószámát változtatva, illetve a $\hat{\Omega}_{xx}$ elemeinek $(x, y) \rightarrow (x, y, z)$ módosításával. A stabilitást $\hat{A}$ sajátértékei fogják meghatározni, n dimenziós probléma esetén n sajátértéke lesz,

$$(\hat{A} - \lambda \hat{I}) = 0 \rightarrow \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4.6)$$

L_1 pont sajátértékeinek valós része			
$Re(\lambda_1)$	$Re(\lambda_2)$	$Re(\lambda_3)$	$Re(\lambda_4)$
21.20105593	-21.20105593	-1.27603869	1.27603869

2.4.1. táblázat. L_1 Lagrange-pont sajátértékeinek valós része, az L_1 Lagrange-pont instabil fixpont.

L_2 pont sajátértékeinek valós része			
$Re(\lambda_1)$	$Re(\lambda_2)$	$Re(\lambda_3)$	$Re(\lambda_4)$
16.23264533	-16.23264533	-0.79351294	0.79351294

2.4.2. táblázat. L_2 Lagrange-pont sajátértékeinek valós része, az L_2 Lagrange-pont is instabil fixpont.

Az eredményül kapott λ_i sajátértékek alapján akkor stabil a $\mathbf{x}^*$ fixpont, ha λ_i tisztán képzetesek. Ha van valós részük, akkor $\mathbf{x}^*$ fixpont instabil. Elvégeztem a vizsgálatot az L_1 és L_2 pontokra, a λ_i sajátértékek valós részére a következő értékeket kaptam: A fixponttól mért távolság $\Delta x(t) = x(t) - x^*$ (Tél and Gruiz [2006] 90. oldal alapján) exponenciálisan fog nőni, amit fel lehet írni e^{λ_i} -ket tartalmazó lineárkombinációval,

$$\Delta x(t) \sim \sum_{i=1}^4 C_i e^{\lambda_i t}. \quad (2.4.7)$$

Ez alapján ki lehet jelteni, hogy az L_1 és L_2 pontok instabil fixpontok és L_1 esetében gyorsabban nő a fixponttól mért távolság. Ezt várjuk, hiszen az L_1 pontra a Föld és Hold (általánosan két primér) között kialakuló nyeregpont esetében élesebb maximumot várunk mint az L_2 pontra, mivel L_1 a két primér között helyezkedik el ($\Omega \sim r^{-1}$). Ez jelentősen befolyásolja majd a pályák alakját is és a pályastabilitást. Az L_1 halo pályák generálásánál a numerikus integrátor által összeszedett hiba nagyobb eltérésekhez vezethet, nem maradnak annyi ideig periodikusak a pályák mint az L_2 halo pályák esetében.

2.5. Periodikus pályák

Az L_1 és L_2 Lagrange-pontok instabilitása miatt a periodikus megoldások létezése egyáltalán nem triviális, ám *Henri Poincaré* 1881-ben bebizonyította, hogy léteznek periodikus pályák a korlátozott háromtest-probléma modelljében. A kkhtp modellben periodikus pályák kezdő állapotának keresése differenciális korrekcióval történik. Egy pálya akkor periodikus, ha eleget tesz a következő feltételnek:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T), \forall t, \quad (2.5.1)$$

ahol T a periódusidő.

A numerikus integrálások futási idejét csökkenthetjük azzal, ha keresünk további szimmetriai megfontolásokon alapuló feltételeket. Ilyen a többek között a halo pályákra is használt feltétel, miszerint elég csak a periódusidő feléig integrálni és akkor teljesül a következő feltétel:

$$\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t = T/2). \quad (2.5.2)$$

Ez alapján lehet már periodikus pályákat keresni, viszont szigorúan véve a(z) 2.5.1 képlet határozza meg általánosan a periodicitást.

2.5.1. Differenciális korrekció

A cél olyan kezdőfeltételek generálása, amiket integrálva periodikus pályákat kapunk. Erre egy egyszerű belövéses módszert használtam. Ez egy variációs módszer, ami a bemeneti tipp kezdőértékeket egy (pl szimmetriából fakadó) periodicitási feltétel alapján variálja, és visszatér olyan kezdőértékekkel, melyek eleget tesznek a feltételnek.

Az állapotvektoron kívül még a periódusidőt is meg kell adni, így a korrekció elején a kezdő becslés vektor felírható általános alakban:

$$\mathbf{X} = (x_1(t=0), x_2(t=0), \dots, x_n(t=0), \dot{x}_1(t=0), \dots, \dot{x}_n(t=0), T). \quad (2.5.3)$$

A korrekció kezdete előtt a 7 komponensből tetszőlegesen kiválasztunk és lefixálunk egyet, ez lesz a megoldás **paramétere** (2.5.2). Minden másik komponens variálni fogunk.

Ennek a kezdeti vektornak valamennyi k -tól m komponensére fel lehet írni egy feltételt,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (x_k, \dots, x_{m-1}, x_m, \dot{x}_k, \dots, \dot{x}_{m-1}, \dot{x}_m) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (2.5.4)$$

Iteratív módszerrel keressük $\mathbf{X}_k$ vektort, ami teljesíti a feltételeket,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{0}. \quad (2.5.5)$$

Ilyenkor $\mathbf{X}_k$ korrigált vektor fogja tartalmazni az $\mathbf{x}_{0,k}$ korrigált állapotvektort a $t = 0$ időpontban és a pálya T periódusidejét.

A(z) 2.1.14 egyenletben szeretnénk az állapotvektort variálni. Ehhez bevezetünk egy $A(t)$ mátrixot [Tél and Gruiz \[2006\]](#), a Jacobi-mátrixot,

$$\hat{A}(\mathbf{x}(t)) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}. \quad (2.5.6)$$

Ez az $n \times n$ -es mátrix (esetünkben 6×6) tartalmazza a mozgásegyenletek parciális deriváltjait az állapotvektor vektorkomponensei szerint. Ezzel már el tudjuk végezni a variálást,

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{A}(\mathbf{x}(t)) \delta \mathbf{x}(t), \quad (2.5.7)$$

viszont itt még nem tudunk semmit sem $\delta \mathbf{x}(t)$ értékéről. Jó lenne ezt a kezdeti állapottal valahogy kifejezni. Ezt ugyanúgy egy variálással tehetjük meg,

$$\delta \mathbf{x}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}(0)} \delta \mathbf{x}(0). \quad (2.5.8)$$

A parciális deriváltat általánosan fel lehet írni a következő formában:

$$\hat{\Phi}(t_2, t_1) = \frac{\partial \mathbf{x}(t_2)}{\partial \mathbf{x}(t_1)}. \quad (2.5.9)$$

A $\hat{\Phi}(t_2, t_1)$ mátrixot állapotátmenet-mátrixnak (state transition matrix, STM) hívják a kaotikus dinamikában. A definíció alapján is látszik, hogy ez egy általános $\mathbf{y}$ állapotvektort t_1 időpontból t_2 időpontba viszi át:

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\Phi}(t, 0) \mathbf{y}(0). \quad (2.5.10)$$

Ugyanakkor nem nehéz észrevenni azt sem, hogy a kezdetben felírt variált egyenlet (2.5.7) átírható egy elsőrendű differenciálegyenletre $\hat{\Phi}$ -re,

$$\dot{\hat{\Phi}}(t, 0) = A(\mathbf{x}(t)) \hat{\Phi}(t, 0). \quad (2.5.11)$$

A kezdetben $\hat{\Phi}(0,0) = I_{n \times n}$ értéket veszi fel, ez is definíció alapján egyértelműen látszik. A $\hat{\Phi}$ mátrix a differenciális korrekció egyik legfontosabb része, mert a segítségével le tudjuk követni, hogy egy kis változtatás (perturbáció) a kezdeti állapotvektorban hogyan fejlődik időben. A korrekció során végzett kis módosítások időbeli fejlődését az $\hat{A}$ mátrix segítségével követi a kód. Kitekintésként, $a(z)$ 2.5.11 egyenlet segítségével is lehet pályastabilitást vizsgálni Floquet-elmélet alapján (Spreen [2021]).

Esetünkben halo pályákat keresünk. A futási idő csökkentése érdekében nem T teljes periódusra szeretnénk integrálni. Ilyenkor is a szimmetriai megfontolások alapján találunk ki egy feltételt a kezdeti állapotvektor alapján. A halo pályák a kkhtp-ban szimmetrikusak az xz tengelyre. Ez alapján érdemes kezdetben $y = 0$ értéket megadni az $\mathbf{x}_0$ állapotvektorban. Ezen kívül szeretnénk, hogy csak y irányban mozduljon el az $(x_0, 0, z_0)$ koordinátákból, hogy ténylegesen vissza tudjon térni a kezdeti pozíciójába és ne spirál szerű pályán mozogjon. Így a kezdő állapotot fel tudjuk írni ilyen alakban:

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, 0, z_0, 0, v_{y0}, 0). \quad (2.5.12)$$

A belövéses módszerben az $\mathbf{x}_0$ kezdeti állapotvektor z komponensét érdemes fixen tartani (egy másik lehetőség a Jacobi-konstans fixálása) és az x_0, v_{y0}, T értékeket variálni. A kezdeti tippet meg lehet határozni akár kéttest-probléma alapján is, mivel Lagrange-féle relatív egyensúlyi pontok környékén keresünk pályákat, vagy egy korábbi munkában megadott érték alapján is lehet dolgozni. Én a Zimovan [2017] cikkben található értékeket használtam fel.

Korábbi levezetés alapján már tudjuk, hogy a $\hat{\Phi}(T, 0)$ mátrix segítségével fogjuk nézni az időfejlődést, viszont nekünk a T értéket is variálnunk kell. Ehhez úgy kell megírni a programot, hogy integrálás során kövesse az xz tengelyen való átmeneteket, azaz amikor $y = 0$. Fontos megjegyezni, hogy az első ilyen átmenet rögtön indításkor $t = 0$ időpontban már megtörténik. Érdemes ezt észben tartani és ellenőrizni mindig a korrekció után kapott T_k értéket, nehogy $T = 0$ esetet találjunk.

A $\hat{\Phi}_{0 \rightarrow t} = \hat{\Phi}(t, 0)$ időbeli integrálás során Runge-Kutta-módszerrel integráltunk. Ennek a módszernek a rövid összefoglalása megtalálható Érdi Bálint [1993] cikkjében. Az integrálást adaptív RKF5(4) integrátorral végzi a kód, ez a Runge-Kutta módszer 4-ed és 5-öd fokú verziójának együttes alkalmazását jelenti. Ilyenkor a hibát a 4-ed fokú fogja kezelni, míg a lépésközöket az 5-öd fokú módszer alapján végzi.

A halo pályák korrekciójára már megvan a kezdeti vektor (2.5.3), már csak a korrekciós feltételeket (2.5.4) kell megadni. Lehetne simán a $t = T$ esetet vizsgálni, ezt az $y = 0$ átmenetet a sík v_{y0} szerinti irányításával találjuk meg (vagy csak simán a 3. $y = 0$ átmenet). Azt szeretnénk, hogy az állapotvektor $\mathbf{x}(T)$ egyezzen meg a kezdeti $\mathbf{x}_0$ állapotvektorral. Ilyenkor minden elemre fel tudunk írni egy feltételt,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(T)) = \begin{pmatrix} x(T) - x_0 \\ y(T) \\ z(T) - z_0 \\ v_x(T) \\ v_y(T) - v_{y0} \\ v_z(T) \end{pmatrix}_{y=0 \text{ átmenet}} = \mathbf{0}. \quad (2.5.13)$$

Ebben az esetben $y(T) = 0$ alapvetően teljesül az átmenetvizsgálat miatt, ez alapján tudjuk meghatározni T_k értékét. A többi feltételre pedig például Newton-iteráció segítségével keressük azokat a kezdeti vektorkomponenseket, amikre teljesül a feltétel, mivel gyököket kell keresni. Ez 4 komponens értékére való keresést jelent (z fix, $y(T) = 0$ automatikusan megvan). Ez egy biztos módszer, viszont a gyakorlatban ennél van egy egyszerűbb megoldás is, ami jelentősen csökkenti

a futási időt.

A szimmetriai megfontolások alapján elég, ha csak $t = T/2$ ideig integrálunk és arra szabunk ki egy feltételt. A T korrekcióját az első $-v_y$ irányítású $y = 0$ átmenetnél fogjuk megkapni (2. $y = 0$ átmenet). Az átmeneti időpont alapján megkapjuk $T_k/2$ értékét és ezzel meg is van a korrigált periódusidő. Viszont a feltételeket módosítanunk kell. Az átmenet miatt $y(T/2) = 0$ alpból, ez automatikusan teljesül ismét. A nem nulla komponensekre most nem tudunk semmit mondani azon kívül, hogy maradnak nem nulla értékűek. Esetleg z előjeléről tudnánk mondani, hogy átfordul, de ez nem egy erős feltétel. Viszont azt megkövetelhetjük a pálya apocentrumában is, hogy azok a tagok, amik a pericentrumban nulla értéket vesznek fel, itt is nullák legyenek. Így akkor egy 3 dimenziós feltételvektort tudunk felírni,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(T/2)) = \begin{pmatrix} y(T/2) \\ v_x(T/2) \\ v_z(T/2) \end{pmatrix}_{y=0 \text{ átmenet}} = \mathbf{0}. \quad (2.5.14)$$

Ebben az esetben a megfelelő $y = 0$ átmenet megtalálása után kell olyan x_0 és $v_{y,0}$ megoldásokat keresni iteratívan, hogy $v_x(T/2) = v_z(T/2) = 0$ legyen ebben az időpontban. Szeretném újból felhívni a figyelmet arra amit korábban már említettem, hogy érdemes z értékét fixen tartani. Ez azt jelenti, hogy arra nem korrigálunk. Így csak 2 változóra kell gyököt keresni.

A generálás során érdemes *ValueError* segítségével jelezni, ha nem találunk megfelelő $y = 0$ átmenetet (pl a várt 2 helyett csak 1 van, $t = 0$ -ban), illetve *RuntimeError* segítségével, ha a korrekciós módszer nem konvergál, azaz nem találunk a gyökkeresés során megoldást a megadott maximális iterációszámán belül. A *ValueError* esetén lehet elég csak a kezdeti T tippünk értékét növelni. A *RuntimeError* esetén viszont érdemes lehet újraszámolni a kezdeti tippünket, vagy megnézni, biztos jól írtuk-e be a koordinátákat.

Ezzel elvégezzük egy tipp $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_0, T)$ bemeneti vektorra a korrekciót és visszkapunk egy $\mathbf{X}_k = (\mathbf{x}_{0,k}, T_k)$ korrigált vektort, ami tartalmazza a korrigált kezdőfeltétel állapotot és a korrigált periódusidőt. Ezzel sikeresen legeneráltuk egy feltehetőleg periodikus halo pálya kezdőfeltételét. Ezt numerikusan integrálva $\hat{\Phi}_{0 \rightarrow t_f}$ tetszőleges t_f időig, kirajzolódik P_3 pályája. Érdemes még ilyenkor ellenőrizni például Poincaré-metszet segítségével, hogy ténylegesen periodikus-e a pálya. Ha igen, stabilan az is marad-e, ezt a 2.5.3 bekezdésben bővebben tárgyalom.

2.5.2. Numerikus folytatás

Eljutottunk oda, hogy van egy jó $\mathbf{X}_k$ megoldásunk. Szeretnénk ez alapján több, hasonló pályát találni, azaz egy pálya családot szeretnénk legenerálni.

A numerikus folytatási módszerek közül elég a legegyszerűbbet választani, a numerikus paraméteres folytatást (natural parameter continuation algorithm/method [Spreen \[2021\]](#)). Általánosan tegyük fel, hogy van egy $\mathbf{y}_0$ kezdőfeltétel vektorunk. A megoldásunk függ még egy olyan λ paramétertől, amit nem variálunk a megoldás során. Tegyük fel, hogy ezek konvergálnak, azaz tényleg egy megoldását adják egy adott $\mathbf{f}$ problémának:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \lambda) = 0. \quad (2.5.15)$$

Ha ez teljesül, felmerül a kérdés, hogy $\lambda + \Delta\lambda$ paraméter is megoldás? Az állítás az, ha $\Delta\lambda$ "elég kicsi" (a probléma határozza meg), akkor $\mathbf{y}_0$ kezdeti becslés és $\lambda + \Delta\lambda$ is konvergálni fog,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \lambda + \Delta\lambda) = 0. \quad (2.5.16)$$

A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy tegyük fel, találtunk egy $\mathbf{X}_{k,0} = (\mathbf{x}_{0,k}, T_k)$ megoldást. A korrekció során fix z_0 értéke, ez lesz a paraméter (lehet x_0 , T , $v_{y,0}$ vagy akár a jacobi konstans is, mindegyiktől függ az eredmény). Az általam választott paraméter már eleme az $\mathbf{X}_{k,0}$ vektornak, így $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \lambda + \Delta\lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{0,k}(\lambda + \Delta\lambda)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{0,k}(z_0 + \Delta z), T)$. Kiválasztunk egy kellően kicsi Δz lépést. A korrigált $\mathbf{x}_{0,k}$ vektorban írjuk át a paramétert:

$$\mathbf{x}_{0,k}(z_0 + \Delta z) = (x_{0,k}, 0, z_{0,k} + \Delta z, 0, v_{y,0}, 0). \quad (2.5.17)$$

Ezzel az új kezdeti állapottal futtassuk le újból a korrekciót. A korrekció után egy új $\mathbf{X}_{k,1}$ megoldást fogunk kapni. Ha vesszük az i -edik $\mathbf{X}_{k,i}$ megoldást, a hozzá tartozó kezdeti becslést felírhatjuk a következő módon:

$$\mathbf{X}_i = (x_{0,i-1}, 0, z_{0,i-1} + \Delta z, 0, v_{y0,i-1}, 0, T_{i-1}), \quad (2.5.18)$$

ahol a vektor elemei az $i - 1$ -edik korrigált $\mathbf{X}_{k,i-1}$ megoldás elemei.

Olyan paramétereket érdemes kiválasztani, amire ténylegesen tudunk egy "kicsi" $\Delta\lambda$ értéket adni úgy, hogy a rendszer erre a kis lépésre megfelelően érzékeny legyen. A $\Delta\lambda$ lépés rossz megválasztása két esethez vezethet:

1. A korrekció $\lambda + \Delta\lambda$ lépés után konvergál, de az eredeti kiindulási megoldást kapjuk vissza.
2. A korrekció $\lambda + \Delta\lambda$ lépés után nem konvergál

Ezt a módszert annyiival lehet továbbfejleszteni, hogy a diszkrét léptetéseket adaptív lépésmérettel végezzük el.

Ha a z szerint folytatjuk a generálást, lesz egy olyan maximális z érték, amit ha tovább akarunk léptetni, a korrekcióban a gyökkeresés nem fog már konvergálni. Ilyen esetben is lehet folytatni a generálást, csak más paraméter alapján. A folytatási paraméterek ügyes változtatásával le lehet generálni a teljes halo családot. Én csak az NRHO-kat és pár közeli halo pályát generáltam le, mivel nekem csak ezekre volt szükségem.

Fontos megjegyezni, hogy vannak más, pontosabb módszerek is mint például az ívhossz folytatás (Arc-length/pseudo arc-length continuation) erről bővebben [Spreen \[2021\]](#) ír.

2.5.3. Poincaré-metszet

Egy dinamikai rendszert felírhatunk általános formában,

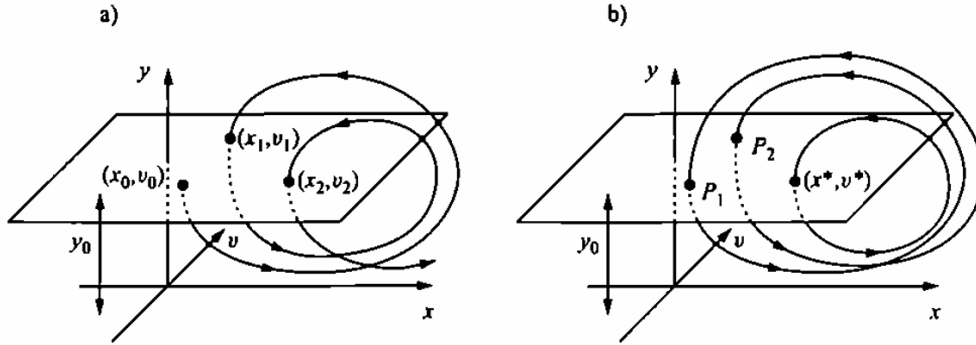
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5.19)$$

Ez felfogható úgy is mint egy térbeli áram. Ennek az áramnak akarjuk az időfejlődését valami módon lekövetni, például egy leképezéssel. A leképezésből kapott eredmények alapján pedig szeretnénk valamit mondani a rendszer viselkedéséről, esetünkben, hogy periodikus-e.

Ahogy [Tél and Gruiz \[2006\]](#) 239. oldalán is tárgyalják 2D térbeli problémára, számunkra is érdemes egy sík diszkrét metszéspontjaiban követni az időfejlődését a rendszernek. [Tél and Gruiz \[2006\]](#) a metszéspontok egymásutánjával a következő módon definiálták a Poincaré-leképezést:

$$(x_{n+1}, v_{x,n+1}) = M(x_n, v_{x,n}). \quad (2.5.20)$$

Feltéve, hogy a leképezés síkja, azaz Σ Poincaré-metszet, egy irányított sík. Az irányítást a metszetnek (általában) a sebesség iránya adja meg. Ez a sík elmetezi a teljes fázisteret (2.5.1 ábra), ezért hívják Poincaré-metszetnek. Ez csak egy gyors bemutatás, [Tél and Gruiz \[2006\]](#) 239. oldalától egy bővebb és pontosabb leírás olvasható a leképezésről.



2.5.1. ábra. Poincaré-leképezés. Forrás: Tél and Gruiz [2006] 6.1-es ábra.

A kkhtp-ban generált halo pályákra alkalmazzuk a Poincaré-metszetet! A már korábban tárgyalt szimmetriai megfontolások alapján bevezetett $y = 0$ átmenetet követő függvényünk tökéletes lesz a metszet kijelölésére. Így bevezetjük a $\Sigma^{y=0}$ síkot (ezt csak kényelmi okokból tesszük, a sík választása tetszőleges, ugyan azt fogjuk kapni). A metszet irányítását így v_y előjele fogja megadni $\Sigma_{v_y}^{y=0}$. Ezzel redukáltuk a 6 dimenziós problémát egy 4 dimenziósra. Ennek a 4 dimenziós problémának a tulajdonságait pedig a síkra vett leképezéssel, azaz a metszéspontokkal fogjuk tudni elemezni. Ahogy korábban említettem, lehet a dinamikai rendszerre mint egy áramra gondolni. Ha periodikus a rendszer, azt várjuk, hogy a trajektória z, x függvényében mindig ugyan abban a pontban metszik a $\Sigma_{v_y}^{y=0}$ síkot, azaz ugyan azon a ponton keresztül áramoljon át a síkon.

A megvalósítása ennek úgy történik, hogy keressük a $\Sigma_{v_y}^{y=0}$ sík metszéspontjait. Ehhez először a rendszert több, $t = n \cdot T$ periódusig futtatjuk sűrű mintavételezéssel. A futtatás során mentjük az $y = 0$ átmeneteket. Az átmenetekből v_y előjele alapján kiszűrjük az irányításunknak megfelelő adatokat. Ezután lineáris interpolációval és iteratív felezési módszerrel fogjuk megközelíteni a síkot. Erre azért van szükség, mert enélkül az adatpontok nem egy pontot mutatnának, hanem egy elmaszatolt foltot. Ez első rendben egy jó módszer, így nagyjából megkapjuk a metszéspontot. Fontos megjegyezni, hogy ilyenkor sem tökéletesen egy pont lesz a metszéspont, de nagyon kicsi, elhanyagolható lesz a pontok között a távolság ($\sim 10^{-10} - 10^{-12}$). Ha ábrázoljuk a metszetre kapott értékeket $z(x)$ függvényében megkapjuk az átmenet térbeli helyét, ami így egy pont lesz, feltéve, ha a megoldásunk periodikus. Számunkra jelenleg ennyi elég lesz.

Érdekességgként megemlítem, hogy az L_1 és L_2 pontok instabilitása miatt lehet találkozni olyan pályákkal is, amiknek $\Sigma_{v_y}^{y=0}(z(x))$ Poincaré-plotján nem egy pont, hanem valamilyen szabályos alakzatot követő pontok lesznek láthatóak, például 3 jól elkülönülő diffúz paca a pontokból, amiket összekötve egy egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ezeket *kváziperiodikus* pályáknak hívják. A kkhtp modellben generált pályákat ha nagyobb pontosságú modellekben tovább vizsgáljuk (elég az is, ha a primér testeknek a pályáinak adunk excentricitást, de a perturbálatlan N-test efemerisz modellben is így lesz), akkor gyakran ilyen eredményeket kapunk. A kkhtp modellben kváziperiodikus pálya generálásához a korrekció során a feltételt kell módosítani,

$$\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t) = 0 \rightarrow |\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)| < \epsilon,$$

ahol $0 < \epsilon \ll 1$ egy toleranciaérték.

3. Eredmények

3.1. Első generálás

A halo pályákra írt differenciális korrekció függvényt alkalmazva korrigálunk egy kezdeti becslést. A becslést az L_2 NRHO táblázatból (Spreen [2021] függelék) választottam, és $T = 5$ periódusidőt becsültem (így biztos lesz átmenet),

$$\mathbf{x}_0 = (-1.011035058, 0, -0.1731500000, 0, 0.078014119, 0)_{T=5}. \quad (3.1.1)$$

Természetesen lehet kéttest-probléma alapján is egy becslést adni és a kapott eredménnyel az egész halo családot generálni, de egyszerűség és összehasonlítás kedvéért egy olyan kezdőfeltételt választottam, ami már biztos NRHO.

Erre elvégezve a korrekciót megkapjuk egy L_2 déli NRHO kezdeti állapotvektorát és periódusidejét,

$$\mathbf{x}_k(t = 0) = (-1.011035682, 0, -0.17315, 0, 0.078015219, 0)_{T=1.363217839}. \quad (3.1.2)$$

Nagyon hasonló eredményt kaptam, tehát a korrekciós folyamat helyesen működik. Az eltéréseket a μ értéke, a numerikus integrátor típusa és a korrekciós eljárás különböző lépései során beállított toleranciaértékek okozzák (nekem mindenhol 10^{-14} , nyilvánosan Spreen [2021] által használt értékek nem voltak elérhetőek a dolgozatom írása során).

A pályacsaládok generálásánál is látszani fog, hogy sok esetben nagyon közeli értékek szerepelnek a kezdeti állapotvektorokban. Ez alapján integráltam a pályát $t = 3T$ ideig és ábrázoltam (3.1.1 ábra).

A pályákat ábrázoltam még különböző tengelymetszetekben az értelmezhetőség kedvéért (3.1.2 ábra).

A $t = 3T$ azt jelenti, hogy a pálya 3 alkalommal metszi az irányított $\Sigma_{v_y > 0}^{y=0}$ síkot. Az $x(z)$ Poincaré-metszet ábrázoltam (3.1.3). A kapott x , z , v_x és v_z adatpontokat egy táblázatban tüntetem fel. A táblázat tartalmazza még az adatpontok szórását, avagy hibáját.

Adatpont	1	2	3	σ
x	-1.01103297	-1.01103504	-1.01102364	4.96e-6
z	-0.17314573	-0.17314254	-0.17313956	2.52e-6
v_x	-2.11e-5	-3.76e-5	-4.88e-5	1.14e-5
v_z	-0.0001373	-0.0002504	-0.0003415	8.35e-5

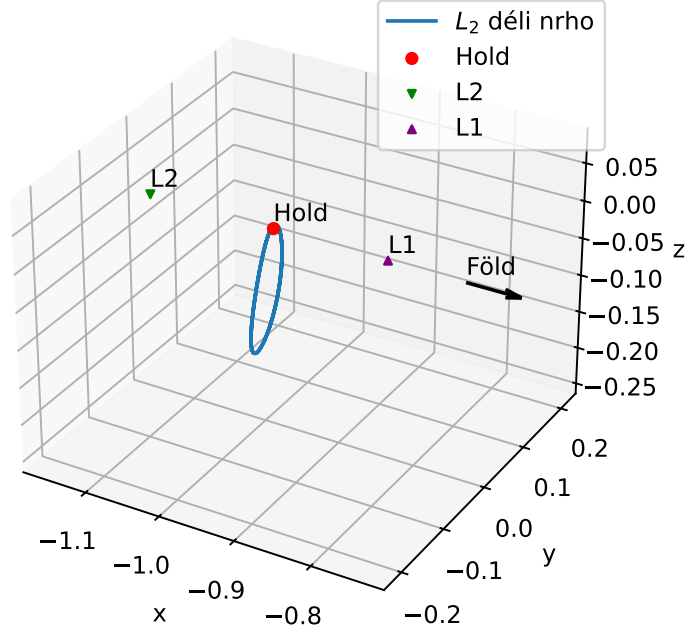
3.1.1. táblázat. Poincaré-metszet adatpontjai

Az adatpontok szórása a $z(x)$ ábrázolás során nagyságrendileg elhanyagolható, a v_x és z_x adatpontoknál viszont elég nagy. Ez azért van, mert v_x és v_z értékeik nagyságrendileg kicsik, hiszen $y = 0$ átmenetre előírtuk feltételnek, hogy $v_x = v_z = 0$. Itt az adatpontok értéke nagyságrendileg $v_x = v_y \approx 0$. A 0-tól való eltérés oka a lineáris interpoláció és a felezési módszer maximum iterációs száma. Pontosabb értékeket az iterációs szám növelésével és például köbös interpolációval lehet kapni, de nagyságrendek alapján ez a megoldás is megfelel.

3.2. Lunar Gateway

A Lunar gateway adatairól a NASA [2024] oldalon olvashatóak az adatok. Holdközben $r_{\text{peri}} = 1500\text{km}$ a távolsága a Holdtól a pályának és Holdtávolban $r_{\text{apo}} \approx 70000\text{km}$ (Spreen [2021] szerint 71000km , ezt a számításaimban figyelembe vettem). A pálya egy 9:2 szinodikus rezonáns pálya,

Kezdeti L_2 nrho becslés korrigált pályája



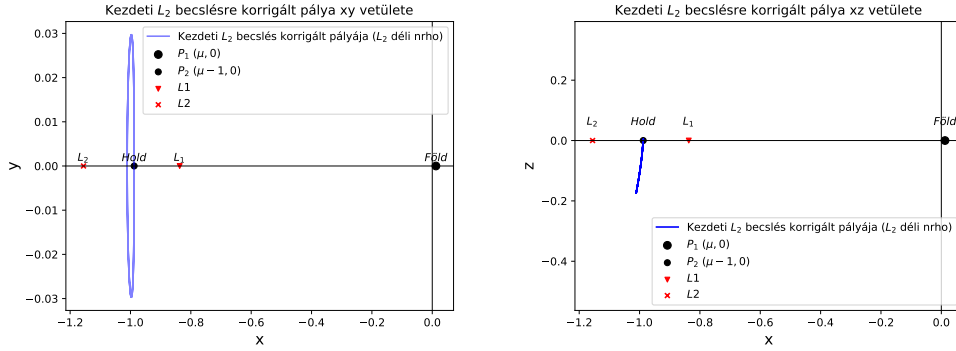
3.1.1. ábra. Első generálás 3D plot.

azaz a periódusidő $T \approx 6.562$ nap lenne pontosan, az oldalon $T \approx 7$ nap van, több cikk pedig $T = 6.5$ nap értéket említ. Még azt lehet tudni, hogy a pálya leggyorsabb részén, azaz perihéliumban $v_y \approx 3.2 \frac{km}{s}$ lesz a sebessége. Ezek alapján kell egy becslést adnunk, amit utána korrigálunk. Először is át kell váltanunk a mi egységrendszerünkbe az adatokat, ahol 1 a Föld-Hold távolság. Ehhez a Hold Földhöz képesti peri- és (Williams [n.d.]) apocentrumban vett távolság átlagát kell meghatározni. Így megkapjuk, hogy $d_{F-H} = (d_{F-H,peri} + d_{F-H,apo})/2 = 384400 km$. Ezek után már csak át kell váltani az adatokat és meg lehet adni egy kezdő tippet. A pályák elhajlása miatt $z = 69000 km$ -t állítottam be és az alapján x értékét kerestem,

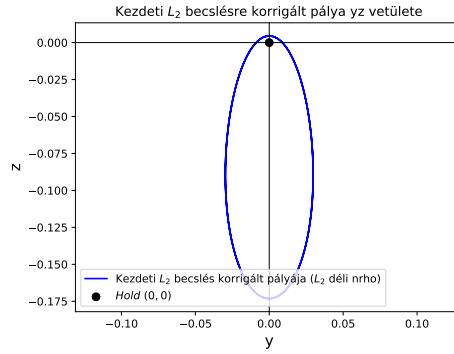
$$\sqrt{((x_{L_1} + \zeta - x_{P_2})d_{F-H}[km])^2 + 69000^2 km^2} \approx 70000 km, \quad (3.2.1)$$

ahol keressük ζ értékét amire teljesül a közelítés. Természetesen ez egy másodfokú egyenlethez vezet ζ értékére, a kisebb értéket választása adja meg a helyes becslést. A $\zeta = 0.11509247324293478$ érték esetén a bal oldal értéke $70014.28425685714 km$ ami nagyjából meg is felel. Természetesen meg lehet határozni pontosan is ζ értékét, de a korrigáció során ez csak nagyon minimális eltéréshez vezet. Így a becslésben $x = x_{L_2} + \zeta$ lesz.

Az így kapott becslésre is elvégeztem a korrekciót, majd az L_2 NRHO család ábrázolásánál



(a) Kezdeti L_2 NRHO xy síkban. A jobb lát- (b) Kezdeti L_2 NRHO becslés korrigált pályája xz síkban. Egyenlőek a tengelyek.



(c) Kezdeti L_2 NRHO becslés korrigált pályája yz síkban. A tengelyek egyenlőek

3.1.2. ábra. Kezdeti korrigált L_2 pálya tengelymetszetei. A(z) 3.1.2a, 3.1.2b ábrákon fel van tüntetve a Föld is.

feltüntettem (3.3.1 ábra),

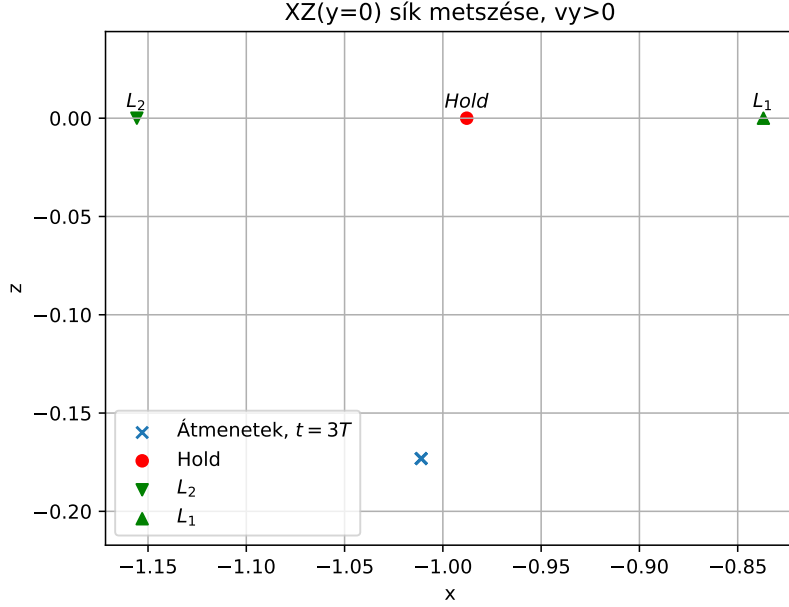
$$\mathbf{x}_k^{LG}(t=0) = (-1.012238022, 0, -0.174297607, 0, 0.080912439, 0), \quad (3.2.2)$$

$$T_k^{LG} = 1.380013043. \quad (3.2.3)$$

A kapott $T[nd]$ értéket átváltva $T = 6.485977635$ nap, ami eltér a várt periódusidőtől, de becslésnek jó. Ehhez fel kell használni, hogy a szinodikus periódusideje a holdnak $T_{\text{szinodikus}} = 29.53$ nap (Williams [n.d.]),

$$t[\text{nap}] = t[nd] \frac{T_{\text{szinodikus}}[\text{nap}]}{2\pi}. \quad (3.2.4)$$

A pericentrumban és apocentrumban a Holdtól vett távolságok is kicsit eltérnek, de közel vannak a várt eredményhez. Körülbelül 3000km az eltérés. Feltüntettem a hozzá tartozó sebességek



3.1.3. ábra. A kezdeti L_2 pálya $z(x)$ Poincaré-metszete. 3 átmenet síkmetszetének ábrázolása.

nagyságát is.

$$r_{k,peri} = 1882.8248156026157 km, \quad (3.2.5)$$

$$v_{k,peri} = 2.08591141322331 \frac{km}{s}, \quad (3.2.6)$$

$$r_{k,apo} = 67652.71157201257 km, \quad (3.2.7)$$

$$v_{k,apo} = 0.07659516428545153 \frac{km}{s}. \quad (3.2.8)$$

Így a korrekcióval kapott pálya nagyjából egyezik az írt értékekkel. Az eltérést a becslésünk pontossága illetve a μ értéke okozhatja. Pontosabb adatok hiányában ezt a pályát vettem a Lunar Gateway küldetésre kijelölt pályának, a becslésen még lehet pontosítani. Ezzel a kezdeti motiváció egyik része teljesült, sikerült egy becslést adni a Lunar Gateway pályájára.

3.3. Pályacsaládok generálása

3.3.1. L_2 NRHO család

A már korábban meghatározott kezdeti L_2 becslésünkre megkaptam a korrigált $\mathbf{X}_k$ (2.5.3) adatokat. Ez egy déli L_2 NRHO. Szimmetriai megfontolások alapján egyszerűen kitalálható, hogy ennek lesz egy északi párja, hiszen a rendszer szimmetrikus az xy síkra nézve. Így csak a z komponens előjelét megváltoztatva megkapjuk a generált déli L_2 NRHO északi megfelelőjét.

A pályacsaládok generálása érdekében a déli és északi megoldás alapján elindítottam a numerikus folytatást $\lambda = z$ paraméter szerint $\pm \Delta z = \pm 2 \cdot 10^{-3}$ lépésmagysággal mindkét z irányban. Az adaptív lépéshosszt nem alkalmaztam ebben az esetben, mivel nem volt rá szükség. A léptetés

maga sem volt sűrű, mert lassan változó, "sima" felületet rajzolnak ki a pályák.

Így a Holdhoz közelebbi és távolabbi pályák korrigált kezdeti feltételeit is legyártottam. A kezdőfeltételek alapján kapott pályákat mind a saját periódusidejük alapján $t = 2T_k$ ideig futtatva $sr = 10^5$ mintavételezéssel ábrázoltam (3.3.1 ábra). Természetesen hosszabb ideig is lehet integrálni, de ahhoz nagyobb sr érték kell. Erre a numerikus integrátor pontossága miatt van szükség, ugyanis pericentrum környékén gyorsan változik a pálya és ott könnyen hibázhat, ha nem megfelelő a mintavételezés. Egy másik lehetőség a kkhtp regularizálása, ezzel jelenleg nem foglalkoztunk, de érdemes megvizsgálni.

A pályákat ábrázoltam még különböző tengelymetszetekben az értelmezhetőség kedvéért (3.3.2 ábra).

Ezekre a pályákra is elvégeztem az egyszerű stabilitási vizsgálatot. A $\Sigma_{v_y > 0}^{y=0}$ sík alapján a $z(x)$ Poincaré-metszetet ábrázoltam (3.3.3 ábra). Látszik, hogy a pályák egyesével egy pontban metszik a síkot. Természetesen a $v_x(x)$, $v_z(z)$ és $v_z(v_x)$ metszetekre is egy pontot kapunk, ahogy el is várjuk. A kapott pályák egy részének kezdőfeltételeit illetve Jacobi-konstansait táblázatba foglaltam.

3.3.2. L_1 NRHO család

Ugyanúgy járunk el itt is mint korábban az L_2 NRHO család esetében. A kezdeti becslésnek az L_1 NRHO táblázatból (Spreen [2021] függelék) választottam,

$$\mathbf{x}_0 = (-0.9323498107, 0, 0.2711617980, 0, -0.0829745365, 0)_{T=5}. \quad (3.3.1)$$

Ez egy északi L_1 NRHO-ra becslés. A z komponens előjelét megváltoztatva pedig egy déli L_1 NRHO-ra kapunk becslést. Erre elvégezve a korrekciót a következőt kaptam:

$$\mathbf{x}_{k,0} = (-0.932350213, 0, 0.271161798, 0, -0.082973834, 0), \quad (3.3.2)$$

$$T_k = 2.049239470. \quad (3.3.3)$$

A kapott eredményem ebben az esetben is hasonló, az eltéréseket a korábbiakban említettek okozzák.

A folytatásra itt $\pm\Delta z = \pm 3e - 3$ lépést állítottam be és mindkét irányba elindítottam 30-30 lépést. Ezt a déli párra is megismételtem, így 120 pályát generáltam. Viszont itt már érdemes adaptív lépésmérettel dolgozni, mert sokszor előfordult, hogy nem konvergált a korrekció. Így is kaphatunk hibás eredményeket, ezért érdemes megszűrni a pályákat a Jacobi-konstansok alapján.

A numerikus integrálás és ábrázolás (3.3.4 ábra) során kiderül, hogy már $t = 2T$ időre $sr = 10^5$ (és $sr = 10^6$ is, csak akkor nem tudom mind a 120 pályát ábrázolni mert sok memóriát fogyaszt) mellett sem fog periodikusnak látszódni a megoldás.

Az átláthatóság kedvéért ismét ábrázoltam a pályák tengelymetszeteit is (3.3.5 ábra). Ezeken már jobban látszik, hogy a periodicitás nem marad meg a $t = 2T$ integrációs időig. Ábrázoltam még a $z(x)$ Poincaré-metszetet $\Sigma_{v_y < 0}^{y=0}$ irányított síkra (3.3.6 ábra). Az ábrán jól látszik, hogy némely pont egyáltalán nem a megfelelő helyén van, amit a Jacobi-konstansok általi színezés alapján várnánk. Ezek alapján feltételezhetjük, hogy az L_1 NRHO-k pályastabilitása nagyrészt nem stabil, de találtunk stabil megoldásokat így is. Ennek a környezetnek a további elemzésére komolyabb stabilitási vizsgálatokra van szükségünk. Az integrálás idejét is érdemes lenne növelni, ehhez érdemes regularizálni kkhtp-t.

Ezzel választ kaptunk arra a kérdésre is, hogy miért pont L_2 NRHO-t választottak a Lunar Gateway pályájának. Úgy tűnik, az L_1 és L_2 családok között jelentős eltérés van mind stabilitásban, mind geometriában. Az L_1 NRHO család pályafenntartása sokkal költségesebb lenne,

hiszen sokkal kevesebb stabil periodikus pályát találtunk annak ellenére, hogy 60-60 pályát generáltunk adaptív lépéshosszal. A talált pályákat ráadásul meg is kellett szűrni Jacobi-konstans által, mert a korrekció után így is volt olyan eredmény, amely elspirálzott a Holdtól.

Még fontos megjegyezni, hogy itt már nem csak NRHO-kat hanem halo pályákat is generáltunk, ez a(z) 3.3.5c ábrán látható, hiszen az NRHO-k jelentése "közel egyenes vonalú halo pálya", ami azt jelenti, hogy körülbelül nagy e excentricitású ellipszisekről van szó. Természetesen a pályák nem ellipszisek, sokkal komplexebb geometriával rendelkeznek, de az yz síkmetszetben nagyjából elnyúlt ellipsziseknek kinéző pályákról van szó. A pontosabb NRHO kiválasztáshoz, főleg az L_1 család esetén, pontosabb stabilitási vizsgálatra van szükség.

4. Összefoglalás

A Lunar Gateway pályáját sikerült megtalálni differenciális korrekció segítségével. Nem teljesen azt kaptam vissza mint amit a küldetés oldalán (NASA [2024]) írnak, de az ott található adatok közelítő értékek voltak. A kapott T_k periódusidő nem pontosan a $9 : 2$ szinodikus rezonanciát adja vissza, ebben az eltérést a megadott adatokon kívül még a μ tömegparaméter értéke, a numerikus integrátor pontossága és a generálás során megadott toleranciaértékek eltérése okozza.

Az L_1 és L_2 NRHO családokat numerikus folytatással generáltam. Az ábrázolásakor és a Poincaré-metszeteknél kiderült, hogy ugyanakkora $sr = 10^5$ mintavételezésnél a pályákat egyesével $t_i = 2T_i$ -ig integrálva az L_2 NRHO-k megmaradtak periodikusak, míg az L_1 család nem. Ezzel, és az L_1 , L_2 pontok stabilitási elemzésével, arra a következtetésre jutottam, hogy az L_2 pályák stabilabbak. Ez megmagyarázza, hogy a Lunar Gateway űrállomásnak kijelölt pálya miért az L_2 családhoz tartozik: így gazdaságosabb a pályafenntartás. A kkhtp csak egy egyszerűsített modell. A valóságban a Föld és Hold excentricitása, árapály-jelenségek és egyéb perturbációs hatások (Nap, Jupiter hatása) miatt nem lesz hosszú távon periodikus a pálya, ezért rendszeresen korrigálni kell majd. Minél stabilabb egy pálya, annál kevesebb üzemanyagba kerül a pálya korrigálása.

Hivatkozások

- Esther Barrabés, J Mondelo, and Merce Ollé. Numerical continuation of families of heteroclinic connections between periodic orbits in a hamiltonian system. *Nonlinearity*, 26:2747, 08 2013. doi: 10.1088/0951-7715/26/10/2747.
- NASA. Gateway capabilities overview, 2024. URL <https://www.nasa.gov/gateway-capabilities/>. Page Last Updated When Accessed: Nov 4, 2024. Page Editor: Briana R. Zamora. Responsible NASA Official: Abigail Bowman.
- Emily M Zimovan Spreen. *Trajectory design and targeting for applications to the exploration program in cislunar space*. PhD thesis, Purdue University, 2021.
- Tamás Tél and Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. Cambridge University Press, 2006. URL http://theorphys.elte.hu/tel/magyar/pdf_pub/Tel_Tamas,_Gruiz_Marton_-_Kaotikus_dinamika.pdf. Magyar nyelvű kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
- Dr. David R. Williams. Moon fact sheet, n.d. URL <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html>. Page Last Update When Accessed: 11 January 2024, DRW.
- Emily M Zimovan. Characteristics and design strategies for near rectilinear halo orbits within the earth-moon system. Master’s thesis, Purdue University, 2017.
- Érdi Bálint. Numerikus megoldások a korlátozott háromtest-problémában. *Andromeda folyóirat*, 1993.

5. Függelék

5.1. Táblázatok

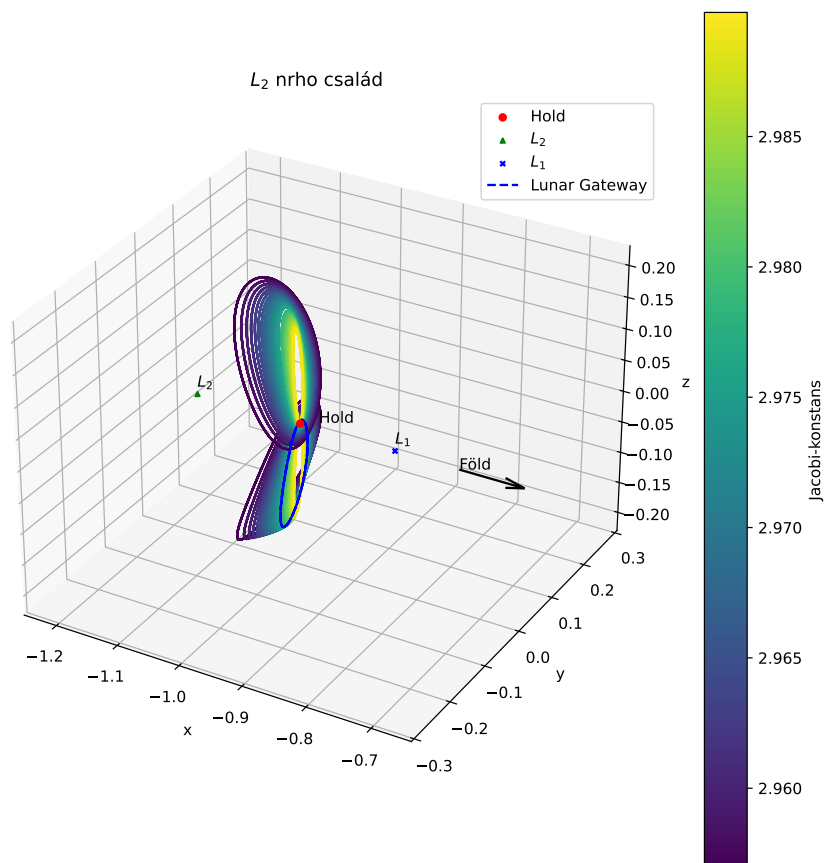
A korrekció során kapott kezdeti értékekből megadok pár adatot táblázatokban. Ezek csak akkor lesznek biztosan periodikus pályák, ha a numerikus integrálás beállításai egyeznek az enyémmel.

5.1.1. táblázat. L_2 NRHO család kezdőértékekre példa. Ez a déli család, az északra ugyanezek érvényesek csak $-z$ értékekkel. Ezek nagyon gyors pályák lesznek, a(z) 3.3.1 ábrán ezek a magas Jacobi-konstanssal rendelkező pályák.

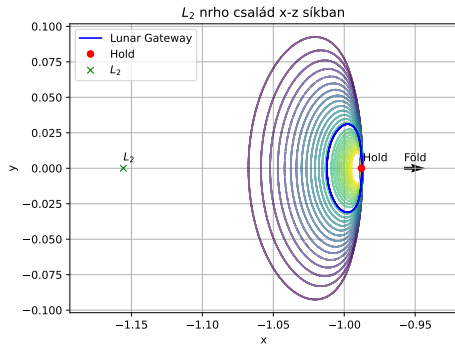
C	x	z	v_y	$t[nd]$	$t[nap]$
2.9569	-0.9944291	-0.14515	0.03302984	4.25×10^{-5}	0.0002
2.9582	-0.99505357	-0.14715	0.03499346	8.51×10^{-5}	0.0004
2.9597	-0.99573635	-0.14915	0.03709695	1.28×10^{-4}	0.0006
2.9612	-0.99648306	-0.15115	0.03935188	1.70×10^{-4}	0.0008
2.9628	-0.99729979	-0.15315	0.04177064	2.13×10^{-4}	0.0010
2.9644	-0.99819319	-0.15515	0.04436636	2.55×10^{-4}	0.0012
2.9660	-0.99917047	-0.15715	0.04715282	2.98×10^{-4}	0.0014
2.9675	-1.00023935	-0.15915	0.05014432	3.40×10^{-4}	0.0016
2.9690	-1.00140812	-0.16115	0.05335552	3.83×10^{-4}	0.0018
2.9705	-1.00268555	-0.16315	0.0568011	4.25×10^{-4}	0.0020

5.1.2. táblázat. L_1 NRHO család kezdőértékekre példa (adaptív lépéshosszal folytatva). Ez az északi család, a délire ugyanezek érvényesek csak $-z$ értékekkel. Nem lettek periodikusak, de korrekció alapján periodikus megoldásokat lehetne ezekkel az adatokkal generálni.

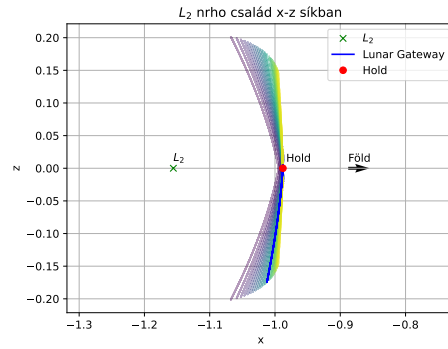
C	x	z	v_y	$t[nd]$	$t[nap]$
2.9683	-0.85592822	0.1811618	-0.2583438	9.75×10^{-5}	0.0005
2.9653	-0.86014484	0.1841618	-0.25378695	1.95×10^{-4}	0.0009
2.9627	-0.8654132	0.1871618	-0.24700018	2.92×10^{-4}	0.0014
2.9606	-0.87193574	0.1901618	-0.23730388	3.90×10^{-4}	0.0018
2.9594	-0.8796768	0.1931618	-0.22432054	4.87×10^{-4}	0.0023
2.9590	-0.88809966	0.1961618	-0.20866086	5.85×10^{-4}	0.0027
2.9593	-0.8962754	0.1991618	-0.19207387	6.82×10^{-4}	0.0032
2.9596	-0.90346754	0.2021618	-0.17638008	7.80×10^{-4}	0.0037
2.9599	-0.90944151	0.2051618	-0.16252907	8.77×10^{-4}	0.0041
2.9599	-0.91428942	0.2081618	-0.15069108	9.75×10^{-4}	0.0046



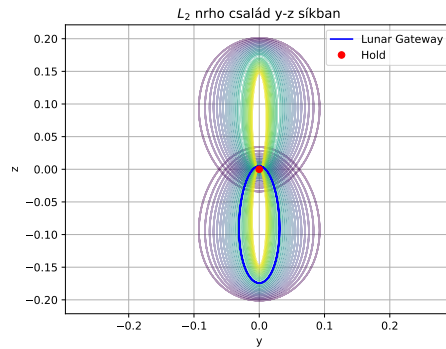
3.3.1. ábra. L_2 északi és déli NRHO családok. Összesen 60 pálya, 30 déli és 30 északi. A Lunar Gateway pályáját a korábban kapott eredmények alapján ábrázoltam. A pályákat a hozzájuk tartozó Jacobi-konstansok értéke alapján színeztam. Az ábra alapján jól látszik, hogy teljesen szimmetrikusak az eredmények.



(a) L_2 NRHO-k xy síkban, fedik egymást

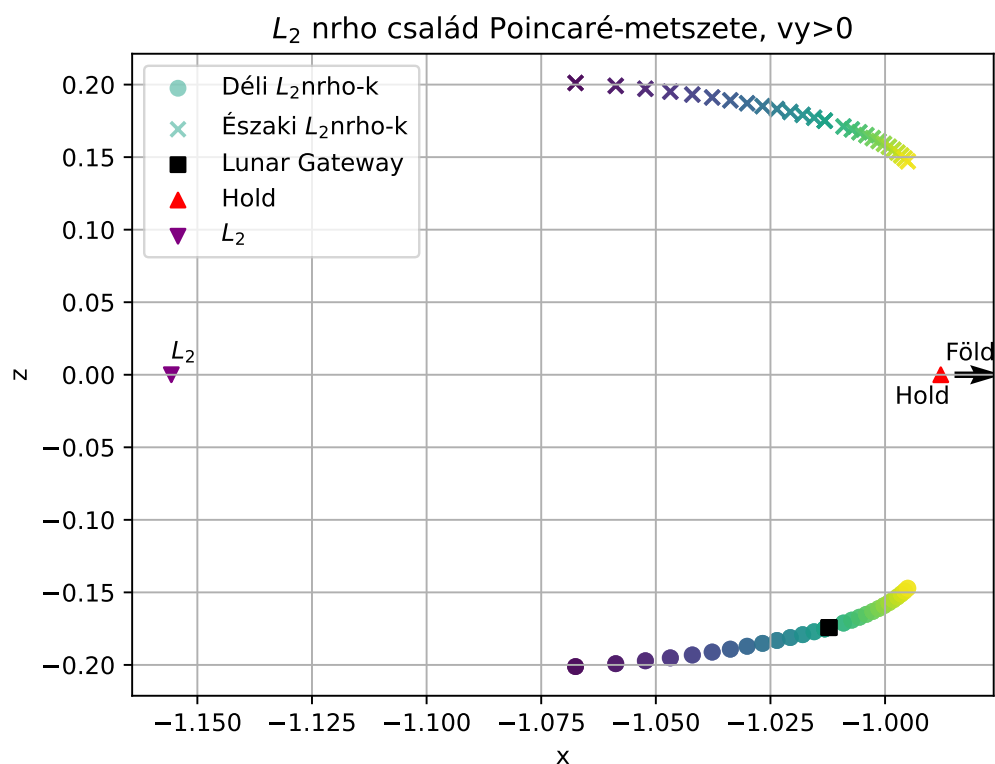


(b) L_2 NRHO-k xz síkban

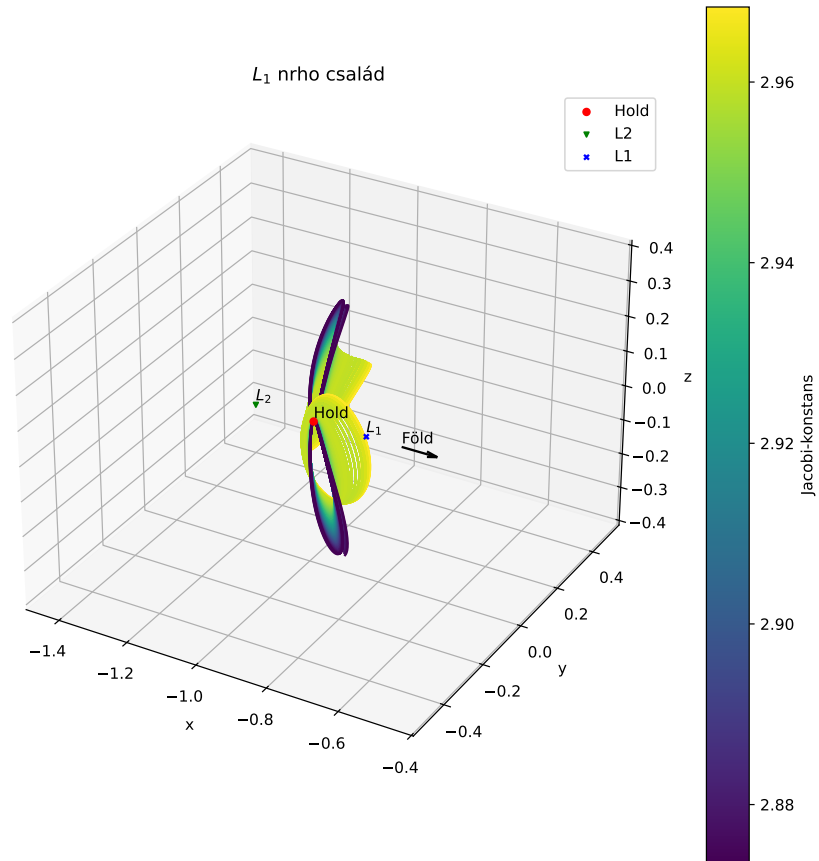


(c) L_2 NRHO-k yz síkban

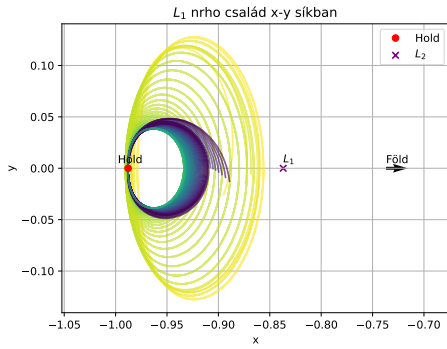
3.3.2. ábra. L_2 NRHO családok leképezése különböző síkokra. Ezeken az ábrákon jól látszik, hogy a pályák tényleg periodikusak. A színezés itt is a(z) 3.3.1 ábrán látható Jacobi-konstans skála alapján történt. A Lunar Gateway pályát külön színnel tüntettem fel.



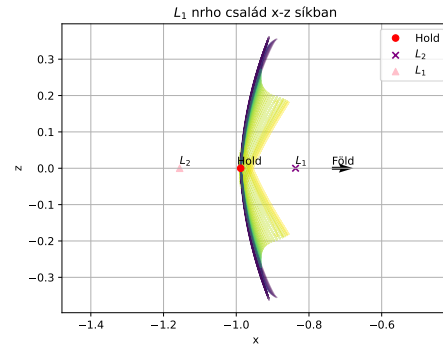
3.3.3. ábra. A $z(x)$ Poincaré-metszet. A Jacobi-konstans alapján színeztem a pontokat. Az ábrán az összes pálya fel van tüntetve. A feltorlódás miatt nem látszik a Holdhoz közeli pályák metszete, de külön-külön ábrázolva látszik, hogy tényleg pontokat kapunk. A Holdtól távolabbi NRHO-k metszetei is pontok. Ez alapján elmondható, hogy az L_2 NRHO-k stabil pályák. Természetesen a pontosabb stabilitáselemzés egy hosszabb folyamat, amivel jelenleg nem foglalkozunk.



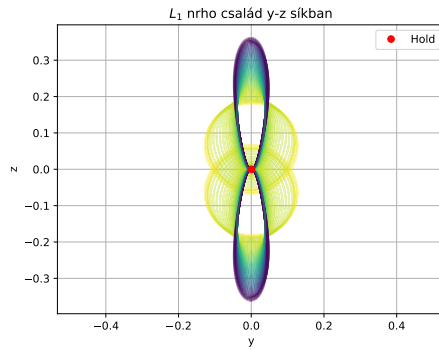
3.3.4. ábra. L_1 északi és déli NRHO család 3D ábra. A pályák színét a Jacobi-konstansok alapján állítottam be



(a) L_1 NRHO-k xy síkban

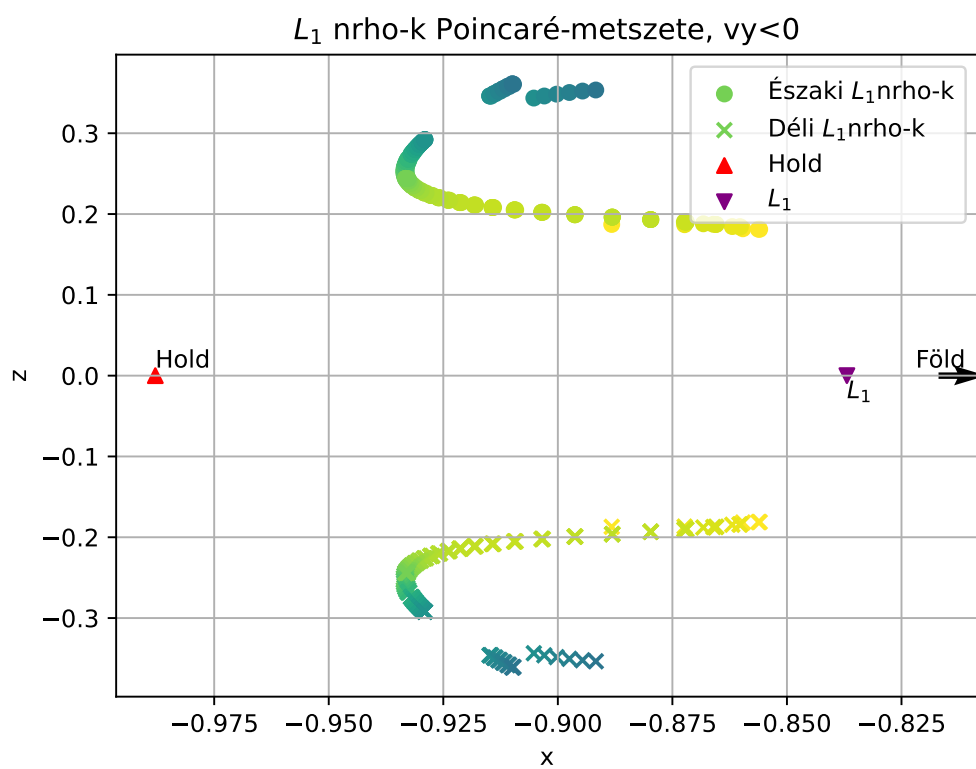


(b) L_1 NRHO-k xz síkban



(c) L_1 NRHO-k yz síkban

3.3.5. ábra. L_1 északi és déli NRHO családok leképezése különböző síkokra. A színezés itt is a(z) 3.3.4 ábrán látható Jacobi-konstans skála alapján történt. Főleg a(z) 3.3.5a ábrán látható, hogy nem zárt görbéket kapunk, azaz nem tartja a periodicitást.



3.3.6. ábra. L_1 NRHO családok $z(x)$ Poincaré-metszete. Látható, hogy az azonos színű adatpontokra nem igaz, hogy egy pontot jelölnének ki a síkmetszeten. Ez azt mutatja, hogy nem periodikusak a megfelelő adatpontokhoz tartozó megoldások