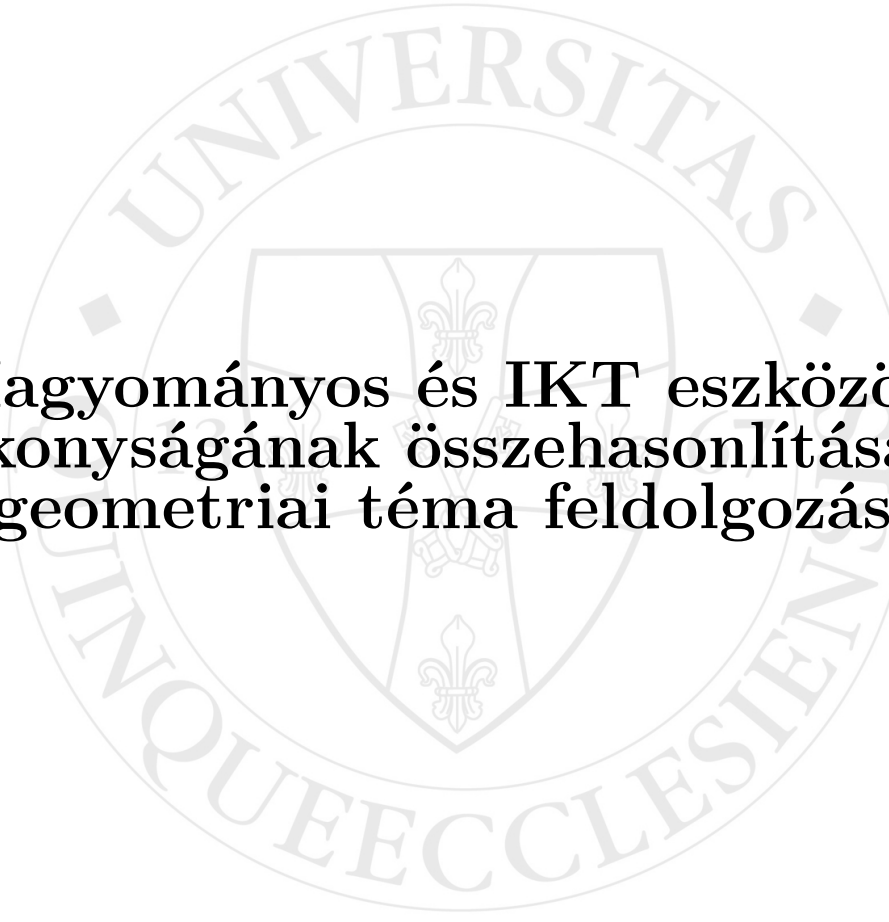


Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematikai és Informatikai Intézet



Hagyományos és IKT eszközök hatékonyságának összehasonlítása egy rácsgeometriai téma feldolgozásánál

Témavezető:

Dr. Eisner Tímea

Adjunktus

Készítette:

Malmos Vanessza

Angol nyelv és kultúra tanára -

matematikatanár - egységes osztatlan képzés

Nappali tagozat

Pécs, 2025

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Szakirodalmi áttekintés és kutatási kérdések megfogalmazása	3
1.1. Nemzetközi és hazai tanulmányok áttekintése	3
1.1.1. A tevékenység alapú tanulás, a felfedeztető matematikatanítás és aktualitásuk	3
1.1.2. Az IKT eszközök hatása a matematikatanulásra	6
1.2. Problémafelvetés és a kutatási kérdések megfogalmazása	7
2. Anyagok és módszerek	9
2.1. A kísérleti csoportok bemutatása	9
2.2. Kutatási protokoll	10
2.3. Bemeneti teszt	11
2.4. A nyolc tanórás foglalkozássorozat	12
2.4.1. A tanított tananyag	12
2.4.2. A két eszköz bemutatása	13
2.5. Kimeneti teszt	15
2.6. A belső motiváció vizsgálata	16
2.7. A tesztek és a belső motivációt mérő kérdőív megbízhatóságának vizsgálata	17
2.8. Statisztikai számítások	18
3. Eredmények	19
3.1. Megbízhatósági vizsgálatok	19
3.2. Bemeneti tesztek eredménye a két kutatási környezetben	20
3.3. Hatékonyságvizsgálat	21
3.3.1. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok pontszámának változása a bemeneti tesztről a kimeneti tesztre	21
3.3.2. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok kimeneti teszten elért pontszámának összehasonlítása	22

3.3.3.	A hagyományos és IKT eszközt használó csoportok bemeneti és kimeneti teszteken elért eredményei feladatonként	24
3.3.4.	A diákok teljesítményének feladatonkénti összehasonlítása a két környezetben eszköztől függetlenül	24
3.4.	Motivációvizsgálat	25
4.	Diszkusszió	27
4.1.	Személyes reflexió	30
5.	Összegzés	32
5.1.	A kutatás folytatásának lehetőségei	33
	Irodalomjegyzék	35
	Mellékletek	39
1.	Melléklet: Bemeneti teszt	40
2.	Melléklet: A foglalkozássorozat tananyaga	43
3.	Melléklet: Minta egy diák munkájából	65
4.	Melléklet: Kimeneti teszt	66
5.	Melléklet: A belső motivációt mérő kérdőív	69
6.	Melléklet: A belső motivációt mérő kérdőív nyitott végű kérdéseire adott válaszokból kiemelt példák	71
7.	Melléklet: A foglalkozásokon készült képek	72
8.	Melléklet: Nyilatkozat mesterséges intelligencia használatáról	73

Bevezetés

A 2003-as PISA (Programme for International Student Assessment) felmérés a 15 éves magyar diákok matematikai átlagteljesítményét 490 pontban állapította meg (Oktatási Hivatal, n.d., [34]). Az ezt követő évek eredményei folyamatosan csökkenő tendenciát mutattak, ami a 2022-es felmérés során 473 pontban realizálódott (PISA 2022 Results (Volume I), 2023,[35]). Az érettségi vizsgák szintén rámutatnak a matematikai teljesítmény terén tapasztalható gyenge eredményekre. Az Oktatási Hivatal (n.d., [33]) adatai szerint a 2018 és 2024 közötti időszakban a kötelező érettségi tantárgyak közül a matematika középszintű vizsgán elért eredmények bizonyultak következetesen a legalacsonyabbnak. A legjobb eredmény 2022-ben született, amikor az országos átlag 55,3% volt. Az adatok rámutatnak a magyar középiskolás diákok matematikai teljesítményének folyamatos romlására, amelynek megállítására vagy visszafordítására egyelőre nem állnak rendelkezésre egyértelmű irányvonalak. Az említett tendenciózusan romló eredmények kiemelik a matematikatanítás módszertanával kapcsolatos kutatások szükségességét.

Leendő matematikatanárként célkitűzésem, hogy hozzájáruljak a tanulói teljesítmény növeléséhez és az oktatás színvonalának emeléséhez. Kutatásunk középpontjában különböző tanulást támogató szemléltetőeszközök hatékonyságának és motivációs erejének összehasonlítása állt. Eredményeink értékes támpontokat nyújthatnak az általános iskolai matematikatanítás élvezetesebb és hatékonyabb módszereinek kidolgozásához. Hosszabb távon pedig az ilyen jellegű fejlesztések hozzájárulhatnak a magyar diákok matematikai teljesítményének növeléséhez, javítva ezáltal Magyarország eredményeit mind a hazai, mind a nemzetközi tudásszint felméréseken.

A középiskolai matematika-teljesítményt alapvetően meghatározza az általános iskolai tanítás minősége (Siegler et al., 2012, [44]). Kutatásunk célcsoportját, így, az ötödik osztályos tanulók alkották, akik számára kiemelten hasznosak a szemléltetőeszközökre és gyakorlati tapasztalatokra épülő tanítási-tanulási módszerek (Awasthi, 2012, [1]). A tevékenységalapú, felfedeztető matematikatanítás egyik meghatározó eleme a tárgyi eszközök használata. A pedagógiai gyakorlatban számos jól ismert és bevált szemléltetőeszköz áll rendelkezésünkre, például a színes számolópálcikák, számolókorongok, szám- és jelkártyák, játékpénzek, a színes rúdkészlet, a logikai készlet és a szöges tábla. A szakirodalom megerő-

síti, hogy a vizuális és tapasztalati úton történő tanulás jelentős mértékben hozzájárul a matematikai fogalmak mélyebb megértéséhez, tartósabb tanulási eredményeket biztosít, és erősíti a tanulók belső motivációját (Dienes, 1973, [8]; Varga, 1978, [52]; Rahmawati et al., 2020, [39]). A hagyományos tárgyi eszközök előnye, hogy lehetőséget adnak a tanulóknak arra, hogy a matematikai összefüggéseket kézzelfogható módon fedezzék fel, miközben aktív, önálló tevékenységeken keresztül mélyítik el megértésüket. Az elmúlt évtizedek technológiai fejlődése azonban új perspektívát nyitott az eszközökkel támogatott tanítás és tanulás terén. Az interaktív és digitális eszközök ugyanis vizuális dinamizmusuknak és rugalmasságuknak köszönhetően képesek a tanulási folyamatot egy új dimenzióba helyezni.

A 21. század technológiai fejlődése az élet minden területére, így az oktatásra is jelentős hatást gyakorolt. Az információs és digitális kultúra térnyerése átalakította a tanulási környezetet és új lehetőségeket teremtett a tanítás-tanulás folyamatában. Ennek eredményeként a technológia oktatásra gyakorolt hatásainak vizsgálata napjaink pedagógiai kutatásainak egyik kiemelt irányvonalává vált. A szakirodalom számos tanulmánya alátámasztja, hogy az információs és kommunikációs technológiák (IKT) eszközei nem csupán a tanulási folyamat hatékonyságának fokozását teszik lehetővé, hanem jelentős mértékben hozzájárulnak a tanulók belső motivációjának növeléséhez is (Kordaki & Mastrogiannis, 2007, [21]; Saha et al., 2020, [40]).

Jelenleg nem áll rendelkezésre olyan szakirodalom, amely közvetlen módon hasonlította volna össze a hagyományos, tárgyi eszközök és a digitális, IKT-alapú eszközök tanulásra gyakorolt hatékonyságát, illetve ezek hatását a tanulók intrinzik motivációjára. Az összehasonító vizsgálat eredményei kulcsfontosságúak lehetnek az oktatási módszerek továbbfejlesztése szempontjából. Kutatásunk célja, hogy pótolja ezt a hiányt, és hozzájáruljon az eszközökkel támogatott tanítás és tanulás hatékonyságának átfogóbb megértéséhez a modern oktatási környezetben.

Dolgozatomban a szakirodalmi áttekintést követően megfogalmazásra kerülnek a kutatásunk alapjául szolgáló kérdések. Ezt követően bemutatom a vizsgálatban részt vevő csoportokat, valamint ismertetem a kutatás során alkalmazott módszereket és mérőeszközöket. A következő fejezetben a statisztikai elemzések eredményeit tárgyalom, amelyeket az ezt követő fejezetben a szakirodalmi háttérrel összevetve értelmezek és elemzek. Végül összegzem a kutatás főbb megállapításait, majd kitérést teszek a jövőbeli kutatási irányok és további lehetőségek felé.

A jelen kutatást önállóan végeztem témavezetőm támogatásával, a dolgozatban azonban a tudományos hangvétel és az érthetőség érdekében többes szám első személyű megfogalmazást használok.

Lezárás dátuma: 2025. január 28.

1. fejezet

Szakirodalmi áttekintés és kutatási kérdések megfogalmazása

1.1. Nemzetközi és hazai tanulmányok áttekintése

1.1.1. A tevékenység alapú tanulás, a felfedezettő matematikatanítás és aktualitásuk

A tevékenység alapú tanulás a konstruktivista pedagógia egyik meghatározó megközelítése. A tanuláselmélet szerint az ismeretszerzés aktív, tapasztalatokra épülő folyamat, melyben a tanuló központi szerepet játszik. Az elméleti keret Jean Piaget (1972, [36]) konstruktív tanuláselméletén alapul, amely hangsúlyozza, hogy a tudás megszerzése során a tanulóknak egyéni tapasztalataikra és élményeikre támaszkodva kell kialakítaniuk a világról alkotott nézeteiket és ismereteiket. Piaget szerint a tanulási folyamatban két kulcsfontosságú mechanizmus működik:

1. asszimiláció, mely során az új tapasztalatok a meglévő kognitív struktúrákhoz igazodnak kiegészítve és bővítve azokat;
2. akkomodáció, amely akkor lép fel, ha a meglévő kognitív struktúrák átalakulása szükséges ahhoz, hogy az új információk beépülhessenek.

Ezen folyamatok biztosítják, hogy a tanulók stabil és koherens tudásrendszert alakítsanak ki.

A konstruktivista megközelítés szerint a tanulás nem az információk passzív befogadását jelenti, hanem az egyén aktív részvételét és a megszerzett ismeretek értelmezését kívánja meg. Nahalka (1997, [28]) hangsúlyozza, hogy a konstruktivista pedagógia az önálló gondolkodás és a tevékeny részvétel előtérbe helyezésével ellenzi a tanárközpontú oktatás hagyományos szerepfelfogását. A szemlélet előtérbe helyezi a belső motiváció jelentőségét, amely alapvető feltétele a tanulási folyamat hatékonyságának. Falus és munkatársai (2004,

[10]) egyaránt rámutatnak, hogy a tanulás sikerességének kulcsa a tanulók aktív részvétele és a gyakorlati tevékenységeken keresztül megszerzett tapasztalatok. A tanulási folyamat középpontjában tehát nem csupán az információ befogadása, hanem az értelmi fejlődés áll. A folyamat során a tanulók egyéni ütemben és számukra releváns módon sajátítják el az új ismereteket. A konstruktivista szemlélet ilyen módon nemcsak a tanulók autonómiáját és önálló tanulási útjuk kijelölését támogatja, hanem jelentős mértékben hozzájárul a tanulási motivációjuk erősítéséhez is.

A tevékenységalapú tanulás számos pozitív hatást gyakorol a tudáselsajátítás folyamatának hatékonyságára. A tanulói aktív részvétel a tudás mélyebb elsajátítását és hosszabb távú megtartását eredményezi. Csapó (2004, [6]) tanulmányában felhívta rá a figyelmet, hogy a tanulók kognitív fejlődését nagyban befolyásolja, hogy milyen mértékben képesek bevonódni a tanulási folyamatba. Az aktív részvétel során a tanulók nemcsak befogadják az új információkat, hanem ezeket összekapcsolják a meglévő ismereteikkel, ami segíti az összefüggések megértését és a mélyebb tudás elsajátítását. A tevékenységalapú tanulás továbbá különösen hatékony a gyakorlati készségek és a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében. Tumangger és munkatársai (2024, [46]) rámutattak, hogy a problémamegoldásra fókuszáló tanulási formák során alkalmazott gyakorlati tevékenységek a matematikatanításban kiemelkedően fontosak, hiszen az absztrakt fogalmakat kapcsolják össze a valóságból vett tapasztalatokkal. A tanulók így nem csupán megértik, hanem képesek alkalmazni is az adott fogalmakat különböző problémahelyzetekben. A tevékenységalapú tanulás pozitív hatásai nemcsak a tanulók kognitív fejlődésében, hanem a megnövekedett belső motivációjukban is megmutatkozik. Fejes (2010, [11]) kutatási eredményei szerint a tanulók akkor motiváltak igazán, ha lehetőségük van önállóan felfedezni az ismereteket, és személyes sikerélményt élhetnek át. Ez az önálló tanulási élmény növeli a tanulók elköteleződését, miközben az érdeklődésük szintjét is fenntartja.

A konstruktivista tanuláselmélet alapozta meg a felfedezettő matematikatanítás pedagógiai megközelítését, amely szerint a tanulóknak a saját tapasztalataik és felfedező tevékenységeik révén kell megalkotniuk tudásukat. Nemzetközi és magyar szakirodalmak egyaránt igazolták, hogy a matematika tanulása akkor hatékony, ha a diákok nem passzív megfigyelőként, hanem aktív felfedezőként vesznek részt a folyamatban és lehetőséget kapnak arra, hogy saját maguk jöjjenek rá a különböző matematikai struktúrákra (Pólya, 1957, [37]; Varga, 1973, [50]; Prasad, 2011, [38]). A felfedezettő tanulásmódszertani megközelítés javítja a tanulók problémamegoldó készségeit és segíti a meglévő tudásuk új helyzetekben történő alkalmazását, ami tovább növeli a tanulók motivációját és önállóságát (Rahmawati et al., 2020, [39]). Ezzel szemben a hagyományos oktatási módszerek – amelyeket a tanárközpontúság, a közvetlen ismeretátadás és a procedurális készségek begyakorlása jellemez a mai napig – elsősorban a mechanikus készségek fejlesztésére fókuszálnak, gyakran a

fogalmi megértés rovására (Hardin & Richardson, 2012, [13]).

Magyarországon a felfedezettő matematikatanítás reformját Varga Tamás munkássága indította el az 1970-es években, alapvetően megújítva ezzel a hazai matematikatanítás szemléletét. Varga (1978, [52]) pedagógiai megközelítésének központi eleme volt a tárgyi (manipulációs) eszközök használata, valamint az örömteli tanulás légkörének megteremtése. Varga a *Játsszunk matematikát!* (1972, [49]; 1974, [51]) című könyvsorozatában részletesen szemléltette módszertanát, bemutatva, hogyan lehet a matematika különböző területeit – például az aritmetikát, a geometriát, a logikát és a valószínűségszámítást – játékos, felfedezettő megközelítésben tanítani.

Varga munkássága szoros kapcsolatban áll Dienes Zoltán nemzetközi szinten is elismert pedagógiai elveivel, amelyek a matematikai fogalmak játékos és tapasztalati úton történő elsajátítását hangsúlyozták. A tanulók intuitív és kreatív gondolkodásának fejlesztése elengedhetetlen a matematikai absztrakció megértéséhez, amelyet manipulációs eszközökkel és tevékenységalapú megközelítésekkel lehet hatékonyan támogatni (Dienes, 1973, [8]). A két pedagógus közötti szellemi rokonság különösen abban mutatkozott meg, hogy mindketten a tanulók aktív részvételét és önálló gondolkodását állították a tanulási folyamat középpontjába, miközben nagy hangsúlyt fektettek a problémamegoldó készségek fejlesztésére. A közös pedagógiai szemlélet pedig hozzájárult a felfedezettő matematikatanítás alapelveinek elmélyítéséhez és gyakorlati megvalósításához.

Bár Varga reformja az 1970-es évekre nyúlik vissza, a felfedezettő matematikatanítás Magyarországon a mai napig megőrizte aktualitását. Ezt támasztja alá a 2020-as kerettanterv is, amely az általános iskola felső tagozatának matematika tantárgyára vonatkozóan, az alapóraszámú oktatás keretében a következőképpen határozza meg a tanítás módszertani irányelveit: „A tanítás fő módszere továbbra is a felfedezettés, a konkrét tevékenységből, játékból, hétköznapi szituációból fakadó indukció.” (Kerettanterv, 2020, [29]). A kerettanterv továbbá számos tevékenységalapú, felfedezettő pedagógiai módszert javasol a matematikai gondolkodás fejlesztésére, amelyek szorosan illeszkednek Varga által lefektetett didaktikai alapelvekhez, megerősítve azok időtállóságát és relevanciáját a jelenkori oktatási gyakorlatban.

A felfedezettő matematikatanítás egyik meghatározó sajátossága a tárgyi eszközök — például a logikai készlet, a logikai rúdkészlet és a logikai testkészlet — alkalmazása. Dienes már 1973-ban ([8]) hangsúlyozta, hogy a matematikai fogalmak elsajátításában kulcsszerepet játszik a konkrét tapasztalat, ezért javasolta a tárgyi eszközök beépítését a tanítási folyamatba. Ezen tárgyi eszközök közé tartozik a Varga (1974, [51]) révén elhíresült szöges tábla is, amely kutatásunk egyik kiemelt elemét képezi. A kézzel fogható tárgyi eszközök segítik a tanulókat abban, hogy az elvont fogalmak gyakorlati oldalát megértsék, támogatva ezzel az absztrakciós képességeik fejlődését. A nemzetközi szakirodalom egybe-

hangzóan alátámasztja, hogy a tárgyi eszközzel társított felfedezettő matematikatanítás hatékonyabban segíti a fogalmi megértést, valamint tartósabb és mélyebb matematikai tudást eredményez a tanárközpontú oktatási módszerekkel szemben (Kablan, 2016, [16]; Lessani et al., 2017, [24]).

Az oktatás technológiai fejlődése tovább növeli a felfedezettő módszertan aktualitását. Az információs és kommunikációs technológia (IKT) eszközei új lehetőségeket kínálnak: lehetővé teszik, hogy a diákok digitális környezetben szerezzenek tapasztalatokat, amelyeket korábban kizárólag kézzel fogható tárgyi eszközökkel érhettek el. Az interaktív alkalmazások és digitális manipulációs eszközök önálló, játékos és dinamikus módon segítik elő a matematikai fogalmak felfedezését, miközben a hagyományos eszközökkel szerzett tapasztalatokat digitális élményekkel gazdagítják.

1.1.2. Az IKT eszközök hatása a matematikatanulásra

Az információs és kommunikációs technológiák (IKT) alkalmazásai az oktatásban magukba foglalják azon hardvereket, szoftvereket és digitális megoldásokat, amelyek célja a tanítási és tanulási folyamat támogatása. Az eszközök különféle formákban jelenhetnek meg, és elsődleges feladatuk az oktatás korszerűsítése, hatékonyságának növelése, valamint a tanulási élmény érdekesebbé tétele (Sumbul, 2024, [45]).

Az IKT eszközök oktatásban való alkalmazása különösen fontos a 21. századi képességek – például a digitális műveltség, vagy problémamegoldó készségek – fejlesztése szempontjából. Az IKT eszközök alkalmazása nemcsak a tanulási folyamatot teszik hatékonyabbá, hanem elősegítik a személyre szabott tanulást is, amely különböző tanulási stílusokhoz igazítható (Ceban, 2024, [5]). Az IKT eszközök használata növeli a tanulók kritikai gondolkodását, lehetőséget biztosítva az információk értékelésére és szűrésére, ami elengedhetetlen az információs társadalomban való boldoguláshoz (Sametova & Uzbekova, 2024, [42]). A diákok időgazdálkodáshoz kapcsolódó képességeik is fejlődnek, mivel az online tanulási platformok önálló időbeosztást és folyamatos fejlődéskövetést tesznek lehetővé (Tymchuk et al., 2024, [47]). Az iskolákban a digitális eszközök alkalmazása ezért nem csupán az oktatás modernizációját támogatja, hanem a munkaerőpiacon is előnyt biztosít a diákok számára, hiszen a digitális készségek iránti kereslet folyamatosan nő (Enciso et al., 2024, [9]).

Számos kutatás igazolta, hogy az IKT eszközök iskolai gyakorlatba történő integrálása növeli a tanulók elkötelezettségét és motivációját a tanulási folyamat során (Yadav, 2017, [54]; Lasut & Bawengan, 2020, [23]). Tudományos megállapítások szerint az IKT eszközök hatékonyan támogatják a tanulási folyamatokat (Hwang et al., 2012, [15]). Az IKT-alapú tanulás és a virtuális szemléltetőeszközök beemelése a matematika műveltségterület tanításába különösen előnyös az általános iskolai diákok körében, mivel hatékonyan segítik

az absztrakt fogalmak elsajátítását. A 3D-s virtuális valóság használata jelentős mértékben javította a törtek és az aranyosság fogalmának mélyebb megértését 5-6. osztályos diákok körében (Bouta & Paraskeva, 2013, [4]). A digitális, játékalapú tanulási környezetben történő gyakorlás hozzájárult az alapvető matematikai műveletek – összeadás, kivonás, szorzás, osztás – készségek elmélyítéséhez (Hwa, 2018, [14]). Kordaki és Mastrogiannis (2007, [21]) tanulmányában a geometriai fogalmak tanítására alkalmaztak egy dinamikus geometriai rendszert (*Cabri-Geometry II*), amely lehetőséget nyújtott a fogalmak virtuális szemléltetésére. A kutatás igazolta, hogy a virtuális tér támogatja a konstruktív tanulási folyamatokat a geometriai ismeretanyag feldolgozása során. Saha és munkatársai (2020, [40]) kimutatták, hogy az IKT eszközök csökkentették a matematika tantárggyal kapcsolatos szorongást és növelték a diákok pozitív attitűdjét a tantárgy tanulása iránt. A kutatások eredményeiből megállapítható, hogy az IKT eszközök nemcsak a matematikai ismeretek elsajátítására voltak pozitív hatással, de kedvezően befolyásolták a diákok hozzáállását is a matematikatanulás iránt.

1.2. Problémafelvetés és a kutatási kérdések megfogalmazása

A kutatások szerint a diákok jelentős tudásbeli fejlődést mutattak, amikor a hagyományos, kézzel fogható tárgyi eszközöket IKT eszközökkel egészítették ki a matematikaórákon (Bokhove, 2011, [3]; Kushwaha, 2017, [22]; Kameswari & Seenivasan, 2020, [19]). Jelenleg azonban nem áll rendelkezésre olyan szakirodalom, amely több alkalmas tanítási egység keretén belül közvetlenül összehasonlítaná a hagyományos, tárgyi és digitális, IKT-alapú eszközök tanulási folyamatra, illetve a tanulók belső motivációjára gyakorolt hatását egy matematikai témakör feldolgozása során.

Kutatásunk célja az volt, hogy felfedeztető tanításmódszertani megközelítéssel hasonlítsuk össze a hagyományos, tárgyi eszköz és a digitális, IKT eszköz többhetes alkalmazásának hatását egyazon rácsgeometriai tananyag elsajátítása során. A témában megjelent szakirodalmak, valamint a problémafelvetés alapján a vizsgálat előtt megfogalmazott kutatási kérdéseink a következők voltak:

KK1: Van-e szignifikáns különbség tanítási-tanulási hatékonyság tekintetében a hagyományos eszköz és az IKT eszköz használata esetén ugyanazon ismeretanyag elsajátításánál?

KK2: Van-e szignifikáns különbség a hagyományos eszközt használó csoport és az IKT eszközt használó csoport tanulási folyamattal kapcsolatos belső (intrinzik) motivációja között ugyanazon ismeretanyag elsajátításánál?

A kutatásunkban vizsgált kérdések jelentős tudományos értékkel bírhatnak az általános didaktika, és különösen a matematikai szakdidaktika területén.

2. fejezet

Anyagok és módszerek

2.1. A kísérleti csoportok bemutatása

A vizsgálatban összesen $n = 71$ ötödik osztályos tanuló vett részt, két különböző kutatási környezetben: általános tantervű, általános iskola osztályainak diákjai ($n = 41$), tehetséggondozó foglalkozáson résztvevő tanulók ($n = 30$).

Az általános iskolai környezet a Pécsi Egyházmegye fenntartásában működő Szent Mór Katolikus Óvoda, Általános Iskola, Alapfokú Művészeti Iskola és Gimnázium volt. Az intézmény ötödik osztályos tanulói a kerettanterv (2020, [29]) előírásainak megfelelően heti négy tanórán tanulták a matematikát. A kutatásunk ezen tanórák keretein belül valósult meg a 2024/2025-ös tanév során. A résztvevők átlagos képességű diákok voltak, a vizsgálat és az azt megelőző időszakban sem vettek részt kiemelt tehetséggondozó matematikai foglalkozásokon vagy versenyeken. Az intézményben a kutatás alatt 20-an a hagyományos eszközzel tanultak, míg 21-en az IKT eszközt használták a tudáselsajátítás során.

Vizsgálatunk második környezete a Pécsi Tudományegyetem Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium Deák Ferenc Általános Iskolája által szervezett Matematikai Tudásközpont elnevezésű tehetséggondozó foglalkozássorozat volt. Az Oktatási Hivatal által szervezett MaTalent méréseken kiemelkedő eredményt elért ötödikes tanulók vettek részt a foglalkozásokon (Oktatási Hivatal, 2021, [30]). A szervezők a 2023/2024-es tanévben nyolc tanórányi alkalmat kifejezetten a jelen kutatás céljaira különítettek el. A bavalogatott tanulók Pécs és környékének több általános iskolájából érkeztek, emiatt a geometria témakörében eltérő matematikai háttértudással rendelkeztek. A tehetséggondozó foglalkozások alatt 14-en hagyományos eszközzel, 16-an IKT eszközzel tanultak.

A vizsgálat az általános iskolai környezetben 21 – 21, a tehetséggondozó foglalkozáson 16 – 16 résztvevővel indult, azonban kizárásra kerültek azon tanulók, akik nem tudtak jelen lenni a tanulási folyamat teljes időtartama alatt a foglalkozásokon. Szintén kizárásra kerültek azon tanulók, akik nem töltötték ki a bemeneti, a kimeneti teszt, vagy a belső

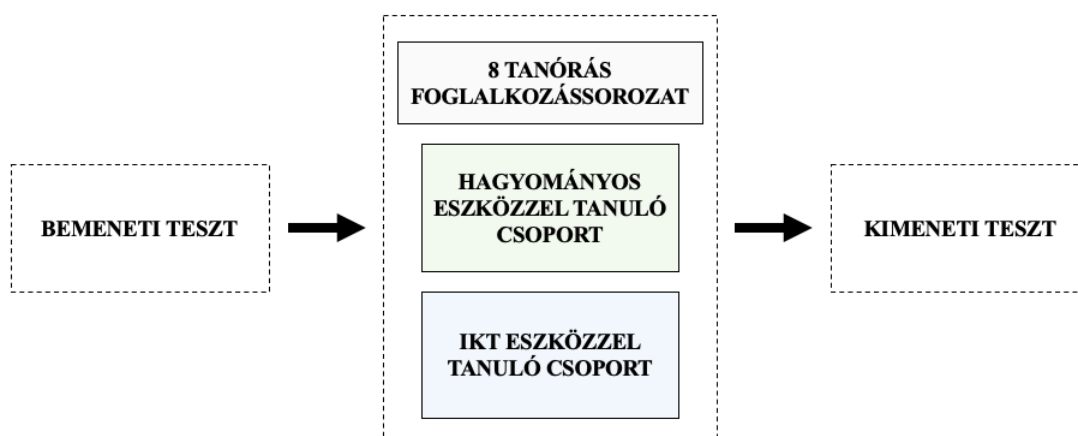
motivációt mérő kérdőív bármelyikét.

A két helyszínen tanuló diákok közül egyetlen résztvevő sem rendelkezett sajátos nevelési igénnyel vagy beilleszkedési, tanulási, magatartási nehézséggel. Az IKT eszközökkel tanuló diákok saját bevallásuk szerint mindannyian alap- vagy készségszinten használnak tabletet, azonban az eszközt korábban nem használták tanulási segédeszközként a matematikaórákon. A szöges táblát használó csoport tagjai elmondásuk szerint nem találkoztak korábban az általuk használt eszközzel.

A vizsgálatot megelőzően az érintett intézmények vezetői, a gyerekek, és a szüleik részletes tájékoztatást kaptak a kutatás céljáról és menetéről. A részvétel önkéntes alapon történt, a tanulók és a törvényes képviselőik írásos beleegyezésüket adták a kutatásban való részvételhez.

2.2. Kutatási protokoll

A kutatási protokoll a 2.1. ábrán látható. A vizsgálat kezdetén a résztvevő tanulók előzetes tudásuk felmérésére egy bemeneti tesztet töltöttek ki, amelyet a tudáselsajátítás folyamata követett. A tananyag feldolgozását két, azonos előzetes tudásszinttel rendelkező csoportban végeztük el kétféle tanulási segédeszközt alkalmazva. Az egyik csoport hagyományos, kézzel fogható eszközt (szöges tábla) használt, míg a másik csoport IKT-alapú eszközzel (Geoboard tabletes alkalmazás) dolgozott a tanulási szakasz során. A diákok nyolc alkalommal, alkalmanként 45 perces tanórán vettek részt, ahol a csoportok ugyanazt a tananyagot sajátították el csoport-specifikus tanulási eszközt használva. A tanulási folyamat lezárását követően a vizsgálati személyek kimeneti tesztet írtak, valamint egy belső motivációt mérő kérdőívet töltöttek ki, amely a tanulási élményükkel kapcsolatos attitűdjüket mérte.



2.1. ábra. Kutatási protokoll a hagyományos és az IKT eszköz használatának tanulási folyamatra gyakorolt hatékonyságának és motivációs hatásának vizsgálatára.

2.3. Bemeneti teszt

A foglalkozássorozat első alkalmán a diákok egy általunk összeállított öt feladatból álló bemeneti tesztet töltötték ki (1. Melléklet). A teszt megírására 20 perc állt rendelkezésre.

Bloom és munkatársai (1956, [2]) állították össze a széles körben használt követelménytaxonómiai rendszert. Célja, hogy segítsen meghatározni a tanulás-tanítás különböző elemeinek céljait, és beazonosítani az azokkal kapcsolatos tanulási eredményeket (Molnár & Vigh, 2013, [27]). A kutatás során használt bemeneti teszt öt feladata által mért gondolkodási szinteket a Bloom-taxonómia alapján kategorizáltuk és mutatjuk be (2.1. táblázat).

Az első feladat főként a lexikális ismeretek megértésére és azok gyakorlati alkalmazására fókuszált. A feladat helyes megoldásához a tanulónak ismerniük kellett az érintett geometriai alapfogalmakat, az alakzatok tulajdonságait, valamint érteniük kellett azok definícióit. A feladat célja az volt, hogy az elméleti tudást konkrét példákon alkalmazzák, tehát az alakzatokra vonatkozó tulajdonságokat ismeretlen helyzetben realizálják. Emellett az elemzés szintjét is érintette a feladat, ugyanis a tanulónak fel kellett ismerniük az alakzatok és tulajdonságaik közötti összefüggéseket, amely az információ részekre bontását és a releváns jellemzők azonosítását igényelte.

A második feladat elsősorban a taxonómia szerinti beosztás harmadik gondolkodási szintjét, a meglévő ismeretek alkalmazását mérte. A tanulónak a területszámítással kapcsolatos ismereteiket kellett felhasználniuk konkrét matematikai problémák megoldásához. A megértés szintje is érintett volt, mivel a feladat megoldása megkövetelte az információk adaptálását, és ezáltal a lexikális ismeretek megértését is. A diákoknak az alakzatokat részekre kellett bontaniuk, kiegészíteniük, és nagyobb alakzatokká összeállítaniuk a feladat helyes megoldása érdekében, amely az elemzési képesség bevonását követelte meg.

A harmadik feladat a megértés, az alkalmazás, az elemzés mellett az értékelés gondolkodás szinteket is mérte. Az összetett területszámítási feladat során a tanulónak nemcsak a helyes számítási eljárást kellett alkalmazniuk, hanem a gondolatmenetüket is be kellett mutatniuk. Az értékelési szint itt a megoldás helyességének indoklásában nyilvánult meg, amely a tanulók magyarázatkészítési képességét tesztelte.

A negyedik feladat többek között a magasabb rendű gondolkodási szinteket is célozta. A diákoknak a megértés, alkalmazás és elemzés szintjein túl szintetizálniuk is kellett az információkat. A feladat során azonosítaniuk kellett az egymással egybevető alakzatokat, és megjeleníteniük kapcsolataikat egy összekötő vonallal. Az értékelés szintje is szerepet kapott, hiszen a „Miért ugyanolyanok?” kérdés megválaszolása kreatív gondolkodást és egyértelmű érvelést igényelt.

Az ötödik feladat főként az alkalmazás, az elemzés és a szintézis szintjeit mérte. A tanulónak az egybevetőséggel kapcsolatos ismereteiket kellett alkalmazniuk a háromszög

különböző helyzetekben történő „újraillesztésére” egy, a bemeneti teszt írásakor még számukra ismeretlen pontsokaságon belül. A gondolatmenet szisztematikus vizsgálatot, a geometriai tulajdonságok - szögek nagysága és oldalhosszúságok - összehasonlítását és a lehetséges elhelyezési módok megtervezését igényelte. Az új elhelyezési módok kidolgozása és megrajzolása a szintézis szintjét képviselte.

A teszt megírása után a feladatok helyes megoldását nem ismertettük a tanulókkal, a kijavított feladatlapot nem kapták vissza és az elért eredményeikről sem kaptak tájékoztatást a vizsgálat végéig.

A bemeneti teszt célja az volt, hogy feltérképezzük a tanulók előzetes tudását a tanított tananyaggal kapcsolatban.

	<i>Tudás</i>	<i>Megértés</i>	<i>Alkalmazás</i>	<i>Elemzés</i>	<i>Szintézis</i>	<i>Értékelés</i>
1.feladat	×	×	×	×		
2.feladat	×	×	×	×		
3.feladat	×	×	×	×		×
4.feladat	×	×	×	×	×	×
5.feladat	×	×	×	×	×	

2.1. táblázat. A feladatonként mért gondolkodási szintek a Bloom-taxonómia vonatkozásában.

2.4. A nyolc tanórás foglalkozássorozat

2.4.1. A tanított tananyag

A foglalkozásokon feldolgozott tananyag alapját Varga Tamás *Játsszunk matematikát!* (1974, [51]; 2022, [53]) könyvének 9 szög geometriája című fejezete szolgáltatta. A felfedeztető matematikatanítás módszertanát alkalmazva a diákok olyan alapvető síkgeometriai fogalmakat sajátítottak el, mint a síkidom, a sokszög, a konvex és konkáv tulajdonságok, illetve a síkidomok egybevágósága. A tanulási folyamat részeként a területszámítás különböző módszerei is felfedeztető jelleggel kerültek bevezetésre lehetőséget teremtve ezzel a diákok számára, hogy aktívan bevonódjanak a matematikai összefüggések feltárásába. A foglalkozások során bizonyos felsőbb matematikai összefüggések is megsejtésre kerültek az alakzatok területének vonatkozásában. A tananyag feldolgozása így nemcsak a gyakorlati alkalmazást, hanem a matematikai gondolkodás magasabb szintjeit is támogatta.

A tanított tananyagunk jelentős mértékben lefedi a kerettanterv (2020, [29]) általi ötödik évfolyamon előírt „Síkbeli alakzatok” témakört. Foglalkozásokon feldolgozásra

kerültek olyan fogalmak és ismeretek, amelyek a kerettantervben is megjelennek: konvex és konkáv tulajdonságok, háromszögek, négyszögek és speciális négyszögek (négyzet), ötszögek, általánosan sokszögek, síkban egybevágó alakzatok, síkidomok, illetve a területszámítás. Az Oktatási Hivatal által kiadott ötödik évfolyamos tankönyvekben (Oktatási Hivatal, 2024a, [31]; 2024b, [32]) található olyan feladat, amely a diákokat a szöges tábla használatára ösztönzi. A kerettanterv a „Síkbeli alakzatok” témakör feldolgozására összesen 18 tanórát határoz meg. Számunkra mindkét helyszín összesen nyolc tanórát biztosított, amely során a fenti témák kerültek érintésre. A fennmaradó óraszám elegendő időkeretet biztosított arra, hogy a diákok a vizsgálatunkon túl, saját tanáraik irányításával a kerettanterv által előírt további fogalmakat is maradéktalanul elsajátítsák. A tehetséggondozó csoportokba olyan diákok is bekerültek, akik az iskolájukban már találkoztak az ötödik évfolyamos geometria tananyaggal, de voltak olyanok is, akik számára az általunk tartott foglalkozások jelentették az első találkozást a témakörrel, mivel az adott iskolákban a „Síkbeli alakzatok” feldolgozása későbbi időpontra esett. Az általános iskolában a tananyagunk feldolgozása a geometria témakör bevezetése előtt történt meg, és csak később került kiegészítésre további feladatanyagokkal. Kijelenthetjük tehát, hogy az általunk feldolgozásra került tananyag tartalmilag és strukturálisan megfelel a kerettanterv által előírt követelményeknek, támogatja a tanulók megértését és kompetenciáinak fejlődését, illetve hatékony alapot teremt a későbbi ismeretek feldolgozásához.

A tanulási folyamat során összesen 38 feladat megoldására került sor (2. Melléklet). Ezek közül 27 feladat Varga Tamás *9 szög geometriája* (1974, [51]; 2022, [53]) című publikált feladatsorozatából származik, amelyeket változtatás nélkül vettünk át. További 3 feladat minimálisan átdolgozott formában került be tananyagunkba, míg 8 feladatot saját fejlesztésként állítottunk össze. A 38 feladatból 20 esetben kellett a tanulást támogató eszközön dolgoznia a csoportoknak.

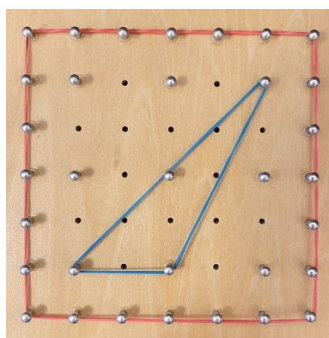
A szakirodalom javaslata szerint a szöges táblák alkalmazása különösen hatékony, ha azt izometrikus pontpapírral kombinálva használják, mivel ez elősegíti a geometriai tulajdonságok és összefüggések mélyebb megértését (Carrol, 1992, idézi Scandrett, 2008, [43]). Így, a résztvevő diákok számára egy, kizárólag 9 szögeket tartalmazó munkafüzetet biztosítottunk, amely lehetőséget teremtett a geometriai felfedezések önálló folytatására és a tanulási folyamat dokumentálására. A vizsgálat után egy diák füzetének néhány oldalát lefényképeztük, hogy szemléltető példaként szolgáljanak. Az oldalak a 3. mellékletben találhatók.

2.4.2. A két eszköz bemutatása

Tananyag elsajátítását támogató eszközként a kutatásban résztvevő két csoport közül az egyik a hagyományos, kézzel fogható tárgyi eszközt, míg a másik csoport az IKT eszközt

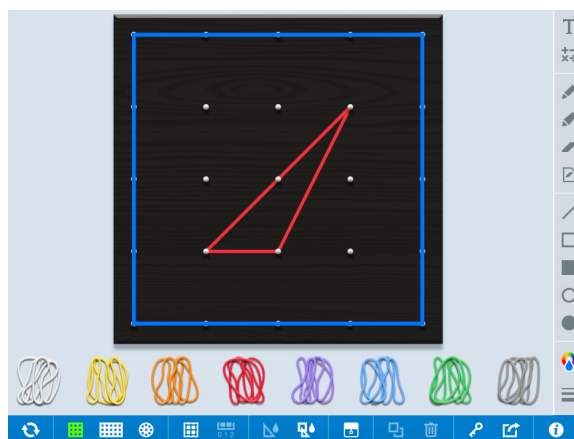
használta. A foglalkozássorozat első alkalmán a bemeneti teszt megírását követően a fennmaradó időt a tanulást támogató eszközök alapos megismerésére fordítottuk.

Varga Tamás *9 szög geometriája* (1974, [51]; 2022, [53]) című munkájában a feladatok eredetileg az ún. szöges táblára lettek tervezve. Az eszköz egy 10×10 cm méretű fatábla, melynek felületén kilenc fém szög található soronként és oszloponként egymástól egyenlő távolságra, szabályos elrendezésben (2.2. ábra). A diákok gumiszalagokkal különböző geometriai formákat feszíthettek ki a szögekre, így fedezve fel a geometria alapvető összefüggéseit és szabályait. A szöges táblát használó csoportok kizárólag ezt az eszközt alkalmazták a tanulási folyamat során, mint tanulást támogató eszközt. A vizsgálati személyeknek páronként biztosítottunk egy szöges táblát, valamint egy csomag befőttés gumit. A párok az eszközt a teljes foglalkozássorozat során közösen használták, és ennek segítségével oldották meg a kijelölt feladatokat.



2.2. ábra. A szöges tábla (rajta egy gumiszalaggal kifeszített háromszög).

Az IKT eszközt használó csoportok a szöges tábla digitális változatával, a Geoboard (Clarity Innovation, The Math Learning Center, U.S.A., Orgeon) nevű internetalapú alkalmazással tanultak (Geoboard by The Math Learning Center, n.d., [12]). Az applikáció lehetővé tette, hogy a diákok az IKT eszköztárát használva tapasztalják meg mindazt, amit a hagyományos szöges tábla kínál (2.3. ábra). Az alkalmazás egy digitális szöges táblát jelenít meg, amelyen a szögek pontosan a hagyományos szöges tábla elrendezését követik. A diákok különböző színű virtuális gumiszalagokat használhattak, amelyeket egyszerűen eltávolíthattak a Geoboardról, illetve tetszőlegesen új gumiszalagokat is hozzáadhattak. A Geoboardot használó csoportok kizárólag ezen alkalmazást használták tanulást támogató eszközként a kutatásnak helyet adó intézmények által rendelkezésünkre bocsátott tableteken. Az általános iskolai tanórákon Samsung Galaxy Tab A9 X110N (Samsung, Seoul, South Korea), míg a tehetséggondozó foglalkozásokon Xiaomi Redmi Pad SE 11 (Xiaomi, Beijing, China) típusú tableteket használtak a diákok. Két diák számára biztosítottunk egy tabletet, amelyet a párok a foglalkozássorozat teljes időtartama alatt közösen használtak a feladatok megoldásához.



2.3. ábra. A Geoboard (rajta egy virtuális gumiszalaggal kifeszített háromszög).

2.5. Kimeneti teszt

A foglalkozássorozat záróalkalmán a diákok egy kimeneti tesztet írtak (4. Melléklet). A kimeneti teszt tartalma a bemenetihez hasonló volt, felépítése pedig azonos (2.3. Bemeneti teszt alfejezet). A kimeneti teszt első, második és negyedik feladata megegyezett a bemeneti teszt feladataival, azonban az alakzatok sorrendjét megváltoztattuk. A tanulók a bemeneti tesztet kijavított formában nem kapták kézhez, és a tesztfeladatok megoldását sem ismertettük, így nem jelentett problémát, hogy bizonyos feladatok ismétlődtek. A harmadik és az ötödik feladat esetében módosított változatot alkalmaztunk. A módosítások célja részben a nehézségi szint növelése volt, valamint ezen feladatoknál fennállt a lehetősége annak, hogy a diákok emlékeznek a korábbi megoldásaikra.

A teszt második és ötödik feladatában a diákoknak az órákon is használt, papíralapú 9 szögön kellett dolgozniuk és gondolkodniuk, ezért ezek a feladatok a tanórákon végzett gyakorlatokhoz hasonlónak tűnhettek számukra. Az első, harmadik és negyedik feladat azonban már túlmutatott a 9 szögön, új kontextusokat és kihívásokat kínálva. A teszt harmadik feladata egy területszámítási problémát tartalmazott, amelyhez hasonló az órák során mindössze egyetlen példán keresztül dolgoztunk fel. A feladattal azt kívántuk vizsgálni, hogy a 9 szögön végzett területszámítási gyakorlatok mennyire támogatják a nagyobb hálóra rajzolt alakzatok területének meghatározását.

Vizsgálatunk folyamán a tanulási szakasz célja az új fogalmak felfedeztetése és elsajátítása volt. A diákok a bementi és kimeneti tesztekben szereplő konkrét feladatokkal és azok megfogalmazásával kizárólag a tesztek kitöltésekor találkoztak, így biztosítottuk, hogy a kimeneti teszt valóban a tanulási fázis során megszerzett tudást mérje. Az alkalmazott módszer garantálta, hogy az eredmények valós képet adjanak a hagyományos, tárgyi és az IKT eszköz által támogatott tanulási folyamat hatékonyságáról, kizárva az előzetes ismétlés vagy a kimeneti tesztre való felkészülés torzító hatását.

2.6. A belső motiváció vizsgálata

A tanulási fázisban használt eszköz (hagyományos, IKT) motiváló hatásának vizsgálatához a „Belső Motivációs Leltár” (Intrinsic Motivation Inventory, IMI) kérdőívet alkalmaztuk (Ryan és Deci, 2000, [7]). A kérdőív egy multidimenzionális mérőeszköz, amelyet a résztvevők egy célzott tevékenységével kapcsolatos szubjektív élményeinek felmérésére alkalmaznak a mai napig (Mendez et al., 2020, [25]). Az eszköz a belső motivációt hat alskála mentén méri az adott tevékenység során. Ha a vizsgálat szempontjából bizonyos alskálák és a hozzájuk tartozó állítások nem relevánsak, akkor azok elhagyhatóak anélkül, hogy csökkentené a kérdőív validitását. Jelen vizsgálat belső motivációt mérő kérdőívébe öt, a kutatás szempontjából relevánsnak vélt alskálát emeltünk be:

- 1) **Az érdeklődés és élvezet** alskála arra fókuszál, hogy a diákok milyen mértékben találják élvezetesnek, szórakoztatónak és érdekesnek az adott eszközzel történő matematikatanulást. A skála az élvezeti érték szubjektív megélését méri, miközben figyelembe veszi a tevékenység iránti unalom vagy érdektelenség (fordított állítások) szintjét is.
- 2) **Az észlelt kompetencia** alskála ezzel szemben azt térképezi fel, hogy a tanuló mennyire tartja magát kompetensnek és sikeresnek az adott eszközzel való feladatmegoldásban, és hogyan érzékeli teljesítményét önmagához és másokhoz viszonyítva.
- 3) **Az erőfeszítés és észlelt jelentőség** alskála a diák aktív elköteleződését, befektetett energiáját és az adott eszközzel történő tanulás számára tulajdonított jelentőségét vizsgálja.
- 4) **Az észlelt nyomás és feszültség** alskála az diák szubjektív stresszélményét, érzelmi feszültségét és szorongását méri az adott tanulást támogató eszközzel való tanulás során.
- 5) **Az észlelt autonómia** alskála azt méri, hogy a diák mennyire érezte magát szabadnak és önállónak az adott eszközzel való tanulás során, valamint azt, hogy a részvétele mennyire volt belső motiváció által vezérelt.

Amíg az érdeklődés és élvezet, észlelt kompetencia, erőfeszítés és észlelt jelentőség, észlelt autonómia alskálák mentén elért magas érték indukálja a magas fokú belső motivációt, addig az észlelt nyomás és feszültség skálán az alacsony érték jelenti az adott segédeszközzel történő tanuláshoz való pozitív attitűdöt.

A kérdőívet valamennyi, a vizsgálatban résztvevő tanuló kitöltötte papír alapon a kimeneti teszt megírását követően. Az IMI kérdőív összesen 28 állítást tartalmazott, amelyben az alskálához tartozó állítások szabálytalan sorrendben követték egymást. Az egyes alskálák állításainak megoszlását, valamint a fordított állítások előfordulásának számát a 2.2. táblázat tartalmazza. A diákoknak egy 7-fokozatú Likert-skálán kellett értékelniük az állításokat kifejezve, hogy milyen mértékben értenek egyet azzal (1 –

egyáltalán nem, 7 – teljes mértékben). Az állítások a csoport által használt tanulást támogató eszközre vonatkoztatva lettek megfogalmazva. A 5. melléklet mindkét fogalmazási módot tartalmazza.

A belső motivációt mérő kérdőív végén a tanulók nyílt végű kérdések formájában lehetőséget kaptak arra, hogy kifejtsék véleményüket és megfogalmazzák tapasztalatikat a tanulási fázis során használt matematika-tanulást segítő eszközről. A diákok válaszaiból kiemelt példák a 6. mellékletben olvashatók.

Álskála	Összes állítás száma	Fordított állítások száma
Érdeklődés és élvezet	7	2
Észlelt kompetencia	6	1
Erőfeszítés és észlelt jelentőség	5	2
Észlelt nyomás és feszültség	5	2
Észlelt autonómia	5	3

2.2. táblázat. Az IMI kérdőívben mért belső motiváció alskáláihoz tartozó állítások szerinti megoszlása, illetve a fordított állítások előfordulásának száma.

2.7. A tesztek és a belső motivációt mérő kérdőív megbízhatóságának vizsgálata

Reliabilitási tesztet végeztünk a bemeneti és kimeneti tesztek, valamint az IMI kérdőív egyes alskáláinak megbízhatóságának vizsgálatára. A tesztek és az alskálák reliabilitását Cronbach-féle alfa-koefficienssel ellenőriztük a (2.1). képlet alapján.

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right) \quad (2.1)$$

A képletben α : a Cronbach-féle koefficiens, n : az itemek száma, s_i^2 : az i . item varianciája és s_t^2 : a teszt összpontszámainak varianciája.

A kimeneti és bementi tesztek összes állítására számoltunk Cronbach-alfa értéket, ezzel a feladatsorok általános megbízhatóságát kaptuk meg. Az IMI kérdőív megbízhatóságát alskálánként ellenőriztük. A szakirodalomban a Cronbach-alfa együttható értelmezésére többféle megközelítés is létezik. A tanárok által készített tesztek reliabilitása gyakran nem haladja meg a 0,6 értéket (Csapó, 2004, [6]). Tudományos kutatásokban azonban általánosan elfogadott követelmény, hogy a tesztek megbízhatósága elérje a legalább 0,6, vagy annál magasabb Cronbach-alfa értéket (Malhotra, 2002, idézi Sajtos & Mitev, 2007, [41]) (2.3. táblázat).

Cronbach-alfa érték	Besorolás
$0,9 \leq \alpha$	Kiváló
$0,7 \leq \alpha < 0,9$	Jó
$0,6 \leq \alpha < 0,7$	Megfelelő
$0,5 \leq \alpha < 0,6$	Gyenge
$\alpha < 0,5$	Elfogadhatatlan

2.3. táblázat. Cronbach-alfa értékek osztályozása (Kilic, 2016).

2.8. Statisztikai számítások

A vizsgálat során kapott változókra leíró statisztikát alkalmaztunk. Számításokat 16.66.1 verziószámú Microsoft Excel (Microsoft, Washington, U.S.A.) programmal végeztük, a normalitásteszteket SPSS (IBM Corp. (2019). IBM SPSS Statistics for Windows, Version 26.0. Armonk, NY: IBM Corp.) programmal futtattuk.

A kísérleti csoportok alacsony elemszáma miatt a bemeneti és kimeneti teszt eredményeinek eloszlását Shapiro-Wilk normalitás teszttel vizsgáltuk (Mishra et al., 2019, [26]). A próba nullhipotézise az, hogy a változó nem normál eloszlású. Amennyiben a teszt szignifikáns eredményt mutat, úgy az adatsor eloszlása jelentősen különbözik a normáltól (nem normál eloszlású) (Sajtos & Mitev, 2007, [41]).

Az egyes környezetekben a két csoport bemeneti teszten elért eredményeit Welch-féle párosítatlan t-próbával hasonlítottuk össze. Az egyes csoportok kimeneti és bemeneti teszten elért eredményeinek összehasonlításához Student-féle párosított t-próbát alkalmaztunk. A két eszközt használó csoport kimeneti teszten elért eredményeinek összehasonlításához és a két kutatási környezet diákjainak eszközhasználatától független teljesítményének feladatonkénti összehasonlításához Welch-féle párosítatlan t-próbát futtattunk. Az IMI kérdőívben a csoportok egyes alsókálák mentén adott értékeinek összehasonlításához szintén Welch-féle párosítatlan t-próbát futtattunk. A szignifikancia szintjét mindegyik próba esetén $p < 0,05$ értékben határoztuk meg.

Az eredmények szemléltetésére létrehozott diagramokat a 16.66.1 verziószámú Microsoft Excel és 16.66.1 verziószámú Microsoft PowerPoint (Microsoft, Washington, U.S.A.) programokkal készítettük el. Az adatokat a hatékonyságvizsgálat során átlag és szórás formában mutatjuk be, a motivációvizsgálat esetében megjelenítjük ezeken felül az adathalmazok mediánját is.

3. fejezet

Eredmények

Jelen fejezetben a vizsgálat során gyűjtött adatok statisztikai elemzésének eredményeit mutatom be, melyek a kutatási kérdések megválaszolását hivatottak támogatni. A normalitás teszt segítségével megállapítottuk, hogy a vizsgált változók normál eloszlást mutatott.

3.1. Megbízhatósági vizsgálatok

A két kutatási helyszínen (általános iskola, tehetséggondozó foglalkozás) a hagyományos és IKT eszközt használó csoportok bemeneti és kimeneti tesztjeinek belső megbízhatósági értékei (Cronbach-alfa) 0,753 – 0,924 között változtak (3.1. táblázat).

Környezet	Csoport	Teszt	Cronbach- alfa
Általános	Hagyományos	Bemeneti	0,753
		Kimeneti	0,908
	IKT	Bemeneti	0,853
		Kimeneti	0,924
Tehetséggondozó	Hagyományos	Bemeneti	0,824
		Kimeneti	0,878
	IKT	Bemeneti	0,831
		Kimeneti	0,799

3.1. táblázat. Az általános iskolások és a tehetséggondozó foglalkozásokon részt vevő diákok hagyományos és IKT eszközt használó csoportjainak bemeneti és kimeneti teszteredményein számított Cronbach-alfa értékek.

Az IMI kérdőív alskáláinak Cronbach-alfa értéke 0,621 – 0,879 között változott az álta-

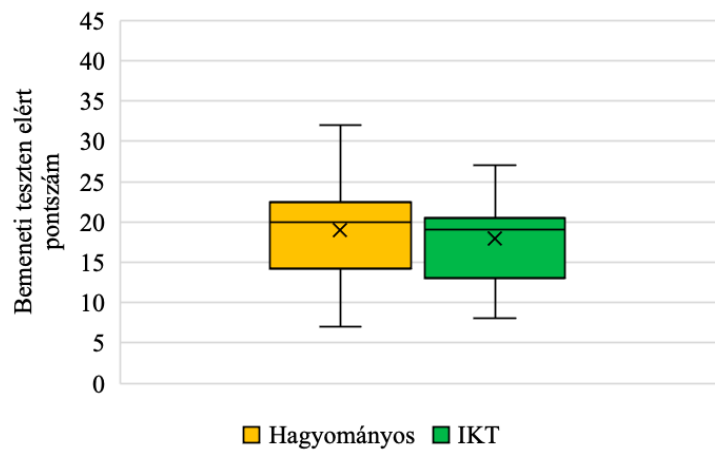
lános iskolai és tehetséggondozó foglalkozás kutatási környezetekben, ahol a hagyományos és IKT eszközöket használó csoportokat vizsgáltuk (3.2. táblázat).

Környezet	Alskála	Cronbach- alfa
Általános	Érdeklődés és élvezet	0,870
	Észlelt kompetencia	0,879
	Erőfeszítés és észlelt jelentőség	0,726
	Észlelt nyomás és feszültség	0,785
	Észlelt autonómia	0,816
Tehetséggondozó	Érdeklődés és élvezet	0,813
	Észlelt kompetencia	0,621
	Erőfeszítés és észlelt jelentőség	0,652
	Észlelt nyomás és feszültség	0,785
	Észlelt autonómia	0,863

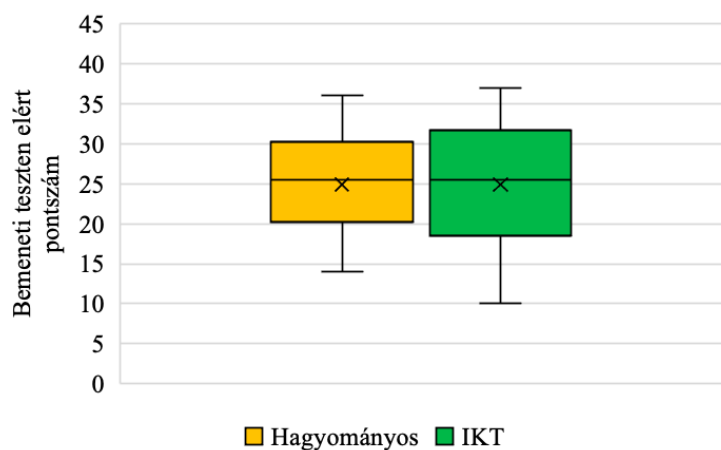
3.2. táblázat. Az általános iskolások és a tehetséggondozó foglalkozásokon részt vevő diákok hagyományos és IKT eszközt használó csoportjai által kitöltött IMI kérdőív alskáláinak Cronbach-alfa értékei.

3.2. Bemeneti tesztek eredménye a két kutatási környezetben

A statisztikai elemzés nem mutatott ki szignifikáns különbséget a hagyományos, tárgyi eszközt és az IKT eszközt használó csoportok bemeneti tesztjeinek eredményei között, sem az általános iskolai környezetben ($p = 0,561$) (3.1. ábra), sem a tehetséggondozó foglalkozáson ($p = 0,983$) (3.2. ábra).



3.1. ábra. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok előzetes tudásszintje az általános iskolai bemeneti teszteken. (Maximális pontszám = 45)



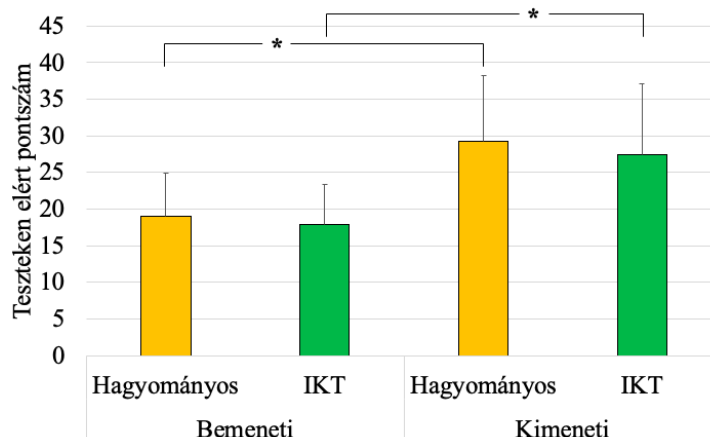
3.2. ábra. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok előzetes tudásszintje a tehetséggondozó bemeneti teszteken. (Maximális pontszám = 45)

3.3. Hatékonyságvizsgálat

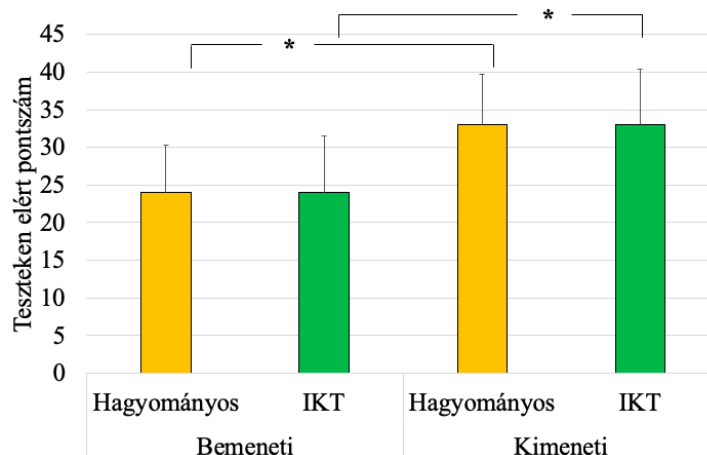
3.3.1. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok pontszámának változása a bemeneti tesztről a kimeneti tesztre

A bemeneti teszthez képest a kimeneti teszten jelentősen több pontot ért el mind a hagyományos, tárgyi ($p < 0,001$), mind az IKT eszközt ($p < 0,001$) használó csoport az általános iskolai környezetben (3.3. ábra).

A tehetséggondozó foglalkozásokon mind a hagyományos eszközt ($p = 0,001$), mind az IKT eszközt ($p < 0,001$) használó csoport jelentősen több pontot ért el a kimeneti teszten, mint a bemeneti teszten (3.4. ábra).



3.3. ábra. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok bemeneti és kimeneti tesztjeinek pontszáma az általános iskolai környezetben átlaggal és szórással megjelenítve. (Maximális pontszám = 45)

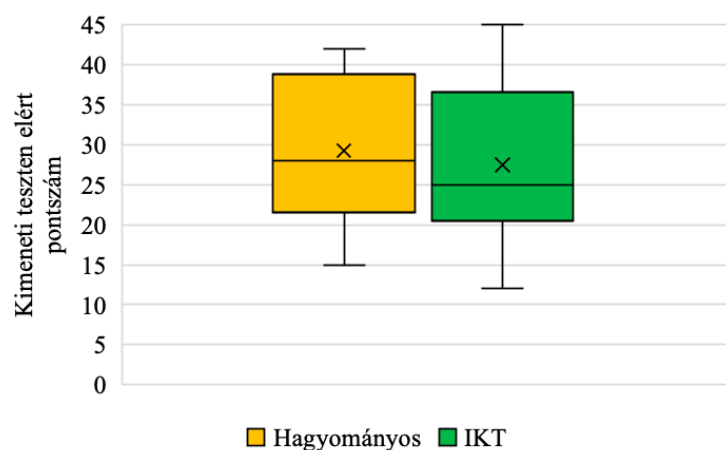


3.4. ábra. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok bemeneti és kimeneti tesztjeinek pontszáma a tehetséggyondozó foglalkozásokon átlaggal és szórással megjelenítve. (Maximális pontszám = 45)

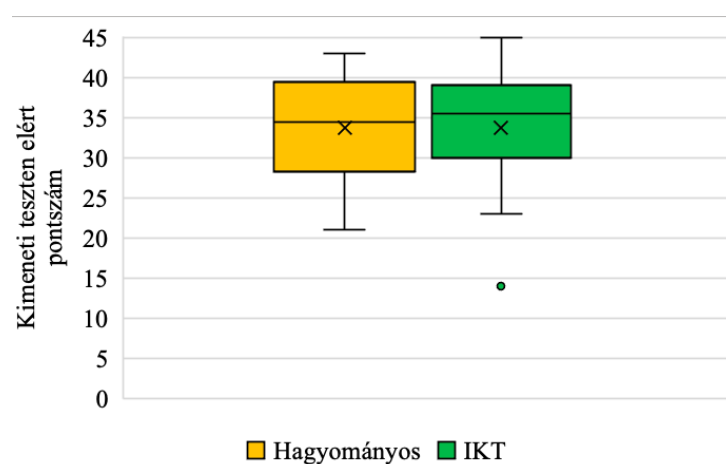
3.3.2. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok kimeneti teszten elért pontszámának összehasonlítása

A statisztikai számítások szerint a kimeneti teszten elért pontszámában nem volt szignifikáns különbség ($p = 0,544$) a hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok között az általános iskolai környezetben (3.5. ábra).

Nem volt jelentős különbség ($p = 0,991$) a tehetséggyondozó foglalkozáson a hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok kimeneti teszten elért pontszámában (3.6. ábra).



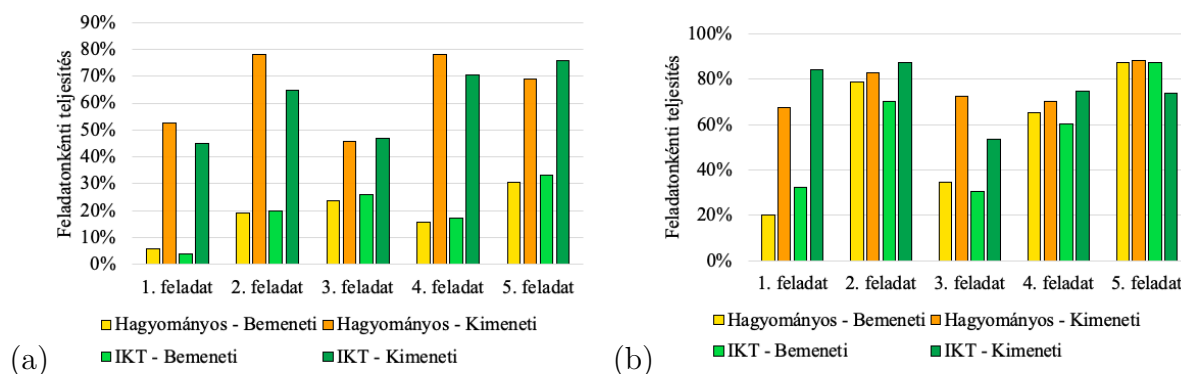
3.5. ábra. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok kimeneti teszten elért pontszámai az általános iskolai környezetben. (Maximális pontszám = 45)



3.6. ábra. A hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok kimeneti teszten elért pontszáma a tehetséggondozó foglalkozáson. (Maximális pontszám = 45)

3.3.3. A hagyományos és IKT eszközt használó csoportok bemeneti és kimeneti teszteken elért eredményei feladatonként

Feladatonként vizsgálva a statisztikai számítások nem találtak szignifikáns különbséget a hagyományos és az IKT eszközt használó csoportok teljesítménye között sem az általános iskolai, sem a tehetséggondozó környezetben (3.7. ábra).



3.7. ábra. Az általános iskolában (a) és a tehetséggondozó foglalkozáson (b) írt bemeneti és kimeneti tesztek feladatain elért átlagok %-ban megadva.

3.3.4. A diákok teljesítményének feladatonkénti összehasonlítása a két környezetben eszköztől függetlenül

A statisztikai elemzések alapján a bemeneti teszt feladatonkénti összehasonlítása azt mutatta, hogy az általános iskolai és a tehetséggondozó környezet diákjai között a harmadik feladat esetében nem volt jelentős különbség (3.3. táblázat). Az első, második, negyedik és ötödik feladatoknál azonban szignifikáns eltérést figyeltünk meg ($p < 0,001$). A kimeneti tesztek vizsgálatakor jelentős különbséget találtunk az első feladat ($p < 0,001$) és a második feladat ($p = 0,027$) eredményeiben. A harmadik, negyedik, ötödik feladatokban nem volt különbség a kutatási környezetek között.

	Bemeneti (%)		p érték	Kimeneti (%)		p érték
	Ált. isk.	Tehets.		Ált. isk.	Tehets.	
1. feladat	4,88	26,67	$< 0,001$	48,78	76,36	$< 0,001$
2. feladat	19,51	74	$< 0,001$	71,22	85,33	0,027
3. feladat	24,74	32,38	0,277	46,34	62,38	0,072
4. feladat	16,51	62,56	$< 0,001$	74,30	75,56	0,775
5. feladat	31,98	87,41	$< 0,001$	72,36	80,37	0,341

3.3. táblázat. A két kutatási környezet diákjainak teljesítménye a bemeneti és kimeneti teszteken eszköztől függetlenül.

3.4. Motivációvizsgálat

A diákok belső motivációjának vizsgálatakor a hagyományos tárgyi és az IKT eszközt használó csoportok között szignifikáns különbség volt az érdeklődés és élvezet ($p = 0,001$), az észlelt kompetencia ($p = 0,049$), az erőfeszítés és észlelt jelentőség ($p = 0,002$), észlelt nyomás és feszültség ($p < 0,001$) és az észlelt autonómia ($p = 0,006$) alskálák mindegyikén az általános iskolai környezetben (3.4. táblázat).

Alskálák	Átlag		Szórás		Medián		p érték
	Hagy.	IKT	Hagy.	IKT	Hagy.	IKT	
Érdeklődés és élvezet	5,54	4,17	1,14	1,45	5,57	4	0,001
Észlelt kompetencia	5,38	4,59	1,45	1,45	5,83	4,5	0,049
Erőfeszítés és észlelt jelentőség	5,33	4,02	1,26	1,31	5,6	3,8	0,002
Észlelt nyomás és feszültség	1,92	3,61	1,04	1,63	1,3	3,6	$< 0,001$
Észlelt autonómia	5,1	3,73	1,37	1,65	5,4	3,2	0,006

3.4. táblázat. Általános iskolában kitöltött IMI kérdőív eredményei.

A tehetséggondozó foglalkozásokon a hagyományos tárgyi és az IKT eszközt használó csoportok között jelentős különbség volt az érdeklődés és élvezet ($p = 0,026$), észlelt kompetencia ($p = 0,008$) és az észlelt autonómia ($p = 0,043$) alskálák elemzése során (3.5. táblázat). Nem volt különbség továbbá az erőfeszítés és észlelt jelentőség, és az észlelt nyomás és feszültség alskálák vizsgálatakor.

Alskálák	Átlag		Szórás		Medián		<i>p</i> érték
	Hagy.	IKT	Hagy.	IKT	Hagy.	IKT	
Érdeklődés és élvezet	5,49	6,3	1,1	0,66	5,79	6,43	0,026
Észlelt kompetencia	5,24	6,11	0,99	0,55	5,25	6,17	0,008
Erőfeszítés és észlelt jelentőség	5,26	5,74	0,99	0,76	5,4	5,8	0,155
Észlelt nyomás és feszültség	1,91	1,53	0,93	0,06	1,5	1,2	0,201
Észlelt autonómia	5,74	6,5	1,2	0,54	6	6,6	0,043

3.5. táblázat. Tehetséggondozó foglalkozáson kitöltött IMI kérdőív eredményei.

4. fejezet

Diszkusszió

A jelen kutatás célja annak vizsgálata volt, hogy a tanulást támogató eszközök milyen hatással vannak a tanulási folyamat hatékonyságára és a belső motivációra azonos matematikai tananyag elsajátítása során. A hagyományos eszközzel támogatott tanulást vetettük össze az IKT eszközzel történő tanulással. A kísérletet két különböző kutatási környezetben végeztük el: általános iskolában, valamint tehetséggondozó foglalkozáson.

A pszichometria teszt elemzésekor számított 0,6, vagy annál magasabb Cronbach-alfa érték tudományosan elfogadott kutatási célokra (Malhotra, 2002, idézi Sajtos & Mitev, 2007, [41]). Jelen vizsgálat során a bemeneti és kimeneti teszteken csoportszinten mért megbízhatósági értékek (0,753 – 0,924) a „jó” és a „kiváló” megbízhatósági kategóriába tartoztak. A belső motivációt mérő kérdőív (Intrinsic Motivation Inventory, IMI) alskáláin számított Cronbach-alfa értékek (0,621 – 0,879) a „jó” és a „megfelelő” megbízhatósági kategóriába estek. Az eredmények alapján következtetésként levonható, hogy a mérési technikák megfelelőek és alkalmasak voltak a kutatási célok szempontjából releváns adatok gyűjtésére.

A hatékonyságvizsgálat alapjául a bemeneti és kimeneti tesztek eredményei szolgáltak. A bemeneti teszt eredményére futtatott statisztikai vizsgálat kimutatta, hogy nem volt jelentős különbség a csoportok között egyik vizsgált környezetben sem. Az eredmény azt jelenti, hogy a csoportok ugyanakkora előzetes tudásszinttel rendelkeztek a tanulási folyamat megkezdése előtt. Ez lehetővé tette számunkra, hogy objektíven mérjük a szöges tábla és a Geoboard alkalmazás használatának hatását a tanulási folyamatra, amit a kimeneti teszt eredményéből határoztunk meg.

A statisztikai elemzés kimutatta, hogy minden csoport a kimeneti teszten szignifikánsan jobb eredményt ért el, mint a bemeneti teszt megírásakor, mindkét környezetben. Az általános iskolában a hagyományos eszközt használó csoport ~23%-os, míg az IKT eszközzel tanuló csoport ~24%-os fejlődést ért el. Ezzel szemben a tehetséggondozó foglalkozásokon mind a hagyományos eszközt, mind az IKT eszközt használó csoportok egyaránt ~20%-

os fejlődést mutattak. Eredményeink megegyeznek a felfedezettő matematikatanítással kapcsolatos hazai és nemzetközi szakirodalmakkal, miszerint a tanulást támogató eszköz használatával jelentős tudásbeli fejlődés érhető el (Pólya, 1957, [37]; Varga, 1973, [50]; Kablan, 2016, [16]; Lessani et al., 2017, [24]). Vizsgálatunk eredményei továbbá megerősítik Kordaki és Mastrogiannis (2007, [21]) megállapítását, miszerint az IKT eszközök hatékonyan támogatják a geometriai tudás elsajátítását.

Fontos megjegyezni, hogy a kimeneti teszten nehezebb volt jó pontszámot elérni, mert a kimeneti teszt harmadik és ötödik feladata nehezebb volt, mint a bemeneti teszt hasonló feladatai. Különösen az ötödik feladat (kombinatorikus geometria) számított összetettnek, mivel hasonló típusú feladat gyakran matematika versenyeken, például a TIT Kalmár László Matematikaverseny országos döntőjén (2014, [17]; 2021, [18]) fordul elő. Az első feladatban különösen szigorú pontozási rendszert kellett alkalmaznunk azért, hogy a tesztek megbízhatósága megfelelő legyen. A feladatban a diákok csak akkor kapták meg a maximális pontszámot az egyes részkérdésekre, ha minden válaszuk helyes volt az adott alakzatra vonatkozóan. Mindezek alapján még a tehetséggondozó csoportban sem várható el, hogy a diákok maximális pontszám körüli eredményeket érjenek el.

Az elmúlt évtizedekben számos kutatás foglalkozott a hagyományos tanulási segédeszközök (Lessani et al., 2017, [24]) és az IKT eszközök (Hwang, 2012, [15]) hatékonyságának vizsgálatával. Nem áll rendelkezésre azonban olyan tanulmány, amely kifejezetten a két eszköztípus kizárólagos használatának tanulási folyamatra gyakorolt hatékonyságát hasonlította volna össze, ezért eredményeinket nem tudjuk összehasonlítani más vizsgálatokkal. Első számú kutatási kérdésünkben azt vizsgáltuk, hogy kimutatható-e szignifikáns különbség tanítási-tanulási hatékonyság tekintetében a hagyományos eszköz és az IKT eszköz használata esetén. Statisztikai számításaink során a két eszközt alkalmazó csoportok kimeneti teszteredményei között nem mutatkozott szignifikáns különbség egyik környezetben sem, így kutatási kérdésünkre nemleges választ adunk. Az összesített dolgozati eredmények alapján mindkét csoport azonos szintre jutott, függetlenül attól, hogy hagyományos vagy digitális eszközökkel tanultak. Feltételezhetően ez annak köszönhető, hogy mindkét csoportban azonos, felfedezésalapú matematikatanítási módszertant alkalmaztunk. Eredményeink alapján feltételezhető, hogy az tanítás hatékonyságának szempontjából nagyobb jelentősége van a választott módszertannak, mint az alkalmazott eszköz típusának. Kutatási eredményünk különösen fontos lehet a szerényebb anyagi forrásokkal rendelkező iskolák számára. A megállapításaink szerint ugyanis, a geometria felfedezettő tanításmódszertana sikeresen alkalmazható, anélkül, hogy a fenntartónak a rendkívül költséges, digitális eszközöket kellene megvásárolnia.

Az általános iskola és a tehetséggondozó foglalkozás környezetek összehasonlítása (eszköztől független) során jelentősen jobb eredményt értek el a bemeneti teszt első (~25%),

második (~54%), negyedik (~46%) és ötödik (~55%) feladat megoldásában a tehetséggondozó foglalkozáson résztvevő tanulók. Az eredmény azt jelenti, hogy a tehetséggondozó foglalkozáson résztvevő diákok magasabb szintű előzetes tudással rendelkeztek, mint az általános iskolás tanulók. A kimeneti teszteredmények elemzése alapján az öt feladatból csupán az első (~27%) és a második feladat (~14%) esetén találtunk szignifikáns eltérést a két környezet teljesítménye között. Az eredmények arra engednek következtetni, hogy eszközhasználat mellett – legyen az hagyományos vagy IKT eszköz – az általános iskolások a feladatok többségében statisztikailag megegyező tudásszintet értek el, mint a tehetséggondozó foglalkozásra beválogatott diákok. Az eredmény rámutat arra, hogy az eszközök alkalmazása nemcsak hatékonyra teszi a tanulási folyamatot, hanem jelentősen hozzájárul a tanulók közötti tudásbeli különbségek csökkentéséhez is, még az olyan bonyolult feladatok megoldása során is, mint a kombinatorikus geometria. Az ilyen pedagógiai megközelítések hosszú távon hozzájárulhatnak az oktatási rendszerben tapasztalható egyenlőtlenségek mérsékléséhez.

Mind a hagyományos, mind pedig az IKT eszköz matematikatanulás során való használata magas motivációs szintet váltott ki mindkét környezetben, alátámasztva ezzel a nemzetközi szakirodalmat (Yadav, 2017, [54]; Lasut & Bawengan, 2020, [23]). A nyomás és feszültség alskálán mutatott alacsony értékek Saha és munkatársai (2020, [40]), illetve Rahmawati és munkatársai (2020, [39]) megállapításait igazolták: a két eszköz alkalmazása csökkentik a matematika tantárggyal kapcsolatos szorongást, miközben növelik a diákok pozitív attitűdjét a tudományterület tanulása iránt.

A második kutatási kérdésünk arra irányult, hogy kimutatható-e statisztikailag szignifikáns különbség a hagyományos eszközzel tanuló csoport és az IKT eszközt használó csoport tanulási folyamathoz kapcsolódó belső (intrinzik) motivációja között. Az eredmények azt mutatták, hogy a kérdésre az „igen” válasz adható. Az általános iskolai környezetben a hagyományos eszközt használó csoport mind az öt dimenzió mentén szignifikánsan nagyobb értéket mutatott, tehát magasabb szintű intrinzik motivációval rendelkezett, mint az IKT eszközt alkalmazó csoport. A háttérben valószínűsíthetően az áll, hogy az egyházi fenntartású iskolák – így a vizsgálatban résztvevő Szent Mór Iskolaközpont – diákjai jellemzően konzervatív iskolai környezetben nevelkedtek. A tanulók visszajelzései alapján a tabletek használata a matematikatanulás során idegen és szokatlan élményt jelentett számukra, ami hozzájárulhatott az elzárkózó attitűdjükhöz és az alacsonyabb belső motivációjukhoz az IKT eszközzel folytatott tanulás iránt. Feltételezésünket alátámasztják a következő idézetek, melyet általános iskolai, IKT eszközzel tanuló diákok írtak a belső motivációt mérő kérdőívünk nyílt végű kérdésére:

„Szerintem nem volt jó az, hogy egész órán a képernyő előtt voltunk, mert függőséget okozhat.” (Geoboarddal tanuló általános iskolás lány)

„Jó lett, ha nem tabletezünk hanem a füzetbe rendes feladatokat csinálunk.”
(Geoboarddal tanuló általános iskolás fiú)

Az általános iskolások IKT eszköz iránt mutatott alacsonyabb motivációs szintjének egy további lehetséges magyarázata, hogy napjainkban a legtöbb magyarországi háztartásban már elterjedtté váltak az okoseszközök, például a tabletek és az okostelefonok. Az okoseszközök napi szintű használata miatt az oktatásban már feltehetően nem nyújtanak különleges élményt, így nem képesek jelentősen fokozni a tanulási motivációt. A vizsgálatban alkalmazott hagyományos, fizikai taneszköz szintén újdonságnak számított a diákok számára, mivel elmondásuk szerint korábban nem találkoztak a használt oktatási eszközzel. Eredményeink kimutatták, hogy a két oktatási környezetben újdonságnak számító taneszközök közül a hagyományos eszköz gyakorolt nagyobb motivációs hatást az általános iskolásokra.

A tehetséggondozó foglalkozások során – az általános iskolai környezetben tapasztaltakkal ellentétben – a diákok az IKT eszköz használatához társítottak magasabb intrinzik motivációs szintet. Feltételezhetően ennek oka az lehet, hogy a tehetséggondozásban aktívan részt vevő tanulók többféle módszerrel és megközelítéssel találkoznak, mint az általános iskolai oktatás keretei között. A Matematikai Tudásközpontban például rendszeresen ismerkednek meg új, innovatív megközelítésekkel a matematika területén, amelyek hozzájárulnak ahhoz, hogy szemléletük nyitottabbá váljon az új tanulási módszerek és eszközök iránt. Feltételezhető továbbá, hogy bár ezek a diákok sem használtak korábban tableteket a matematikatanuláshoz, az tanításmódszertani újdonságok iránti pozitívabb hozzáállásuk miatt az IKT eszközök alkalmazását is nagyobb lelkesedéssel fogadták. Az új módszerek iránti fokozott motivációjuk összefügghet azzal, hogy a tehetséggondozó programokban való részvétel elősegíti a tanulók rugalmasságát és nyitottságát, különösen az innovatív oktatási eszközök és stratégiák irányába.

4.1. Személyes reflexió

A vizsgálat keretein belül megtartott 32 tanórányi foglalkozáson számos tapasztalatot gyűjtöttem, melyek közül a legrelevánsabbakat jelen bekezdésben részletezem.

Az IKT eszközök alkalmazása során a gyakorlatban számos nehézséggel szembesültem. Az órák előkészítése és lebonyolítása lényegesen körülményesebb volt, amikor a Geobordot használó csoportba mentem megtartani a foglalkozást. Az órát megelőzően rendszeresen 15-20 percet rá kellett szánnom, hogy bekapcsoljam a tableteket, csatlakoztassam azokat az iskolai Wi-Fi-hálózatra, és megnyissam a Geoboardot. További problémát jelentett az iskolák Wi-Fi jelerőssége és az internet sávszélességének korlátozottságai, amely miatt az alkalmazás egyszerre csak legfeljebb 15 tableten tudott működni megfelelően. Hiába állt rendelkezésre elegendő eszköz az egyéni munkavégzéshez, a Wi-Fi teljesítménye nem volt

kompatibilis az ilyen jellegű párhuzamos használatával. A problémát a diákok is érzékelték és hangot is adtak neki a belső motivációt mérő kérdőív nyitott kérdéseinél:

„Szerintem nem volt jó az, hogy nem működött néha a kijelölés és nem lehetett olyan sok mindent csinálni.” (Geoboarddal tanuló általános iskolás fiú)

„Szerintem nem volt jó az, hogy nem minden tablet működött.” (Geoboarddal tanuló tehetséggondozó foglalkozáson részt vevő fiú)

Szerencsés helyzetben voltam, hogy a csoportokban minden diák rendelkezett legalább alapvető digitális kompetenciákkal, így nem volt szükség arra, hogy külön figyelmet fordítsak egy-egy tanuló felzárkóztatására a tablet használatával kapcsolatban. Ha ez nem így lett volna, az órák gördülékenysége még tovább sérülne, ami nagy valószínűséggel a többi diák fejlődésének rovására menne.

Ezzel szemben a szöges táblát használó csoport óráinak előkészületei lényegesen egyszerűbbek voltak, ugyanis nem igényeltek időigényes technikai előkészületeket. A szöges táblák és befőttes gumik előkészítése minimális időbefektetést igényelt, hiszen elegendő volt a tanóra kezdetén a bekészített eszközöket egy táskából elővenni. Ezáltal nem volt szükség arra, hogy a tanóra előtt időt szánjak a teremhez való korai érkezésre vagy bonyolult, tanórát előkészítő lépésekre.

Összefoglalva pedagógusként szerzett szubjektív tapasztalataimat, a gyakorlatban a hagyományos tárgyi eszköz használata sokkal egyszerűbb és időhatékonyabb megoldásnak bizonyult az IKT eszközzel szemben.

5. fejezet

Összegzés

A felfedezettő matematikatanítás egyik meghatározó sajátossága a tárgyi eszközhasználat, amely a tanulási folyamatot támogatva elősegíti a mélyebb megértést és hozzájárul a tanulók motivációjának növeléséhez. Számos kutatás bizonyította, hogy a tárgyi eszközhasználat támogatott tanulás hatékonyabbá teszi a tudáselsajátítást a tanárközpontú oktatási módszerekkel összehasonlítva. A 21. század technológiai fejlődése az oktatás területén is új távlatokat nyitott. Az IKT eszközök vizuális dinamizmusuk, interaktivitásuk és rugalmasságuk révén képesek a tanulási folyamatot egy új dimenzióba helyezni. Ezen eszközök nemcsak a tanulási hatékonyságát növelik, hanem a tanulók belső motivációjának fokozásában is jelentős szerepet játszanak.

Kutatásunk célja annak vizsgálata volt, hogy egy rácsgeometria témát felfedezettő megközelítésben elsajátítva mutatkoznak-e különbségek a diákok tudásbeli fejlődésében és belső motivációjában a hagyományos tárgyi eszköz (szöges tábla) és a digitális IKT eszköz (Geoboard) alkalmazása során. Elemzésünk arra irányult, hogy feltárjuk, melyik eszköz használata eredményez hatékonyabb tanulást, valamint magasabb szintű belső motivációt a diákok körében.

Kutatásunkban összesen $n = 71$ ötödik osztályos tanuló vett részt. Méréseinket két különböző kutatási környezetben végeztük: általános iskolában ($n = 41$) és tehetséggondozó programban részt vevő diákok ($n = 30$) körében. A vizsgálat kezdetén a résztvevők előzetes tudásszintjének felmérése céljából bemeneti tesztet töltöttek ki. Ezt követte a tanulási folyamat, amely során a tananyag feldolgozása két csoportban zajlott. Az egyik csoport hagyományos, kézzel fogható eszközt (szöges tábla) használt, míg a másik csoport digitális, IKT alapú eszközzel (Geoboard tablet alkalmazás) dolgozott. A csoportok előzetes tudásszintje között nem mutatkozott szignifikáns különbség, így a tanulási eredmények összehasonlíthatók voltak. A tanulók nyolc, egyenként 45 perces tanóra során sajátították el a tananyagot. A tanulási folyamat utolsó egységén a diákok kimeneti tesztet töltöttek ki a tudásbeli fejlődésük mérésére, valamint egy belső motivációt mérő kérdőívet, amely a

tanulási élményeikre és belső motivációjukra vonatkozó adatokat rögzítette.

A csoportok bemeneti és kimeneti teszteken elért eredményeinek összehasonlítása alapján megállapítottuk, hogy mindkét oktatási környezetben, valamint mindkét tanulást támogató eszköz alkalmazásával szignifikáns tudásbeli fejlődés mutatkozott. Ugyanakkor a kimeneti teszteken elért eredmények összehasonlítása során egyik környezetben sem azonosítottunk szignifikáns különbséget a hagyományos eszközt és az IKT eszközt használó csoportok teljesítménye között. A motivációvizsgálat eredményei ezzel szemben szignifikáns eltérést mutattak a két eszközt alkalmazó csoportok között. Az általános iskolai környezetben a tanulók a hagyományos eszközt preferálták, míg a tehetséggondozó programban részt vevő diákok esetében az IKT eszközzel végzett tanulás váltott ki magasabb belső motivációt.

Kutatásunk eredményei egyértelműen igazolják, hogy az eszközhasználat pozitívan hat a diákok teljesítményére és motivációjára. A tevékenységalapú, eszközhasználattal támogatott matematikatanulás teljes mértékben megfelelt a kerettanterv követelményeinek, eleget tett a javasolt tevékenységeinek és a bonyolult területszámítási feladatokra való felkészítésben is hatékony támogatást nyújtott. Jelen eredmények alapján azonban nem állítható egyértelműen, hogy a digitális eszközök hatékonyabbak lennének a kézzel fogható eszközöknél, vagy fordítva. Olyan eszközt célszerű választani, ami jobban illeszkedik a tanár egyéniségéhez és a tanulók igényeihez.

Jelentős eredményünk, hogy a közoktatásban tanuló általános iskolások az eszközhasználat révén képesek voltak azonos tudásszintet elérni, mint a tehetséggondozó foglalkozásokra beválogatott diákok. Eredményünk azt jelzi, hogy az eszközhasználat nemcsak hatékonyabbá teszi a tanulási folyamatot, de hozzá is járul a különböző tudásszintű tanulók közötti különbségek mérsékléséhez is.

Összességében kutatásunk arra ösztönzi a pedagógusokat, hogy alkalmazzanak tevékenységalapú, eszközhasználattal támogatott tanítási módszereket. Az eszközhasználatnak ugyanis helye van az oktatásban, mert általa a diákok tudásuk magas szintjét érhetik el – akár általános iskolában, akár tehetséggondozó programban.

5.1. A kutatás folytatásának lehetőségei

A kutatás továbbfejlesztésének egyik ígéretes iránya lehet egy olyan csoport bevonása, amely az órák során felváltva használja a szöges táblát és a Geoboardot. Lehetőség nyílna ezáltal arra, hogy ugyanazoknak a tanulóknak a tapasztalatait és véleményét gyűjtsük a két eszközről. Az összehasonlítás révén árnyaltabb képet kaphatnánk a motivációs hatásokról, hiszen nem csupán az egyes eszközök önálló hatásait vizsgálhatnánk, hanem a kettő közötti különbségekre vonatkozó preferenciákat is. Érdeemes lenne emellett megvizsgálni, hogy a

vegyes eszközhasználat hogyan befolyásolja az tanítás eredményességét: segíti-e a fogalmak mélyebb megértését, illetve hatékonyabbá teszi-e a tanulási folyamatot a változatosság által.

Egy másik potenciális irány a vizsgálat kibővítése további matematikai témakörökre, amelyeknél mind a hagyományos tárgyi eszközök, mind pedig az IKT eszközök alkalmazása lehetséges. A kutatás így nemcsak egyetlen specifikus területre korlátozná az eredmények érvényességét, hanem általánosítható következtetéseket is levonhatna a matematikatanítás szélesebb spektrumára.

Irodalomjegyzék

- [1] Awasthi, D. (2012). Utilising Audio Visual Aids to make learning Easy and Effective in Primary Education. *International journal of scientific research*, 3, 81-84. <https://doi.org/10.15373/22778179/AUGUST2014/21>.
- [2] Bloom, B. S. (Ed.) (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain*. Longmans. https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/PPP242/Benjamin%20S.%20Bloom%20-%20Taxonomy%20of%20Educational%20Objectives%2C%20Handbook%201_%20Cognitive%20Domain-Addison%20Wesley%20Publishing%20Company%20%281956%29.pdf (2024. december 28.)
- [3] Bokhove C. (2011). *Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise*. Utrecht University Repository.
- [4] Bouta, H., & Paraskeva, F. (2013). The cognitive apprenticeship theory for the teaching of mathematics in an online 3D virtual environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(2), 159–178. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.703334>
- [5] Ceban, A. (2024). The importance of digital communication competence in mathematics education. *Acta et commentationes: Științe ale Educației*, <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v37i3.66-74>
- [6] Csapó, B. (2004). *Tudás és iskola*. Műszaki könyvkiadó.
- [7] Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2000). The “what” and “why” of goal pursuits: Human needs and the selfdetermination of behavior. *Psychological Inquiry*, 11, pp. 227-268. https://doi.org/10.1207/S15327965PLI1104_01
- [8] Dienes, Z. (1973). *Építsük fel a matematikát*. Budapest, Tankönyvkiadó.
- [9] Enciso, S. S., Yang, H. M., Gabriela & Ugarte, C. (2024). Skills for Life Series: Digital Skills. <https://doi.org/10.18235/0013099>

- [10] Falus, I., Ballér, E., Golnhöfer, E., Kotschy, Nádas, M., Nahalka, I., ... & Vámos, Á. (2003). *Didaktika - Elméleti alapok a tanítás tanuláshoz*. Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
- [11] Fejes, J. B. (2010). A tanulási motiváció fejlesztésének lehetőségei a célorientációs elmélet alapján. In Vajda Z. (szerk.), *Bölcsészmuhely 2009* (pp. 43-53). JatePress.
- [12] *Geoboard by The Math Learning Center*. (n.d.). Retrieved January 26, 2025, from <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/?3329gh8v>
- [13] Hardin, P., & Richardson, S. (2012). Teaching the concept curricula: theory and method. *The Journal of nursing education*, 51(3), 155-9. <https://doi.org/10.3928/01484834-20120127-01>.
- [14] Hwa, S. P. (2018). Pedagogical change in mathematics learning: Harnessing the power of digital game-based learning. *Educational Technology & Society*, 21(4), 259–276. <https://www.jstor.org/stable/26511553>
- [15] Hwang, B.-H., & Kim, T.-H. (2019). The effects of sand surface training on changes in the muscle activity of the paretic side lower limb and the improvement of dynamic stability and gait endurance in stroke patients. *Journal of Exercise Rehabilitation*, 15(3), 439–444. <https://doi.org/10.12965/jer.1938164.082>
- [16] Kablan, Z. (2016). The effect of manipulatives on mathematics achievement across different learning styles. *Educational Psychology*, 36(2), 277–296. <https://doi.org/10.1080/01443410.2014.946889>
- [17] Kalmár László Matematikaverseny feladatsorok és megoldásaik - 2014 -. (n.d.). Retrieved January 21, 2025, from <https://www.kalmarverseny.hu/2014/07/30/kalmar-laszlo-matematikaverseny-feladatsorok-es-megoldasaik-2014/>
- [18] Kalmár László Matematikaverseny feladatsorok és megoldásaik - 2021 -. (n.d.). Retrieved January 21, 2025, from <https://www.kalmarverseny.hu/2021/07/30/kalmar-laszlo-matematikaverseny-feladatsorok-es-megoldasaik-2021/>
- [19] Kameswari, M., & Seenivasan, M. (2020). IMPACT AND IMPORTANCE OF PRE-CONCEPTUAL TEST THROUGH ICT TOOLS IN TEACHING LEARNING PROCESS OF FUNCTIONS IN DISCRETE MATHEMATICS. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 9(11), 9759–9767. <https://doi.org/10.37418/amsj.9.11.85>
- [20] Kilic, S. (2016). Cronbach's alpha reliability coefficient. *Journal of Mood Disorders*, 6(1), 47. <https://doi.org/10.5455/jmood.20160307122823>

- [21] Kordaki, M., & Mastrogiannis, I. (2009). An activity-based virtual space for the learning of computer programming: Two case studies with Greek students. *Semantic Scholar*. <https://www.semanticscholar.org/paper/AN-ACTIVITY-BASED-VIRTUAL-SPACE-FOR-THE-LEARNING-OF-Kordaki-Mastrogiannis/3e7b9c378cf29258f83d934a354a74ce0d39bdce>
- [22] Kushwaha, R. C. (2017). IMPACT STUDY OF TEACHING MATHEMATICS USING ICT ENABLED LEARNING. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, 8(8), 333–336. <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v8i8.4715>
- [23] Lasut, E. M. M., & Bawengan, J. J. (2020). The Effectiveness of ICTs Integration in Enhancing Student Motivation in Learning English. *Proceedings of the 4th Asian Education Symposium (AES 2019)*. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.200513.047>
- [24] Lessani, A., Suraya Md. Yunus, A., & Bt Abu Bakar, K. (2017). COMPARISON OF NEW MATHEMATICS TEACHING METHODS WITH TRADITIONAL METHOD. PEOPLE: *International Journal of Social Sciences*, 3(2), 1285–1297. <https://doi.org/10.20319/pijss.2017.32.12851297>
- [25] Mendez, D., Mendez, M., & Anguita, J. M. (2020). The effect of digital platforms in the motivation of future primary education teachers towards mathematics. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences*, 7(3), 112–123. <https://doi.org/10.18844/prosoc.v7i3.5240>
- [26] Mishra, P., Pandey, C., Singh, U., Gupta, A., Sahu, C., & Keshri, A. (2019). Descriptive statistics and normality tests for statistical data. *Annals of Cardiac Anaesthesia*, 22(1), 67. https://doi.org/10.4103/aca.ACA_157_18
- [27] Molnár, E. K., & Vigh, T. (2013). *A tantervelmélet és a pedagógiai értékelés alapjai. 3.6.1. Bloom követelménytaxonómiája*. http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Tanerv-elmlet_s_a_pedagogiai_rtkels_alapjai/index.html
- [28] Nahalka, I. (1997). Konstruktív pedagógia - egy új paradigma a láthatáron (I.). *Iskolakultúra*, 7(2), 21–33. <https://www.iskolakultura.hu/index.php/iskolakultura/article/view/18544>
- [29] Oktatási Hivatal (2020). *Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára – Matematika tantárgy*. https://www.oktatas.hu/koznevels/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_5_8/

- [30] Oktatási hivatal (2021). *Bemutakozás – PTE Deák Ferenc Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola*. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/pok/Pecs/2021/Bemutakozo_PTE_Deak.pdf (2024. december 28.)
- [31] Oktatási Hivatal. (2024a). *Matematika 5. tankönyv* (K. Csatar & G. Wintsche (eds.); 1.).
- [32] Oktatási Hivatal. (2024b). *Matematika 5. tankönyv* (G. Wintsche (ed.); 1.).
- [33] Oktatási Hivatal. (n.d.). *Prezentációk és tanulmányok*. https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/prezentaciok_tanulmanyok.
- [34] Oktatási Hivatal. (n.d.). Retrieved January 26, 2025, from https://www.oktatas.hu/kozneveles/meresek/pisa/pisa_2003_meres
- [35] *PISA 2022 Results (Volume I)*. (2023). OECD. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- [36] Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology*. Basic Books.
- [37] Pólya, Gy. (1957). *A gondolkodás iskolája*. Typotex Kiadó.
- [38] Prasad, K. S. (1970). Learning Mathematics By Discovery. *Academic Voices: A Multidisciplinary Journal*, 1, 31–33. <https://doi.org/10.3126/av.v1i0.5307>
- [39] Rahmawati, T. D., Sulisworo, D., & Prasetyo, E. (2020). Enhancing Students' Motivation and Problem Solving Skills in Mathematics Using Guided Discovery Learning. *Universal Journal of Educational Research*, 8(12), 6783–6789. <https://doi.org/10.13189/ujer.2020.081244>
- [40] Saha, J., Ahmmed, S., Ali, M., Tamal, M. A., & Rezaul, K. M. (2020). ICT Based Mathematics Skill Development Program: An Initiative to Overcome Mathematics Anxiety. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 15(14), 252. <https://doi.org/10.3991/ijet.v15i14.14149>
- [41] Sajtos, L., & Mitev, A. (2007). *SPSS Kutatási és adatelemzési kézikönyv*. Alinea Kiadó.
- [42] Sametova, F. T. & Uzbekova, G. I. (2024). Formation of digital competence in literature lessons through the use of ict. *Yessenov Science Journal*, 48(3), 5-14. <https://doi.org/10.56525/uwqf3910>
- [43] Scandrett, H. (2008). Using Geoboards in Primary Mathematics: Going...Going...Gone?. *Australian primary mathematics classroom*, 13, 29-32. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ802704.pdf> (2025. 01. 03.)

- [44] Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691–697. <https://doi.org/10.1177/0956797612440101>
- [45] Sumbul, S. (2024). ICT Tools in Education. *International Journal For Multidisciplinary Research*, 6(2). <https://doi.org/10.36948/ijfmr.2024.v06i02.17712>
- [46] Tumangger, W. R., Khalil, I. A., & Prahmana, R. C. I. (2024). The Impact of Realistic Mathematics Education-based Student Worksheet for Improving Students' Mathematical Problem-Solving Skills. *IndoMath: Indonesia Mathematics Education*, 7(2), 196. <https://doi.org/10.30738/indomath.v7i2.122>
- [47] Tymchuk, I., Pohorila, S., Kaplinskyi, V., , . & Derstuganova, N. (2024). Enhancing online learning quality through digital ompetencies of students. *Salud, Ciencia y Tecnología - Serie de Conferencias*, 3. <https://doi.org10.56294/sctconf2024.1128>
- [48] Varga, T. (1969). A geometriatanítás kezdete. In *A matematika tanítása* (pp. 190-192). ELTE TTK, Budapest, Könyvkiadó.
- [49] Varga, T. (1972). *Játsszunk matematikát!* Budapest: Móra Ferenc Ifjúsági Könyvkiadó.
- [50] Varga, T. (1973). *A matematika tanítása*. Kézirat. Budapest, ELTE, Tankönyvkiadó.
- [51] Varga, T. (1974). *Játsszunk matematikát! 2*. Budapest: Móra Ferenc Ifjúsági Könyvkiadó.
- [52] Varga, T. (1978). *Komplex matematikatanítási kísérlet*. Budapest, Tankönyvkiadó.
- [53] Varga, T., Néményi, C. E., Fried, K., Török, J. & Zsinkó, E. (2022). *Játsszunk matematikát! Bővített, átdolgozott kiadás*. Móra Könyvkiadó.
- [54] Yadav, B. V. (2017). ICT in quality science teaching - learning. *International journal of applied research*, 3, 107-109. All Research Journal. <https://www.allresearchjournal.com/archives/2017/vol3issue3/PartB/3-3-20-671.pdf> (2025. 01. 03.)

Mellékletek

1. Melléklet: Bemeneti teszt

A 9 szög geometriája – Tudáspróba

Név: _____

1. Feladat. Karikázd be az (A) , (B) , (C) , (D) és (E) betűkkel jelölt tulajdonságok közül azokat, melyek az adott alakzatra jellemzőek! Figyelj, mert előfordulhat, hogy egy alakzatra egyetlen tulajdonság sem jellemző, de olyan alakzattal is találkozhatasz, mely esetén egyszerre több tulajdonság is teljesül.



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



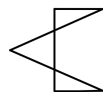
(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



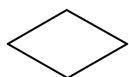
(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



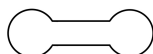
(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



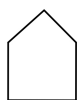
(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv

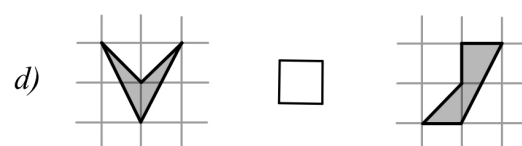
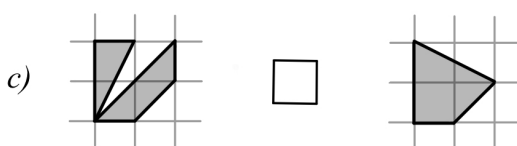
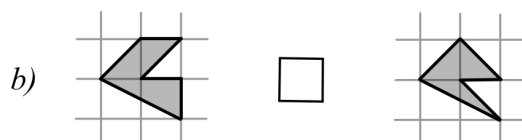
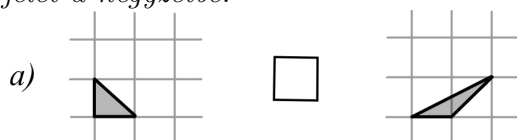


(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv

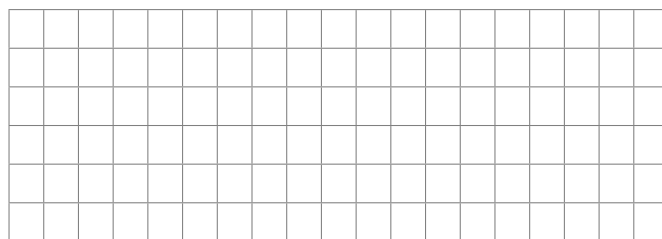
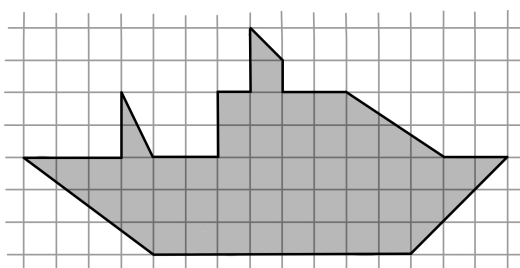


(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv

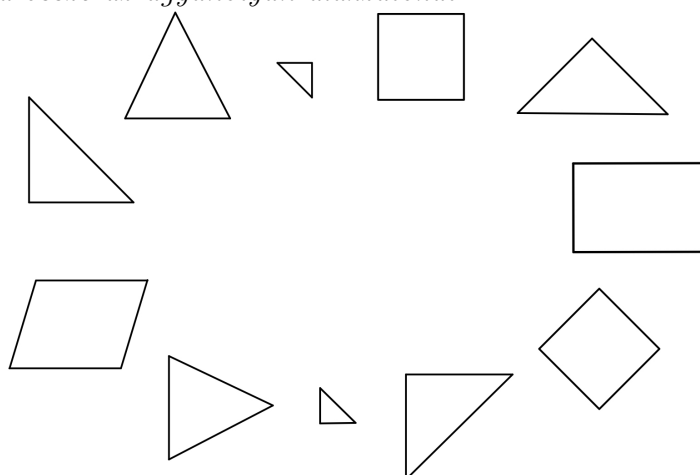
2. Feladat. Melyik besatírozott résznek nagyobb a területe? Írd a megfelelő $<$, $>$ vagy $=$ jelet a négyzetbe!



3. Feladat. Hány egységnégyzetnek felel meg az alábbi hajó területe? Írd le hogyan dolgoztál!

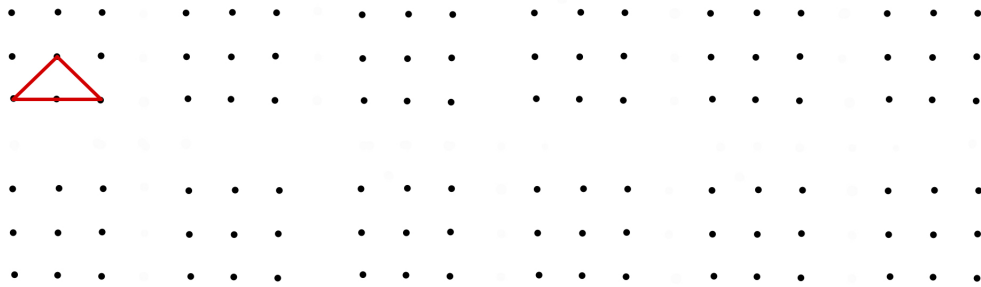


4. Feladat. Kösd össze az ugyanolyan alakzatokat!



Miért ugyanolyanok az összekötött alakzatok? _____

5. Feladat. *A piros háromszöget ráillesztettük egy négyzetrács kilenc rácspontjára. Rajzolj minél több a piros háromszöggel ugyanolyan, de a rácspontokra másképp illesztett háromszöget!*



2. Melléklet: A foglalkozássorozat tananyaga

Jelen mellékletben „9 szögű tábla” alatt a hagyományos eszközt használó csoport esetében a szöges táblát, az IKT eszközt használó csoport esetében a Geoboardot értjük.

Minden feladat szövegének végén feltüntettük, hogy az adott feladat Varga Tamás *9 szög geometriája* (1974, [51]; 2022, [53]) című publikált feladatsorozatából származik-e pontosan átvett formában, minimálisan átdolgozott változatban vagy saját fejlesztésű feladatként került be a tananyagunkba.

1. óra: Ismerkedés az eszközökkel

Az eszközök bemutatása

A hagyományos eszközt használó csoportban bemutatásra került a szöges tábla, valamint a 9 darab szögön történő gumiszalaghasználat. Ezt követően a tanulókat párba állítottuk, és minden pár számára biztosítottunk egy-egy csomag gumiszalagot és egy-egy szöges táblát rajta a 9 szöggel.

Az IKT eszközt használó csoport az intézmények által biztosított tableteken dolgozott, amelyeket a tanár az óra kezdetét megelőzően bekapcsolt. Az első lépés az órán a Geoboard alkalmazás megnyitása volt. A tanteremben elhelyezett SMART Board SBM777v 77" típusú interaktív táblán megjelenített QR kód a Geoboard internetes felületre irányította a diákokat. Ezt követően a tanulók lehetőséget kaptak az alkalmazás felfedezésére: hogyan lehet a virtuális gumiszalagokat szögek közé feszíteni, hogyan lehet levenni azokat a tábláról. Az interaktív tábla lehetővé tette, hogy a tanár által végzett szemléltető tevékenységeket a diákok párhuzamosan másolhassák, ezáltal elősegítve a gyorsabb és hatékonyabb ismerkedési folyamatot.

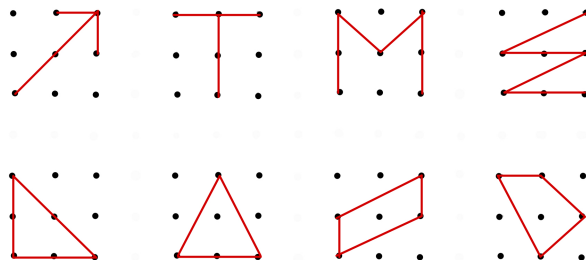
Tapasztalat. A hagyományos eszközt használó csoportban a diákok nem találkoztak még szöges táblával, senkinek sem volt előzetes tapasztalata. Ennek ellenére is probléma nélkül megtanulták annak használatát, utasítás nélkül kezdtek el újabbnál újabb formákat kifeszíteni. Az IKT eszközt használó csoport tagjai mind használtak már tabletet korábban, így gond nélkül oldották fel a képernyőt és olvasták be a QR kódot. A Geoboardról elmondásuk szerint még nem hallottak, de pár perc alatt elsajátították annak használatát és játszani kezdtek vele.

Másolás

Annak érdekében, hogy a csoportok a kifeszített alakzatokkal kapcsolatban további feladatokat is meg tudjanak oldani, egy kizárólag 9 szöget tartalmazó munkafüzetet készítettünk, melyben a diákok dokumentálhatták munkájukat. A füzetek kiosztására ezen

a ponton került sor. Az első oldalon nyolc különböző alakzat szerepelt (1. ábra), amelyek kifeszítése volt a tanulók első feladata.

1. Feladat. *Feszíts ki gumiszalagokat a 9 szögű táblára az ábrák szerint! (Átvett feladat)*



1. ábra. A 9 szögű táblára kifeszítendő alakzatok.

2. Feladat. *Legkevesebb hány gumiszalaggal lehet kifeszíteni ezeket az alakzatokat? (Saját feladat)*

Megoldás. Mindegyik alakzatot ki lehet feszíteni egyetlen gumiszalag használatával. $\square$

Tapasztalat. Mindegyik csoportban akadt egy-egy diák, aki a versenyként megélt szituáció hevében felkiáltott, hogy az első formát képes egyetlen gumiszalag segítségével megalkotni. Ezt követően egymást inspirálva igyekeztek a többiek is minél kevesebb gumiszalag igénybe venni a másolási feladat során.

A hagyományos eszközt használó csoportokban a gumiszalagok hossza korlátot jelentett. Többen panaszkodtak, hogy bár képesek lennének az alakzatokat egyetlen gumiszalaggal kifeszíteni, a rendelkezésre álló eszközök mérete ezt nem tette lehetővé. Emiatt ebben a csoportban többen kettő-három gumiszalag használatával oldották meg a feladatot. Ezzel szemben az IKT eszközt használó csoportokban minden diáknak sikerült egyetlen virtuális gumiszalag segítségével megalkotnia a kívánt alakzatokat, mivel a Geoboard alkalmazásban a gumiszalagok mérete és nyúlása nem jelentett korlátozást.

Alkotás

3. Feladat. *Feszíts ki különböző alakzatokat a 9 szögön, majd rajzold le őket füzetedbe! (Saját feladat)*

Tapasztalat. Kreatív megoldások születtek mindegyik csoportban.

2. óra: Háromszögek egybevágósága

Egybevágóság háromszögek esetén

4. Feladat. *Feszíts ki a 9 szögön minél többféle háromszöget, majd rajzold le őket a füzetedbe! (Átvett feladat)*

Megoldás. A 9 szög közül összesen 84-féleképpen választható ki egy szöghármas, mely az (1) képletből adódik.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \quad (1)$$

A fenti számolás során azonban a kollineáris ponthármasok is megszámlálódtak, melyek nem alkotnak háromszöget. Ilyen ponthármas a 9 szögön nyolc darab van. Tehát a 9 szögre összesen 76 nem feltétlenül különböző háromszög feszíthető ki. Az, hogy mit értünk különböző háromszögek alatt, a feladat nem világosan foglalmazta meg. 5. osztályban nyilván nem is volt cél az (1) képlet használata. Ennek a feladatnak a célja annak a megmutatása, hogy tisztázni kell, hogy mit értünk többféle háromszögön, és ha ezt tisztáztuk, akkor keressünk minél több megoldást. $\square$

Tapasztalat. Mindegyik csoportban hamar rájöttek a diákok, hogy egy háromszöget többféleképpen is ki lehet feszíteni a 9 szögön, ráéreztek az egybevágóság jelentésére. Több diák is rákérdezett, hogy lehet-e ugyanolyan háromszöget máshogyan kifeszíteni.

5. Feladat. *Vannak-e ugyanolyanok a lerajzolt háromszögek között? Milyen közös tulajdonságokkal rendelkeznek az ugyanolyan háromszögek? (Átvett feladat)*

Tapasztalat. A csoportoknál előkerült közös tulajdonságok: kerületük egyenlő, 3 csúcuk van, területük egyenlő, lefedik egymást, oldalak hossza egyenlő, szögek nagysága egyenlő, oldalaik száma egyenlő.

6. Feladat. *A felsorolt tulajdonságok közül melyek azok, amik garantálják is, hogy a két háromszög ugyanolyan? Mely tulajdonságokból következik, hogy két háromszög ugyanolyan? (Átvett feladat)*

Tapasztalat. Jól érezték a diákok a „szükséges, de nem elégséges” és a „szükséges és elégséges” feltételek fogalmának értelmezését. A közösen összegyűjtött tulajdonságok esetén ellenpéldák felsorakoztatásával mindegyik csoport esetén kizárta a nem szükséges és elégséges feltételeket, majd az alábbi sejtést fogalmazta meg: két háromszög akkor és csak akkor tekinthető egybevágónak, ha oldalaik páronként egyenlő hosszúságúak.

Az egymásra helyezhetőség, mint a háromszögek egybevágóságának egy elégséges feltétele is felmerült a tanulók részéről. Ezen tulajdonság is garantálja az egybevágóságot és ez

egy jól értelmezhető megfogalmazás, amivel mint definícióval már korábban is találkoztak tanulmányaik során. A diákokat mégis arra ösztönöztük, hogy olyan tulajdonságokat keressenek, amelyek megállapításához nincs feltétlenül szükség ollóra. Így jutottunk el az oldalak hosszúságának ellenőrzéséhez, mint a háromszögek egybevágóságának meghatározásának praktikus és elégséges feltételhez. A foglalkozás hátralévő részében az egybevágóság vizsgálatát a megfelelő oldalak egyenlőségének ellenőrzésével is végezheték.

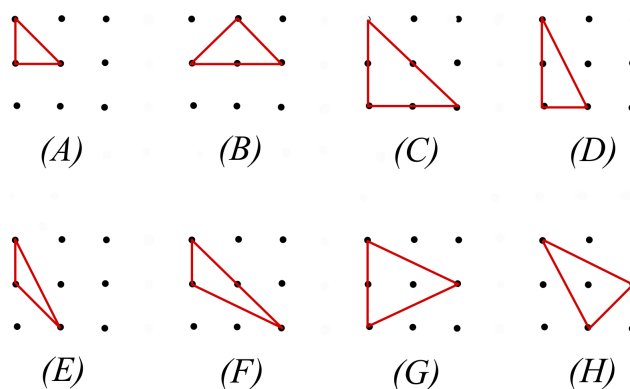
7. Feladat. *Keress ugyanolyan háromszögeket a füzetedben! Az ugyanolyan háromszögeket jelöld azonos színű pöttyel! (Átdolgozott feladat)*

Tapasztalat. A diákok láthatóan megértették a háromszögek egybevágóságának az új, közösen megfogalmazott feltételét, és aktívan keresték a megfelelő alakzatokat. Az ugyanolyan alakzatokat kereshették az oldalak egyenlőségének vizsgálatával vagy a „képzeletbeli” kiágásával is. A lerajzolt háromszögek közül minden tanulónak sikerült helyesen azonosítania az egybevágó alakzatokat.

Kombinatorikus geometria

8. Feladat. *Összeszedtük az ugyanolyan háromszögeket. Most nézzük meg, hogy hány különböző háromszög szerepel a füzetedben? (Saját feladat)*

Megoldás. A 4. feladatban megoldásánál részletezett 76 nem feltétlenül különböző háromszög közül nyolc darab különböző (2. ábra). □



2. ábra. A 9 szögre kifeszíthető nyolc különböző háromszög.

Tapasztalat. A 2. ábra jelöléseit követve a diákok számára jellemzően az (E), (F) és (H) háromszögek megtalálása jelentett nehézséget, függetlenül az alkalmazott tanulást támogató eszközöktől. Egyik csoportban sem akadt olyan tanuló, aki mind a nyolc háromszöget sikeresen felfedezte volna.

9. Feladat. *Hány különböző háromszög feszíthető ki a 9 darab szögre? Szedjük össze őket szisztematikusan! (Átvett feladat)*

Megoldás. Az alábbiakban a szisztematikus gondolkodás egyik módszere, az oldalak szerinti levezetés kerül bemutatásra (Varga, 2022, [53]).

„Válasszunk egy oldalhosszúságot, és vizsgáljuk meg azon a háromszögeket, melyeknek van ilyen oldalhosszúságuk. Legyen például a kiválasztott oldal a 3. ábrán sárgával jelölt szakasz. Ha ez az oldal három egymás alatti szögön fekszik, akkor a háromszög harmadik csúcsa a hat további szögponthoz valamelyikén lehet (3. ábra). Ezek közül az 1. és a 3. ugyanolyan, csak máshogyan áll, a 4. pedig a 6.-kal egybevágó. Olyan háromszögből, amelynek legalább egy oldala ilyen hosszúságú 4 különbözőt találunk.



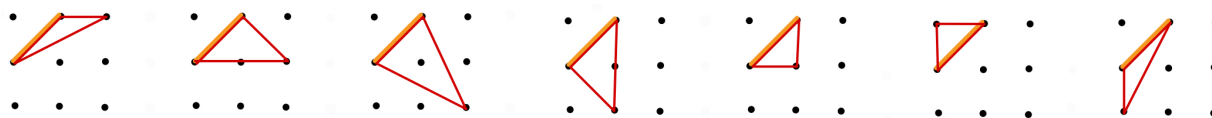
3. ábra. A szisztematikus feladatmegoldás során az elsőként kiválasztott oldalhosszúsásra illeszkedő háromszögek.

Válasszunk most a lehető legrövidebb oldalt és gyűjtsük össze azokat a háromszögeket, amelyek van van ilyen hosszú oldala. Most is csak hat szög jöhet szóba harmadik csúcsként (4. ábra). Ha a kiválasztott oldallal egy vonalba kerülő szögre feszítenénk a gumiszalagot, akkor nem keletkezne háromszög. A 2. és 3. háromszög egybevágó. Az utolsó kettő szintén egybevágó, ráadásul már szerepelt az előző csoportban, hiszen van olyan méretű oldala, amit elsőként választottunk ki. Tehát az 1., a 2. és a 4. nem szerepelt eddig, és különbözik a többitől.



4. ábra. A szisztematikus feladatmegoldás során az másodikként kiválasztott oldalhosszúsásra illeszkedő háromszögek.

Legyen a következő kiválasztott oldalhossz most az egységoldalú négyzet átlója. Azt tapasztaljuk, hogy bárhol is feszítjük ki ezt az oldalt, a kimaradó hét szög közül már csak egy alkot vele olyan háromszögek, ami még nem fordult elő (6.5 ábra). A 3. háromszögnek nincs olyan oldala, amekkorát az első két csoportban választottunk ki, a többi már mind szerepelt.



5. ábra. A szisztematikus feladatmegoldás során az harmadikként kiválasztott oldalhosszossúságra illeszkedő háromszögek.

Már csak azt kell megvizsgálunk, hogy kifeszíthetünk-e még olyan hosszúságot, amelyet eddig nem választottunk, s ha van ilyen, a belőle létrehozott háromszögnek mekkora lehet a másik két oldala. Kétféle hosszúság fordulhat még elő. Az egyik a két szomszédos egységoldalú négyzetből álló téglalap átlója (6. ábra), a másik pedig a 3×3 -as négyzet átlója (7. ábra). Ezekből bárhogyan is választjuk ki a harmadik csúcsot, mindig olyan háromszöget kapunk, amilyen már szerepelt az előbbieik között.



6. ábra. A szisztematikus feladatmegoldás során az negyedikként kiválasztott oldalhosszossúságra illeszkedő háromszögek.



7. ábra. A szisztematikus feladatmegoldás során az ötödikként kiválasztott oldalhosszossúságra illeszkedő háromszögek.

Tehát kapjuk, hogy összesen 8 db különböző háromszög feszíthető ki a 9 szögű táblára (2. ábra)”. □

Tapasztalat. A diákok először tippjeiket jegyezték fel arról, hogy vajon hány különböző háromszög feszíthető ki a 9 szögre. Mindegyik csoportban jellemzően magas számokat becsültek. Egyik csoportban sem merült fel konkrét javaslat arra vonatkozóan, hogyan lehetne szisztematikusán összegyűjteni a különböző háromszögeket. Ennek eredményeként a feladatot a fent ismertetett megoldási út szerint dolgoztuk ki.

10. Feladat. *A pároddal kaptatok két háromszöget. Feszítsétek ki a 9 szögű táblára a lehető legtöbbféleképpen a kapott háromszögeket, majd rajzoljátok le őket a füzetetekbe! (Átvett feladat)*

Megoldás. Az 1. táblázat összegzi, hogy az egyes háromszögek hányféleképpen feszíthetők ki. A táblázat a 2. ábra jelöléseit követi.

A	B	C	D	E	F	G	H
16	8	4	16	16	8	4	4

1. táblázat. A 9 szögre kifeszíthető nyolc különböző háromszöggel egybevágó, 9 szögre kifeszíthető háromszögek száma.

□

Tapasztalat. A feladatban hasonló eredményt ért el mindegyik csoport. A korábbi jelöléseket használva a legtöbb nehézséget az (E) háromszög különböző kifeszítései okozta a csoportokban. Az eredményeket összefoglaltuk, de itt mindenki csak a saját két feladatával foglalkozott.

3. óra: Négyyszögek egybevágósága

Egybevágóság négyszögek esetén

11. Feladat. *Feszíts ki minél többféle négyszöget a 9 szögre, majd rajzold is le őket a füzetedbe! (Átvett feladat)*

Tapasztalat. Az előző órai tevékenység tapasztalataira építve nemcsak különböző négyszögeket kerestek a diákok, hanem egy megtalált négyszöget is igyekeztek minél többféleképpen kifeszíteni a 9 szögre.

12. Feladat. *Négyszögek esetén hogyan keressünk ugyanolyanokat? Milyen közös tulajdonságokkal rendelkeznek az ugyanolyan négyszögek? (Beemelt feladat)*

Tapasztalat. A csoportok által felsorolt közös tulajdonságok: 4 szögük van, 4 csúcsuk van, 4 oldaluk van, oldalak hossza egyenlő, területük egyenlő, négyszögek, területük egyenlő, szögeik egyenlőek, fedik egymást.

13. Feladat. *A felsorolt tulajdonságok közül melyek azok, amik garantálják is, hogy a két négyszög ugyanolyan? Mely tulajdonságokból következik, hogy két négyszög ugyanolyan? (Átvett feladat)*

Megoldás. Ha tükrözve, vagy tükrözve és elforgatva egymásra fektethetők, akkor a két négyszög egybevágó. □

Tapasztalat. Az általuk felsorolt tulajdonságok esetén ellenpéldák segítségével zártuk ki az elegendőségeket. A fenti megfogalmazást az egymásra fektethetőség egy-egy megoldásának részletezésével kaptuk. A tükrözéssel már alsóban találkoztak, az elforgatás alatt pedig a hétköznapi tevékenységet értették, hiszen nem találkoztak még a matematika órákon forgatással, mint egybevágósági transzformációval.

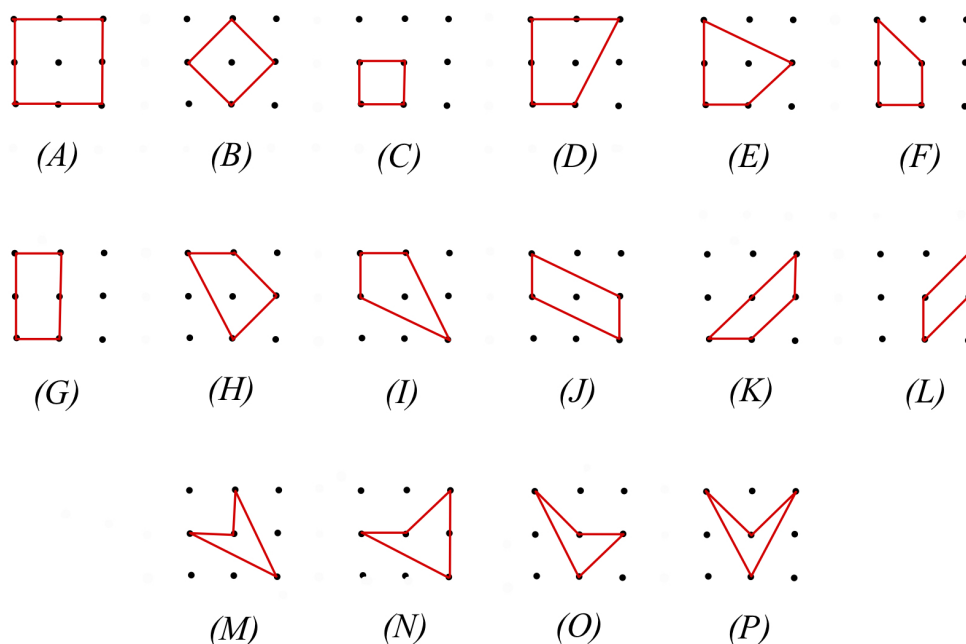
Tulajdonképpen az egymásra illeszthetőséget konkretizáltuk itt két, még nem pontosan értelmezett matematikailag is értelmezhető transzformációval. Külön kiemeltük, hogy a háromszögeknél használatos, oldalak egyenlőségének feltétele a négyszögeknél nem elegendő feltétel.

14. Feladat. *Keress ugyanolyan négyszögeket a füzetedben! Az ugyanolyan négyszögeket jelöld azonos színű pöttyel! (Átdolgozott feladat)*

Kombinatorikus geometria

15. Feladat. *Hány különböző négyszög feszíthető ki a 9 szögű táblára? (Átvett feladat)*

Megoldás. A 9 szögű táblára összesen 16 különböző négyszög feszíthető ki (8. ábra) $\square$



8. ábra. A 9 szögűre kifeszíthető 16 különböző négyszög.

Tapasztalat. A 8. ábra jelöléseit használva jellemzően az (E), (I), (K), (L), (M), (N) és (O) négyszögek megtalálása jelentett problémát a csoportokban.

Megjegyzés. A 16 különböző négyszög egy verseny keretében került fel a táblára. Az a tanuló, akinek a füzetében olyan négyszög szerepelt, amely még nem szerepelt a táblán, lehetőséget kapott, hogy felrajzolja azt.

16. Feladat. A pároddal kaptatok három négyszöget. Feszítsétek ki a 9 szögű táblára a lehető legtöbbféleképpen a kapott négyszögeket, majd rajzoljátok le őket a füzetetekbe! (Átvett feladat)

Megoldás. A 2. táblázat összegzi, hogy az egyes négyszögek hányféleképpen feszíthetők ki a 9 szögön. A táblázat a 8. ábra jelöléseit követi. $\square$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1	4	8	8	8	4	8	4	4	4	8	4	8	8	4

2. táblázat. A 9 szögre kifeszíthető 16 különböző négyszöggel egybevágó, 9 szögre kifeszíthető négyszögek száma.

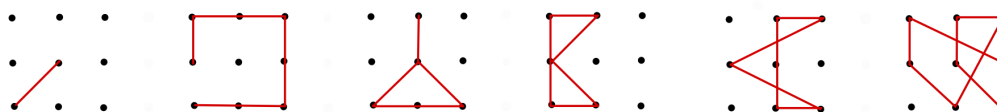
Tapasztalat. A párok mindegyike kapott nehezebb és könnyebb feladatokat is. Az egyszerűbb alakzatok esetén mindenki megtalálta az összes megoldást, a nehezebbek esetén elmaradt 1-1 megoldás. Az eredményeket összegeztük, de csak mindenkinek a saját munkáját ellenőriztem.

4. óra: Egyszerű sokszögek, síkidomok

Egyszerű sokszögek fogalma

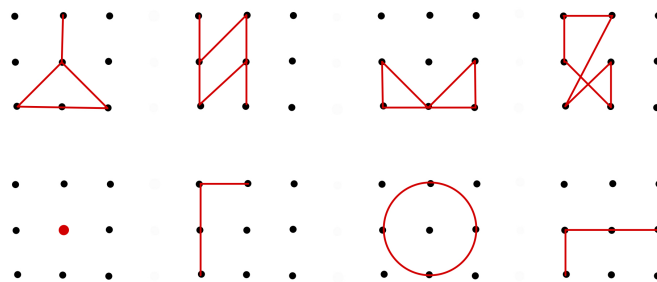
17. Feladat. Feszítettünk ki eddig háromszögeket, négyszögeket. Mindig sokszög keletkezik, ha szögek közé gumiszalagot teszünk? (Átvett feladat)

Megoldás. Nem minden esetben keletkezik háromszög, négyszög, általában egyszerű sokszög, ha valahány pontot összekötünk egyenes vonallal (9. ábra). $\square$



9. ábra. Példa nem sokszögekre a 9 szögű táblán.

Tapasztalat. A nem sokszögekre a diákok kerestek példákat és rajzolják fel azokat a táblára (10. ábra). Egy alakzat csak akkor maradhatott a táblán, ha azt a tanuló meg is tudta indokolni, hogy miért nem sokszög.



10. ábra. Példák a diákok nem sokszögek gyűjtésével kapcsolatos feladatmegoldásaiból

18. Feladat. *Miért nem sokszögek a felsorolt alakzatok? Mikor nem lesz egy alakzat sokszög? (Átvett feladat)*

Megoldás. Egy alakzat nem sokszög, ha a határoló vonal

- nem zárt, vagy
- metszi önmagát, vagy
- nem csak egyenes szakaszokból áll; vagy
- nem egy síkrészt határol körbe.

Mindegyik felsorolt alakzatra legalább egy tulajdonság teljesül. □

Tapasztalat. A diákok a 17. feladatban kért indoklásnál a 18. feladatban leírt magyarázatokat adták. Megegyeztünk, hogy ahhoz, hogy egy alakzat ne legyen sokszög elégséges az egyik tulajdonságnak teljesülnie.

19. Feladat. *Mikor kapunk sokszöget? Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a sokszögek? (Ávett feladat)*

Megoldás. Egy alakzat sokszög, ha a határoló vonal

- csak egyenes szakaszokból áll,
- zárt, és
- nem metszi önmagát.

Mindegyik síkidomra mindegyik tulajdonság teljesül. □

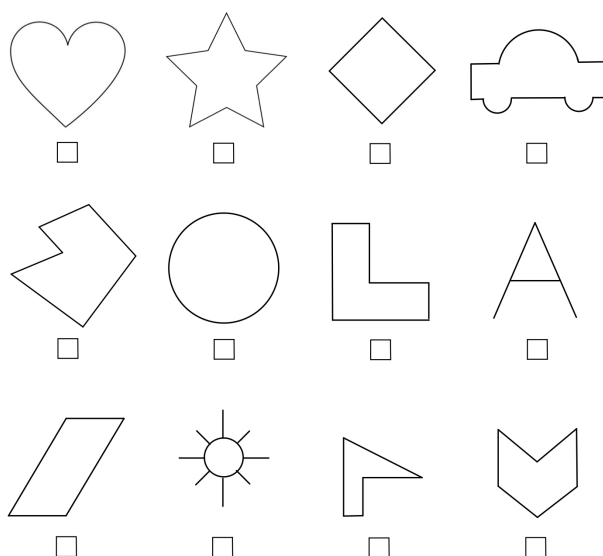
Megjegyzés. A fentebb említett általános definíciókat kiegészítettük a következő 9 szögre specifikus állítással: olyan módon is megállapítható, hogy egy alakzat sokszög-e vagy sem, hogy rátéve az ujjunkat a gumiszalag bármely pontjára és végigvezetve az ujjunkat az alakzaton, a gumiszalag minden szögön csak egyszer halad át és visszatér a kiindulási pontba (Varga 2022, [53]). Ez a megfogalmazás még szemléletesebbé teszi a definíciót, segítve a tanulók megértését.

Tapasztalat. A tanulók külön instrukció nélkül is felismerték, hogy a nem sokszögek tulajdonságainak tagadására lesz szükség. Amikor ismét rákérdeztem a kapcsolódó logikai

műveletre, a tanulók helyesen a konjunkciót nevezték meg. Így megállapítottuk, hogy ahhoz, hogy egy alakzat sokszögnek minősüljön, mindhárom tulajdonságnak egyidejűleg teljesülnie kell.

A sokszög és nem sokszög fogalmak gyakorlására és elsajátítására összeállítottunk egy két feladatból álló gyakorlósort, melyet nyomtatott formában ezen a ponton kiosztottunk a diákoknak. A feladatlap a 20. és a 21. feladatokat tartalmazta.

20. Feladat. *Döntsd el, hogy az alábbi alakzatok közül melyik sokszög és melyik nem sokszög! Jelöld pipával a sokszögeket! (Saját feladat) (11. ábra)*



11. ábra. A 20. feladat alakzatai.

21. Feladat. *Rajzolj három olyan alakzatot a 9 szögre, mely különböző okokból nem sokszögek, majd rajzold le őket a lapra és írd melléjük, hogy miért nem sokszögek! (Átvett feladat)*

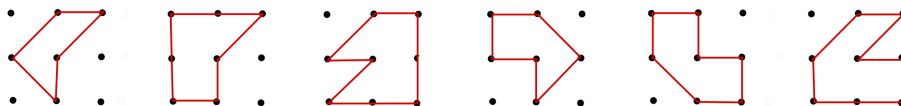
Tapasztalat. A tapasztalatok alapján a diákok sikeresen elsajátították a sokszög és a nem sokszög fogalmát, mivel esetenként kisebb segítséggel, korrigálásokkal de minden tanuló hibátlanul oldotta meg a kapcsolódó feladatokat.

További sokszögek a 9 szögű táblán

22. Feladat. *Hány oldalú sokszöget lehet kifeszíteni a 9 szögre? Mindegyikre rajzolj egy-egy példát a füzetedbe! A szöges táblán próbálkozz, a véglegeset pedig rajzold le a füzetedbe! De figyelj, hogy egyszerű sokszög legyen az, amit kifeszítesz! (Átvett feladat)*

Megoldás. Háromszöget és négyszöget már fesztettünk ki a 9 szögre, ezeken kívül lehet ötszöget, hatszöget és hétszöget is kifeszíteni. $\square$

Tapasztalat. A 12. ábrán a diákok által kifeszített sokszögek közül néhány példa látható.



12. ábra. A diákok által kifeszített sokszögek közül néhány példa.

23. Feladat. *Nyolcszöget lehet-e konstruálni? Miért nem? (Saját feladat)*

Megoldás. A 9 szög közül egy szög nem lesz a csúcsa egy nyolcszögnek. Azt az egy szöget háromféleképpen választhatjuk meg: 1) középpont, 2) csúcsok, vagy 3) oldalak felezőpontjai (13. ábra). Bármelyik szöget is választjuk, mindenképpen marad legalább egy olyan szöghármas, melyek kollineárisak lesznek.



13. ábra. A 9 szögre kifeszítendő nyolcszög csúcsának nem választott szögek piros ponttal jelölve.

$\square$

Tapasztalat. Bár a diákok számos jó ötlettel álltak elő, egyiket sem lehetett precíz indoklásnak mondani.

Síkidom fogalma

A síkidomok fogalmát hasonló, a következő alfejezetben leírtak szerinti felfedezettő módszertannal vezettük be (Varga, 1969, [48]). A fogalom gyakorláshoz a korábbi feladatok ábráit vettük alapul.

5. óra: Konvexitás fogalma

Konvex és konkáv fogalmak bevezetése

A konvexitás fogalma Varga Tamás (1969, [48]) módszertanát követve, a felfedezettő matematikatanítás elvei szerint került bevezetésre. Jelen alfejezet az említett szakirodalomban írtakat részletezi.

„Az óra kezdetén így szól a tanár a csoporthoz: *Játszunk egy játékot, de a játékszabályt nem mondom el. Alakzatokat fogok a táblán látható két téglalapba rajzolni valamilyen szabály alapján. A feladat az, hogy kitaláljátok, hogy mi ez a szabály.* A kettéosztott tábla egyik oldalára felkerül egy konvex, másik oldalára pedig egy konkáv síkidom, majd újra egy konvex és konkáv síkidom. A diákok a tanárral párhuzamosan rajzolják az alakzatokat a füzetbe. Néhány példa után már kérdezzéti a tanár: *Ezt hova rajzoljam?* (Egyelőre semleges helyre rajzolta, egy másik táblára.) Ha valamelyik diák javaslatot tesz, nem mondja meg azonnal, hogy egyetért-e vele, hanem megvárja a többi diáktól is a helyeslést vagy az ellenvéleményt. De azután helyére rajzolja a síkidomot akárhogy is dőlt el a vita, és a játék folytatódik tovább. Ahogy egyre több támpont áll rendelkezésre, néhány diák már magabiztosabbá válik a javaslataival. Az ilyen tanulók számára a tanár további feladatot ad: *Találjatok ki saját példákat, amelyek megfelelők az egyik és másik helyre!*

Amint a tanár úgy látta, hogy már be lehet vezetni a definíciókat, nevet ad a táblán lévő téglapoknak: konvex és nem konvex (konkáv). A tanár következőt kérdezi: *Meg tudná-e mondani valaki, mit jelent az, hogy konvex?* A diákoktól jellemzően a „sehol sem megy befelé” válasz érkezik. Ekkor a tanár felrajzol három nem kollineáris pontot és megkérdezi: *Ezt hova rajzoljam? Nincs rajta horpadás, sehol sem megy belefé, tehát konvex?* A csoportok néhol tanácstalanok voltak, néhol megoszló véleményeknek adtak hangot, így a tanár ugyanezt elismételte még néhány hasonló példával. Ezek a példák megalapozták a definíció hiányzó részletét: szükséges az is, hogy síkidom legyen az alakzat.

Így szól a tanár a csoporthoz: *Jelöljük meg pirossal ennek a konvex alapzatnak valmelyik két pontját, és kössük össze vonalzóval a két pontot. Mit veszel észre? Nézzünk meg egy másik konvex alakzatot is!* A diákok egyöntetűen fedezik fel, hogy a piros pontokat összekötő szaksz az alakzaton belül van. Ekkor a következőt kérdezi a tanár: *A nem konvexeknél is megjelölök két pontot. Kössük össze! Mit vesztek észre? Nézzünk meg egy másik nem konvex alakzatot!* Az összekötő vonal egy része az alakzaton kívül megy. *Jaj, itt valami nincs rendben! Ez olyan mintha konvex volna. Vagy csak nem jól választottam meg a pontokat? Melyik pontokat jelöljük meg, hogy látni lehessen, hogy nem konvex?* A diákok jól irányíthatók ezen gondolatmenet mentén, probléma nélkül válaszolnak a kérdésekre. *Hátha a konvexeken is kiválaszthatjuk a pontokat így is, úgy is. Próbáljuk meg!* A felvetést hamar elvetik a csoportok. A tanár felrajzol egy konvex alakzatot a tábla közepére és a fenti gondolatmenetet a következő kérdéssel zárja: *Ha valaki azt állítja erről ponthalmazról, hogy nem konvex, mit mondanátok neki? Mikor hiszitek el, hogy igaza van? Milyen két pontot kell megmutatnia a ponthalmazon, hogy bebizonyítsa az igazát?* A válasz megfogalmazásával rögzül a konvex és nem konvex alapzatok precíz definíciója.”

Konvex és konkáv fogalmak elmélyítése

24. Feladat. *Osztályozd az eddig lerajzolt sokszögeidet konvexitás szerint! Legyen a konkáv alakzatok jele a kör, a konvexeké pedig a csillag. Lapozz vissza a füzetedbe és rajzold bele mindegyik alakzatba a megfelelő jelet! (Saját feladat)*

25. Feladat. *Feszíts ki kettő konvex és kettő konkáv alakzatot a 9 szögön, majd rajzold is le őket a füzetedbe! A rajzodon jelöld a konkáv és konvex alakzatokat a megfelelő jellel. (Átvett feladat)*

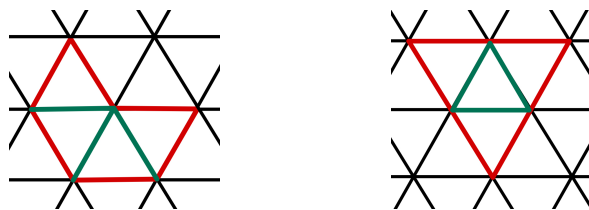
Tapasztalat. A tanulók láthatóan megértették az új fogalmakat. Sikerült saját példát rajzolniuk a konvex és konkáv alakzatokhoz egyaránt.

6. óra: Területszámítás

A területegység fogalmának megelőlegezése

Az területfogalom kialakítását az előzetes ismeretekre építettük, így az óra egy rövid tanár-diák párbeszéddel indult. A tanár a következő kérdést tette fel a csoportnak: *Mit jelent az, hogy két alakzat ugyanakkora?* A diákok intuitív válasza a „területük egyenlő” volt. Azonban, amikor a tanár tovább kérdezett: *Rendben. És mit jelent az, hogy terület?*, a diákok nem tudtak pontos választ adni. A tanár erre csak annyit mondott, hogy *Vissza fogunk térni erre később.* A párbeszéd a következő tanári kérdéssel folytatódott: *Mikor lesz két alakzat ugyanolyan?* Erre a diákok a korábbi tapasztalataikból kiindulva azt válaszolták: „ha ugyanolyan”. A tanár nem tért ki matematikai tétel bizonyítására, helyette megegyezésre hívta a diákokat: *Egyezzünk meg abban, hogy ha két alakzat ugyanolyan, akkor ugyanakkora.* Ezt követően a tanár egy újabb kérdést tett fel: *Ha két alakzat ugyanakkora, az azt is jelenti, hogy ugyanolyan?* Erre a diákok ellenpéldákkal cáfolták az állítást, megmutatva, hogy két azonos területű alakzat nem feltétlenül ugyanolyan.

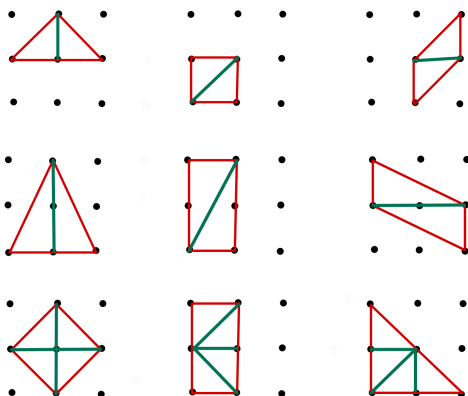
A tanár feltette a következő kérdést a csoportnak: *Hogyan állapíthatjuk meg, hogy két alakzat ugyanakkora?* Mivel a diákok nem javasoltak praktikus megoldási módszert, a tanár a feldarabolhatóság elvét mutatta be szemléletesen egy háromszögrács segítségével. Ebben a megközelítésben az alakzatokat kisebb, könnyen összehasonlítható részekre bontották, hogy bemutassák, hogyan állapítható meg két alakzat területének egyenlősége. Az órán bemutatott példát a 14. ábra mutatja.



14. ábra. Háromszögrácsra illesztett alakzatok, melyeken a felradabolhatóság módszerének szemléltetése történt. Az ábrán piros határvonallal jelölt alakzatok területének egyenlőségét úgy igazoltuk, hogy mindkettőt négy darab zölddel jelölt, ugyanolyan, egyenlőszárú háromszögre daraboltuk.

26. Feladat. Feszíts ki olyan sokszögeket a 9 szögön melyek ugyanakkorák, de nem ugyanolyanok! A sokszögpárokat rajzold is le a füzetedbe! (Átvett feladat)

Megoldás. A 15. ábra néhány lehetséges megoldást szemléltet.



15. ábra. Példa az egybevágó részekre darabolható háromszögekről és négyszögekről.

□

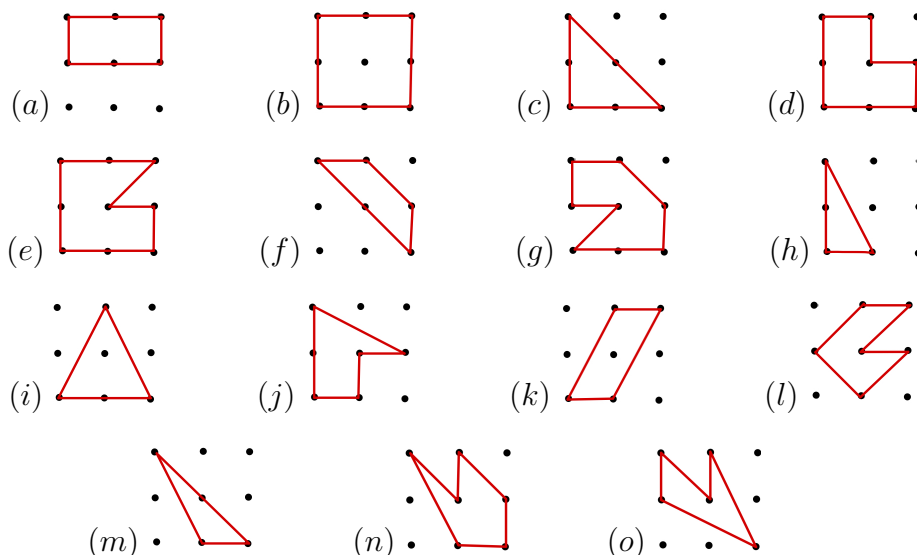
A területegység és a területfogalom bevezetése

A tanár a következő kérdést teszi fel a csoportnak: *Az igaz, ha egy sokszöget fel tudok darabolni ugyanolyan részekre, akkor ugyanakkora. De mi van akkor, ha nem tudom feldarabolni ugyan olyan részekre? Akkor nem lehet ugyanakkora?* A diákoktól a következő természetes válasz érkezik „Dehogynem! Kettő sokszög lehet ugyanakkora attól még, hogy nem lehet ugyanolyan részekre darabolni.” Ezen a ponton egyezséget köt a tanár és a csoport, miszerint az egységoldalú négyzet lesz a területegység, és ehhez lesz viszonyítva a többi terület. Továbbá megállapítjuk a kommutativitást, mint tulajdonságot, azaz, az alakzatokat alkotó részek területei összeadódnak, így kapjuk meg az eredeti területet.

A területszámítás gyakorlására és a módszerek elsajátítására összeállítottunk egy két feladatból álló gyakorlósort, melyet nyomtatott formában ezen ponton kiosztottunk a

diákoknak. A feladatlap a 27. és 28. feladatokat tartalmazta.

27. Feladat. Mekkora az alábbi 9 szögre illesztett sokszögek területe? (16. ábra) (Saját feladat)



16. ábra. A 9 szögre illesztett sokszögek, melyek területének kiszámolásával mélyítették el a diákok a területszámítás különböző módszereit.

Megoldás. Az alábbiakban lehetséges megoldási módokat mutatunk be.

Első sor (feldarabolással). Az egy területegységnyi négyzetre daraboljuk fel az (a), (b), és (d) négyzeteket, (c)-t pedig kettő $\frac{1}{2}$ területű háromszögre és egy területegységnyi négyzetre daraboljuk fel.

Második sor (feldarabolással és kivonással). Az (e), (f), (g) sokszögek területe megkapható a megfelelő részek, a négy területegységnyi négyzetből való kivonással, illetve az első sornál részletezett feldarabolás módszerével is. Számítunk az (h) sokszög esetén a beforgatós módszerre, azonban ez a megoldás nem igazolható. Érezheti a diák az (fel- vagy) átdarabolás módszer létjogosultságát, de nem fogadjuk el megoldásnak. Így az (h) területet az 1×2 -es téglalapból kiindulva fogjuk megkapni a kivonás módszerével.

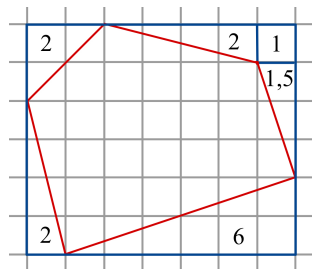
Harmadik sor (kivonással és feldarabolással). A (i), (j), (k), (l) sokszögek területe kivonással és feldarabolással is számolható.

Negyedik sor (kivonással és feldarabolással). Az (m) háromszög területét kivonással. Arra számítunk, hogy a diákok a kivonás módszerét érzik biztosabbnak, így esszerint járnak majd el. A (n), (o) sokszögek mindegyikét vissza lehet vezetni a már korábban megállapított területek összegére, illetve a kiegészítés módszere is célravezető.

□

Tapasztalat. A diákok többségében kevés hibával oldották meg a feladatot. Probléma jellemzően a (k) , (m) , (n) , és (o) sokszögeknél merült fel.

28. Feladat. Mekkora az alábbi négyzetrácsra illesztett piros sokszög területe? (17. ábra) (Átvett feladat)



17. ábra. A téglalappá egészítés, mint területszámítási módszer órai példája.

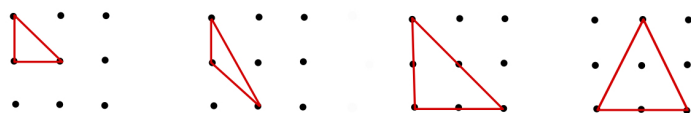
Megoldás. A feladattal a területszámítás egy új, azonban az ezt megelőző feladatokkal jól megalapozott módszerét ismerte meg a csoport. A téglalappá egészítés módszer során a pontrácsra, négyzethálóra rajzolt sokszöget olyan téglalappá egészítjük ki, amelynek oldalai a háló vonalaira esnek. Ilyenkor a kiegészítő formák egy-egy téglalap felét alkotó derékszögű háromszögek, esetleg egész négyzetek lesznek. Látható, hogy a 6.17 ábrán $2+2+6+1,5+2$ egységnyi háromszögek és 1 egység területű kis négyzet egészíti ki a (piros) ötszöget egy 42 egység területű (kék) téglalappá. Az ötszög területe tehát $42 - 14,5 = 27,5$ egység. $\square$

Megjegyzés. Az előző feladatra való reflektálásként megállapítottuk, hogy a korábban megoldott 27. feladat alakzatainak többsége megoldható a téglalappá egészítés (speciális) módszerével is. Továbbá tudatosításra került, hogy a fentebb említett területszámítási eljárások nem csak rácssokszögek esetén alkalmazhatóak.

Tapasztalat. Az általános iskolában nehézséget okozott a sokszög területének kiszámítása, míg a tehetséggyondozó foglalkozáson könnyedén megoldották tanári segítség nélkül is a feladatot.

29. Feladat. A pároddal lapozzatok vissza a füzetetekbe és keressétek meg a legkisebb, legnagyobb háromszöget, majd pedig a legkisebb, legnagyobb négyszöget! (Átvett feladat)

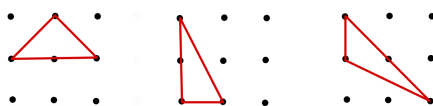
Megoldás. A 18. ábra szemlélteti a 9 szögre kifeszíthető legkisebb és a legnagyobb három-, illetve négyszögeket. Háromszögek esetén a legkisebb terület a $\frac{1}{2}$, legnagyobb a 2 terület-egység. Négyszögeknél pedig az 1 és a 4 a legkisebb és a legnagyobb terület. $\square$



18. ábra. A 9 szögre kifeszíthető legkisebb és legnagyobb háromszögek, illetve a legkisebb és legnagyobb négyszögek.

30. Feladat. Feszíts ki olyan sokszögeket a 9 szögre, melyek területe 1 és nem ugyanolyanok! (Átvett feladat)

Megoldás. A 19. ábra szemlélteti azon három- és négyszögeket, melyek területe egyenlő 1-gyel.

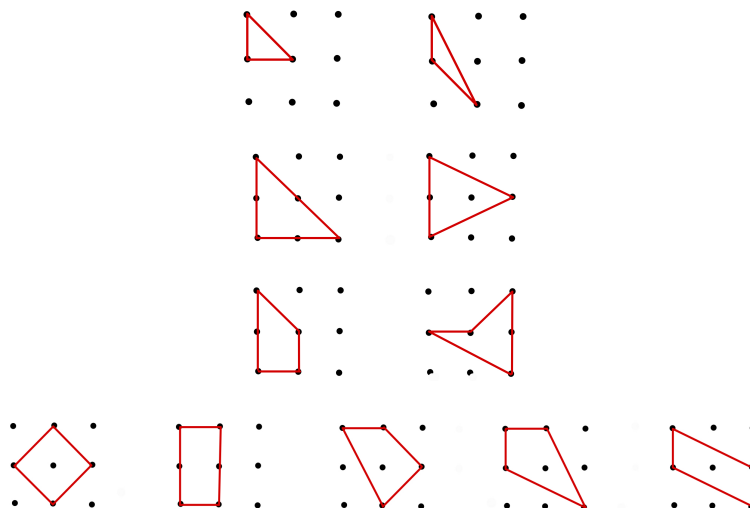


19. ábra. A 9 szögre feszíthető, nem ugyanolyan, 1 területű sokszögek.

Olyan ötszög, hatszög vagy hétszög pedig nem feszíthető ki a 9 szögű táblára, melynek területe 1-gyel lenne egyenlő, hiszen az alakzat minden esetben körül fogna legalább egy pontot. Ezt a pontot összekötve a sokszög csúcaival, az 4, 6 vagy 7 darab háromszögre darabolható. A legkisebb 9 szögre kifeszíthető háromszög területe $\frac{1}{2}$, így az eredeti öt-, hat vagy hétszög területe mindenképpen nagyobb lesz, mint 1. $\square$

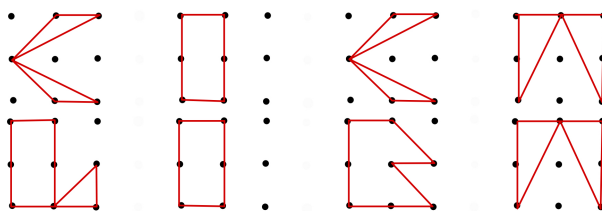
31. Feladat. Feszítsetek ki a pároddal olyan három és négyszögeket a 9 szögre, melyek ugyanakkorák, de nem ugyanolyanok! (Saját feladat)

Megoldás. A 9 szögre kifeszíthető nyolc különböző háromszög közül a 20. ábra első sorában látható háromszögek területe $\frac{1}{2}$, a második sorában látható háromszögek területe pedig 2. Az 9 szögre feszíthető 16 különböző négyszög közül a 20. ábra harmadik sorában látható négyszögek területe $\frac{3}{2}$, a negyedik sorában látható négyszögek területe pedig 2. $\square$



20. ábra. A 9 szögre kifeszíthető ugyanakkora, de nem ugyanolyan háromszögek és négyszögek.

32. Feladat. *Az alábbi szavakat a 9 szögre feszítettük ki. Párossal számítsátok ki mekkora a területük! (21. ábra)(Saját feladat)*



21. ábra. A 9 szögre kifeszített szavak, mint területmeghatározási feladatok.

Megoldás. A 21. ábrán lévő első szó területe 6, a második szó területe pedig 9,5 egység. $\square$

7. óra: Rácssokszögek területének kapcsolata a rácspontokkal, rácsnégyszögek

Rácssokszögek területének kapcsolata a rácspontokkal

Az alábbi tananyagrészen egy felsőmatematikai tételt, a Pick tételt céloztuk megsejtenni az ötödik osztályos diákokkal. A tehetséggondozó foglalkozásokon résztvevő csoportok esetében ezen egység a tananyag részét képezték, az általános iskolás csoportok tananyagában azonban idő hiányában ezen egységre nem került sor.

33. Feladat. *(Belső rácspont nélküli sokszögek területe és határpontjai közötti összefüggés.) Töltsétek ki az alábbi táblázat sorait (22. ábra)! Mit vesztek észre? Fogalmazz meg szabályt, majd sejtésedet ellenőrizd további sokszögeken! (Átvett feladat)*

Megoldás. A 33. feladat táblázata kitöltve az alábbi képen látható. (22. ábra) □

Belső rácsponttal nem rendelkező sokszögek

Terület (T)	fél	1	1 és fél	2	2 és fél	3			
Rácspont (n)	3	4	5	6	7	8			
hszk szma	1	2	3	4	5	6			

Szabály: _____

22. ábra. Belső rácspont nélküli sokszögek területe és határpontjai közötti összefüggéssel kapcsolatos feladat kitöltött táblázata.

34. Feladat. (Belső rácsponttal rendelkező sokszögek területe és határpontjai közötti összefüggés.) Töltsétek ki az alábbi táblázat sorait (23)! Mit vesztek észre? Fogalmazz meg szabályt, majd sejtésedet ellenőrizd további sokszögeken (Átvett feladat)

Megoldás. A 34. feladat táblázata kitöltve az alábbi képen látható. (23. ábra)

Belső rácsponttal rendelkező sokszögek

Terület	2	2	2 és fél	3	4				
Szélső rácspont (n)	4	4	5	6	8				
Belső rácspont (b)	1	1	1	1	1				

Szabály: _____

23. ábra. Belső rácsponttal rendelkező sokszögek területe és határpontjai közötti összefüggéssel kapcsolatos feladat kitöltött táblázata.

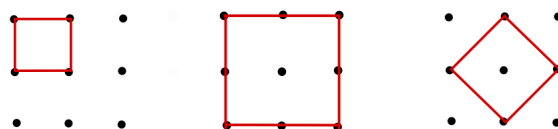
□

Rácsnégyzetek területe

A fogalalkozási egység a rácsnégyzet fogalom tisztázásával kezdődik. A tanár a következő kérdést teszi fel a csoportnak: *Mit gondoltok mit jelent az, hogy egy alakzat rácsnégyzet?* Erre a diákoktól érkezik a természetes válasz: „négyzet, és a csúcsai rácspontokon vannak”. Ezután tisztázásra kerül az, hogy egy alakzat akkor négyzet, ha az oldalai egyenlő hosszúak és szögei derékszögek.

35. Feladat. *Hány különböző rácsnégyzet feszíthető ki a 9 szögű táblára? (Átvett feladat)*

Megoldás. A 9 szögű táblára 3 különböző rácsnégyzet feszíthető ki (24. ábra).



24. ábra. A 9 szögre kifeszíthető rácsnégyzetek.

□

36. Feladat. *Mekkora a 9 szögre kifeszíthető három négyzet területe? (24. ábra) (Átvett feladat)*

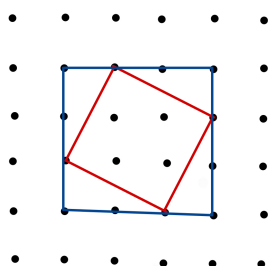
Megoldás. A 24. ábra sora szerinti első négyzet területe 1, a második négyzet területe 4, a harmadiké pedig 2 területegység. □

37. Feladat. *Hányféleképpen feszíthető ki a 9 szögre a három különböző négyzet? (24. ábra) (Átvett feladat)*

Megoldás. A 24. ábra sora szerinti első négyzet négyféleképpen, a 2. és a 3. pedig egyféleképpen feszíthetők ki a 9 szögű táblán. □

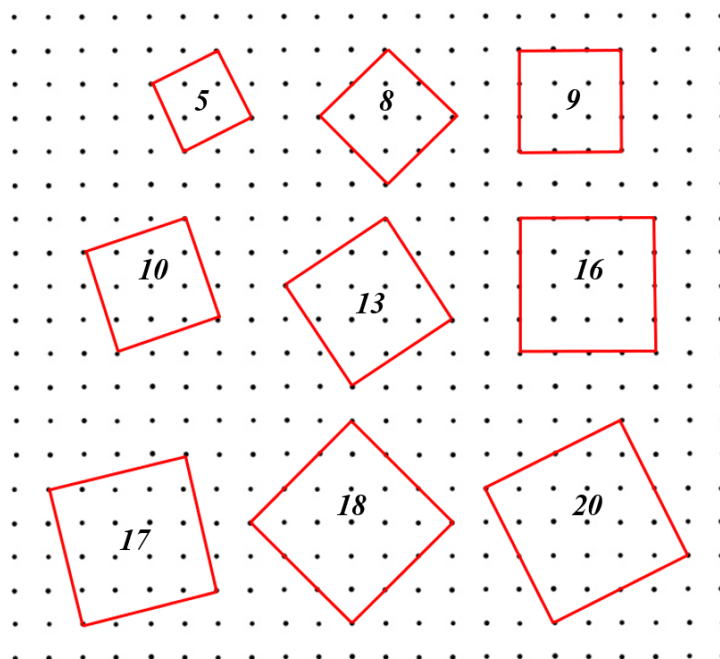
38. Feladat. *Nagyobbítsuk meg a 9 szögű táblát, és próbáljunk meg olyan rácsnégyzeteket kifeszíteni, melyeknek területe nem 1, 2 vagy 4 területegység, hanem más egész szám! Ne felejtse el ellenőrizni, hogy valóban négyzetet rajzoltál-e! (Átvett feladat)*

Megoldás. A foglalkozáson az 25. ábrán látható (piros) rácsnégyzet területének kiszámítására kerül sor, mint példa. A rácsnégyzetnek 5 egységnyi a területe, hiszen a köré rajzolt 9 egység területű (kék) rácsnégyzetből négy olyan háromszöget vágunk le, amelynek 1 egység a területe.



25. ábra. A területszámítás kiterjesztését szemléltető feladat.

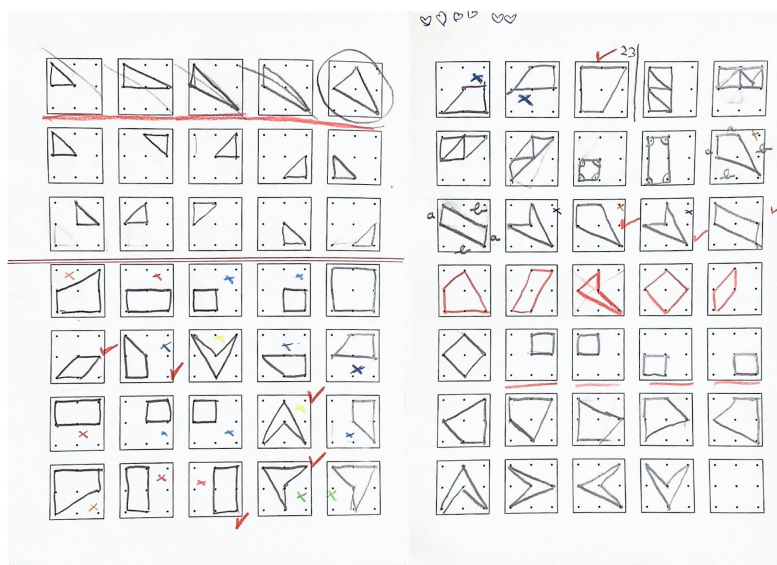
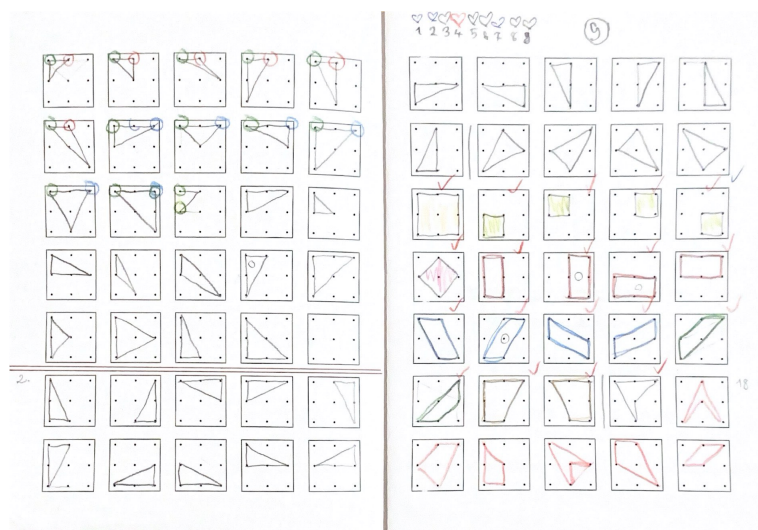
A 26. ábra szemlélteti, hogy mennyora egész szám nagyságú területe lehet a megnagyobbított 9 szögű táblára kifeszített rácsnégyzetnek illetve, hogy hogyan szükséges lerakni a négyzetet a rácspontokra. Az ábra 20 területegységig mutatja be a lehetséges rácsnégyzeteket.



26. ábra. A megnagyobbított 9 szögű táblára kiveszíthető egész, maximum 20
egységterületű négyzetek.

□

3. Melléklet: Minta egy diák munkájából



4. Melléklet: Kimeneti teszt

A 9 szög geometriája – Tudáspróba

Név: _____

1. Feladat. Karikázd be az (A) , (B) , (C) , (D) és (E) betűkkel jelölt tulajdonságok közül azokat, melyek az adott alakzatra jellemzőek! Figyelj, mert előfordulhat, hogy egy alakzatra egyetlen tulajdonság sem jellemző, de olyan alakzattal is találkozhatasz, mely esetén egyszerre több tulajdonság is teljesül.



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



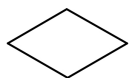
(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



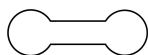
(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv



(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv

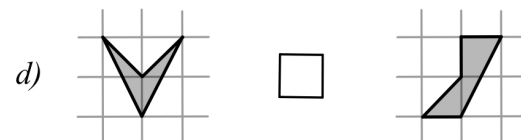
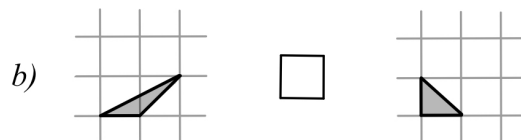
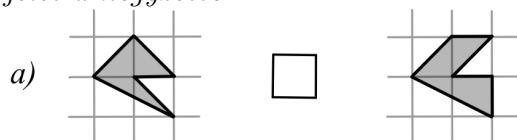


(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv

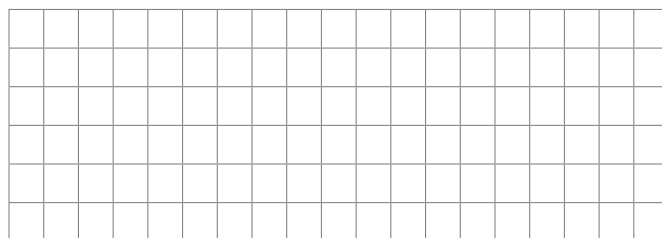
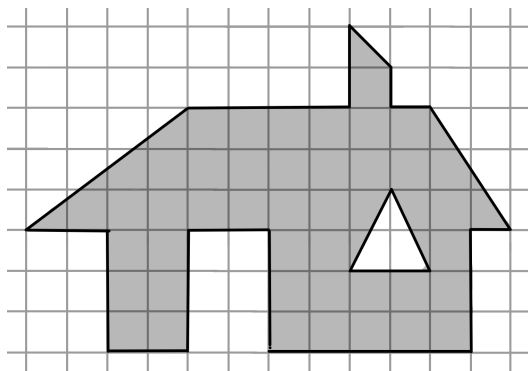


(A) síkidom (B) sokszög (C) négyszög (D) konvex (E) konkáv

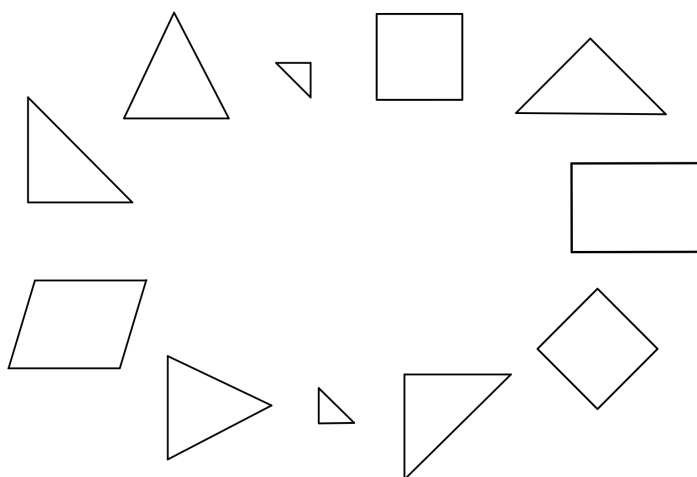
2. Feladat. Melyik besatírozott résznek nagyobb a területe? Írd a megfelelő $<$, $>$ vagy $=$ jelet a négyzetbe!



3. Feladat. Hány egységnégyzetnek felel meg az alábbi ház területe? Írd le hogyan dolgoztál!

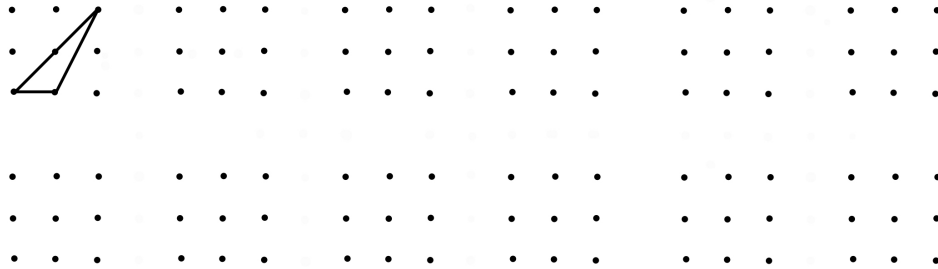


4. Feladat. Kösd össze az ugyanolyan alakzatokat!



Miért ugyanolyanok az összekötött alakzatok? _____

5. Feladat. Az alábbi háromszöget ráillesztettük egy négyzetrács kilenc rácspontjára. Rajzolj minél több a háromszöggel ugyanolyan, de a rácspontokra másképp illesztett háromszöget!



5. Melléklet: A belső motivációt mérő kérdőív

Hangulati kérdőív

A következő állítások a szöges táblával/Geoboarddal való tanulásra vonatkoznak. Jelöld X-szel, hogy milyen mértékben értesz egyet az egyes állításokkal! (1=egyáltalán nem igaz, 7=teljes mértékben igaz)

	1	2	3	4	5	6	7
							
Nagyon élveztem a szöges táblával/Geoboarddal való matekozást.							
Szerintem viszonylag ügyes voltam, amikor a szöges táblával/Geoboarddal kellett megoldani a feladatokat.							
Nagyon sok munkát tettem bele a szöges táblával/Geoboarddal való tanulásba.							
Egyáltalán nem voltam ideges a szöges táblával/Geoboarddal való matekozás közben.							
Jó mulatság volt a szöges táblával/Geoboarddal való tanulás.							
Amikor a szöges táblával/Geoboarddal kellett megoldani feladatokat szerintem viszonylag ügyes voltam a csoporttársaimhoz képest.							
Nem volt célom, hogy minél jobban teljesítsek a szöges táblával/Geoboarddal való tanulás során.							
Nagyon feszült voltam a szöges táblával/Geoboarddal való matekozás közben.							
Szerintem a szöges táblával/Geoboarddal való tanulás unalmas volt.							
Azért vettem részt a szöges táblás/Geoboardos foglalkozásokon mert muszáj volt.							
Egy-két foglalkozás után, már ügyesnek érzem magam a szöges táblás/Geoboardos feladatoknál.							
Nagyon igyekeztem jól teljesíteni a szöges táblával/Geoboarddal való tanulás során.							
Úgy gondolom, hogy többször is szabadkezet kaptam a szöges táblával/Geoboarddal történő feladatmegoldások során.							
Nagyon nyugodt vagyok a szöges táblával/Geoboarddal való matekozás alatt.							
Egyáltalán nem kötötte le a figyelmemet a szöges táblával/Geoboarddal való tanulás.							
Meg vagyok elégedve a szöges táblával/Geoboarddal való matekozás során nyújtott teljesítményemmel.							
Fontos volt számomra, hogy jól teljesítsek a szöges táblával/Geoboarddal való tanulás során.							

Nem igazán kaptam szabadkezet a szöges táblás/Geoboards feladatmegoldások során.										
Szorongtam a szöges táblával/Geoboardsdal való tanulás közben.										
A szöges táblával/Geoboardsdal való tanulást úgy jellemezném, mint egy számomra érdekes időtöltés.										
Meglehetősen ügyes voltam a szöges táblával/Geoboardsdal való matekozás során.										
Nem tettem bele sok energiát a szöges táblával/Geoboardsdal való tanulásba.										
Azért vettem részt a szöges táblás/Geoboards foglalkozásokon mert nem volt más választásom.										
Úgy éreztem, hogy a szöges táblával/Geoboardsdal való tanulás nyomasztó.										
Szerintem élvezetes a szöges táblával/Geoboardsdal való tanulás.										
A szöges táblával/Geoboardsdal való tanulás során nem teljesítettem jól.										
A foglalkozások alatt arra gondoltam, hogy mennyire élvezetes a szöges táblával/Geoboardsdal történő tanulás.										
Azért vettem részt a szöges táblás/Geoboards foglalkozásokon, mert én akartam itt lenni és matekozni.										

Nagyon kíváncsi vagyok a véleményedre! Kérlek fejezd be a következő mondatokat.

1. Nagyon tetszett a szöges táblás/Geoboards foglalkozásokban az, hogy: _____

2. Szerintem nem volt jó az, hogy: _____

3. Jó lett volna, ha: _____

6. Melléklet: A belső motivációt mérő kérdőív nyitott végű kérdéseire adott válaszokból kiemelt példák

Általános iskolás diákok válaszai

Nagyon kíváncsi vagyok a véleményedre! Kérlek fejezd be a következő mondatokat.

1. Nagyon tetszett a szöges táblás foglalkozásokban az, hogy szabadidőre engedhettem a fantáziám

Nagyon kíváncsi vagyok a véleményedre! Kérlek fejezd be a következő mondatokat.

1. Nagyon tetszett a szöges táblás foglalkozásokban az, hogy nem az a unalmas óra volt

Nagyon kíváncsi vagyok a véleményedre! Kérlek fejezd be a következő mondatokat.

1. Nagyon tetszett a GeoBoardos foglalkozásokban az, hogy érdekes alakzatokat lehetett kirakni vele

Jó lett volna, ha örökké ezen dolgoztunk volna :)

Tehetséggondozó foglalkozáson résztvevő diákok válaszai

1. Nagyon tetszett a szöges táblás foglalkozásokban az, hogy

egyedül kellett rájönni a megoldásra

1. Nagyon tetszett a szöges táblás foglalkozásokban az, hogy

~~egy~~ eltér egy zina matekórától és érdekesebb volt.

1. Nagyon tetszett a szöges táblás foglalkozásokban az, hogy

izgalmasabb mint egy normál matek óra.

1. Nagyon tetszett a GeoBoardos foglalkozásokban az, hogy

Kiélhettem a kreativitásomat. :)

1. Nagyon tetszett a GeoBoardos foglalkozásokban az, hogy

nekünk kellett rájönni a megoldásra és kaptunk elég időt

1. Nagyon tetszett a GeoBoardos foglalkozásokban az, hogy

tableten is adhattunk meg feladatot, és nem volt ilyen

1. Nagyon tetszett a GeoBoardos foglalkozásokban az, hogy

nem füzetbe írtuk és nem szokványos matekórak.

7. Melléklet: A foglalkozásokon készült képek

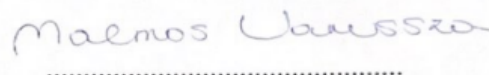


8. Melléklet: Nyilatkozat mesterséges intelligencia használatáról

NYILATKOZAT

Kijelentem, hogy mesterséges intelligencia alkalmazást/programot (pl. képalkotó, szövegalkotó) nem használtam a dolgozat készítése során. Jelen nyilatkozat aláírásával tudomásul veszem, hogy amennyiben bizonyítható, hogy a dolgozatot nem magam készítettem, illetve mesterséges intelligencia alkalmazás/program segítségével vettem igénybe vagy a dolgozattal kapcsolatban szerzői jogi jogsértés ténye merül fel, a Szekció megtagadja a dolgozat befogadását.

Pécs, 2025. január 28.



Aláírás

Malmos Vanessza