

Klasszikus normál módusú lengőrendszerek csillapításának identifikációja

Dudás Dávid

Mechatronikai mérnök MSc. 2. évfolyam

Témavezetők:

Dr. Lipovszki György, egyetemi docens - MOGI Tanszék

Dr. Pápai Ferenc, egyetemi docens - ÉAÜLT Tanszék



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Gépészmérnöki Kar

Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék

Budapest, 2011.10.28.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Lineáris csillapított lengőrendszerek mozgásegyenlete	3
3. Kísérleti mérésekkel meghatározott értékpárok lehetséges ábrázolási módjainak áttekintése.....	6
4. Lineáris viszkoelasztikus modellek vizsgálata	7
4.1. Egyelemű alapelemek	8
4.2. Kételemű egyszerű modellek	9
4.3. Három vagy több elemet tartalmazó összetett modellek	10
4.4. Konstitúciós egyenletek felírása átviteli függvény segítségével	12
4.5. Konstitúciós egyenletek felírása a rendszermátrix segítségével	13
5. Szerkezet típusok csoportosítása és a csillapítási mechanizmus vizsgálata	18
5.1. Szerkezettípusok csoportosítása	18
5.2. Csillapítási mechanizmusok	20
5.3. Csillapítási mechanizmus vizsgálatának bemutatása a standard solid I. modell példáján.....	22
6. Lineáris regresszió két polinom hányadosával.....	24
6.1. Polinomok hányadosával történő regresszió.....	24
6.2. A meghatározott csillapítási modelleknek megfelelő regresszió	25
7. Módusok csoportosítása	27
8. Esettanulmányok.....	29
8.1. A regresszió numerikus stabilitása.....	29
8.2. Heritage Court Tower épület vizsgálata.....	31
8.3. A Vittoria Sora híd vizsgálata	34
8.4. Szerkezeti csillapítás vizsgálata	39
8.5. Polimerek csillapítási mechanizmusa.....	42
9. A regressziót követő extrapoláció lehetőségei	45
10. Összefoglalás.....	46
11. Köszönetnyilvánítás.....	47
12. Irodalomjegyzék	48
13. Függelék	49
13.1. F1: Háromelemű modellek egyenletének felírása az átviteli függvény alapján.....	49
13.2. F2: Háromelemű modellek egyenletének felírása a rendszermátrix alapján.....	50
13.3. F3: A csillapítási mechanizmusoknak megfelelő regressziós függvények megvalósítása MATLAB segítségével	53
13.4. F4: Az esettanulmányokhoz kapcsolódó részletes információk	57

1. Bevezetés

Lineáris lengőrendszerek modellezésénél az egyik gyakran alkalmazott alapfeltételezés, a klasszikus normál módusok jelenléte. Klasszikus normál módusoknak azokat a lengésképeket nevezzük, mikor a sajátlengést végző szerkezet minden pontja egy-időben éri el szélső helyzetét (tiszta fázis/ellenfázis a lengésképből).

Az ilyen lengést végző szerkezet csillapításának modellezésére széles körben a *Rayleigh* csillapítást alkalmazzák, amikor a csillapítási mátrixot a tömegmátrix és a merevségi mátrix lineáris kombinációjaként írják fel. A szakirodalomból ismeretes, hogy ennél jóval szélesebb azon csillapítási mátrixok köre, amelyek klasszikus normál módusokat eredményeznek. Mátrixfüggvények alkalmazásával klasszikus normál módusokat eredményező csillapítási mátrix generálható.

A vizsgált frekvenciatartományban méréssel meghatározott csillapítási tényező és sajátfrekvencia adatokra illesztett regressziós függvény alapján egyrészt előállítható a csillapítási mátrix explicit alakja, másrészt pedig, extrapolációval becslés nyerhető a csillapításra az outband módusok tartományára is.

A regresszált, illetve extrapolált csillapítási értékek felhasználásával a végeselemes modellek csillapítottá tehetők.

A kutatás célja annak vizsgálata, hogy milyen mennyiségek ábrázolása történjen a regresszió számításához, milyen legyen a regressziós görbe analitikus alakja, ez milyen reológia modellel leírható csillapítási mechanizmushoz köthető.

Esettanulmányokon keresztül vizsgálni szükséges a módszer alkalmazhatóságának határait és lehetőségeit.

A dolgozat a következő problémaköröket elemzi:

1. A kísérleti mérésekkel meghatározott értékpárok lehetséges ábrázolási módjainak áttekintése.
2. A diagramon ábrázolt értékpárokra illeszthető regressziós görbék meghatározási módjainak bemutatása.
3. A szóba jöhető regressziós függvények analitikus alakjainak és az ennek megfelelő reológiai modell elemzése.
4. Különböző szerkezet típusokra (hidak, épületek, antennaoszlopok, gátak, daruk, stb.) szakirodalmi esettanulmányok végzése.
5. Milyen típusú szerkezeteknél van értelme a módusok csoportosításának?
6. A regressziót követő extrapoláció lehetőségének vizsgálata az *Outband* módusok frekvenciatartományára, annak érdekében, hogy a végeselemes modellek csillapítottá tehetők legyenek ezekre a módusokra is.

2. Lineáris csillapított lengőrendszerek mozgásegyenlete

A lineáris csillapított lengőrendszerek mozgásegyenlete

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

ahol $\mathbf{M}$ a tömegmátrix, $\mathbf{C}$ a csillapítási mátrix, $\mathbf{K}$ merevségi mátrix és $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ a lengőrendszer modelljének általánosított elmozdulás koordinátáiból alkotott n elemű oszlopvektor. $\mathbf{f}(t)$ a gerjesztés. A lengőrendszer rendszermátrixa

$$\mathbf{Z}(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (2)$$

alakban írható fel. Csillapítatlan esetben ($\mathbf{C}=0$) (2) sajátértékei $\lambda_i = j\omega_i$ ($i = 1, 2 \dots n$) komplex mennyiségek, ahol ω a csillapítatlan sajátkörfrekvencia. Csillapított esetben ez $\lambda_i = \delta_i + j\nu_i$ ($i = 1, 2 \dots n$), ahol δ a csillapítási faktor, ν pedig a csillapított sajátkörfrekvencia.

Ismeretes, hogy szimmetrikus, csillapításmentes rendszereknél a $\mathbf{Z}(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$ rendszermátrix λ_i sajátértékei tiszta képzetes mennyiségek, és $\lambda_{n+i} = -\lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $\rightarrow \lambda_{n+i}^2 = \lambda_i^2 = -\Omega^2$ miatt n számú φ_i lineárisan független sajátvektor létezik, melyek megfelelő normálással valós elemű vektorokká tehetők. Ezekből a sajátvektorokból képezett $\boldsymbol{\phi} = [\varphi_i]$ modálmátrixszal végzett ekvivalens transzformáció egyidejűleg diagonalizálja az $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ mátrixokat. Az ilyen csillapítatlan rendszerek lengésképeit a szakirodalomban *normál módusoknak*, vagy *klasszikus normál módusoknak* nevezik. Normál módusok azok a lengésképek, melyeknél a sajátlengést végző szerkezet minden elmozdulás-koordinátája egyidőben éri el szélső helyzetét, létezik állóhullám a lengésképben.

Csillapított rendszerek klasszikus normál módusainak fogalmát *Lord Rayleigh* (1877) vezette be, bebizonyította, hogy csillapított rendszereknek is létezhetnek klasszikus normál módusai. Ilyen eset például az ún. *proporcionális* csillapítás, amelynél a $\mathbf{C}$ csillapítási mátrix az $\mathbf{M}$ tömegmátrix és a $\mathbf{K}$ merevségi mátrix lineáris kombinációja, tehát kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (3)$$

A fenti egyenletet nevezzük Rayleigh-féle csillapításnak, ahol α , β anyagjellemzőtől függő skalár konstansok.

Caughey és *O'Kelly* (1965) [1] bebizonyította, hogy a klasszikus normál módusok létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az együtthatómátrixokra teljesüljön az ún. felcserélhetőségi reláció.

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}) \cdot (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) \cdot (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}) \quad (4)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (5)$$

Feltéve tehát, hogy a rendszer együttható mátrixaira teljesül ez az egyenlőség, elvégezhető az eredeti $\mathbf{x}$ elmozdulás koordinátákon a modális koordináta-transzformáció

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q}. \quad (6)$$

Behelyettesítés után a szimmetrikus, klasszikus normál módusokkal rendelkező rendszer mozgásegyenlete

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \quad (7)$$

ezt beszorozva Φ^T -vel

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (8)$$

alakra jutunk, ahol:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{E}, \quad (9)$$

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \langle -2\delta_i \rangle, \quad (10)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \langle \Omega_i^2 \rangle = \Omega^2, \quad (11)$$

$$\Phi^T \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}^*(t). \quad (12)$$

A $\mathbf{q}$ elmozdulás-koordináták által kifeszített teret *modális térnek* szokás nevezni.

Caughey (1960) [2] bebizonyította, hogy ezek a normál módusok megegyeznek a csillapítatlan rendszer módusaival. „Csillapított rendszer esetén a klasszikus normál módusok létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a csillapítási mátrixot ugyanaz a transzformáció diagonalizálja, amelyik csatolásmentesíti a csillapításmentes rendszert.” Az együtthatómátrixokra nézve elégséges feltételt fogalmazott meg: „Csillapított rendszerek esetén a klasszikus normál módusok létezésének elégséges feltétele, hogy az $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ szorzat kifejezhető legyen $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ hatványaival az alábbi sor alakjában”:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} a_{pq} (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^{\frac{p}{n}}. \quad (13)$$

Adhikari (2000) [3] értekezésében a proporcionális csillapítás további általánosítását javasolja, és igazolja, hogy az alábbi módon generált csillapítási mátrixok is kielégítik a felcserélhetőségi relációt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}f_1(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}), \quad (14)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}f_2(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}), \quad (15)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}f_1(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}) + \mathbf{K}f_2(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}), \quad (16)$$

$$\mathbf{C} = f_3(\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}, \mathbf{M}\mathbf{K}^{-1})\mathbf{M} + f_4(\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}, \mathbf{M}\mathbf{K}^{-1})\mathbf{K}, \quad (17)$$

ahol $f_1(), f_2(), f_3(), f_4()$ analitikus, azaz sorbafejthető mátrixfüggvények.

A modális jellemzők és a csillapítási mátrix kapcsolatának vizsgálatához tekintsük az Adhikari szerinti

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}f_1(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) \quad (18)$$

összefüggést. A modális térbe transzformált rendszer mozgásegyenletének összefüggései alapján $\mathbf{M}, \mathbf{M}^{-1}, \mathbf{K}$ helyébe helyettesítsük be a sajátértékekkel és a sajátvektorokkal kifejezett alakjukat, más néven spektrálfelbontásukat:

$$\mathbf{C} = \Phi^{-T}\Phi^{-1}f_1(\Phi\Phi^T\Phi^{-T}\Omega^2\Phi^{-1}) = \Phi^{-T}\Phi^{-1}f_1(\Phi\Omega^2\Phi^{-1}). \quad (19)$$

Az így megadott $\mathbf{C}$ csillapítási mátrixot transzformáljuk a modális térbe, azaz szorozzuk meg balról Φ^T -vel és jobbról Φ -vel:

$$\Phi^T\mathbf{C}\Phi = \Phi^T\Phi^{-T}\Phi^{-1}f_1(\Phi\Omega^2\Phi^{-1})\Phi. \quad (20)$$

Az $f_1(\Phi\Omega^2\Phi^{-1})$ spektrálfelbontásból emeljük ki Φ, Φ^{-1} tényezőket, ekkor:

$$\Phi^T\mathbf{C}\Phi = \Phi^T\Phi^{-T}\Phi^{-1}\Phi f_1(\Omega^2)\Phi^{-1}\Phi = f_1(\Omega^2). \quad (21)$$

A modális csillapításra vonatkozó $\Phi^T\mathbf{C}\Phi = \langle -2\delta_i \rangle$ összefüggést behelyettesítve az

$$\langle -2\delta_i \rangle = f_1(\Omega^2) \quad (22)$$

egyszerű összefüggést kapjuk. Ez tételszerűen megfogalmazva a következőt fejezi ki [10]:

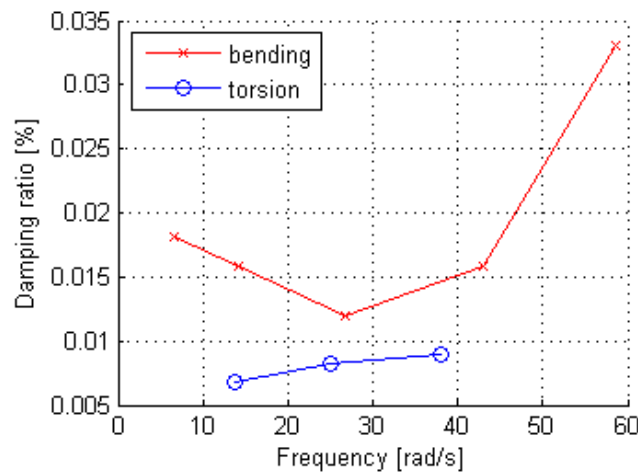
„Klasszikus normál módusú, egyszeres sajátértékekkel rendelkező szimmetrikus rendszerek $-2\delta_i$ modális csillapítása egyenlő az *általánosított Rayleigh csillapítási mátrixot generáló* $f_1(\cdot)$ függvény helyettesítési értékével az Ω_i^2 csillapítatlan sajátkörfrekvencia négyzetének helyén.”

A dolgozat célja az f_1 generáló függvény mérési adatok alapján történő meghatározása. Ennek során vizsgáljuk a célszerű ábrázolási módokat, a regresszálási feladathoz célszerű koordinátarendszer megválasztását. Megvizsgálom az egyszerű reológiai modelleket, és azok általánosításait, csoportosítási lehetőségeiket. Célszerűen valós anyagmodell alapján generálható regressziós függvény segítségével próbálom identifikálni az esettanulmányok során a csillapítási mátrixot generáló $f_1(\cdot)$ függvény alakját.

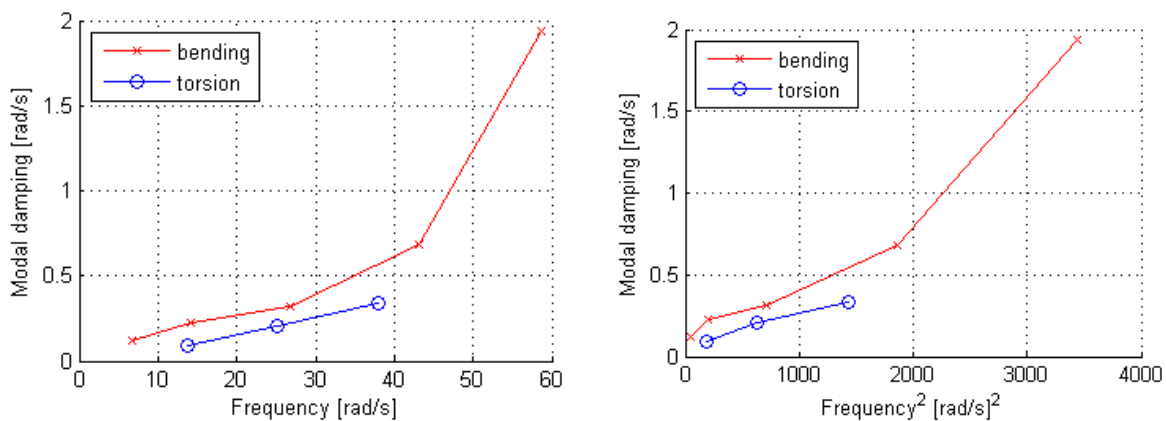
Kitérek továbbá a módusok csoportosítására, globális regressziós függvényt kell-e alkalmazni, az összes mért módus adatait figyelembe véve, vagy elvégezhető-e a regresszió külön-külön módustípusonként.

3. Kísérleti mérésekkel meghatározott értékpárok lehetséges ábrázolási módjainak áttekintése

A generáló függvény identifikációjához célszerű alkalmas koordinátarendszert választani. A csillapítás és a sajátkörfrekvencia kapcsolatának ábrázolására a szakirodalomban az $(\Omega_i; \xi_i)$ (csillapítatlan sajátkörfrekvencia és a *Lehr* féle csillapítás), illetve mérésekkel meghatározott sajátfrekvenciák esetén az ezt közelítő $(\nu_i; \xi_i)$ (csillapított sajátkörfrekvencia és a *Lehr* csillapítás) ábrázolása terjedt el (1. ábra). A csillapítás jellegének ábrázolása és megítélése szempontjából a 2. ábra szerinti kedvezőbb ábrázolási módokat javaslom, amikor a csillapítatlan sajátkörfrekvencia-négyzet függvényében a modális csillapítást ábrázolom. Példaként mérésrel meghatározott adatsort [4] másoltam be, ennek részletes ismertetésére az esettanulmányok során térek ki.



1. ábra Lehr-féle csillapítás a frekvencia függvényében



2. ábra Javasolt ábrázolási mód $d(j\omega)=f(\omega)$ és $d(j\omega)=f(\omega^2)$

A (22) szerinti $f_1(\cdot)$ függvényt a továbbiakban $d(j\omega)$ -val (modális csillapítás) jelöljük. A sajátkörfrekvencia-négyzet függvényében ábrázolt modális csillapítás Rayleigh csillapítás esetén lineáris, sokkal egyszerűbben illeszthető rá regressziós függvény, mint a klasszikus ábrázolási esetben.

4. Lineáris viszkoelasztikus modellek vizsgálata

Ebben a fejezetben egyszerű és összetett viszkoelasztikus reológiai modelleket vizsgálom részletesen, ugyanis a csillapítási mátrixot generáló függvényt a megvalósítható anyagmodellek körében keresem. Az egyes modellek veszteségi tényezőjét és csillapítását frekvenciatartományban csak a későbbi fejezetben tárgyalom, ennek a fejezetnek a célja az anyagmodellek differenciálegyenleteinek és átviteli függvényeik meghatározása.

A reológia a deformációk és a deformáció-sebességek, valamint az őket előidéző erők, vagy terhelések, különböző külső körülmények (nyomás, hőmérséklet) közötti törvényszerűségekkal foglalkozik. Dolgozatomban a modellek paramétereinek hőmérsékletfüggését nem vizsgálom.

A viszkoelasztikus szó a viszkózus és elasztikus szavakból ered, tehát az ilyen anyag egyszerre rendelkezik mindkét tulajdonsággal. A reológiai modellek mechanikai viselkedésének szemléltetésére és a differenciálegyenlet felírását megkönnyítendő, a lineáris elasztikus rugókból és lineáris viszkózus csillapításokból összeállított mechanikai rendszerek alkalmazása terjedt el. A reológiai modelleket a szakirodalomban [5] konstitúciós egyenletükkel adják meg, ami a feszültség és megnyúlás leírására alkalmas differenciálegyenlet. Az egyenletekben a feszültség (σ) és a megnyúlás (ϵ) deriváltjai is szerepelnek, melyeknek együtthatói a modell E és η paramétereinek kombinációi, ahol E a rugalmassági modulusz és η a viszkozitási tényező. A konstitúciós egyenlet általános megadása szerint a feszültséget és deriváltjait a baloldalra, a megnyúlást és deriváltjait pedig a jobboldalra rendezzük.

A modellek vizsgálata során a konstitúciós egyenletek felírásán túl, meghatározom a modell operátor tartományban felírt átviteli függvényét, ami σ és ϵ Laplace-transzformáltjainak hányadosa. A szakirodalomnak megfelelően [6],[7] ezt σ/ϵ alakban keressük, ami mechanikai analógia reciprokaként definiálja az átviteli függvényt, a dolgozat során én is ezt a módszert követem, ugyanis így megegyezik a komplex rugalmassági moduluszal

$$Z(s) = \frac{\sigma(s)}{\epsilon(s)}. \quad (23)$$

A komplex rugalmassági modulusz az átviteli függvény frekvenciatartománybeli reprezentációjának felel meg, melynek valós része a tárolási modulusz $E'(j\omega) = \text{Re}(Z(j\omega))$, a képzetes része pedig a veszteségi modulusz $E''(j\omega) = \text{Im}(Z(j\omega))$ a körfrekvencia függvényében. Ez alapján tehát felírhatjuk a komplex rugalmassági moduluszt a következő alakban:

$$Z(j\omega) = \frac{\sigma(j\omega)}{\epsilon(j\omega)} = E'(j\omega) + E''(j\omega). \quad (24)$$

4.1. Egyelemű alapelemek

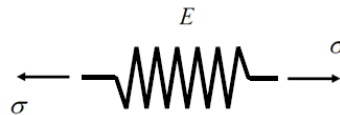
A modellek felépítések két alapelem kombinációit használjuk tetszőlegesen bonyolult struktúrák felépítésére. Az alapelemek, ahogy a bevezetésben említettük a lineáris elasztikus rugó, más néven *Hooke*-test, és a lineáris viszkózus csillapítás, a *Newton*-test.

4.1.1. Lineáris elasztikus rugó

A konstitúciós egyenletében az E merevségű lineáris elasztikus rugó teremt kapcsolatot a feszültség és megnyúlás között:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (25)$$

A modell feszültség hatására *azonnal* megnyúlik, és a terhelés ideje alatt tartja konstans megnyúlását, ami az egyenlet alapján E -vel arányos. A terhelés megszűntekor azonnal visszatér az eredeti állapotába.



3. ábra A Hooke test modellje

Az átviteli függvény és a komplex rugalmassági modulusz könnyen kifejezhető a konstitúciós egyenletből:

$$Z(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = E, \quad Z(j\omega) = \frac{\sigma(j\omega)}{\varepsilon(j\omega)} = E. \quad (26)$$

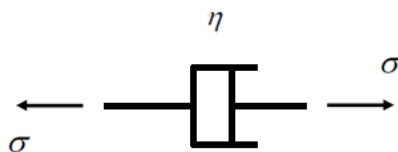
4.1.2. Lineáris viszkózus csillapítás

A modell alapja egy viszkózus folyadékkal töltött munkahenger, mely feszültség hatására megnyúlik. A megnyúlás idő szerinti deriváltja, az alakváltozás sebessége arányos a feszültséggel. Nagyobb feszültség esetén gyorsabb a megnyúlás, ez a jellemző viselkedés a legtöbb folyadékra. Az arányossági tényező a folyadék viszkozitása. A konstitúciós egyenlet idő és operátortartományban a következő.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma \rightarrow \sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \sigma = s \cdot \eta \varepsilon \quad (27)$$

Az átviteli függvény és a komplex rugalmassági modulusz ez alapján. Ahol j a komplex egységvektor.

$$Z(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = s \cdot \eta \quad Z(j\omega) = \eta \cdot j\omega \quad (28)$$



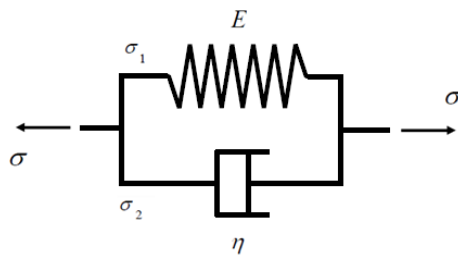
4. ábra A Newton test modellje

4.2. Kételemű egyszerű modellek

A két alapmodell kombinációja összetett reológiai modellt eredményez. Két modellt említhetünk itt, az első a jellemzően elasztikus viselkedésű *Kelvin (Voigt)* modell, a másik a viszkózus tulajdonságú *Maxwell* modell.

4.2.1. Kelvin modell

A modell egy párhuzamosan kötött rugó és csillapítás rendszere. A modell a 5. ábrán látható elrendezést reprezentálja, az eredő feszültség a két ág feszültségeinek összegeként áll elő, a megnyúlás pedig azonos mindkét elemen.



5. ábra A Kelvin (Voigt) test modellje

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma_1; \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma_2; \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (29)$$

Behelyettesítve és σ -ra rendezve megkapjuk a modell konstitúciós egyenletét idő és operátor tartományban:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (30)$$

$$\sigma(s) = E\varepsilon(s) + s \cdot \eta\varepsilon(s). \quad (31)$$

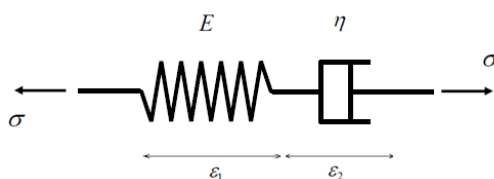
Az átviteli függvény felírásakor észrevehetjük, hogy ez a *Hooke*-test és a *Newton*-test átviteli függvényének összege, ezt a felírási módot részletesen bemutatom a fejezet későbbi pontjában:

$$Z_{Kelvin}(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = E + s \cdot \eta = Z_{Hooke}(s) + Z_{Newton}(s), \quad (32)$$

$$Z(j\omega) = E + \eta \cdot j\omega. \quad (33)$$

4.2.2. Maxwell modell

Egy sorosan kötött rugalmas elem és egy csillapítás segítségével modellezhető, az eredő megnyúlás a két elem megnyúlásának összege, miközben a feszültség azonos a modell elemein.



6. ábra A Maxwell test modellje

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\eta} \sigma; \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (34)$$

A konstitúciós egyenlet a behelyettesítés után a már megszokott módon idő és operátor tartományban

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon}, \quad (35)$$

$$\sigma \left(1 + \frac{\eta}{E} \cdot s\right) = \varepsilon \eta \cdot s, \quad (36)$$

ebből képezhető az átviteli függvény és komplex rugalmassági modulusz a következő

$$Z(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{\eta \cdot s}{1 + \frac{\eta}{E} s}; \quad Z(j\omega) = \frac{\eta \cdot j\omega}{1 + \frac{\eta}{E} j\omega} \quad (37)$$

alakban. A tárolási és veszteségi modulusz felírásához a komplex tagoktól mentesíteni kell a nevezőt, amit a nevező konjugáltjával való beszorzással tehetünk meg:

$$Z(j\omega) = \frac{\eta \cdot j\omega}{1 + \frac{\eta}{E} j\omega} \cdot \frac{1 - \frac{\eta}{E} j\omega}{1 - \frac{\eta}{E} j\omega} = \frac{\eta \cdot j\omega \cdot (1 - \frac{\eta}{E} j\omega)}{1 + (\frac{\eta}{E})^2 \omega^2} = \frac{\eta \cdot j\omega + \frac{\eta^2}{E} \omega^2}{1 + (\frac{\eta}{E})^2 \omega^2}, \quad (38)$$

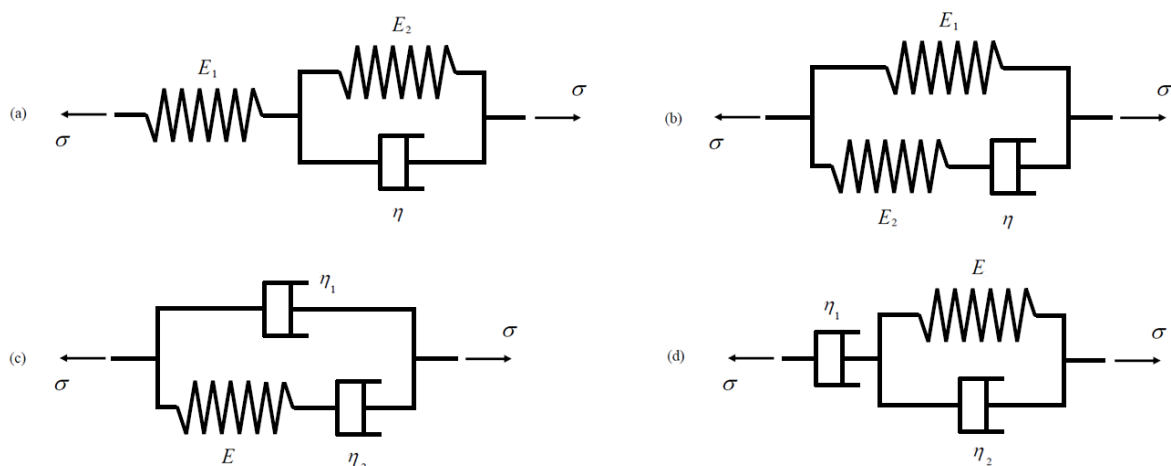
$$E'(j\omega) = \operatorname{Re}(Z(j\omega)) = \frac{\frac{\eta^2}{E} \omega^2}{1 + (\frac{\eta}{E})^2 \omega^2}; \quad E''(j\omega) = \operatorname{Im}(Z(j\omega)) = \frac{\eta \cdot j\omega}{1 + (\frac{\eta}{E})^2 \omega^2}. \quad (39)$$

4.3. Három vagy több elemet tartalmazó összetett modellek

A következő pontokban két javasolt eljárást mutatok be tetszőleges számú elemet tartalmazó modellek esetére. Három vagy több elem esetén a differenciálegyenlet megadása a feszültségek és megnyúlások alapján felírható lineáris egyenletrendszer segítségével egyre bonyolultabbá válik. A módszereket a három elemet tartalmazó standard solid és standard fluid modelleken, valamint 4 elemet tartalmazó általános *Maxwell* és *Kelvin* modelleken mutatom be.

4.3.1. Háromelemű modellek

Összesen 4 darab háromelemű modell hozható létre az alaptagokból, a modelljeiket a 7. ábrán láthatjuk:

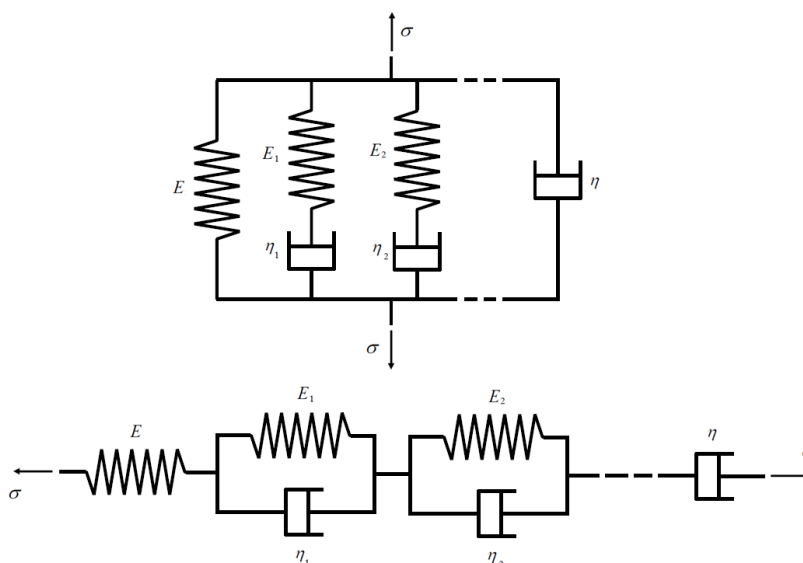


7. ábra Háromelemű modellek

A háromelemű modellek rendre a következők: (a) *standard solid I.* modell, (b) *standard solid II.* modell, (c) *standard fluid I.* modell és (d) *standard fluid II.* modell. Az (a) és (b) modellek ún. solid modellek, ami azt jelenti, hogy jellemzően rugalmas viselkedésűek, terhelés hatására azonnal elasztikus anyagként reagálnak, és a terhelés megszűntével visszanyerik eredeti alakjukat. A (c) és (d) fluid modellek, viszkózus jellegűek, a terhelés megjelenésekor viszkózus csillapítóként reagálnak, és az alakjukat nem nyerik vissza a terhelés megszűntével.

4.3.2. Általános Maxwell és Kelvin modellek

Még összetettebb modellek hozhatók létre több és több elem felhasználásával. Általában a komplex viszkoelasztikus modellek a szakirodalomban vagy általánosított *Maxwell*-testek, vagy általánosított *Kelvin*-testek [5], [11].



8. ábra Általános Maxwell modell (fent) és általános Kelvin modell (lent)

Az általános *Maxwell*-test tetszőleges számú párhuzamosan kapcsolt *Maxwell* elemből épül fel, ezek mindegyike egyedi paraméterekkel rendelkezik. Ezekkel párhuzamosan kötve szerepelhet még csillapítás és rugó. Rugó hiányában a modell fluid típusú rendszerek modellezésére alkalmas, a rugóval pedig solid típusú modellt kapunk.

Az általánosított *Kelvin* modell N darab sorosan kapcsolt *Kelvin* elemből áll (*Kelvin*-lánc) [5]. A modell szintén alkalmas egyaránt fluid és solid rendszerek modellezésére. Ha a sorosan kapcsolt rugót kivesszük a láncból fluid modellt kapunk, ha a viszkózus csillapító elemet távolítjuk el solid modellt kapunk.

Általánosságban jogosan feltételezhetjük, hogy minél több elemet tartalmaz a modellünk, annál pontosabban képes modellezni valós anyagok viselkedését. Azonban ez azt eredményezi, hogy komplexebb modell esetében több paramétert kell kísérleti úton meghatároznunk. A paraméterek meghatározása növekvő elemszám mellett egyre nehezebb, gyakorlatilag ez szab határt a modell pontosságának.

4.4. Konstitúciós egyenletek felírása átviteli függvény segítségével

A Kelvin modell egyenleteinek felírása során utaltam arra, hogy a modell átviteli függvénye felfogható az öt felépítő elemek átviteli függvényének kapcsolásaként. Kétféle kapcsolást különböztethetünk meg, elemek soros és párhuzamos kapcsolását.

A párhuzamosan kapcsolt elemek eredő átviteli függvénye egyenlő az átviteli függvények összegével. Soros kapcsolás esetén az eredő átviteli függvény reciproka egyenlő az egyes elemek átviteli függvényeinek reciprokának összegével:

$$Z_{e_{\text{párhuzamos}}}(s) = Z_1(s) + Z_2(s) \text{ és} \quad (40)$$

$$\frac{1}{Z_{e_{\text{soros}}}(s)} = \frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} \rightarrow Z_{e_{\text{soros}}}(s) = \frac{Z_1(s) \cdot Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}. \quad (41)$$

A módszer analóg a mechanikában alkalmazott rugókapcsolással, vagy a villamos technikában az admittancia hálózatok módszerével.

Az átviteli függvény átrendezésével könnyen megkaphatjuk az operátoros konstitúciós egyenletet, amit $\mathcal{L}^{-1}$ transzformálva megkaphatjuk a modellt leíró differenciálegyenletet.

Mielőtt a három és négyelemű modellekre térünk, lássuk be a módszert az egyszerű *Maxwell*-testre, ami egy *Hooke*-test és egy *Newton*-test soros kapcsolása

$$Z_M(s) = \frac{Z_H(s) \cdot Z_N(s)}{Z_H(s) + Z_N(s)} = \frac{E \cdot \eta \cdot s}{E + \eta \cdot s} = \frac{\eta \cdot s}{1 + \frac{\eta}{E} \cdot s} := \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)}. \quad (42)$$

A 4.2.2. pontban a differenciálegyenlet alapján felírt átviteli függvény megegyezik az ezzel a módszerrel felírt egyenlettel. Keresztbe szorozva az egyenlőséget megkapjuk a konstitúciós egyenlet operátoros alakját, majd visszatranszformálva az időtartománybeli egyenletet:

$$\sigma(s) + \frac{\eta}{E} \cdot \sigma \cdot s = \varepsilon \cdot \eta \cdot s \text{ és} \quad (43)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon}. \quad (44)$$

Az átviteli függvény és konstitúciós egyenlet egymásból kifejezése ezen az egyszerű példán láthatóan mindkét irányból járható út, azonban ne felejtjük el, hogy bonyolultabb modellek esetén a differenciálegyenlet felírása sokkal nehezebbé válik.

4.4.1. Háromelemű standard solid I. modell egyenlete

A modell egy *Kelvin*-test és egy elasztikus *Hooke* test soros kapcsolása. Ez alapján az eredő átviteli függvény felírható a már említett módon:

$$Z_e(s) = \frac{Z_K \cdot Z_H}{Z_K + Z_H} = \frac{E_1(E_2 + \eta \cdot s)}{E_1 + E_2 + \eta \cdot s} = \frac{E_1 E_2 + \eta E_1 \cdot s}{E_1 + E_2 + \eta \cdot s} = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)}, \quad (45)$$

amiből a konstitúciós egyenlet operátor és időtartománybeli alakja számítható:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \sigma \cdot s = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon \cdot s \quad (46)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}. \quad (47)$$

4.4.2. Általános Kelvin modell felírása négy elemmel

A modellt két *Kelvin*-testek soros kapcsolásaként írjuk fel, az eredő átviteli függvénye:

$$Z_e(s) = \frac{Z_{K1} \cdot Z_{K2}}{Z_{K1} + Z_{K2}} = \frac{(E_1 + \eta_1 \cdot s) \cdot (E_2 + \eta_2 \cdot s)}{E_1 + \eta_1 \cdot s + E_2 + \eta_2 \cdot s} = \frac{E_1 E_2 + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2}{E_1 + E_2 + (\eta_1 + \eta_2) \cdot s}. \quad (48)$$

Felhasználva, hogy $Z_e(s) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, felírhatjuk a már bemutatott módon az operátoros és időtartománybeli konstitúciós egyenletet:

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 + E_2} \sigma \cdot s = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 + E_2} \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 + E_2} \varepsilon \cdot s^2, \quad (49)$$

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 + E_2} \ddot{\varepsilon}. \quad (50)$$

4.4.3. Általános Maxwell modell felírása négy elemmel

A modellt alkossa két párhuzamosan kapcsolt *Maxwell*-test, az átviteli függvény ekkor:

$$Z_e(s) = Z_{M1} + Z_{M2} = \frac{\eta_1 \cdot s}{1 + \frac{\eta_1}{E_1} \cdot s} + \frac{\eta_2 \cdot s}{1 + \frac{\eta_2}{E_2} \cdot s} = \frac{(\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2 (E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \cdot s^2}{1 + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 E_2} \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \cdot s^2} = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} \quad (51)$$

Felírva ez alapján a konstitúciós egyenletet a szokásos formában:

$$\sigma + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 E_2} \sigma \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \sigma \cdot s^2 = (\eta_1 + \eta_2) \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2 (E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \varepsilon \cdot s^2 \quad (52)$$

$$\sigma + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 E_2} \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2 (E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \ddot{\varepsilon}. \quad (53)$$

Az átviteli függvény ezen meghatározási formája akkor vezet célszerű, ha a teljes rendszer felbontható nagyobb ismétlődő alrendszerek kapcsolására. A formális egyenlet-átalakítások megkönnyítésére bonyolult struktúra esetén célszerű szimbolikus matematikai szoftvert alkalmazni.

A következő bemutatandó módszer egy ennél még hatékonyabb eszközt ad a kezünkbe a rendszer leírásához.

4.5. Konstitúciós egyenletek felírása a rendszermátrix segítségével

Ebben a pontban bemutatom, hogy írható fel egy tetszőleges rendszer konstitúciós egyenlete a viszkozitási és rugalmassági modulusokból képezett mátrixok segítségével. A feladat analóg a lineáris lengőrendszerek rendszermátrixának meghatározási módjával.

A differenciálegyenlet felírásához most az átviteli függvény inverzének operátoros alakját fogjuk felhasználni, ennek kiszámítási módja eltérő az előzően bemutatott módszertől. A megoldáshoz keressük az Γ -val és Ψ -vel jelölt rugalmassági modulusokhoz és viszkozitási tényezőkhöz tartozó mátrixokat. A mátrixok a modell alapján írhatók fel, az abban szereplő független elmozdulások segítségével. Γ és Ψ kvadratikus $n \times n$ méretű mátrixok, ahol n a rendszer szabadsági foka.

A modellek felírásakor úgy tekintjük, hogy az egyik szabad végéhez a koordináta-rendszerhez rögzített ε_0 elmozdulása tartozik, a másik vég koordinátáját pedig célszerűen a mátrixok (n,n) eleméhez tartozó elmozdulásnak választjuk meg, ugyanis itt kapja a modell a gerjesztést.

Első lépésben meghatározzuk a modell alapján Γ és Ψ mátrixokat, majd ebből képezzük a modell rendszermátrixát a következő alakban:

$$\mathbf{Z}(s) = s \cdot \Psi + \Gamma. \quad (54)$$

A $\mathbf{Z}(s)$ rendszermátrix inverze az ún. átviteli mátrix, jelölése $\mathbf{H}(s)$. Mivel a rendszermátrix elemei s függvényei, azért a rendszermátrix inverzét formális módon képezzük. Az inverz mátrix formális meghatározása során a *MATLAB Symbolic Math Toolbox*-nak függvényeit használtam fel.

Ha a modell szabad végének elmozdulását a mátrixok (n,n) eleméhez vettük fel, akkor az átviteli mátrix (n,n) eleme megegyezik a modell átviteli függvényének inverzével:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s), \quad (55)$$

$$H_{n,n}(s) = Z^{-1}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{\sigma(s)}. \quad (56)$$

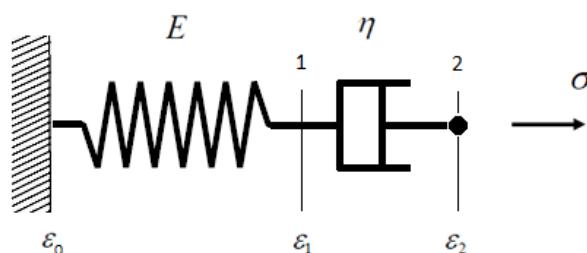
A reológiai modelleknél használt átviteli függvény meghatározásakor a mechanikai analógia reciprokával dolgoztam [6], a komplex rugalmassági modulus könnyebb meghatározása, és a további számítások egyszerűbbé tétele miatt. Az átviteli mátrix alapján adódó mechanikaival analóg átviteli függvény így a reciproka az általam használatnak. Konzekvensen továbbra is a reológiai modellek átviteli függvényét használom, nem a mechanikai analógiából következő alakot.

A módszer lépéseit és szemléltetését a kettő, három és négyelemű modelleken mutatom be; a négy elemet tartalmazó általános Maxwell modell esetén az invertálandó rendszermátrix 3×3 méretű, a többi esetben 2×2 , amik így könnyen ellenőrizhetők kézzel is.

Hooke-test, *Newton*-test és *Kelvin*-test esetén a modellek szabadsági foka 1, ezért a mátrix egyenlet helyett egyszerű skaláregyenletet írhatunk fel, ezért ennek felírásától eltekintek.

4.5.1. Egyszerű Maxwell modell

Tekintsük a 9. ábrán látható elrendezést.



9. ábra Egyszerű Maxwell modell és az elmozdulások

Legyen a modell rögzített végén ε_0 elmozdulás 0, a rugó után ε_1 és a modell végpontján a csillapító elem után ε_2 az elmozdulás. A rendszer szabadsági foka 2, tehát egy 2*2 méretű rendszermátrix felírása a cél. A rugalmassági modulusok Γ mátrixának felírásakor a rugózó elemeket, míg a viszkozitási tényezők Ψ mátrixának felírásakor a csillapításokat vesszük figyelembe.

Azon elemek, amik az ε_0 és ε_1 között találhatók, jelen esetben egyetlen rugó, a mátrixok (1,1) elemébe kerülnek pozitív előjellel, azok az elemek, amik az ε_1 és ε_2 között találhatók, a mátrixok (2,2) elemébe kerülnek pozitív előjellel. A vonatkoztatási rendszerrel, ε_0 -val, közvetlenül kapcsolatban álló elemek tisztán a főátlóba kerülnek pozitív előjellel, míg azon elemek, amik nem kapcsolódnak közvetlenül a vonatkoztatási rendszerhez a főátlóba pozitív előjellel kerülnek az összekötött pontoknak megfelelő helyre, és ezen kívül a főátlóba került elemek metszéspontjaiba negatív előjellel. Lássuk ezt a fent bemutatott Maxwell modellen:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \eta & -\eta \\ -\eta & \eta \end{bmatrix}. \quad (57)$$

A rugó a vonatkoztatási rendszerhez és az 1 ponthoz kapcsolódik ezért a főátló első helyén jelenik meg, a csillapítás pedig az 1 és 2 pontokat köti össze, így a főátlóban pozitív előjellel szerepel mindkét helyen, az elemek találkozási pontjában pedig negatív előjellel.

Képezzük ebből a rendszermátrixot a már említett $Z = \Psi \cdot s + \Gamma$ módon:

$$Z(s) = \begin{bmatrix} E + \eta \cdot s & -\eta \cdot s \\ -\eta \cdot s & \eta \cdot s \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Ha invertáljuk a rendszermátrixot, akkor megkapjuk az átviteli mátrixot:

$$H(s) = Z^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{1}{E} \\ \frac{1}{E} & \frac{E+\eta \cdot s}{E\eta \cdot s} \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Az invertáláshoz a MATLAB *Symbolic Math Toolbox*-át használok fel, amiben a `sym(...)` metódus segítségével definiálhatjuk a mátrixunkat és az `inv(...)` metódus segítségével invertálhatjuk azokat. A feladathoz megoldásához tartozó MATLAB kód megtalálható a függelékben.

Mivel a modell végpontjának, és a gerjesztés helyének a 2. pontot választottuk, ezért a mátrix (2,2) eleme szolgáltatja a modell átviteli függvényének inverzét:

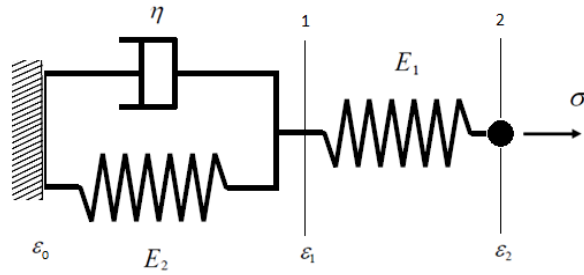
$$Z^{-1}(s) = \frac{E+\eta \cdot s}{E\eta \cdot s} = \frac{\varepsilon(s)}{\sigma(s)}. \quad (60)$$

Ezt átrendezve megkapjuk a modell konstitúciós egyenletét operátor és időtartományban. Az így kapott differenciálegyenlet megegyezik a korábban felírt egyenlettel

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \sigma \cdot s = \eta \varepsilon \cdot s, \quad (61)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon}. \quad (62)$$

4.5.2. Standard solid I. modell



10. ábra Standard solid I. modell

A modell szintén két szabadsági fokkal rendelkezik, ehhez 2 független elmozdulás tartozik. A 2. pontot és ezzel ε_2 -t célszerűen továbbra is a modell gerjesztett végével társítjuk. Az előbb bemutatott minta szerint írunk fel a Γ és Ψ mátrixokat:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E_2 + E_1 & -E_1 \\ -E_1 & E_1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

A rendszermátrix ekkor

$$\mathbf{Z}(s) = \Psi \cdot s + \Gamma = \begin{bmatrix} E_2 + E_1 + \eta \cdot s & -E_1 \\ -E_1 & E_1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

alakú, ennek inverzeként megkapjuk az átviteli mátrixot:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 + \eta \cdot s} & \frac{1}{E_1 + \eta \cdot s} \\ \frac{1}{E_1 + \eta \cdot s} & \frac{E_1 + E_2 + \eta \cdot s}{E_1 E_2 + E_1 \eta \cdot s} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Ekkor $H_{2,2}(s) = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ alapján felírható a konstitúciós egyenlet:

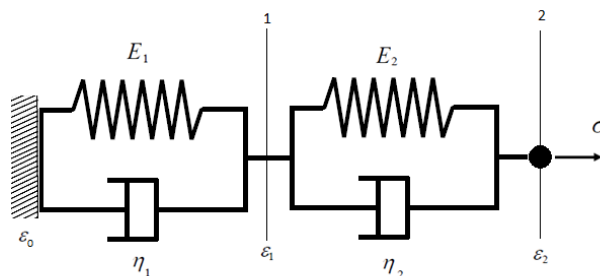
$$\frac{E_1 + E_2 + \eta \cdot s}{E_1 E_2 + E_1 \eta \cdot s} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (66)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \sigma \cdot s = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon \cdot s \quad (67)$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}. \quad (68)$$

A további háromelemű solid és fluid modellek egyenleteinek levezetését a függelék F2 pontja tartalmazza.

4.5.3. Általános Kelvin modell négy elemmel



11. ábra Általános Kelvin modell

A rugalmassági modulusz és a viszkozitási tényezők mátrixa:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E_1 + E_2 & -E_2 \\ -E_2 & E_2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 & -\eta_2 \\ -\eta_2 & \eta_2 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

A rendszermátrix ekkor:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{\Psi} \cdot s + \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E_1 + E_2 + (\eta_1 + \eta_2) \cdot s & -E_2 - \eta_2 \cdot s \\ -E_2 - \eta_2 \cdot s & E_2 + \eta_2 \cdot s \end{bmatrix}. \quad (70)$$

A rendszermátrix inverzeként megkapjuk az átviteli mátrixot:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 + \eta_1 \cdot s} & \frac{1}{E_1 + \eta_1 \cdot s} \\ \frac{1}{E_1 + \eta_1 \cdot s} & \frac{E_1 + E_2 + (\eta_1 + \eta_2) \cdot s}{E_1 E_2 + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} \end{bmatrix}. \quad (71)$$

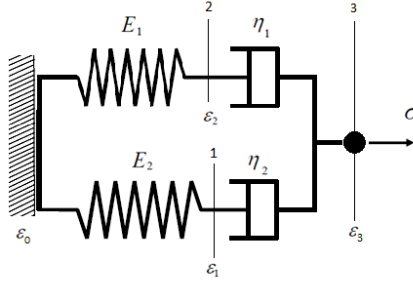
Ekkor $H_{2,2}(s) = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ alapján felírható a konstitúciós egyenlet:

$$\frac{E_1 + E_2 + (\eta_1 + \eta_2) \cdot s}{E_1 E_2 + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (72)$$

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 + E_2} \sigma \cdot s = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 + E_2} \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 + E_2} \varepsilon \cdot s^2 \quad (73)$$

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 + E_2} \ddot{\varepsilon}. \quad (74)$$

4.5.4. Általános Maxwell modell négy elemmel



12. ábra Általános Maxwell modell

A modell ez esetben 3 szabadsági fokkal rendelkezik, ez azt jelenti, hogy a rugalmassági modulusz és a viszkozitás mátrixa 3*3 méretű lesz. A modell gerjesztett vége a 3. pont.

A rugalmassági modulusz és a viszkozitási tényezők mátrixa:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \eta_2 & 0 & -\eta_2 \\ 0 & \eta_1 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & -\eta_1 & \eta_1 + \eta_2 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

A rendszermátrix ekkor:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{\Psi} \cdot s + \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E_2 + \eta_2 \cdot s & 0 & -\eta_2 \cdot s \\ 0 & E_1 + \eta_1 \cdot s & -\eta_1 \cdot s \\ -\eta_2 \cdot s & -\eta_1 \cdot s & (\eta_1 + \eta_2) \cdot s \end{bmatrix}. \quad (76)$$

A rendszermátrix inverzeként megkapjuk az átviteli mátrixot, melynek a (3,3) eleme:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) \quad (77)$$

$$H_{3,3}(s) = \frac{E_1 E_2 + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2}{E_1 E_2 (\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \eta_1 \eta_2 (E_1 + E_2) \cdot s^2} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (78)$$

$$\sigma + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 E_2} \sigma \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \sigma \cdot s^2 = (\eta_1 + \eta_2) \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2 \cdot (E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \varepsilon \cdot s^2 \quad (79)$$

$$\sigma + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_1 E_2} \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2 \cdot (E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \ddot{\varepsilon}. \quad (80)$$

5. Szerkezet típusok csoportosítása és a csillapítási mechanizmus vizsgálata

Az eddigi eredményeket alapul véve, felírható egy általános differenciál egyenletet tetszőlegesen sok elemet tartalmazó reológiai modellre:

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + p_3\ddot{\sigma} + p_4\sigma^{IV} + \dots = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + q_3\ddot{\varepsilon} + q_4\varepsilon^{IV} + \dots \quad (81)$$

A konstitúciós egyenletben a p_0 paramétert a szakirodalom szerint általában 1-nek választják meg [5],[6]. A q_0 paraméter megléte határozza meg a modell fluid vagy solid viselkedését. Fluid modellek esetében a $q_0 = 0$, ugyanis a rendszert fluiddá tevő tényezők (például egy sorosan kapcsolt csillapító elem — vagy fluid alrendszerek párhuzamos kapcsolata, amik szintén soros csillapító elemeket tartalmaznak) megkövetelik, hogy ε nulladik deriváltja nem szerepelhet az egyenletben. Ez az átviteli függvények már ismertetett kapcsolási módszerével egyszerűen belátható például egy tetszőleges rendszer és egy csillapítás soros kapcsolására:

$$Z(s) = \frac{Z_s(s) \cdot Z_{csillapítás}(s)}{Z_s(s) + Z_{csillapítás}(s)} = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (82)$$

Ahol $Z_s(s)$ a tetszőleges eredeti rendszer átviteli függvénye. A konstitúciós egyenletté való átalakításkor ε együtthatói a számlálóból származnak, amiben $Z_{csillapítás}(s) = \eta s$ szorzás miatt nem szerepelhet ε nulladik deriváltja, ez operátortartományban kifejezve azt jelenti, nem létezik olyan ε tag, aminek az együtthatója s^0 lenne.

Az differenciálegyenletet általános alakja a következő formában is megadható:

$$P\sigma = Q\varepsilon, \text{ ahol}$$

$$P = \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}; \quad Q = \sum_{j=0}^m q_j \frac{\partial^j}{\partial t^j}. \quad (83)$$

Mivel a dolgozatban frekvencia és operátor tartományban vizsgálom a modelleket, ezért áttérek a következő alakra:

$$P = \sum_{i=0}^n p_i s^i; \quad Q = \sum_{j=0}^m q_j s^j. \quad (84)$$

P és Q fokszáma nem független egymástól, ennek vizsgálatához visszatérek az átviteli függvényhez:

$$Z = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{P}. \quad (85)$$

5.1. Szerkezettípusok csoportosítása

P-ben és Q-ban szereplő paraméterek száma a modell elemszámával van kapcsolatban, a paraméterek száma egyenlő a modell elemeinek száma +1. Legyen a számláló fokszáma m és a nevezőé n. Fennáll az a kapcsolat, hogy $m=n$ vagy $m=n+1$, ez könnyen belátható a már ismertetett modellek alapján. Ha ezt összevetjük a korábbi állítással, miszerint q_0 megléte solid típusú modellt, a hiánya pedig fluid típusút eredményez, akkor az 1. táblázat szerinti csoportosításra juthatunk.

1. táblázat Solid és fluid modellek összefüggése az elemek számával

	solid típusú modell		fluid típusú modell	
páros elemszám	$m=n+1$	$q_0 \neq 0$	$m=n$	$q_0=0$
páratlan elemszám	$m=n$	$q_0 \neq 0$	$m=n+1$	$q_0=0$

Lássuk, mit jelent ez frekvenciatartományban. Frekvenciatartománybeli vizsgálatot célszerűen $\omega=0$ és $\omega=\infty$ esetekre nézünk.

2. táblázat A modellek vizsgálata frekvenciatartományban

Osztály	$Z(j\omega)$		q_0	m	Modell
	$j\omega \rightarrow 0$	$j\omega \rightarrow \infty$			
S1	véges	véges	$q_0 \neq 0$	$m = n$	Solid 1
S2	véges	∞	$q_0 \neq 0$	$m = n + 1$	Solid 2
F1	0	véges	$q_0 = 0$	$m = n$	Fluid 1
F2	0	∞	$q_0 = 0$	$m = n + 1$	Fluid 2

A fenti táblázat a szakirodalomból [6] ismert csoportosítást mutatja. Az értelmezéséhez fontos megismerni néhány törvényszerűséget. Ilyen a csillapítások viselkedése $\omega=\infty$ esetén, ekkor ugyanis egy csillapító elemet merev szerkezetként kell modelleznünk, aminek nincs deformációja, ugyanis a csillapítása arányos a gerjesztés sebességével, így a frekvenciával. Tetszőleges modell építéskor két és egyelemű alapmodellekből építkezhetünk, *Kelvin* és *Maxwell* testekből, illetve *Hooke* és *Newton* testekből.

A szemléletes bemutatás érdekében feltételezzük, hogy 2 elemű alapmodellekből építjük az alaprendszerünket általános *Maxwell* vagy *Kelvin* modellként. Egy általános *Kelvin* modell, kiegészítő rugó és csillapítás nélkül, páros elemszámú solid jellegű modell, ami azt jelenti, hogy ekkor a számláló fokszáma eggyel nagyobb a nevezőénél, ez azt jelenti, hogy:

$$\lim_{j\omega \rightarrow \infty} Z(j\omega) = \frac{Q}{P} = \frac{\infty}{p_i} = \infty, \quad (86)$$

ahol p_i a nevező legmagasabb deriváltjának együtthatója, tehát konstans. Ezt összevetve a fenti kijelentéssel, hogy a csillapítás „merevvé” válik a nagy frekvenciákon, alátámasztja a csoportosítás eredményét. Ilyenkor az összekapcsolt *Kelvin* testekben lévő párhuzamosan kapcsolt csillapítás merevvé teszi a szerkezetet, nem deformálódik.

Ha ezt megvizsgáljuk egy általános *Maxwell* modellre, ahol a páros elemszám és a fluid jelleg miatt:

$$\lim_{j\omega \rightarrow \infty} Z(j\omega) = \frac{Q}{P} = \frac{q_i}{p_i} = C, \quad (87)$$

ahol C véges konstans érték. Ez azt jelenti, hogy a modellünk nagy frekvencián párhuzamos rugók eredőjének felel meg, ami visszavezethető egy egyszerű *Hooke* testre, tehát teljesen rugalmassá válik. Azonban egy ilyen páros elemet tartalmazó modell tulajdonságát alapvetően megváltoztathatjuk egyelemes modell rendszerhez kapcsolásával. A már említett általános *Maxwell* modellbe kapcsoljunk egy párhuzamosan kapcsolt csillapítást, ezzel páratlan elemszámú fluid modellt kapunk, ami a táblázatnak megfelelően teljesen merev testként viselkedik, ha $\omega=\infty$, tehát nincs deformációja.

5.2. Csillapítási mechanizmusok

A csillapítási mechanizmusok vizsgálata során a fent csoportokba sorolt modell típusokat vizsgálom tovább, ehhez vezessük be a veszteségi tényező fogalmát, ami a veszteségi modulusz és a tárolási modulusz hányadosa, j a komplex egységvektor jele:

$$tg\delta(j\omega) = \frac{E''(j\omega)}{E'(j\omega)} = \frac{Im(Z(j\omega))}{Re(Z(j\omega))}. \quad (88)$$

A *Lehr*-féle csillapítás ekkor felírható

$$\xi(j\omega) = 1/2 \cdot tg\delta(j\omega) \quad (89)$$

alakban, amiből a számunkra szükséges modális csillapítást kifejezhetjük:

$$d(j\omega) = \omega \cdot \xi(\omega) = 1/2 \cdot \omega \cdot tg\delta(j\omega). \quad (90)$$

A $tg\delta(j\omega)$ meghatározásához a $Z(j\omega)$ átviteli függvény nevezőjéből ki kell küszöbölnünk a komplex mennyiségeket, amihez az egyenletet be kell szorozni a nevező konjugáltjával. Írjuk fel az átviteli függvényt az előbbi alakkal frekvenciatartományban:

$$Z(j\omega) = \frac{\sum_{r=0}^m q_r(j\omega)^r}{\sum_{k=0}^n p_k(j\omega)^k} = \frac{a_0 + \sum_{r=1}^m a_r j^r \omega^r}{1 + \sum_{k=1}^n b_k j^k \omega^k}. \quad (91)$$

A továbbiakban a és b paraméterek használatára térek át, ezeket úgy választottam meg, hogy a régi (p, q) paraméterekkel kifejezve p_0 , azaz a σ nulladik deriváltjához tartozó paraméter legyen 1. Az a_0 paramétert pedig q_0 és p_0 paraméter hányadosa, továbbra is ez határozza meg a modell fluid vagy solid jellegét. Ekkor a nevezőből a komplex mennyiséget kiküszöbölve:

$$Z(j\omega) = \frac{a_0 + \sum_{r=1}^m a_r j^r \omega^r}{1 + \sum_{k=1}^n b_k j^k \omega^k} \cdot \frac{1 + \sum_{k=1}^n b_k j^{-k} \omega^k}{1 + \sum_{k=1}^n b_k j^{-k} \omega^k}. \quad (92)$$

Mivel j^k konjugáltja j^{-k} -nak felel meg, ezért az egyenlet

$$Z(j\omega) = \frac{a_0 + \sum_{r=1}^m a_r j^r \omega^r + a_0 \sum_{k=1}^n b_k j^{-k} \omega^k + \sum_{r=1}^m a_r j^r \omega^r \cdot \sum_{k=1}^n b_k j^{-k} \omega^k}{(1 + \sum_{k=1}^n b_k j^k \omega^k) \cdot (1 + \sum_{k=1}^n b_k j^{-k} \omega^k)} \quad (93)$$

alakú, ahol számlálóban ω kitevője 0-tól $m+n$ -ig fut, míg a j kitevője $-n$ -tól m -ig.

A $tg\delta(j\omega)$ képzésekor a számláló tartalmazza az átviteli függvény számlálójában szereplő ω páratlan kitevőit, és a nevező az átviteli függvény számlálójának páros kitevőit, ugyanis az egyes ω -hoz tartozó komplex mennyiség kitevője is páros vagy páratlan. Emiatt j páratlan kitevőjéhez ω páratlan kitevői tartoznak, ezek képzetesek, és j páros kitevőjéhez ω páros kitevői tartoznak, ezek valósak. Felírható a $Z(j\omega)$ a következő olyan

$$Z(j\omega) = \frac{A_0 + A_1 j\omega + A_2 \omega^2 + A_3 j\omega^3 + \dots + A_{m+n} j^{m-n} \omega^{m+n}}{(1 + \sum_{k=1}^n b_k j^k \omega^k) \cdot (1 + \sum_{k=1}^n b_k j^{-k} \omega^k)} \quad (94)$$

alakban, ahol a nevező valós. Ekkor meg kell különböztetnünk azokat az eseteket, ahol $Z(j\omega)$ nevezőjének és számlálójának fokszáma azonos volt, mert ekkor a számláló ω -hoz tartozó legnagyobb kitevője $m + n = 2n$ páros, és az ehhez tartozó j kitevője $m - n$ is páros, tehát valós mennyiség.

Továbbá meg kell különböztetni 2 esetet az A_0 alapján, ami $A_0 = a_0 = \frac{q_0}{p_0}$, ez határozza meg a solid vagy fluid jellegét a modellnek. Így tehát a 3. táblázatban látható csoportosításra jutunk.

3. táblázat Csoportosítás solid és fluid modellek nevezőjének és számlálójának fokszáma alapján

	$m=n$	$m=n+1$
Solid modell	$(m+n)$ és $(m-n)$ páros, $A_0 \neq 0$	$(m+n)$ és $(m-n)$ páratlan, $A_0 \neq 0$
Fluid modell	$(m+n)$ és $(m-n)$ páros, $A_0 = 0$	$(m+n)$ és $(m-n)$ páratlan, $A_0 = 0$

Ez alapján 4 esetet kell meghatároznunk a csillapítási mechanizmusok vizsgálatára. A csoportosítás felírható $tg\delta(j\omega)$ alakjára, ahol

$$tg\delta(j\omega) = \frac{Im(Z(j\omega))}{Re(Z(j\omega))}. \quad (95)$$

4. táblázat $tg\delta$ modelleknek megfelelő alakja m és n alapján

	$tg\delta(j\omega) =$	
S	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{m+n-1}\omega^{m+n-1}}{A_0 + A_2\omega^2 + \dots + A_{m+n}\omega^{m+n}}$	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{m+n}\omega^{m+n}}{A_0 + A_2\omega^2 + \dots + A_{m+n-1}\omega^{m+n-1}}$
F	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{m+n-1}\omega^{m+n-1}}{A_2\omega^2 + \dots + A_{m+n}\omega^{m+n}}$	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{m+n}\omega^{m+n}}{A_2\omega^2 + \dots + A_{m+n-1}\omega^{m+n-1}}$
	ha $m=n$	ha $m=n+1$

Ha felhasználjuk, hogy $m=n$ vagy $m=n+1$, és ezt behelyettesítjük az ω kitevőibe, akkor felírható az előbb táblázat a következő módon.

5. táblázat $tg\delta$ modellek csoportosítása

	$tg\delta(j\omega) =$	
S	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n-1}}{A_0 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n+1}}{A_0 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$
F	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n-1}}{A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$	$\frac{A_1\omega + A_3\omega^3 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n+1}}{A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$
	ha $m=n$	ha $m=n+1$

Ez alapján készíthetünk az átviteli függvény frekvenciatartománybeli viselkedéséhez hasonló összefoglalást a $tg\delta(j\omega)$ vizsgálatához is; fontos, hogy fluid modellek esetén egyszerűsíthetünk ω -val.

6. táblázat $tg\delta$ frekvenciatartománybeli vizsgálata

Osztály	$tg\delta(j\omega)$		A_0	m	Modell
	$j\omega = 0$	$j\omega \rightarrow \infty$			
S1	0	0	$A_0 \neq 0$	$m = n$	Solid 1
S2	0	∞	$A_0 \neq 0$	$m = n + 1$	Solid 2
F1	véges	0	$A_0 = 0$	$m = n$	Fluid 1
F2	véges	∞	$A_0 = 0$	$m = n + 1$	Fluid 2

Vizsgáljuk még meg továbbá a modális csillapítások alakulását is. Ez a már bemutatott képlet alapján számítható:

$$d(j\omega) = \omega \cdot \xi(\omega) = \frac{1}{2} \omega \cdot tg\delta(j\omega). \quad (96)$$

A fenti táblázatokat felhasználva felírhatjuk tehát a 7. táblázat összefüggéseit.

7. táblázat A modellek csoportosítása a $d(j\omega)$ függvények alakja alapján

	$d(j\omega) =$	
S	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n}}{A_0 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n+2}}{A_0 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$
F	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n}}{A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n+2}}{A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$
	ha $m=n$ (1. típus)	ha $m=n+1$ (2. típus)

Fluid rendszerek esetén ismét végezzük el az egyszerűsítést, azonban most ω^2 -vel, majd tekintsük a 8. táblázatban szereplő frekvenciatartománybeli vizsgálatot.

8. táblázat $d(j\omega)$ frekvenciatartománybeli vizsgálata

Osztály	$d(j\omega)$		A_0	m	Modell
	$j\omega \rightarrow 0$	$j\omega \rightarrow \infty$			
S1	0	véges	$A_0 \neq 0$	$m = n$	Solid 1
S2	0	∞	$A_0 \neq 0$	$m = n + 1$	Solid 2
F1	véges	véges	$A_0 = 0$	$m = n$	Fluid 1
F2	véges	∞	$A_0 = 0$	$m = n + 1$	Fluid 2

5.3. Csillapítási mechanizmus vizsgálatának bemutatása a standard solid I. modell példáján

A standard solid I. modell példáján keresztül mutatom be a fejezetben elért eredményeket. A modell egyenleteinek levezetése megtalálható a reológiai modelleket vizsgáló fejezetben, így most a modell

$$\sigma + b_1 \dot{\sigma} = a_0 \varepsilon + a_1 \dot{\varepsilon} \quad (97)$$

differenciálegyenlete a kiindulási alap ahol:

$$b_1 = \mathcal{G} = \frac{\eta}{E_1 + E_2}; \quad a_0 = E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}; \quad a_1 = \eta = \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2}. \quad (98)$$

Mielőtt felírnánk a rendszer átviteli függvényét az 5.1 fejezet táblázatai alapján tegyük meg az elvárt feltevéseket:

- a modell páratlan elemszámú és solid jellegű, ami azt jelenti, hogy
- $m=n$ a foksámokra nézve és $q_0 \neq 0$.
- A 2. táblázat alapján feltételezzük, hogy a modell átviteli függvénye a következő módon viselkedik:

9. táblázat Standard solid I. modell átviteli függvényének frekvenciatartománybeli vizsgálata

Osztály	$Z(j\omega)$		q_0	m	Modell
	$j\omega = 0$	$j\omega \rightarrow \infty$			
S1	véges	véges	$q_0 \neq 0$	$m = n$	Solid 1

Ezek után lássuk a konstitúciós egyenlet alapján számítható átviteli függvényt frekvenciatartományban, vessük ezt össze a feltételezésekkel:

$$Z(j\omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{a_0 + a_1 j\omega}{1 + b_1 j\omega} = \frac{a_0 + a_1 j\omega}{1 + b_1 j\omega} * \frac{1 - b_1 j\omega}{1 - b_1 j\omega} = \frac{a_0 + a_1 j\omega - a_0 b_1 j\omega + a_1 b_1 \omega^2}{1 + b_1^2 \omega^2}. \quad (99)$$

Az átviteli függvény az elvárásoknak megfelelően viselkedik $j\omega = 0$ és $j\omega \rightarrow \infty$ esetén is. A nevezőből a komplex mennyiségeket kiküszöbölt alakra hoztam, hogy tovább számolhassunk vele a modális csillapítás meghatározásához, de először az 5.2 fejezet táblázatai alapján tegyünk feltételezéseket a $tg\delta(j\omega)$ alakulására is.

10. táblázat Standard solid I. modell $tg\delta$ frekvenciatartománybeli vizsgálata

Osztály	$tg\delta(j\omega)$		A_0	m	Modell
	$j\omega = 0$	$j\omega \rightarrow \infty$			
S1	0	0	$A_0 \neq 0$	$m = n$	Solid 1

Felírva a $tg\delta(j\omega)$ függvényt valóban a táblázat alapján várt értékekre jutunk:

$$tg\delta(j\omega) = \frac{Im(Z(j\omega))}{Re(Z(j\omega))} = \frac{(a_1 - a_0 b_1)\omega}{a_0 + a_1 b_1 \omega^2}; \quad a_0 = A_0. \quad (100)$$

Végül tegyük meg a megfelelő feltételezéseket a modális csillapítás frekvenciatartománybeli viselkedésére is, ez a 8. táblázat alapján:

11. táblázat Standard solid I. modell modális csillapításának frekvenciatartománybeli vizsgálata

Osztály	$d(j\omega)$		A_0	m	Modell
	$j\omega = 0$	$j\omega \rightarrow \infty$			
S1	0	véges	$A_0 \neq 0$	$m = n$	Solid 1

A modális csillapításra vonatkozó tényleges egyenlet pedig a következő:

$$d(j\omega) = \omega * 1/2 tg\delta(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{(a_1 - a_0 b_1)\omega^2}{a_0 + a_1 b_1 \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{(a_1 - a_0 b_1)}{a_0} \omega^2}{1 + \frac{a_1 b_1}{a_0} \omega^2} = \frac{A\omega^2}{1 + B\omega^2}. \quad (101)$$

Láthatjuk, a modell valóban a táblázatok elvárásai szerint működött, a módszer pedig kiterjeszthető bonyolultabb modellek irányába is úgy, hogy minden lehetséges modell besorolható az elemi 4 csoportba.

A gyakorlatban a feladat inverz, ugyanis egy $d(j\omega) = f(\omega)$ alakú csillapítási függvényt keresünk, de $d(j\omega)$ mérési adatsor alapján következtethetünk a generáló függvény alakjára és regressziót végezhetünk a megfelelő fokszám kiválasztása után a táblázatok segítségével. Ezt a vizsgálat a következő fejezet.

6. Lineáris regresszió két polinom hányadosával

A regressziós feladatoknál adott egy pontsorozat, mely lehet síkbeli, térbeli, vagy egy időfüggvénynek a mintavételezett értékei, és keressük a pontsorozatra legjobban illeszkedő analitikus függvény paramétereit.

A legkisebb négyzetek módszerén alapuló regresszió a közelítő függvény paramétereit úgy határozza meg, hogy képezve az adott mérési pontoknak az analitikus függvénytől való távolságát, a távolságok négyzetének összege minimális legyen.

Lineáris regresszióknak azokat a feladatokat nevezzük, melyeknél a legkisebb négyzetes funkcionál minimumfeladata inhomogén lineáris egyenletrendszerre vezet. A megoldást ekkor egy lépésben kapjuk meg, az egyenletrendszer együtthatómátrixának invertálásával.

6.1. Polinomok hányadosával történő regresszió

Vizsgáljuk most azt a regressziót, amikor a regresszáló függvény két polinom hányadosa [8],[9]

$$y(x) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}. \quad (102)$$

Átrendezve az egyenlőséget

$$y \sum_{j=0}^m b_j x^j = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad (103)$$

az r-edik mérési pontra felírható, hogy

$$y_r \sum_{j=0}^m b_j x_r^j = \sum_{i=0}^n a_i x_r^i, \quad (104)$$

$$y_r \sum_{j=0}^m b_j x_r^j - \sum_{i=0}^n a_i x_r^i = 0. \quad (105)$$

A fenti összefüggés N számú homogén egyenletet jelent a keresett b_j , a_i paraméterekre. A homogén lineáris egyenletrendszer megoldása azonban nem egyértelmű. Egyértelmű megoldást akkor kapunk, ha a regressziós függvényt módosítjuk, b_0 -val elosztjuk a számlálót és nevezőt is:

$$y = \frac{\sum_{i=0}^n a'_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^m b'_j x^j} = \frac{a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots + a'_n x^n}{1 + b'_1 x + b'_2 x^2 + \dots + b'_m x^m}. \quad (106)$$

Ezt felírva az r-edik mérési pontra:

$$y_r + \sum_{j=1}^m b'_j x_r^j y_r = \sum_{i=0}^n a'_i x_r^i \quad (107)$$

$$\sum_{i=0}^n a'_i x_r^i - \sum_{j=1}^m b'_j x_r^j y_r = y_r \quad (108)$$

Mátrixos alakban ez a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^i & \dots & x_1^n & | & -x_1 y_1 & -x_1^2 y_1 & \dots & -x_1^j y_1 & \dots & -x_1^m y_1 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^i & \dots & x_2^n & | & -x_2 y_2 & -x_2^2 y_2 & \dots & -x_2^j y_2 & \dots & -x_2^m y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_r & \dots & x_r^i & \dots & x_r^n & | & -x_r y_r & -x_r^2 y_r & \dots & -x_r^j y_r & \dots & -x_r^m y_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^i & \dots & x_N^n & | & -x_N y_N & -x_N^2 y_N & \dots & -x_N^j y_N & \dots & -x_N^m y_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a'_n \\ - \\ b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_j \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer átírható a következő alakra, ahol a $\mathbf{p}$ paramétervektort keressük

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{w}. \quad (109)$$

Az egyenletrendszer megoldásához nem kvadratikus mátrix inverzének kiszámítására van szükség, ami a *Moore–Penrose*-féle általánosított inverz mátrix, más néven a pszeudoinverz segítségével oldható meg. Ekkor az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{w}. \quad (110)$$

Azonban következő pontban részletesen bemutatom ennek a módszernek a korlátait, amelyek felmerültek az esettanulmányok kiértékelése során.

Ha a mérési pontok száma N egyenlő a keresett paraméterek $(n+1)$ számával, akkor a $\mathbf{Q}$ együtthatómátrix kvadratikus és invertálható. Ekkor a meghatározott együtthatók egy interpolációs polinomot adnak. Mérési adatok kiértékelésekor azonban kerüljük az interpolációs polinomok alkalmazását, mert durva hibákhoz vezet.

6.2. A meghatározott csillapítási modelleknek megfelelő regresszió

Valós anyagmodellek esetén meghatároztam a csillapítási függvények alakját 4 típusba sorolva azokat. Regressziót ezeknek megfelelően végezhetünk, ez egy speciális esete a fent tárgyalt polinomok hányadosával történő regressziónak.

12. táblázat $d(j\omega)$ modellek csoportosítása

	$d(j\omega) =$	
S	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 \omega^2 + A_3 \omega^4 + \dots + A_{2n-1} \omega^{2n}}{A_0 + A_2 \omega^2 + \dots + A_{2n} \omega^{2n}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 \omega^2 + A_3 \omega^4 + \dots + A_{2n+1} \omega^{2n+2}}{A_0 + A_2 \omega^2 + \dots + A_{2n} \omega^{2n}}$
F	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 \omega^2 + A_3 \omega^4 + \dots + A_{2n-1} \omega^{2n}}{A_2 \omega^2 + A_4 \omega^4 + \dots + A_{2n} \omega^{2n}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 \omega^2 + A_3 \omega^4 + \dots + A_{2n+1} \omega^{2n+2}}{A_2 \omega^2 + \dots + A_{2n} \omega^{2n}}$
	1. típus ($m=n$)	2. típus ($m=n+1$)

A 12. táblázat nem alkalmas egyértelmű regresszióra, ezért rögzítem az A_0 , illetve, ahol nem szerepel a nevezőben, ott az A_2 paraméter értékét 1-nek. Továbbá fluid esetben a számlálót és nevezőt is egyszerűsíttem ω^2 -tel, ezzel a 13. táblázatnak megfelelő csoportosításra jutunk, ami már közvetlen kiindulási alapot ad a regresszióhoz.

13. táblázat $d(j\omega)$ csillapítási modellek csoportosítása regresszióhoz

	$d(j\omega) =$	
S	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n}}{1 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n+2}}{1 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}}$
F	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n-2}}{1 + A_4\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n-2}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n}}{1 + A_4\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n-2}}$
	1. típus ($m=n$)	2. típus ($m=n+1$)

Az így megkülönböztetett négy esetre regressziós algoritmusokat készítettem MATLAB segítségével, ahol bemeneti paraméterként adhatjuk meg a kívánt tetszőleges fokszámot. A függvények kódjai megtalálhatók a függelék F3 részében.

A függvényeket rendre solid 1 és solid 2 valamint fluid 1 és fluid 2 típusnak neveztem el. A solid modellek az origóból indulnak, szemben a fluid modellekkel, amik nem nulla helyen metszik az y tengelyt. Ahogy már megállapítottuk a paraméterek számának a mérési pontok számához való közeledtével a regressziós függvény instabillá válik, alkalmatlan a generáló függvény meghatározására és a későbbi extrapolációra egyaránt. Az algoritmusok alkalmazását az esettanulmányok fejezetben mutatom be.

7. Módusok csoportosítása

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy a modális csillapítások regressziójára képezhetők-e móduscsoportok, és a móduscsoportonként meghatározott regressziós függvény felhasználásával előállítható-e általános proporcionális $\mathbf{C}$ csillapítási mátrix [10]. A már ismertetett $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{E}$ (9) és $\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \langle \Omega_i^2 \rangle = \Omega^2$ (11) összefüggések felhasználásával képezzük az $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ mátrix spektrálfelbontását:

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \Phi \Omega^2 \Phi^{-1} \quad (111)$$

ami n számú diád összege. Képezzünk m számú móduscsoportot és ennek megfelelően partícionáljuk Φ -t oszlopai szerint, a Ω spektrálmátrixot diagonál elemei szerint Φ^{-1} -et pedig sorai szerint, a következő módon:

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_p \quad \dots \quad \Phi_m] \quad \Phi^{-1} := \Psi^T = \begin{bmatrix} \Psi_1^T \\ \Psi_2^T \\ \vdots \\ \Psi_p^T \\ \vdots \\ \Psi_m^T \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & & & & \\ & \Omega_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \Omega_p & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \Omega_m \end{bmatrix} \quad (112)$$

ahol Φ_p a modálmátrix p -edik csoportba tartozó oszlopvektorai, Ψ_p^T a modálmátrix inverzének p -edik csoportba tartozó sorvektorai, Ω_p pedig a spektrálmátrix p -edik csoportba tartozó elemei. A móduscsoportokkal kifejezve $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ spektrálfelbontása:

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \sum_{p=1}^m \Phi_p \Omega_p^2 \Psi_p^T \quad (113)$$

Igazolható, hogy a (115) felhasználásával móduscsoportonként definiált $f_p(\cdot)$ függvényekkel generált

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \cdot \sum_{p=1}^m f_p(\Phi_p \Omega_p^2 \Psi_p^T) \quad (114)$$

csillapítási mátrix kielégíti a $\mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$ felcserélhetőségi relációt, tehát az így képzett csillapítási mátrixú rendszer klasszikus normál módusokkal rendelkezik. Az $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{E}$ alapján a fenti kifejezés Ψ_p^T tényezőjére $\Psi_p^T = \Phi_p^T \cdot \mathbf{M}$, így a móduscsoportonként definiált generálófüggvénnyel a klasszikus normál módusokat eredményező csillapítási mátrix kifejezése:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \cdot \sum_{p=1}^m \Phi_p \cdot f_p(\Omega_p^2) \cdot \Phi_p^T \cdot \mathbf{M} \quad (115)$$

Amennyiben a regressziós függvény nem globális, de a csillapítatlan rendszer lengésképei alapján a módusok csoportosítása biztonsággal megtörténhet, és móduscsoportonként regressziós függvényt alkalmazunk, akkor következő eljárás és felhasználási lehetőségek adódnak:

1. Kísérleti modális elemzést végzünk, és a vizsgált frekvenciatartományban meghatározzuk a rendszer sajátfrekvenciáit és csillapítási értékeit.
2. A sajátfrekvencia-csillapítás értékpárokat diagramban ábrázoljuk, a diagram alapján móduscsoportokat képezünk. (Későbbiekben megvizsgálandó, hogy a módusok csoportosítása megtörténhet-e automatikusan a lengésképek alapján.)
3. Móduscsoportonként a pontsorozatokra regressziós függvényeket illesztünk.
4. Móduscsoportonként a regressziós függvényeket extrapolálva a vizsgált frekvenciatartományon kívül eső (*outband*) módusokra, a FEM programok számára méréseken alapuló csillapítási adatok lesznek megadhatók.
5. Az általánosított proporcionális csillapítási mátrix a (115) összefüggés alkalmazásával explicit alakban is felírható.

8. Esettanulmányok

Az esettanulmányok során kevés mérési pont áll rendelkezésemre, ezért a megbízhatóbb regresszió érdekében igyekszem minimalizálni a meghatározandó paramétereket. A könnyebb átláthatóság érdekében a 14. táblázatban gyűjtöttem össze a modelltípusokhoz tartozó regressziós függvények analitikus alakját különböző fokszámokra, az általános alakból meghatározva, továbbá feltüntettem az így meghatározandó paraméterek számát is.

14. táblázat A gyakorlatban regresszióra használt függvények analitikus alakjai

Modelltípus	Fokszám (n)	Paraméterek száma	Analitikus függvényalak
Solid 1	1	2	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2}{1 + A_2\omega^2}$
Solid 1	2	4	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4}{1 + A_2\omega^2 + A_4\omega^4}$
Solid 2	0	1	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot A_1\omega^2$
Solid 2	1	3	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4}{1 + A_2\omega^2}$
Solid 2	2	5	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + A_5\omega^6}{1 + A_2\omega^2 + A_4\omega^4}$
Fluid 1	2	3	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2}{1 + A_4\omega^2}$
Fluid 1	3	5	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2 + A_5\omega^4}{1 + A_4\omega^2 + A_6\omega^4}$
Fluid 2	1	2	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot (A_1 + A_3\omega^2)$
Fluid 2	2	4	$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2 + A_5\omega^4}{1 + A_4\omega^2}$

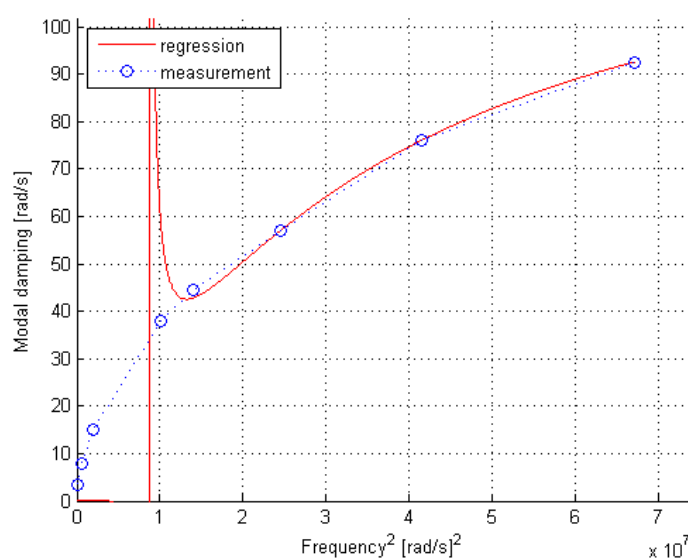
Az esettanulmányok során a könnyebb átláthatóság érdekében az adott ábrák alatt feltüntettem a hozzájuk tartozó regresszió táblázatnak megfelelő függvényalakját. Az esettanulmányok során különböző szerkezet típusokat vizsgálom meg, amiken az elkészített lineáris modell alkalmazható; majd olyan szerkezeteket is, melyekre a módszer jelenleg nem alkalmas. Ezek modellezésére további kutatások és fejlesztések szükségesek.

8.1. A regresszió numerikus stabilitása

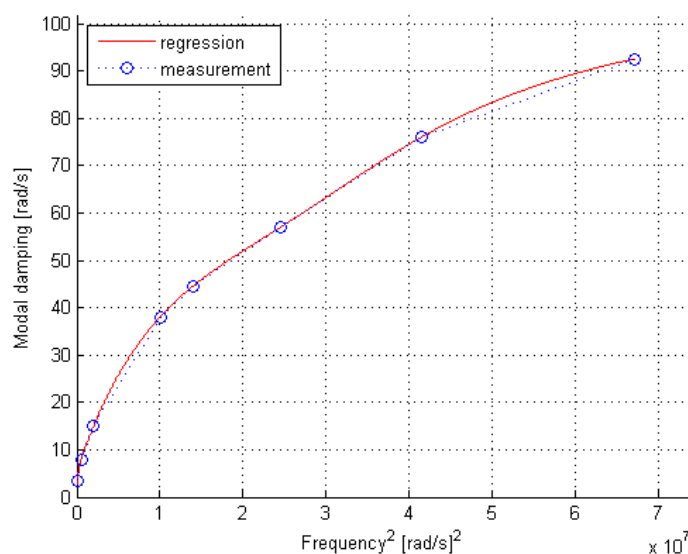
A megoldás során első közelítésben a már említett Moore–Penrose-féle általánosított inverz mátrixot a MATLAB beépített „pinv(…)” függvényével számítottam ki, azonban ez súlyos hibákra vezetett. (109) alapján meghatározott $\mathbf{Q}$ mátrix a valóságban sokszor rosszul kondicionált, ezért ha invertálható is, közel eshet a szinguláris mátrixhoz.

Esetenként előfordult akár több tíz nagyságrend különbség is a mátrix egyes elemei között, így a numerikusan történő invertálás instabillá vált, durva hibákhoz vezetett.

A probléma megoldására alkalmas eszköz lehet a *Cholesky*-faktorizáció, vagy az ortogonális-faktorizációt. Ezek ismerete mélyebb matematikai tudást igényel, és további kutatások szükségesek részemről a feldolgozásukhoz. Az esettanulmányok vizsgálata során szükséges volt a probléma áthidalása, amit Dr. Gyurkovics Éva segítségével köszönhetően sikerült megoldanom. Ortogonális-faktorizációt alkalmaztam lineáris egyenletrendszer megoldása során, amit a MATLAB „\” parancsával implementáltam, ez felhasználás szempontjából kielégítő megoldást nyújtott az esettanulmányok során. A módszerek alapos megértése, és a regresszió pontosságának javítása részét képezi a jövőbeni feladatoknak. A következő két ábrán a numerikus inverz számítással és az ortogonális-faktorizációval végzett interpoláció közötti különbséget mutatom be, interpolációs esetben az illesztett görbének minden mérési ponton át kell haladnia.



13. ábra Interpolációs görbe, az egyenletrendszer megoldása numerikus mátrix inverz számítással



14. ábra Interpolációs görbe, az egyenletrendszer megoldása ortogonális faktorizációval

8.2. Heritage Court Tower épület vizsgálata

A vizsgált toronyház [13] a Brit-kolumbiai Vancouver belvárosában található. Beton szerkezetű 15 emeletes épület földalatti mélygarázzsal. A méréseket *Output-Only* módszerrel végezték, ilyenkor a gerjesztést a környezeti rezgések szolgáltatják, és csak a kimenet mérhető. Az ilyen mérések kevésbé adnak pontos eredményt, mint az ismert gerjesztéssel történők. Az egyszerűség kedvéért az *Output-Only* mérések során Gauss-eloszlású nulla átlagértékű fehérzajt feltételeznek a rendszer gerjesztéseként [14].



15. ábra A Heritage Court Tower épülete

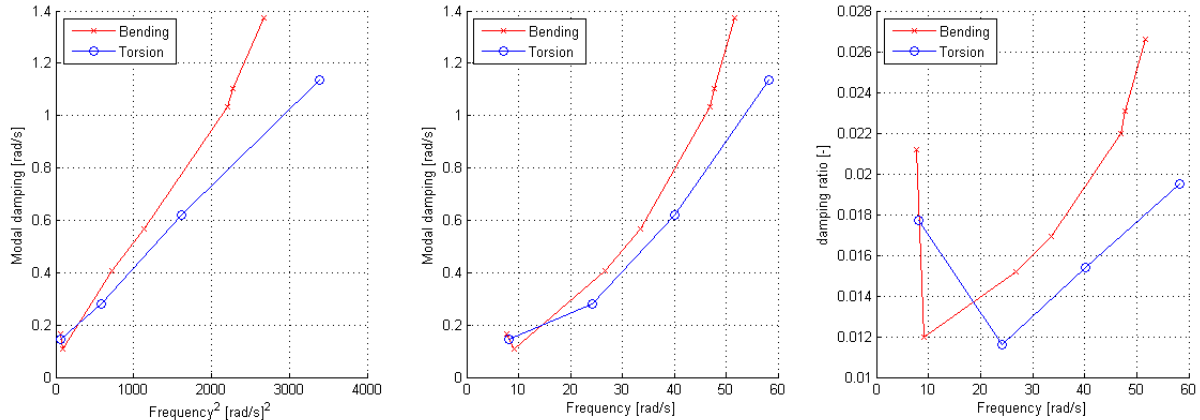
8.2.1. A mérési eredmények és a regresszió

A mérési eredményeket a 15. táblázat foglalja össze. A hajlító és torziós lengéskép típusok megkülönböztetését a publikációban nem végezték el, ezért a közzétett lengésképek alapján határoztam meg. A lengésképeket a függelék F4 részében mutatom be. A mérések kiértékelését két eltérő módszerrel, *FDD* (*Frequency Domain Decomposition*) és *SSI* (*Stochastic Subspace Identification*) eljárással határozták meg, mivel a kiértékelések eredményei néhol jelentős eltéréseket mutatnak, ezért csak az *SSI* és az *FDD* eredményi mindenképpen összevetésre szorulnak. Az *FDD* frekvenciatartománybeli, az *SSI* pedig időtartománybeli módszer, de ezek pontos elemzése nem képezi részét a dolgozatnak.

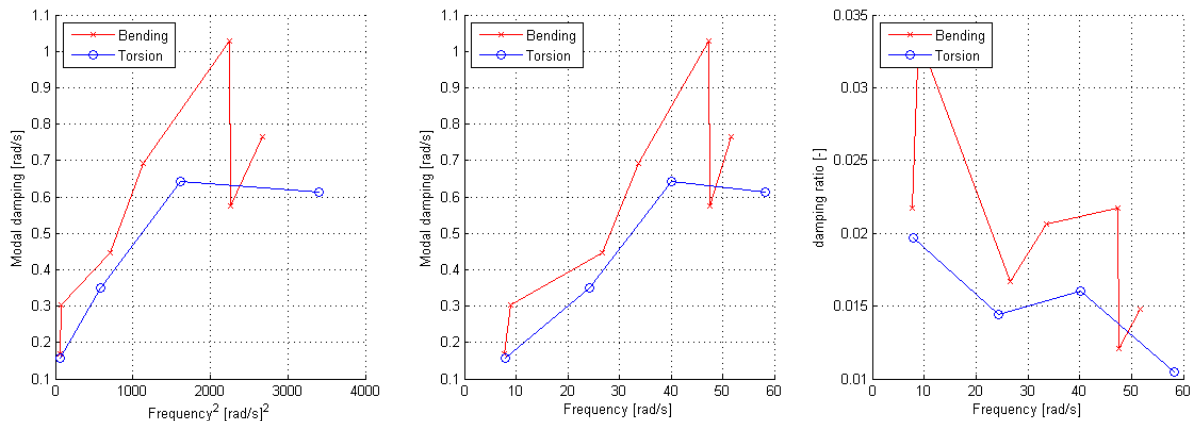
15. táblázat A Heritage Court Tower mérési adatai

Lengéskép	f_{SSI} (Hz)	ξ_{SSI} (%)	f_{FDD} (Hz)	ξ_{FDD} (%)
Hajlító	1,23	2,12	1,23	2,17
Torziós	1,29	1,77	1,27	1,97
Hajlító	1,46	1,20	1,44	3,35
Torziós	3,85	1,16	3,87	1,44
Hajlító	4,26	1,52	4,25	1,67
Hajlító	5,35	1,69	5,35	2,06
Torziós	6,39	1,54	6,40	1,60
Hajlító	7,47	2,20	7,54	2,17
Hajlító	7,59	2,31	7,57	1,21
Hajlító	8,23	2,66	8,22	1,48
Torziós	9,26	1,95	9,29	1,05

Az előző fejezet eredményeit alapul véve a regressziót elvégezhetjük móduscsoportonként. A modell solid vagy fluid jellegét az határozza meg, hogy $\omega \rightarrow 0$ esetén a modális csillapítás nulla vagy konstans értékhez tart. Először a mérési adatokat ábrázolom a 16. és 17. ábrán.



16. ábra A Heritage Court Tower mérési eredménye 3 ábrázolási módban SSI alapján



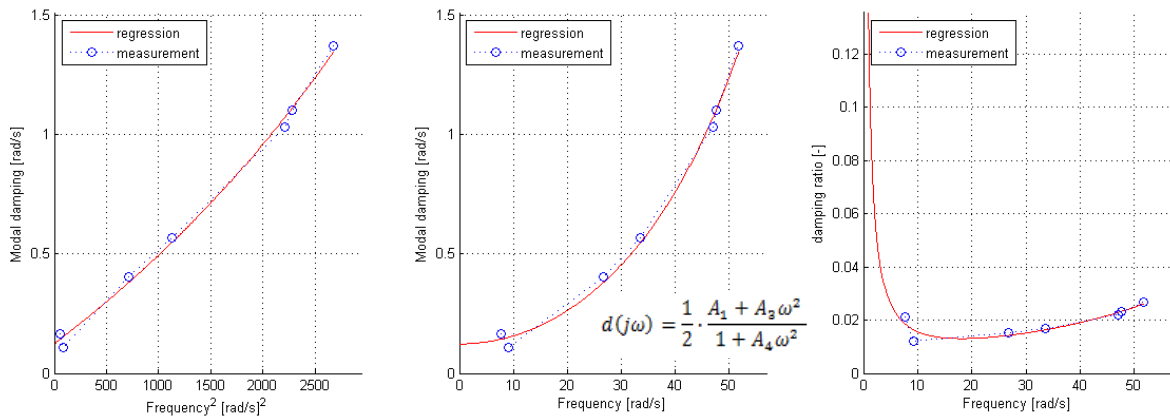
17. ábra A Heritage Court Tower mérési eredménye 3 ábrázolási módban FDD alapján

Láthatjuk, hogy az *FDD* kiértékeléssel kapott eredmény bizonyos pontokban erősen eltér az *SSI*-vel kapott eredményektől, feltételezem, hogy az *FDD* kiértékelés eredményének pontosságát valamilyen ismeretlen tényező befolyásolta. Csak az *SSI* eredményire végzek regressziót, ugyanis ez felel meg a modell elvárásainak, ahol a modális csillapítás értéke a sajátkörfrekvencia négyzetének függvényében közel lineáris jellegű.

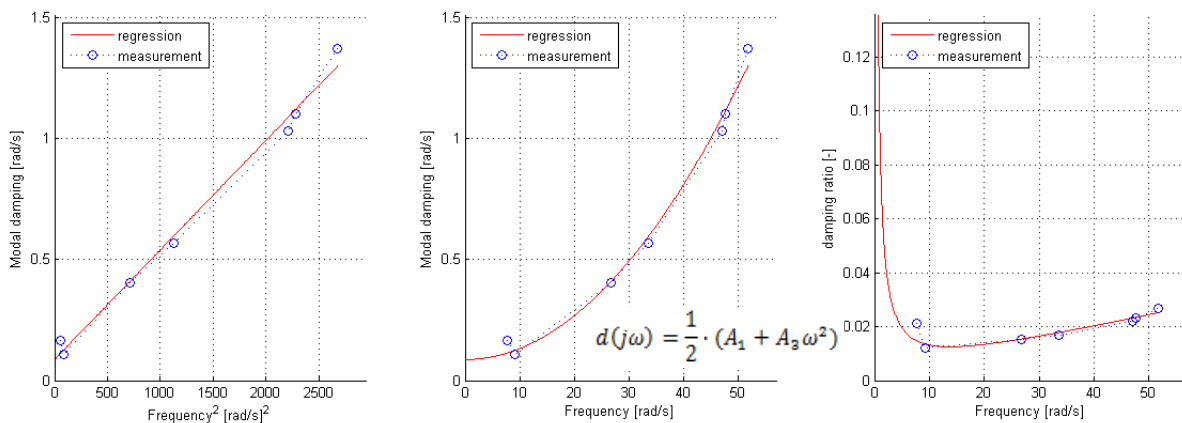
A 16. ábra alapján látható, hogy a csillapítási mechanizmus fluid jellegű, mert $\omega \rightarrow 0$ esetén a modális csillapítás egy konstans értékhez tart. A következőkben fluid 1 és fluid 2 típusú modelleknek megfelelő regressziós függvényeket illesztetek a mérési pontokra különböző fokszámok mellett, majd az ábrák után részletesen elemzem az eredményeket. A regressziót külön végzem el a torziós és hajlító lengéskép típusokra. A 6.2. fejezet alapján a regresszióra használt fluid jellegű függvények a 16. táblázatnak megfelelő általános alakban keresendők.

16. táblázat A regresszióhoz használt csillapítási függvények alakja fluid mechanizmus esetén

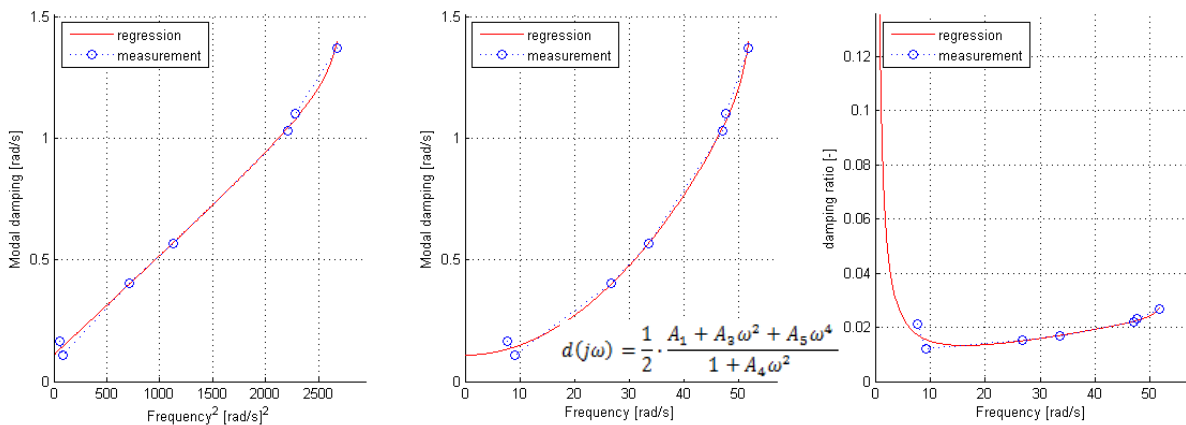
	$d(j\omega) =$	
F	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n-2}}{1 + A_4\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n-2}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n}}{1 + A_4\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n-2}}$
	fluid 1 (m=n)	fluid 2 (m=n+1)



18. ábra Fluid 1 típusú regresszió illesztése a hajlító lengéstípusokra $n=2$ esetén

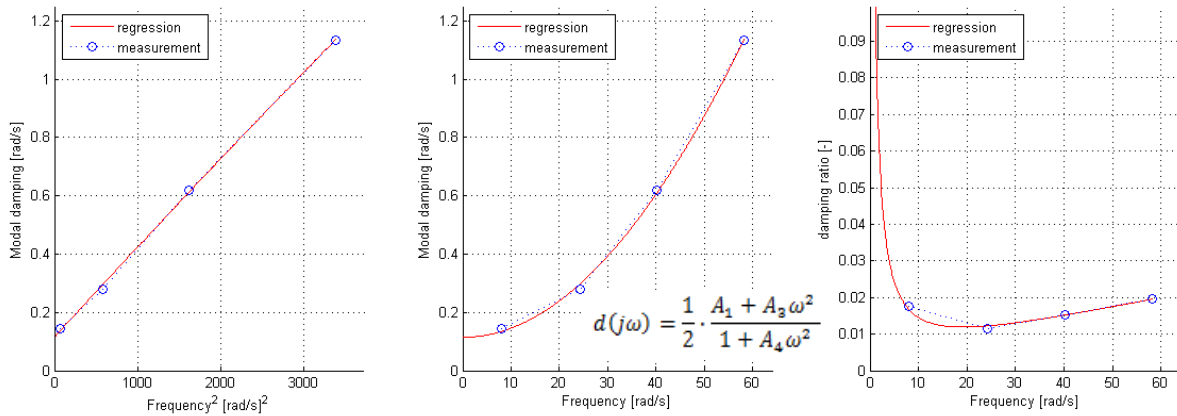


19. ábra Fluid 2 típusú regresszió illesztése a hajlító lengéstípusokra $n=1$ esetén

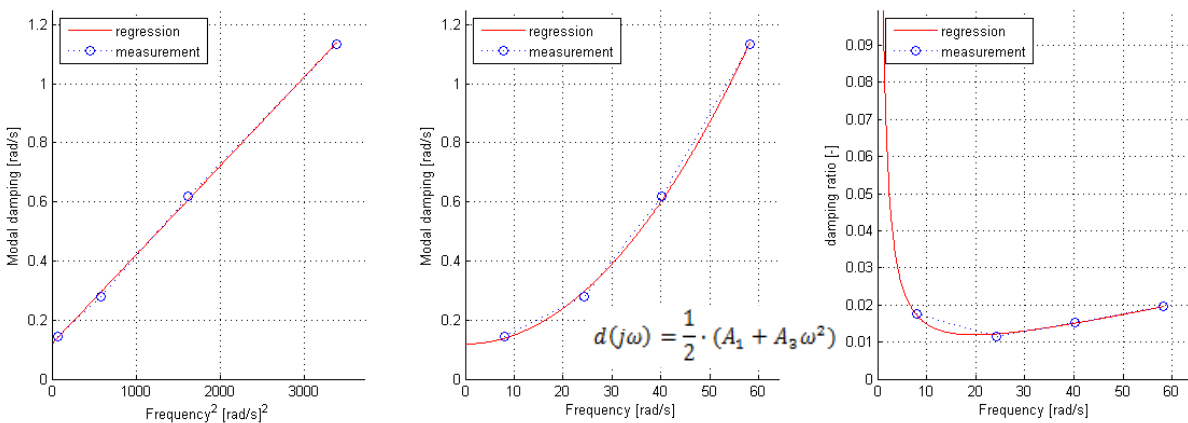


20. ábra Fluid 2 típusú regresszió illesztése a hajlító lengéstípusokra $n=2$ esetén

A fenti ábrákon látható, hogy jó eredményeket kaptunk a hajlító lengések mérési pontjaira illesztett fluid jellegű regresszióval. Az illesztések sorban haladva 3, 2 és 4 paramétert határoztak meg a 7 mérési pont alapján, ennél nagyobb fokszámmal történő regresszió nem szükséges. Fluid 2, $n=1$ esetén az ω^2 -d nézetben a regresszió elsőfokú görbét jelent, ami egyszerű összefüggésre vezet, és kellő pontossággal modellezi a szerkezet csillapítását, ez bizonyult a legalkalmasabb közelítésnek. Az $n=2$ fokszámmal végzett regresszió mind fluid 1, mind fluid 2 esetben szép eredményt hozott, azonban jelentős eltérést mutathat extrapoláció esetén, ennek részletes elemzésével az extrapolációt vizsgáló fejezetben foglalkozom.



21. ábra Fluid 1 típusú regresszió illesztése a torziós lengéstípusokra $n=2$ esetén



22. ábra Fluid 2 típusú regresszió illesztése a torziós lengéstípusokra $n=1$ esetén

Torziós lengéstípusokra mindössze 4 mérési ponttal rendelkeztem, így a szoba jöhető regressziók maximálisan fluid 1 típus esetén $n=2$ fokszerű és fluid 2 típus esetén $n=1$ fokszerű. Ennél magasabb fokszerű interpolációs görbéhez vezetne, amit kerülni kell. A fluid 2 típusú illesztés most is elsőfokú görbéhez vezet a $\omega^2 - d(j\omega)$ nézetben, ami kellően pontosan modellezi a csillapítási mechanizmust, és egyszerű megoldást kínál.

Összefoglalva a dolgozatban felállított csillapítási modellek jól szerepeltek a kiértékelések során, az $n=1$ fokszerűval történő fluid 2 típusú regresszió pedig a legalkalmasabb választásnak tűnik egyszerűsége és kellő pontossága miatt. További esettanulmányok során vizsgálom a modellek jóságát.

8.3. A Vittoria Sora híd vizsgálata

A feldolgozáshoz szükséges mérési adatok *Francesco Benedettini* és *Carmelo Gentile* publikációjából [4] származnak, a Vittoria Sora ferdekábeles híd vizsgálatáról. A publikációban végelesemes módszerrel meghatározott eredmények vizsgálatától eltekintek — a dolgozat a mérési adatokkal meghatározott adatsorokkal foglalkozik —, csak a lengéseképek ábráit használok fel a módusok csoportosításához. A híd mérési eredményeit ábrázoltam a 3. fejezetben szemléltetéshez a célszerű ábrázolási módok megválasztásakor.



23. ábra Ponte Vittoria Sora

8.3.1. A híd ismertetése

A Ponte Vittoria Sora az Oglio folyón ível át Bordolano és Quinzano között, két ívelt betonpillért tartja az útfelületet 12 acélsodrony segítségével. A ferdekábeles hidak jellemzője, hogy a függesztőkábelek közvetlenül a pilonhoz csatlakoznak tartókábel közvetítése nélkül [12].

A híd 106,5 m hosszú és 13,5 m széles, a pilonok magassága 35,65 m, tetejükön a kábelek rögzítéséhez szükséges acélszerkezettel.

8.3.2. A mérési körülmények

A mérés szintén *Output-Only* környezeti rezgésvizsgálaton alapul, tehát a híd gerjesztése nem mért, *Gauss* eloszlású fehérzajt feltételeztek. A mérés során 16 csatornás mérőrendszert és Sprengnether gyorsulásmérőket alkalmaztak, amelyek mérési tartománya 0-25 Hz. A mérőrendszer 400 Hz mintavételezési frekvencián működött, és egy aluláteresztő szűrő segítségével a 0-10 Hz tartományt vizsgálták.

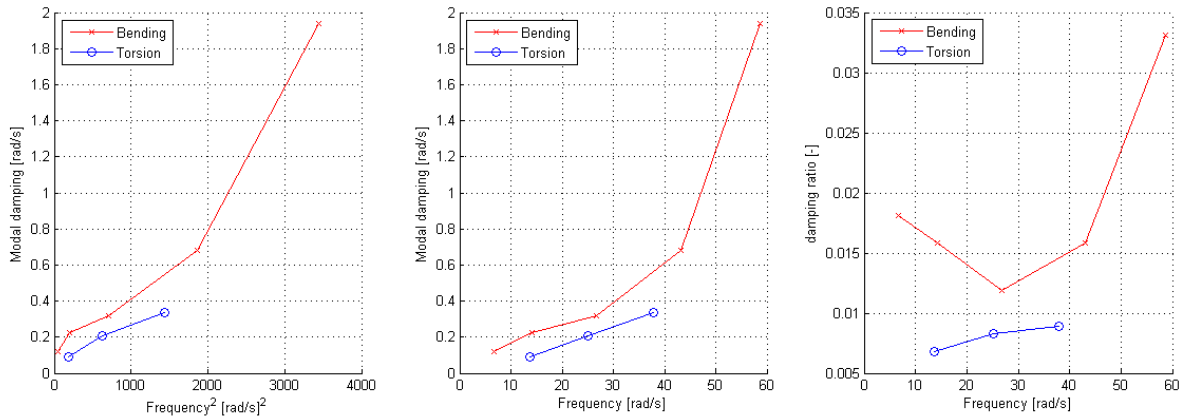
8.3.3. A mérési eredmények

A mérési eredményeket a 17. táblázatban foglaltam össze. A pilonok lengésképeihez tartozó adatokat nem vessez figyelembe, csak az úttest hajlító és torziós lengéseit, melyeket a publikáció keretein belül csoportosítottak. Az időtartománybeli mérési adatsort szintén két módszerrel dolgozták fel, *EFDD* (*Enhanced Frequency Domain Decomposition*) és *SSI* eljárással határozták meg az adatokat, ezek szintén külön vizsgálatra szorulnak az eltérések miatt.

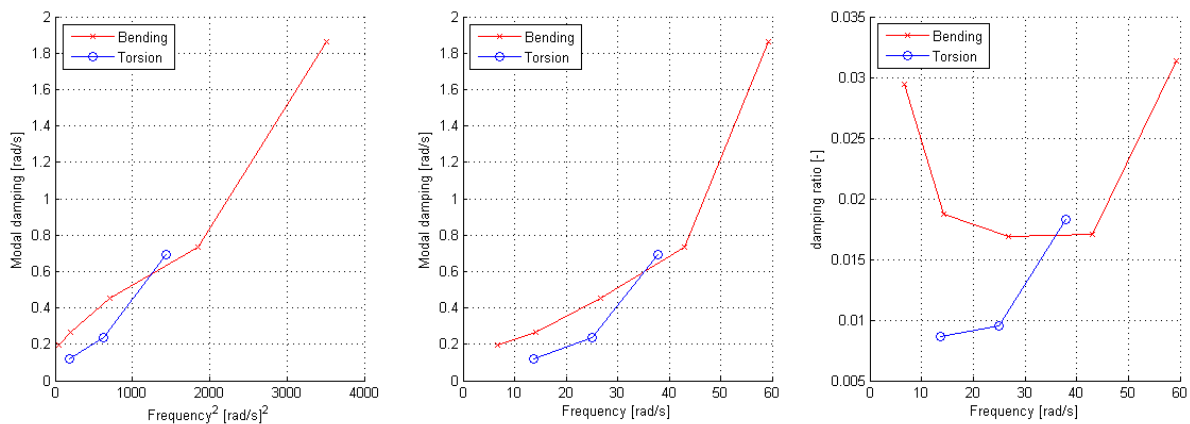
17. táblázat A Vittoria Sora híd mérési adatai

Lengéskép	f_{SSI} (Hz)	ξ_{SSI} (%)	f_{EFDD} (Hz)	ξ_{EFDD} (%)
Hajlító	1,06	1,81	1,06	2,94
Torziós	2,18	0,68	2,19	0,86
Hajlító	2,26	1,58	2,26	1,87
Torziós	3,99	0,83	3,98	0,95
Hajlító	4,25	1,19	4,25	1,69
Torziós	6,04	0,89	6,03	1,83
Hajlító	6,86	1,58	6,85	1,71
Hajlító	9,33	3,31	9,44	3,14

Az identifikáció első lépéseként a mérési adatokat ábrázolom.



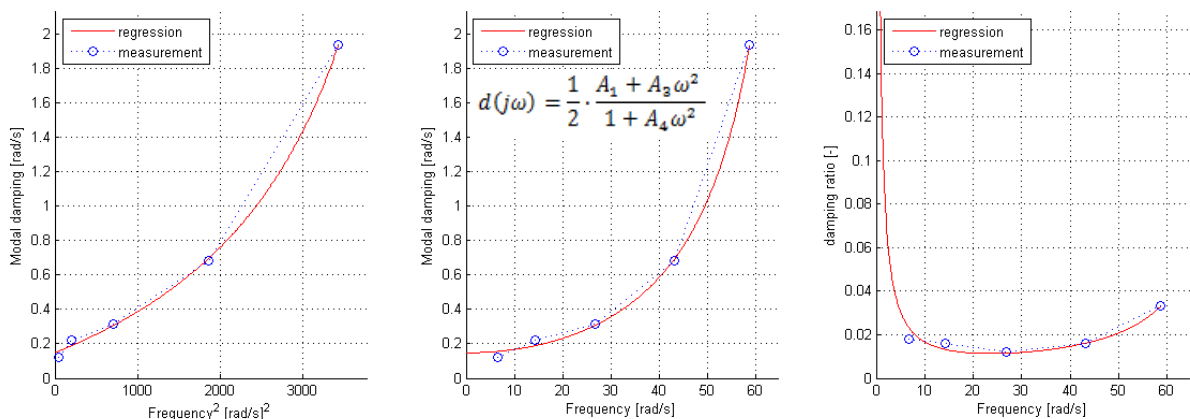
24. ábra A Vittoria Sora híd mérési eredménye 3 ábrázolási módban SSI alapján



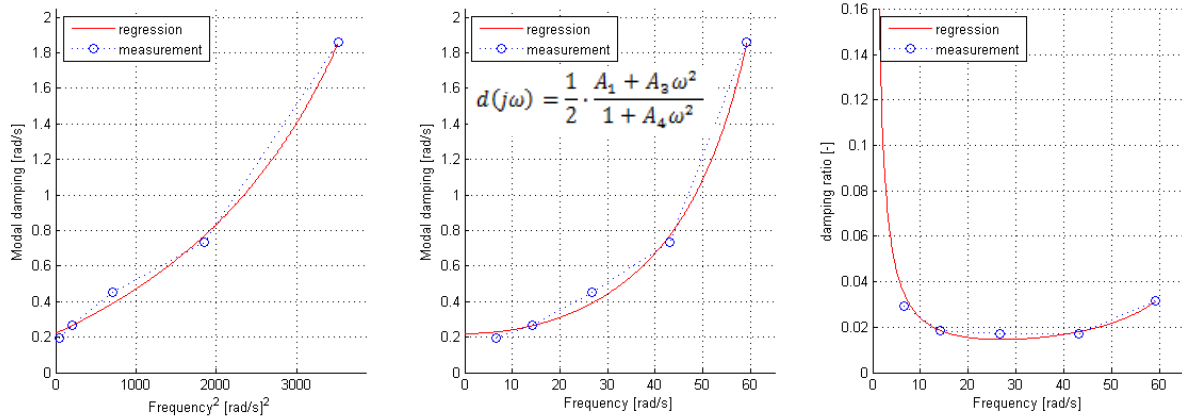
25. ábra A Vittoria Sora híd mérési eredménye 3 ábrázolási módban EFDD alapján

8.3.4. Hajlító lengésekre történő regresszió összehasonlítása SSI és EFDD esetben

A mérési eredmények alapján mindkét kiértékelési mód alkalmasnak tűnik a regresszió elvégzésére. Mivel 5 mérési pont áll a rendelkezésemre, regressziót fluid 1 esetben $n=2$ és fluid 2 esetben $n=1$ fokszámú modellel végzek, a feladat során elsősorban a két kiértékelési módszer közti eltérésekre világított rá.

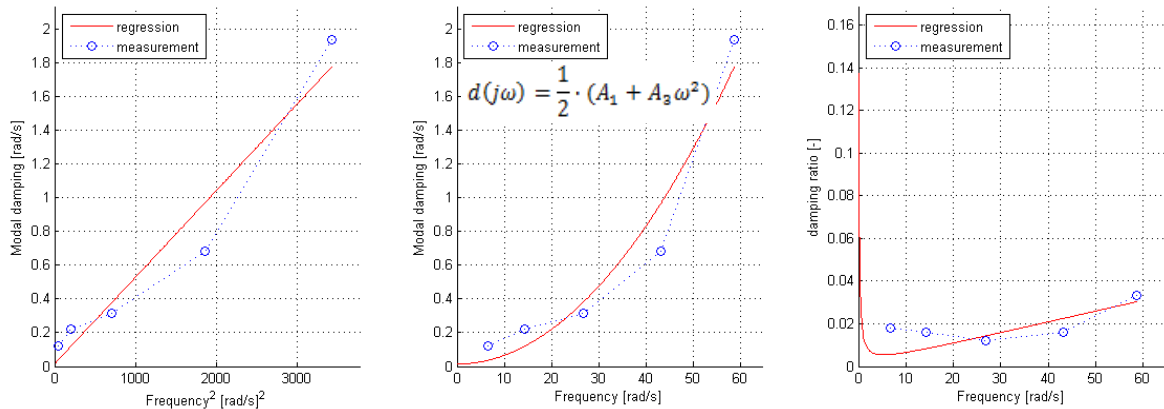


26. ábra Fluid 1 $n=2$ regresszió a hajlító lengésekre SSI esetén

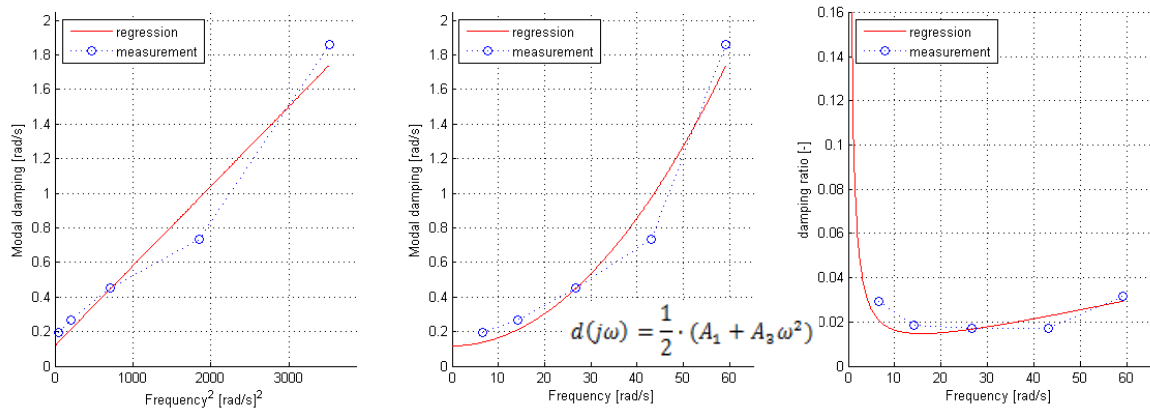


27. ábra Fluid 1 $n=2$ regresszió a hajlító lengésekre EFDD esetén

Mindkét kiértékeléssel hasonló eredményekre jutunk, nincs nagy eltérés az illesztett görbe alakjában, mindkettő jó közelítést ad, miközben 3 paramétert határoz meg 5 mérési pont alapján. Ilyen kevés pont esetén jobb választás lehet egy alacsonyabb paraméterszámú modell választása, ilyen a fluid 2 $n=1$, lássuk ezt is SSI és EFDD esetre.



28. ábra Fluid 2 $n=1$ regresszió a hajlító lengésekre SSI esetén

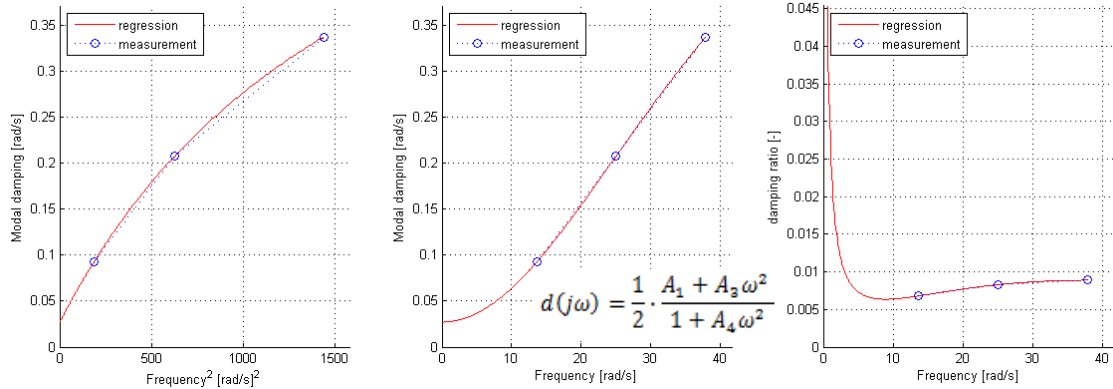


29. ábra Fluid 2 $n=1$ regresszió a hajlító lengésekre EFDD esetén

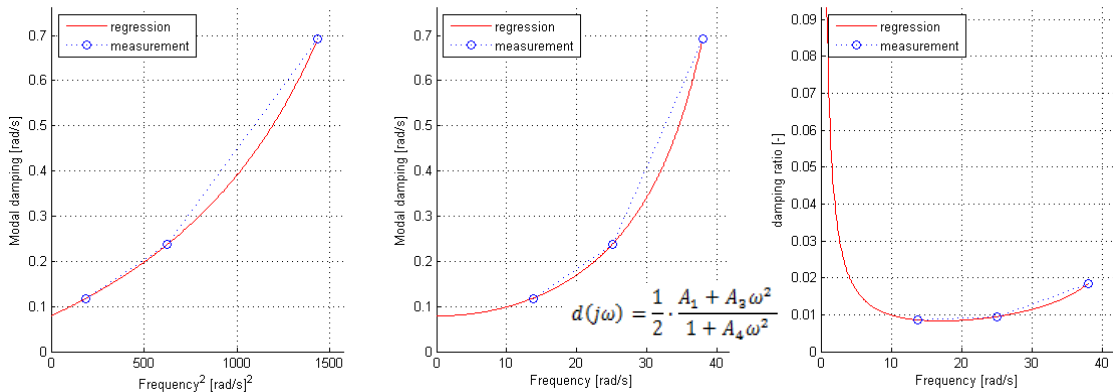
Azzal a feltételezéssel vizsgáltam a modellt, hogy az alacsonyabb paraméterszám előnyösebb, emellett a *Heritage Court Tower* példáján egyszerű és pontos modellre vezetett. Ebben az esetben a modell szignifikáns eltérést mutat a két kiértékelés eredményei között. EFDD esetén a modell jó közelítést adott, azonban az SSI eredménye nem feltétlenül jó választás a csillapítási mechanizmus közelítésére. Az eredmények alapján arra jutottam, hogy az alacsonyabb paraméterszámú modell érzékenyebb lehet a mérési adatokban fellépő perturbációkra.

8.3.5. Torziós lengésekre történő regresszió összehasonlítása SSI és EFDD esetben

Összesen 3 mérési pont áll rendelkezésre a regresszió elvégzéséhez, ezért a fluid 1 n=2 modell már interpolációs görbét eredményez három paraméterével, ami problémák forrását jelenthetné. Ennek ellenére megvizsgáltam ezeket az eseteket is.

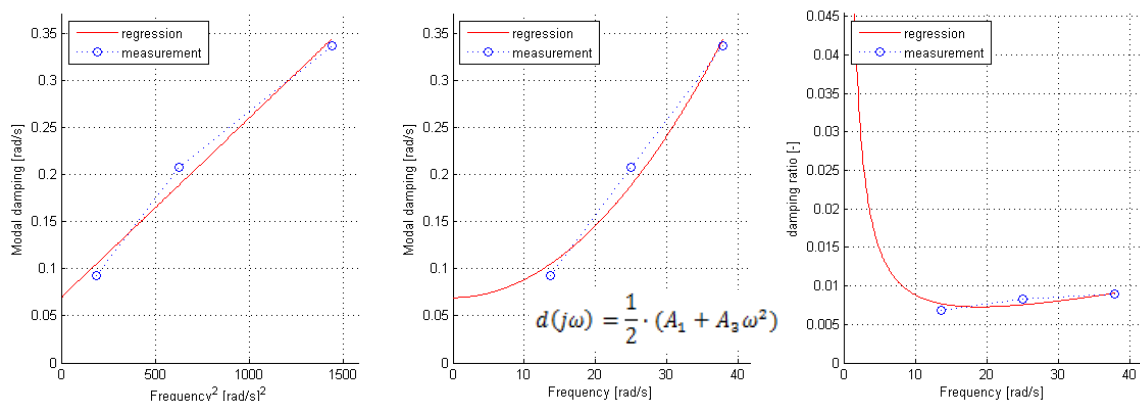


30. ábra Fluid 1 n=2 regresszió a torziós lengésekre SSI esetén

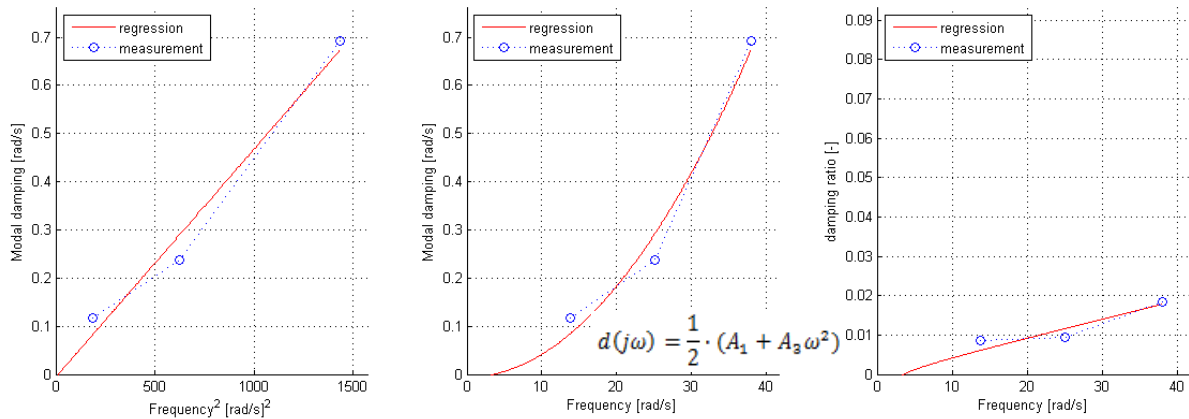


31. ábra Fluid 1 n=2 regresszió a torziós lengésekre EFDD esetén

Mivel interpolációs görbéket kaptunk mindkét esetben, így nehéz lenne meghatározni a modellek jóságát. Törekedni kell minél nagyobb mintán végezni a regressziót, a mostani eredmények alapján úgy tűnik, a mérési tartományban mindkét modell elfogadhatónak ígérkezik, de extrapolációra feltehetően egyik sem alkalmas. Láthatjuk majd a 33. ábrán, hogy EFDD esetén a kétparaméterű fluid 2, n=1 modell $\omega \rightarrow 0$ esetén negatív csillapítási értékhez tart, ez feltételezhetően hibás mérési eredményekből következik, a csillapítási mechanizmus modellezésére nem feltétlenül alkalmas.



32. ábra Fluid 2 n=1 regresszió a torziós lengésekre SSI esetén



33. ábra Fluid 2 $n=1$ regresszió a torziós lengésekre EFDD esetén

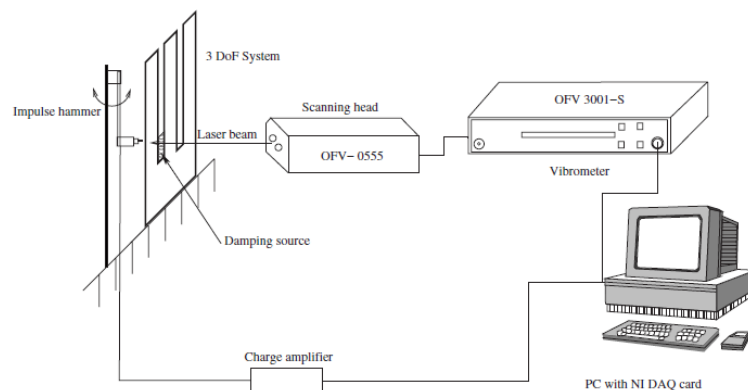
SSI esetén a fluid 2 modell szerencsés választás lehet, szintén kellően pontos modellt eredményez, bár EFDD esetén mérési hibák miatt negatív csillapítási értékeket is felvesz. A torziós lengésképek kiértékelése során az alacsony mintaszám miatt nem vonhatunk le messzemenő következtetéseket a modellek tulajdonságairól, de biztosan kijelenthetjük azt, hogy törekedni kell a mérési pontok és a meghatározott paraméterek száma közti legnagyobb különbségre, ami fluid 2 modell esetén érhető el.

8.4. Szerkezeti csillapítás vizsgálata

Ha egy adott szerkezet rezgésbe hozunk, majd hagyjuk, hogy szabad lengést végezzen, a rezgés akkor is csillapodni fog, ha nincs külső rezgéscsillapítás. Ennek oka a szerkezeti csillapítás, ami a szerkezet kapcsolatainál fellépő súrlódás és az anyag belső súrlódása, azaz az anyag nem tökéletesen rugalmas volta. Valós szerkezeteknél a szerkezeti csillapítás a sajátkörfrekvenciára nincs jelentős hatással. Szerkezeti csillapítás esetén tehát (90) értelmében a *modális csillapítás* ω körfrekvencia függvényében lineáris, és nem ω^2 körfrekvencia négyzet függvényében, ahogy az eddig vizsgált szerkezetek esetében láthattuk.

8.4.1. Mérési eredmények

Adhikari publikációjából származó [15], szerkezeti csillapítást vizsgáló mérés adatait dolgozom fel ebben a pontban. A vizsgált szerkezetet és a mérési összeállítást a 34. ábrán láthatjuk. A kísérlet során a gerjesztés is mért, tehát az eddigi *Output-Only* mérésekhez képest megbízhatóbb eredményekkel dolgozunk.

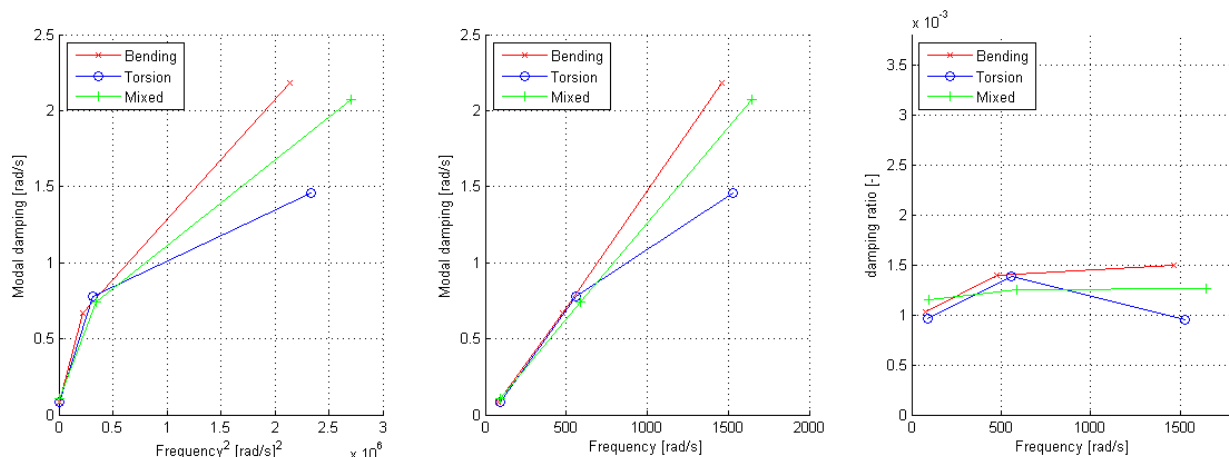


34. ábra Mérési összeállítás bemetszett lemez vizsgálatára

A mérési adatokat a 18. táblázatban foglaltam össze, a hajlító és torziós lengéskép típusok kívül itt megjelent egy harmadik, ún. vegyes típus, amikor a szerkezet tisztán megkülönböztethetően egyszerre végez torziós és hajlító lengéseket. A mérési eredményeket grafikusan a 35. ábrán láthatjuk.

18. táblázat Adhikari mérési eredményei

Lengéskép	f (Hz)	ξ (%)
Hajlító	12,46	0,1032
Torziós	14,36	0,0969
Vegyes	15,01	0,1159
Hajlító	75,6	0,1404
Torziós	88,94	0,1389
Vegyes	93,97	0,1254
Hajlító	232,74	0,1494
Torziós	243,37	0,0953
Vegyes	261,93	0,1260

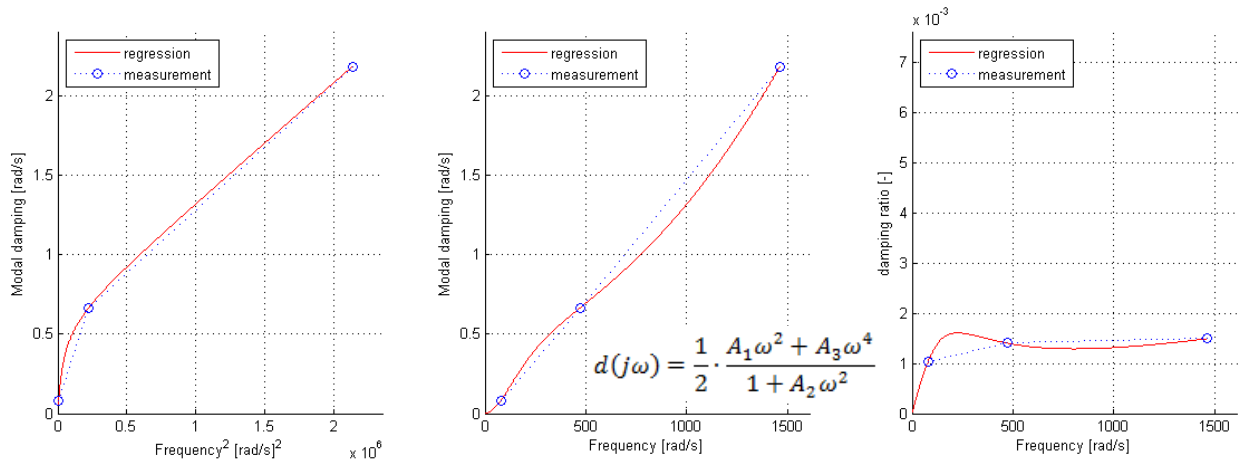


35. ábra A mérési eredmények grafikus ábrázolása

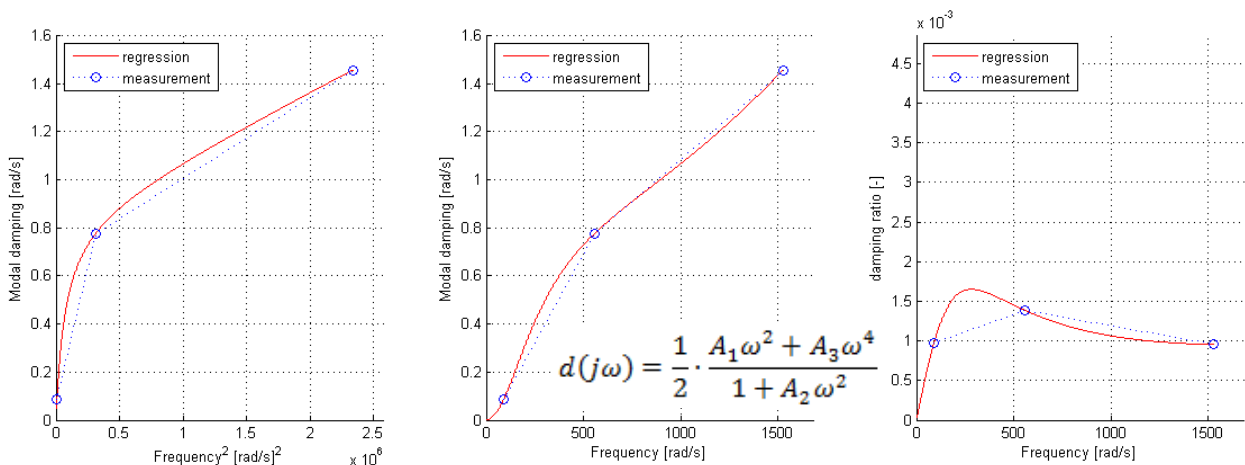
Móduscsoportonként ugyan kevés mérési ponttal rendelkezünk, de ezek valóban a körfrekvencia függvényében elsőfokú jellegűek, ami azt jelenti, hogy a klasszikus nézetben ezek konstans függvényekhez közelítenek. Láthatjuk, hogy a csillapítási mechanizmus solid jellegű, ezért ilyen típusú regressziót végzek, célszerűen 2, maximum 3 paraméter meghatározásával.

8.4.2. A lengéstípusok regressziója solid 2 modell alapján

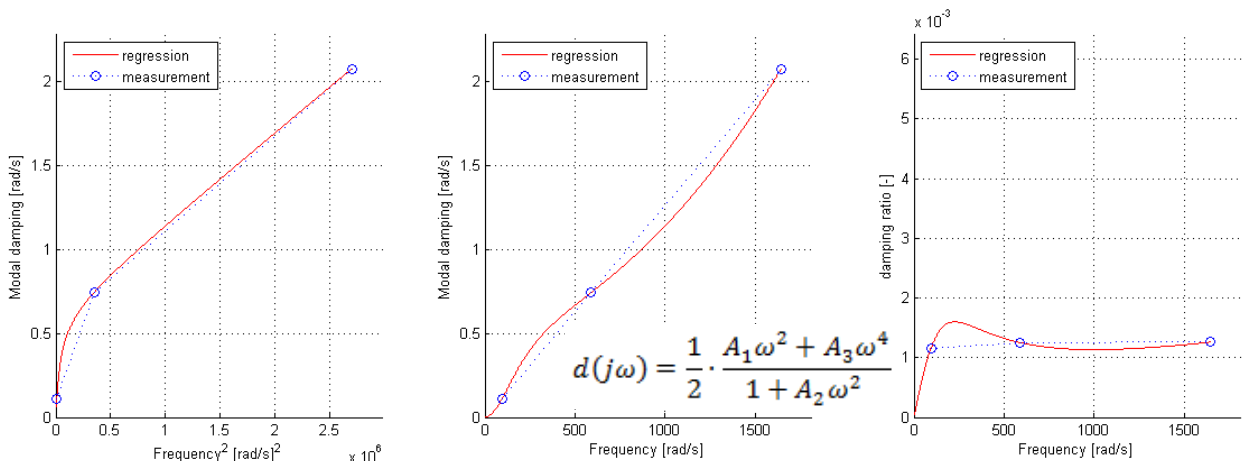
Solid típusú modellt feltételezve egy interpolációs közelítést mutatok be a levezett solid 2 modell segítségével. Látni fogjuk, hogy a tárgyalt reológiai modellek jelenleg nem alkalmasak ennek a szerkezettípusnak a modellezésére. Összehasonlításuk pedig bemutatok egy nem a modellek alapján végzett regressziót, ami ω körfrekvencia függvényében elsőfokú görbe.



36. ábra Solid 2 n=1 regresszió a hajlító lengésekre

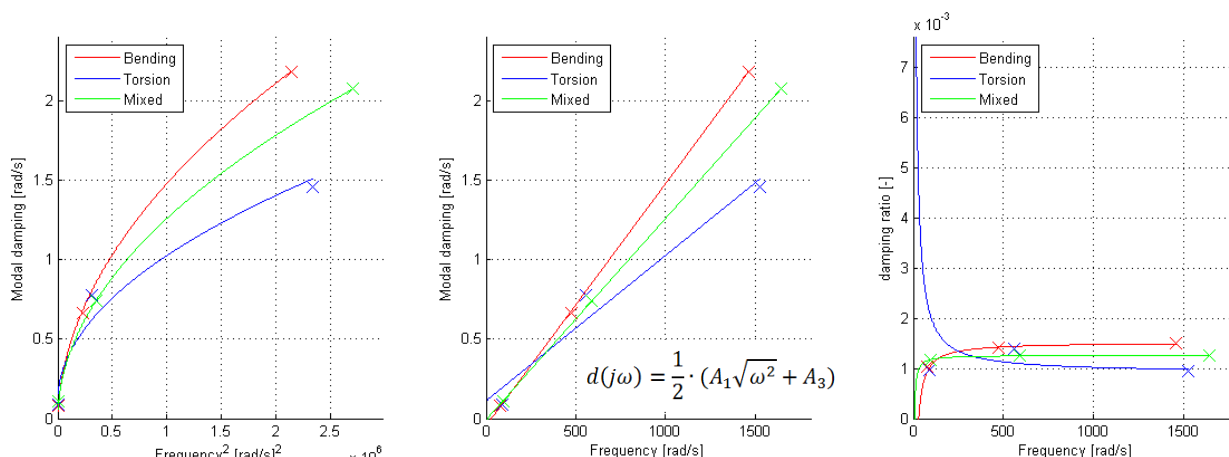


37. ábra Solid 2 n=1 regresszió a torziós lengésekre



38. ábra Solid 2 n=1 regresszió a vegyes lengésekre

Ahogy az ábrák előtt előrevetítettem a jelenlegi reológiai modellek alapján a módszer nem alkalmas a szerkezeti csillapítás kezelésére. A szerkezeti csillapítás esetének modellezése azonban kiemelt fontosságú, ezért a további vizsgálatok, és a modellek finomítása elengedhetetlen feladat. A modellek fejlesztésének lehetséges iránya tehát, hogy képes legyen kezelni azokat az eseteket, amikor a mérési pontok ω körfrekvencia függvényében lineárisak. Ennek szemléltetésére végeztem el a következő regressziósorozatot.



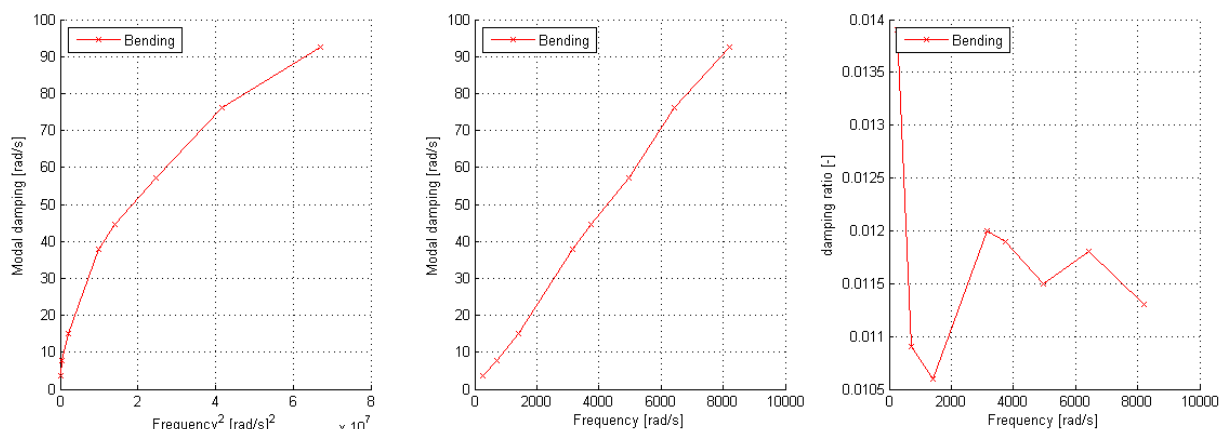
39. ábra ω körfrekvencia függvényében elsőfokú regressziók a lengéstípusokra

8.5. Polimerek csillapítási mechanizmusa

Catania publikációjában [16] részletes vizsgálatot végzett különböző anyagú polimer rudak és lemezek körében. Arra jutott, hogy polimerek esetén az átviteli függvényben a komplex tagok törtkitevőjűek lehetnek, így ez nagyban kiterjeszti a modellek lehetőségeit. Ez további irányt mutat a modellek fejlesztésére, ami akár a szerkezeti csillapítás megfelelő közelítésére is alkalmassá válhat. A következő mérési adatsor egy 952x100x25 mm méretű PE rúd vizsgálatáról készült. A numerikus adatokat a 19. táblázat tartalmazza, és a 45. ábrán láthatjuk az eredményeket.

19. táblázat A PE rúd mérési adatai

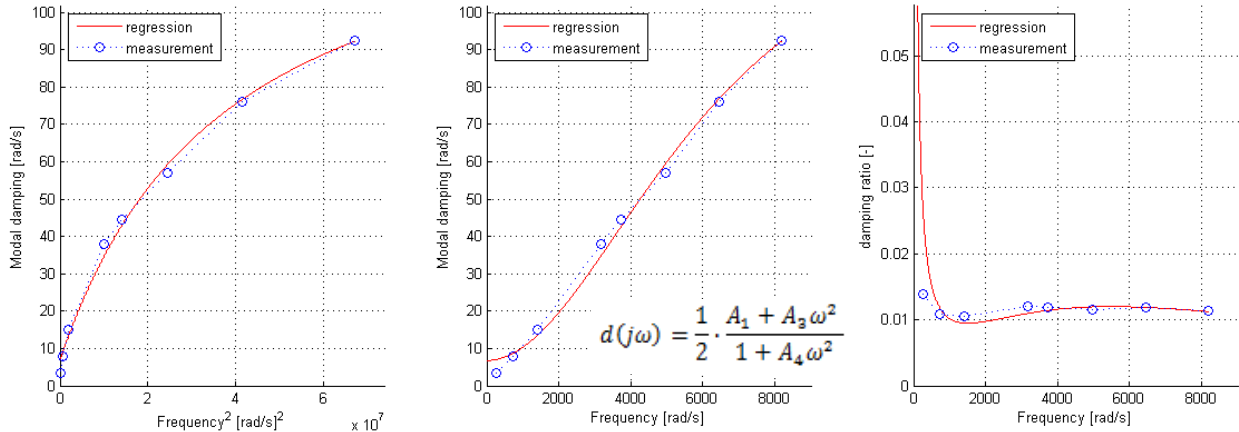
Lengéskép	f (Hz)	ξ (%)
Hajlító	40,8	1,39
Hajlító	114,8	1,09
Hajlító	224,8	1,06
Hajlító	503,9	1,20
Hajlító	595,5	1,19
Hajlító	789,2	1,15
Hajlító	1025,8	1,18
Hajlító	1303,9	1,13



40. ábra A mérési adatok grafikus ábrázolása

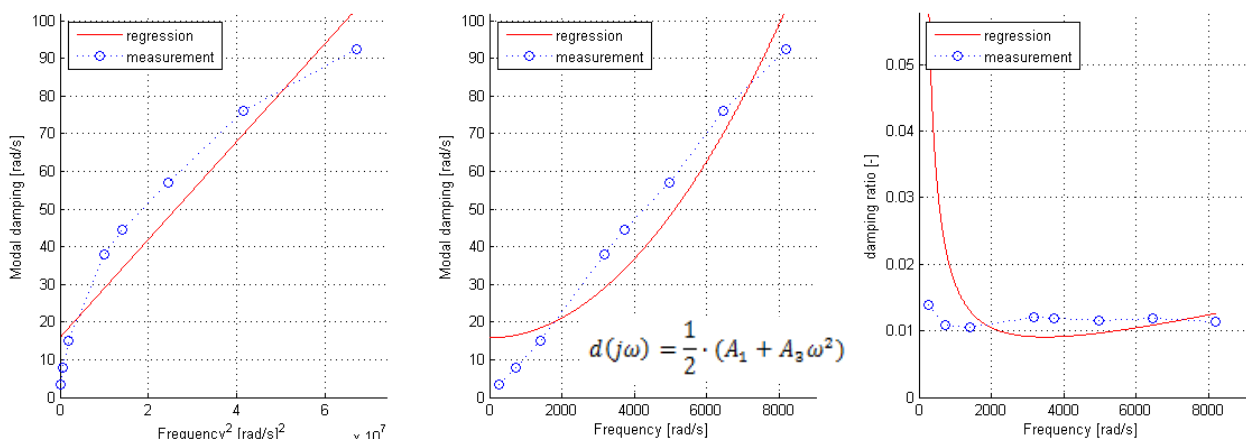
8.5.1. A mérési adatokra illesztett regresszió

A mérés során 8 mérési értékpárt határoztak meg, jellegre úgy tűnik, hogy a körfrekvencia függvényében lineáris, és a klasszikus nézetben jól látszik, hogy valószínűleg fluid jellegű.

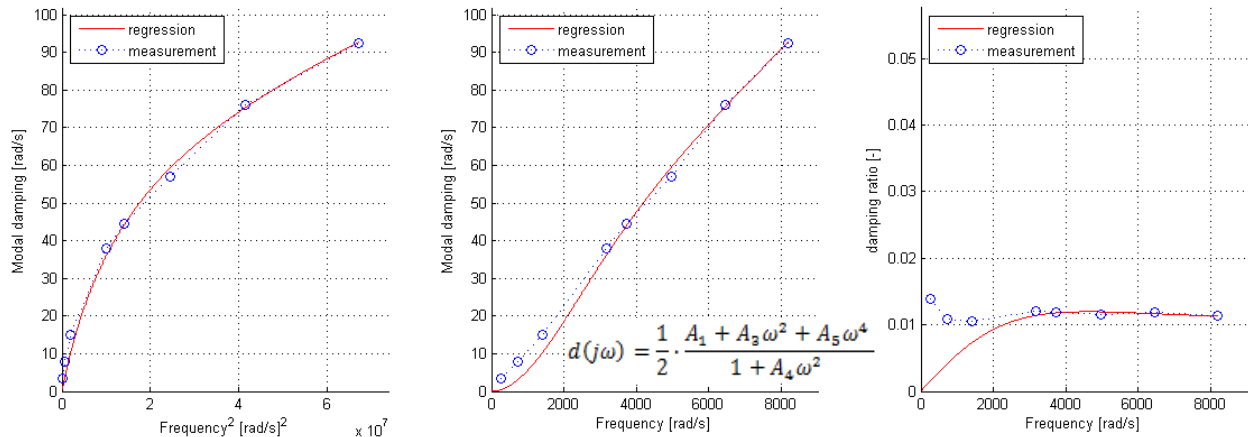


41. ábra Fluid 1 n=2 típusú regresszió

A 41. ábra szerint a modell a klasszikus nézetben jól közelíti a mérési pontokat, azonban nagy eltérést mutat a javasolt nézetekben alacsony frekvenciákon a modális csillapításban. Magasabb fokszámú fluid 1 típusú modell nem volt alkalmas a jelenlegi implementáció mellett a regresszióra. A 42. és 43. ábrán fluid 2 típusú modellekkel közelíttem a mérési pontokat, azonban ezek sem alkalmasak rá, hogy kellő pontossággal modellezzék a csillapítás alakját. A 2 paraméterű modell a szerkezeti csillapítás esetén alkalmazotthoz hasonlóan nem képes leírni a körfrekvencia függvényében lineáris függvényt, mert ilyenkor a körfrekvencia négyzetében ábrázolva négyzetgyök jelleget kellene felvennie. Ez a jelenlegi lineáris viszkoelasztikus modelleket feltételezve nem megvalósítható.



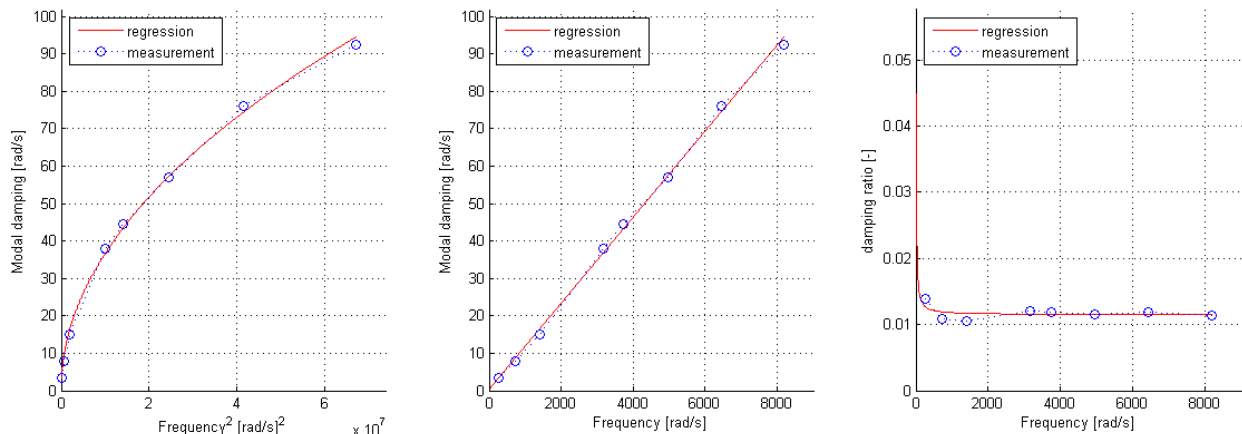
42. ábra Fluid 2 n=1 típusú regresszió



43. ábra Fluid 2 n=2 típusú regresszió

A modell 2 vagy magasabb paraméterszám meghatározása esetén solid jelleget vesz fel, ezt a klasszikus nézetben láthatjuk, ugyanis nem végtelen irányból konvergál a mérési eredményekhez, hanem nullából. Ez azt jelenti, hogy a regresszió számítása során az A_1 paraméter 0 értékűnek adódik, ami a paraméterek meghatározására szolgáló $\mathbf{Q}$ mátrix rangjának csökkenését jelenti. A modell további paramétereit így megegyeznek a solid 2 n=2 regresszió paramétereivel a rangcsökkenés következtében.

A szerkezeti csillapítás esete, valamint a polimerek csillapítási mechanizmusa jól megmutatta a jelenlegi modell korlátait, ezzel megalapozta a továbbfejlesztés irányát. Zárásként bemutatok egy, nem a reológiai modellek alapján végzett, ω körfrekvencia függvényében elsőfokú regressziót, ahogy azt a szerkezeti csillapítás esetén tettem.

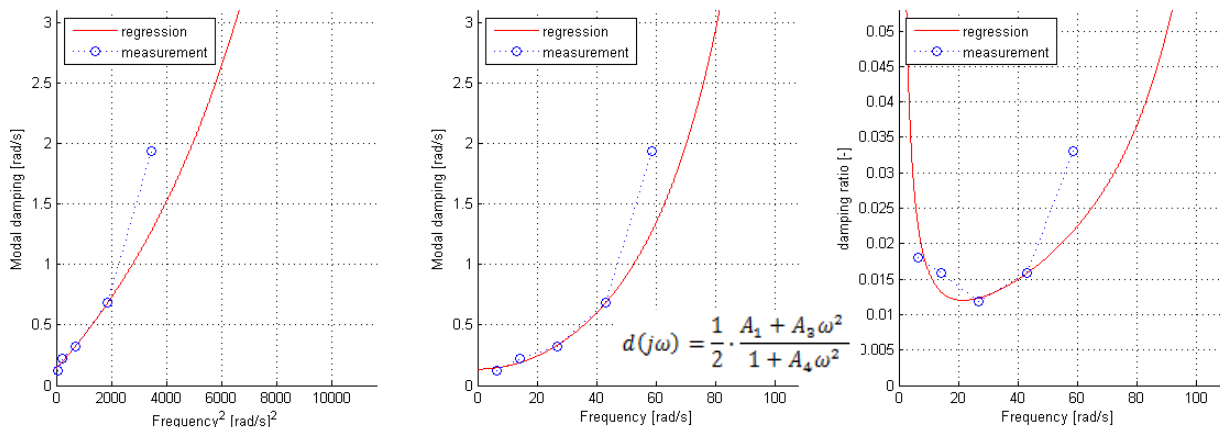


44. ábra ω körfrekvencia függvényében elsőfokú regresszió

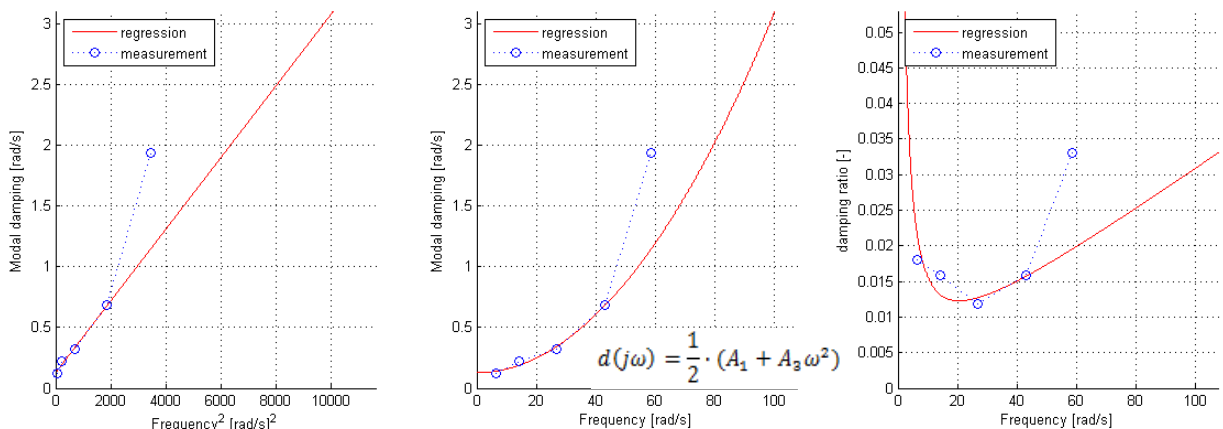
9. A regressziót követő extrapoláció lehetőségei

Az extrapoláció lehetőséget nyújthat a végeselemes szoftvereknek, hogy a modellt a mérési tartományon túli, ún. *Outband* módusokra is csillapítottá tegye. Ez egyszerű függvénybehelyettesítéssel elvégezhető lenne a meghatározott analitikus alak alapján. Az extrapolációhoz azonban nagy biztonsággal kell feltételeznünk azt, hogy a regressziós függvény valóban felhasználható ehhez. Az extrapoláció jóságának meghatározására olyan regressziót végzek a mérési adatokon, amiből az utolsó méréssel meghatározott értékpárt kihagyom, majd az illesztett függvényt ábrázolva láthatjuk, hogy ez mennyire közelíti a kihagyott pontot.

A vizsgálat során a Vittoria Sora híd SSI-vel végzett mérési adatai alapján dolgoztam a hajlító lengésképek csoportján. A módszer hátránya, hogy az eddig is kevés mérési pontok számát tovább csökkenti eggyel. A 49. és 50. ábrán a két szóba jöhető fokszámú regressziót végeztem el, ugyanis extrapoláció esetén fokozottan figyelni kell az interpolációs függvény elkerülését.



45. ábra Extrapoláció fluid 1 n=2 modell alapján



46. ábra Extrapoláció fluid 2 n=1 modell alapján

Az ábrák szerint a fluid 1 modell alapján végzett extrapoláció pontosabban közelíti az utolsó mérési eredményt a mért körfrekvenciák kétszeres tartományán. Azonban fontos az, hogy a 8. táblázat értelmében a fluid 1 modellek egy véges értékhez tartanak $\omega \rightarrow \infty$ -ben, tehát valahol a mérési tartományon kívül a regressziós függvény instabillá válik, ami alkalmatlan az *Outband* módusok kezeléséhez. A fluid 2 típus azonban megbízhatóan a végtelenbe tart az adott trend mentén.

10. Összefoglalás

A dolgozat során bemutattam a megfogalmazott feladat szükségességének dinamikai hátterét és a csillapítás ábrázolásának módját. A klasszikus nézet mellett bemutattam a javasolt ábrázolási módokat, ahol célszerű lehet a regressziót elvégezni. Fontos, hogy ezeket nem a klasszikus nézet helyett kell alkalmazni, hanem összhangban azzal. Minden ábrázolási mód hordoz elengedhetetlen információkat, amiket együttesen kell vizsgálni a minél pontosabb modell felállításának érdekében.

Alaposan megvizsgáltam a lineáris viszkoelasztikus reológiai modelleket. Az egyszerű modellektől kezdve építettem fel a vizsgálatokat a tetszőlegesen összetett modellek irányába. Két lehetséges módszert mutattam be általános, bonyolult modell differenciálegyenletének és átviteli függvényének felírására. Az átviteli függvényen alapuló módszer számítását részletesen bemutatom a dolgozat függelék részében. A rendszermátrixon alapuló módszert az ismereteim szerint az eddigi szakirodalomban reológiai modellek felírására nem alkalmazták. A megoldás során szükséges szimbolikus mátrix inverz számítási módszert MATLAB segítségével oldottam meg, ezt a dolgozatban függelékében is bemutattam.

A modellek frekvenciatartománybeli viselkedését és a csillapítási tulajdonságokat egyaránt osztályoztam. Bemutattam a négy meghatározott lehetséges csillapítási mechanizmust, amit a lineáris viszkoelasztikus modellek képesek megvalósítani. Ezek osztályozásán alapulva analitikus formában adtam meg a veszteségi tényező és a modális csillapítási függvények alakjait.

Megvizsgáltam a polinomok hányadosaként történő, legkisebb négyzetek módszerén alapuló lineáris regressziót. Ennek alapos tanulmányozása után, a meghatározott függvényalakok segítségével, MATLAB környezetben készítettem el a regressziós algoritmusokat. Ezeket később több lépésben finomítottam, míg végül Dr. Gyurkovics Éva segítségével elnyerhették a bemutatott formájukat. A felmerülő, numerikus számításból adódó problémákat, és a megoldás irányát részletesen ismertettem. Az algoritmusok segítségével regressziót végeztem négy eltérő szerkezetűtípuson, melyeken bemutathattam a modellek alkalmazásának erősségét, és korlátait. Hidak és épületek csillapítási mechanizmusának modellezésére alkalmas módszert kínáltam ezzel, és ezt az esettanulmányok során alaposan elemeztem. Megmutattam, hogy a modell egyelőre nem képes kielégítően kezelni a polimer szerkezeteket, és a hiszterézises szerkezeti csillapítást.

Az esettanulmányok során igyekeztem bemutatni az egyes modellek közti különbségeket, illetve azok jóságát a meghatározott mérési pontok számának és pontosságuknak függvényében. Ezután rövid kitekintést tettem az extrapolációra történő használatuk lehetőségeire. A dolgozatban számos alkalommal utaltam vissza a korábbi eredményekre. Fokozatosan építettem fel az egyszerű alapoktól kezdve a bonyolult modellalkotás fázisáig a probléma megoldását, mindeközben igyekeztem kiemelni a továbbfejlesztés lehetőségeit.

A feladatkiírásban megfogalmazott pontokat a dolgozat igyekezett maradéktalanul teljesíteni, ahol lehetőség nyílt rá, ott részletekbe menően alaposan vizsgálta a felmerülő problémákat. A meg nem oldott feladatokat nyitva hagyva, lehetőséget nyújt a dolgozatban ismertetett módszerek jövőbeli fejlesztésére.

11. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőimnek, Dr. Pápai Ferencnek és Dr. Lipovszki Györgynek a munkám során nyújtott folyamatos segítségüket és útmutató tanácsaikat. Hasonlóan köszönettel tartozom tanárainknak, Dr. Vas László Mihálynak és Dr. Gyurkovics Évának, tanulmányaimban nyújtott önzetlen segítségükért, tanácsaikért. Végül, de nem utolsó sorban, köszönetet mondok szüleimnek tanulmányaim során nyújtott szerető támogatásukért.

12. Irodalomjegyzék

1. T. K. Caughey, M. E. J. O'Kelly: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic System. *Transaction of the ASME. Journal of Applied Mechanics* 32, 1965. pp:583-588.
2. T. K. Caughey: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic System. *Transaction of the ASME. Journal of Applied Mechanics* Jun. 1960. pp:269-271.
3. S. Adhikari: Damping Models for Structural Vibration. *Cambridge University Engineering Department Ph.D. Dissertation September, 2000, pp:1-204.*
4. F. Benedettini, C. Gentile: Operational modal testing and FE model tuning of a cable-stayed bridge. *Engineering Structures*, 2011
5. Piaras Kelly: Solid Mechanics Part I - An Introduction to Solid Mechanics. 2008
6. Csatár Attila: Globális sugárzás és az időjárás hatása a többrétegű mezőgazdasági csomagoló fóliák mechanikai jellemzőire. *Ph.D. doktori értekezés, 2008*
7. Gombos Zoltán: Polimerek dinamikus mechanikai vizsgálata. *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Polimertechnika Tanszék gyakorlati jegyzőkönyv*
8. Rózsa Pál: Lineáris Algebra és Alkalmazásai. *Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1976*
9. Pápai Ferenc: Regresszió – A legkisebb négyzetek módszere. *Kísérleti modális elemzés, oktatási segédanyag, 2011*
10. Pápai Ferenc: Klasszikus normál módusú lengőrendszerek csillapítási modellezésének vizsgálata. *XI. Magyar Mechanikai Konferencia, 2011*
11. Pálfalvi Attila: Modelling and Measuring of Viscoelastic Material Behavior Under Cyclic Load. *Budapest University of Technology and Economics Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, PhD Dissertation, 2010*
12. Péczely Attila: Ferdekábeles hidak. *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Hidak és szerkezetek Tanszéke előadásjegyzet, 2001*
13. R. Brincker, P. Andersen: Ambient Response Analysis of the Heritage Court Tower Building Structure. *IMAC XVIII: Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC), San Antonio, Texas, USA, February 7-10, 2000. p. 1081-1087.*
14. Álvaro Cunha: From Input-Output to Output Only Modal Identification of Civil Engineering Structures. *Faculty of Engineering, University of Porto, 2006*
15. S. Adhikari: Experimental Identification of Generalized Proportional Viscous Damping Matrix. *University of Bristol, Department of Aerospace Engineering, 2009*
16. G. Catania: Experimental evaluation of the damping properties of beams and thin-walled structures made of polymeric materials. *University of Bologna, Department of Mechanics*

13. Függelék

13.1. F1: Háromelemű modellek egyenletének felírása az átviteli függvény alapján

13.1.1. Háromelemű standard solid II. modell egyenlete

A modell egy Maxwell-test és egy elasztikus Hooke test párhuzamos kapcsolása.

$$Z_e(s) = Z_M + Z_H = E_1 + \frac{\eta \cdot s}{1 + \frac{\eta}{E_2} s} = \frac{E_1 + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} s}{1 + \frac{\eta}{E_2} s} = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} \quad (\text{F1-1})$$

A konstitúciós egyenlet operátor és időtartományban:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \sigma \cdot s = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \varepsilon \cdot s \quad (\text{F1-2})$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad (\text{F1-3})$$

13.1.2. Háromelemű standard fluid I. modell egyenlete

A modell egy Maxwell-test és egy viszkózus csillapítású Newton test párhuzamos kapcsolása.

$$Z_e(s) = Z_M + Z_N = \eta_1 \cdot s + \frac{\eta_2 \cdot s}{1 + \frac{\eta_2}{E} s} = \frac{(\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} s^2}{1 + \frac{\eta_2}{E} s} = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} \quad (\text{F1-4})$$

A konstitúciós egyenlet operátor és időtartományban:

$$\sigma + \frac{\eta_2}{E} \sigma \cdot s = (\eta_1 + \eta_2) \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \varepsilon \cdot s^2 \quad (\text{F1-5})$$

$$\sigma + \frac{\eta_2}{E} \dot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\varepsilon} \quad (\text{F1-6})$$

13.1.3. Háromelemű standard fluid II. modell egyenlete

A modell egy Kelvin-test és egy viszkózus csillapítású Newton-test test soros kapcsolása.

$$Z_e(s) = \frac{Z_K \cdot Z_N}{Z_K + Z_N} = \frac{\eta_1 \cdot s(E + \eta_2 \cdot s)}{E + \eta_2 s + \eta_1 \cdot s} = \frac{\eta_1 E \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2}{E + (\eta_2 + \eta_1) \cdot s} = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} \quad (\text{F1-7})$$

A konstitúciós egyenlet operátor és időtartományban:

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \sigma \cdot s = \eta_1 \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \varepsilon \cdot s^2 \quad (\text{F1-8})$$

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \dot{\sigma} = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\varepsilon} \quad (\text{F1-9})$$

13.2. F2: Háromelemű modellek egyenletének felírása a rendszermátrix alapján

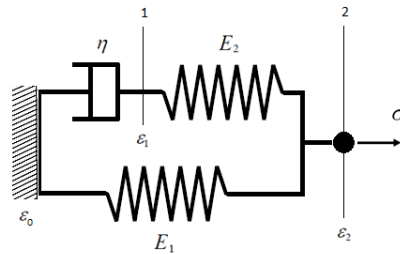
13.2.1. Egyszerű Maxwell modell megoldása MATLAB segítségével

```
syms s E eta;
Z=sym([E+s*eta, -s*eta; -s*eta, s*eta]);
inv(Z)
```

ans =

$$\begin{bmatrix} 1/E, & 1/E \\ 1/E, & (E + eta*s)/(E*eta*s) \end{bmatrix}$$

13.2.2. Standard solid II. modell



47. ábra Standard solid II. modell

A rugalmassági moduluszok és a viszkozitási tényező mátrixa:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E_2 & -E_2 \\ -E_2 & E_1 + E_2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F2-1})$$

A rendszermátrix ekkor:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{\Psi} \cdot s + \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E_2 + \eta \cdot s & -E_2 \\ -E_2 & E_1 + E_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F2-2})$$

A rendszermátrix inverzeként megkapjuk az átviteli mátrixot.

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2 + (E_1 + E_2) \eta \cdot s} & \frac{E_2}{E_1 E_2 + (E_1 + E_2) \eta \cdot s} \\ \frac{E_2}{E_1 E_2 + (E_1 + E_2) \eta \cdot s} & \frac{E_1 + E_2 + \eta \cdot s}{E_1 E_2 + (E_1 + E_2) \eta \cdot s} \end{bmatrix} \quad (\text{F2-3})$$

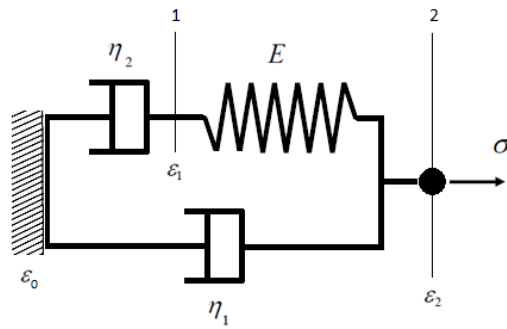
Ekkor $H_{2,2}(s) = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ alapján felírható a konstitúciós egyenlet.

$$\frac{E_1 + E_2 + \eta \cdot s}{E_1 E_2 + (E_1 + E_2) \eta \cdot s} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (\text{F2-4})$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \sigma \cdot s = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \varepsilon \cdot s \quad (\text{F2-5})$$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad (\text{F2-6})$$

13.2.3. Standard fluid I. modell



48. ábra Standard fluid I. modell

A rugalmassági modulusz és a viszkozitási tényezők mátrixa:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E & -E \\ -E & E \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{F2-7})$$

A rendszermátrix ekkor:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{\Psi} \cdot s + \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E + \eta_2 \cdot s & -E \\ -E & E + \eta_1 \cdot s \end{bmatrix} \quad (\text{F2-8})$$

A rendszermátrix inverzeként megkapjuk az átviteli mátrixot.

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{E + \eta_1 \cdot s}{E(\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} & \frac{E}{E(\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} \\ \frac{E}{E(\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} & \frac{E + \eta_2 \cdot s}{E(\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} \end{bmatrix} \quad (\text{F2-9})$$

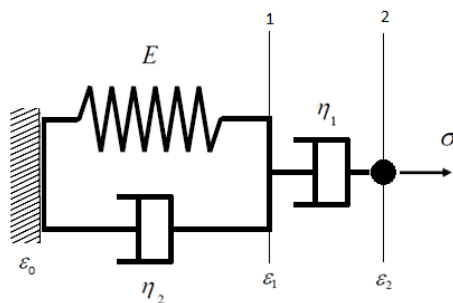
Ekkor $H_{2,2}(s) = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ alapján felírható a konstitúciós egyenlet.

$$\frac{E + \eta_2 \cdot s}{E(\eta_1 + \eta_2) \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (\text{F2-10})$$

$$\sigma + \frac{\eta_2}{E} \sigma \cdot s = (\eta_1 + \eta_2) \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \varepsilon \cdot s^2 \quad (\text{F2-11})$$

$$\sigma + \frac{\eta_2}{E} \dot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\varepsilon} \quad (\text{F2-12})$$

13.2.4. Standard fluid II. modell



49. ábra Standard fluid II. modell

A rugalmassági modulusz és a viszkozitási tényezők mátrixa:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 & -\eta_1 \\ -\eta_1 & \eta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{F2-13})$$

A rendszermátrix ekkor:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{\Psi} \cdot s + \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} E + (\eta_1 + \eta_2) \cdot s & -\eta_1 \cdot s \\ -\eta_1 \cdot s & \eta_1 \cdot s \end{bmatrix} \quad (\text{F2-14})$$

A rendszermátrix inverzeként megkapjuk az átviteli mátrixot.

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E + \eta_2 \cdot s} & \frac{1}{E + \eta_2 \cdot s} \\ \frac{1}{E + \eta_2 \cdot s} & \frac{E + (\eta_1 + \eta_2) \cdot s}{E \eta_1 \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} \end{bmatrix} \quad (\text{F2-15})$$

Ekkor $H_{2,2}(s) = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ alapján felírható a konstitúciós egyenlet.

$$\frac{E + (\eta_1 + \eta_2) \cdot s}{E \eta_1 \cdot s + \eta_1 \eta_2 \cdot s^2} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (\text{F2-16})$$

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \sigma \cdot s = \eta_1 \varepsilon \cdot s + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \varepsilon \cdot s^2 \quad (\text{F2-17})$$

$$\sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \dot{\sigma} = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\varepsilon} \quad (\text{F2-18})$$

13.3. F3: A csillapítási mechanizmusoknak megfelelő regressziós függvények megvalósítása MATLAB segítségével

13.3.1. Solid 1. típus

$$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n}}{1 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}} \quad (\text{F3-1})$$

```
function [x,y] = regS1(data,n,d,m)
%input: data array and max grade of polinoms
%output: x and y=f(x) vectors

%Standard solid 1.
%
%      1  A1*w^2 + A3*w^4 + ... + A2n-1*w2n
%  d = - *-----
%      2      A0 + A2w^2 + ... + A2n*w^2n
%
%      #####
%      #      Q*w=p      #
%      #####

data(1,:)=data(1,:).^(1/2);

n=n*2;
if nargin==3
    m=1;
end
%creating Q matrix w/ 2 partitions
Q = zeros(length(data(1,:)),n);
for i = 1:length(data(1,:))
    for k = 1:n/2
        Q(i,k) = data(1,i)^(2*k)/2;
        Q(i,k+n/2) = -data(2,i)*data(1,i)^(2*k);
    end
end

w = data(2,:);
p = Q\w;%pinv(Q)*w;

%calculating the output vectors
x=0:d:data(1,length(data(1,:)))*m;
y=zeros(1,length(x));
for i=1:length(x)
    num=0;
    den=1;
    for k=1:n/2
        num=num+(p(k)*x(i)^(2*k));
        den=den+(p(k+n/2)*x(i)^(2*k));
    end
    y(1,i)=num/den/2;
end

x=x.^(2);
```

13.3.2. Solid 2. típus

$$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1\omega^2 + A_3\omega^4 + \dots + A_{2n+1}\omega^{2n+2}}{1 + A_2\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n}} \quad (\text{F3-2})$$

```
function [x,y] = regS2(data,n,d,m)
%input: data array and max grade of polinoms
%output: x and y=f(x) vectors

%Standard solid 2.
%
%      1  A1*w^2 + A3*w^4 + ... + A2n+1*w2n+2
%  d = - *-----
%      2      A0 + A2w^2 + ... + A2n*w^2n
%
%      #####
%      #      Q*w=p      #
%      #####

data(1,:)=data(1,:).^ (1/2);

n=n*2;
if nargin==3
    m=1;
end
%creating Q matrix w/ 2 partitions
Q=zeros(length(data(1,:)),n+1);
%init Q matrix w/ 0s
for i=1:length(data(1,:))
    %i: meas.points
    for k=1:n/2
        Q(i,k) = data(1,i)^(2*k)/2;
        %the fst part of Q
        Q(i,k+n/2+1) = -data(2,i)*data(1,i)^(2*k);
        %the scnd part of Q
    end
    Q(i,n/2+1)=data(1,i)^(n+2)/2;
    %last element of Qp1
end

w=data(2,:)';
%w vector
p=Q\w;%pinv(Q)*w;
%p = Q(+)*w
%calculating output vectors
x=0:d:data(1,length(data(1,:)))*m;
%init x
y=zeros(1,length(x));
%init y
for i=1:length(x)
    num=0;
    %init numerator
    den=1;
    %init denominator
    for k=1:n/2
        num=num+ (p(k)*x(i)^(2*k));
        %numerator
        den=den+ (p(k+n/2+1)*x(i)^(2*k));
        %denominator
    end
    num=num+ (p(n/2+1)*x(i)^(n+2));
    %last element of num
    y(i)=num/den/2;
    %y
end

x=x.^(2);
```

13.3.3. Fluid 1. típus

$$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3\omega^2 + \dots + A_{2n-1}\omega^{2n-2}}{1 + A_4\omega^2 + \dots + A_{2n}\omega^{2n-2}} \quad (\text{F3-3})$$

```
function [x,y] = regF1(data,n,d,m)
%input: data array and max grade of polinoms
%output: x and y=f(x) vectors

%Standard fluid 1.
%
%      1  A1*w^2 + A3*w^4 + ... + A2n-1*w2n
%  d = - * -----
%      2      A2w^2 + ... + A2n*w^2n
%
%      #####
%      #      Q*w=p      #
%      #####

data(1,:)=data(1,:).^(1/2);

n=n*2;
if nargin==3
    m=1;
end

%creating Q matrix w/ 2 partitions
Q=zeros(length(data(1,:)),n-1);

%init Q matrix w/ 0s

for i=1:length(data(1,:))
    Q(i,1)=1/2;
    %i: meas.points
    %the fst column of Q=1/2
    for k=1:n/2-1
        Q(i,k+1) = data(1,i)^(2*k)/2;
        %the fst part of Q
        Q(i,k+n/2) = -data(2,i)*data(1,i)^(2*k);
        %the scnd part of Q
    end
end

w=data(2,:)';
%w vector
p=Q\w;%pinv(Q)*w;
%p=Q(+)*w

%calculating output vectors
x=0:d:data(1,length(data(1,:)))*m;
%init x
y=zeros(1,length(x));
%init y
for i=1:length(x)
    num=p(1);
    %init numerator
    den=1;
    %init denominator
    for k=1:n/2-1
        num=num+(p(k+1)*x(i)^(2*k));
        %numerator
        den=den+(p(k+n/2)*x(i)^(2*k));
        %denominator
    end
    y(i)=num/den/2;
    %y
end

x=x.^(2);
```

13.3.4. Fluid 2. típus

$$d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1 + A_3 \omega^2 + \dots + A_{2n+1} \omega^{2n}}{1 + A_4 \omega^2 + \dots + A_{2n} \omega^{2n-2}} \quad (\text{F3-4})$$

```

function [x,y] = regF2(data,n,d,m)
%input:  data array and max grade of polinoms
%output: x and y=f(x) vectors

%Standard fluid 2.
%
%      1  A1*w^2 + A3*w^4 + ... + A2n-1*w2n+2
%  d = - * -----
%      2      A2w^2 + ... + A2n*w^2n
%
%      #####
%      #      Q*w=p      #
%      #####

data(1,:)=data(1,:).^ (1/2);

n=n*2;
if nargin==3
    m=1;
end

%creating Q matrix w/ 2 partitions
Q=zeros(length(data(1,:)),n); %init Q matrix w/ 0s

for i=1:length(data(1,:))           %i: meas.points
    Q(i,1)=1/2;                     %the fst column of Q=1/2
    for k=1:n/2
        Q(i,k+1) = data(1,i)^(2*k)/2; %the fst part of Q
    end
    for k=1:n/2-1
        Q(i,n/2+1+k) = -data(2,i)*data(1,i)^(2*k); %the scnd part of Q
    end
end

w=data(2,:)';                      %w vector
p=Q\w;%pinv(Q)*w;                  %p=Q(+)*w

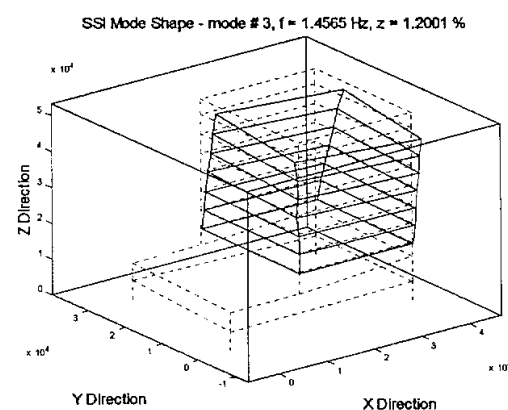
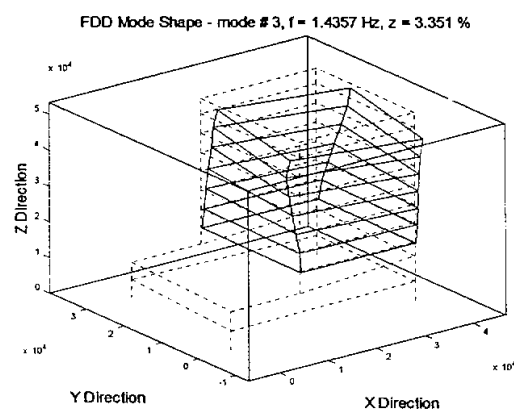
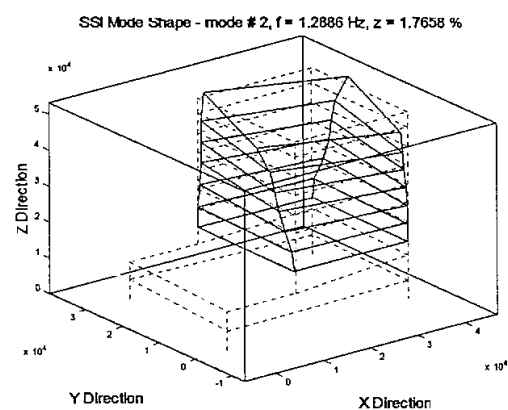
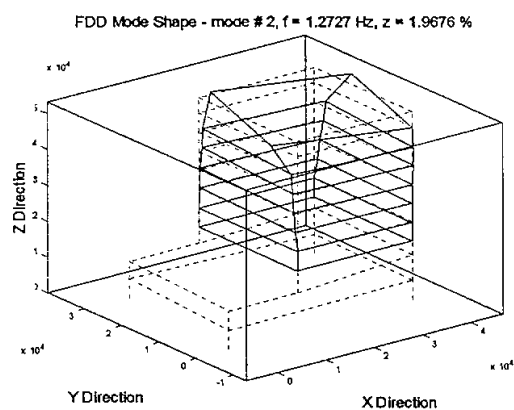
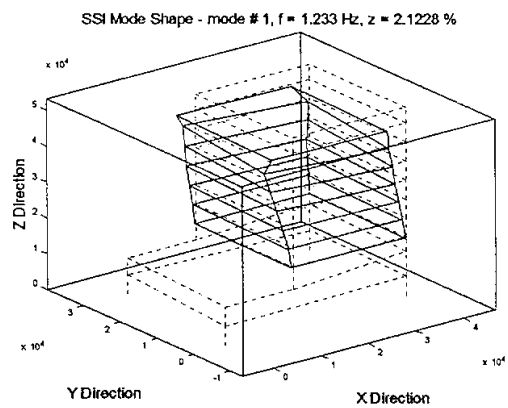
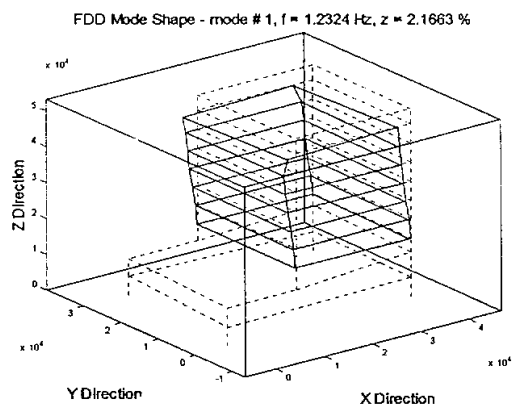
%calculating output vectors
x=0:d:data(1,length(data(1,:)))*m; %init x
y=zeros(1,length(x));              %init y
for i=1:length(x)
    num=p(1);                       %init numerator
    den=1;                           %init denominator
    for k=1:n/2
        num=num+ (p(k+1)*x(i)^(2*k)); %numerator
    end
    for k=1:n/2-1
        den=den+ (p(n/2+1+k)*x(i)^(2*k)); %denominator
    end
    y(i)=num/den/2;                  %y
end

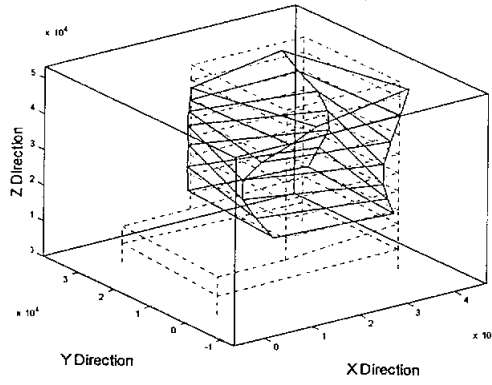
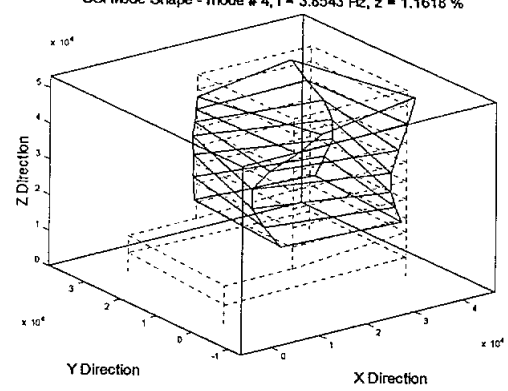
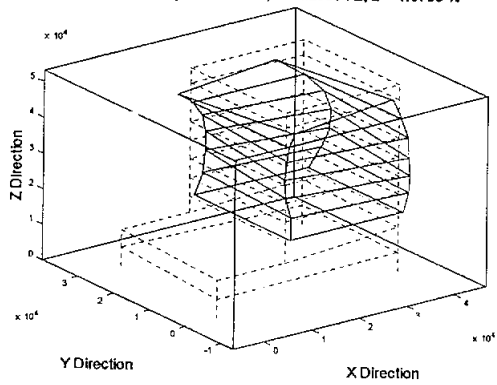
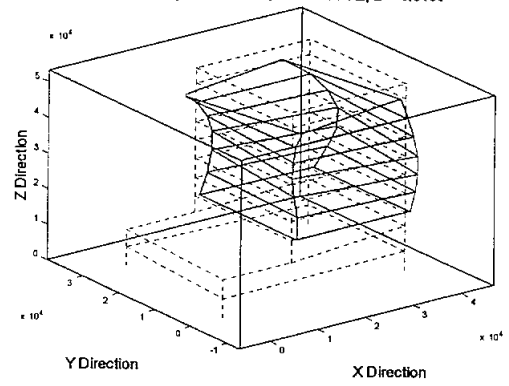
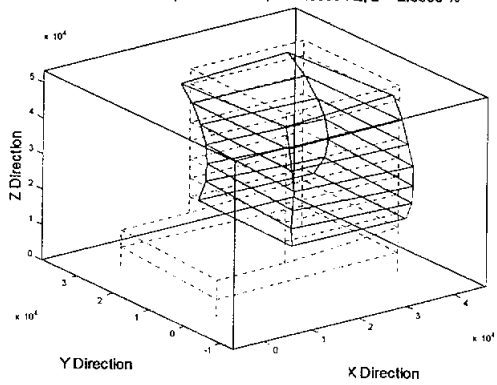
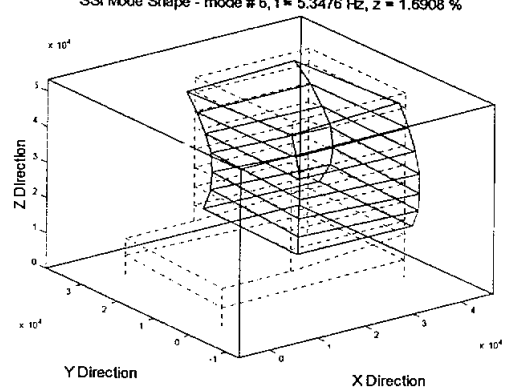
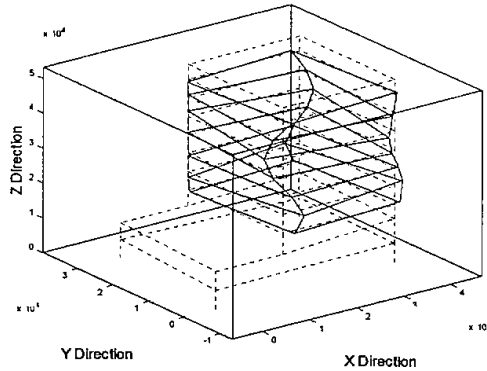
x=x.^(2);

```

13.4. F4: Az esettanulmányokhoz kapcsolódó részletes információk

13.4.1. A Heritage Court Tower épület lengésképei



FDD Mode Shape - mode # 4, $f = 3.8659$ Hz, $z = 1.4425$ %SSI Mode Shape - mode # 4, $f = 3.8543$ Hz, $z = 1.1618$ %FDD Mode Shape - mode # 5, $f = 4.2506$ Hz, $z = 1.6733$ %SSI Mode Shape - mode # 5, $f = 4.2573$ Hz, $z = 1.5195$ %FDD Mode Shape - mode # 6, $f = 5.3538$ Hz, $z = 2.0563$ %SSI Mode Shape - mode # 6, $f = 5.3476$ Hz, $z = 1.6908$ %FDD Mode Shape - mode # 7, $f = 6.3983$ Hz, $z = 1.5981$ %SSI Mode Shape - mode # 7, $f = 6.3946$ Hz, $z = 1.5426$ %