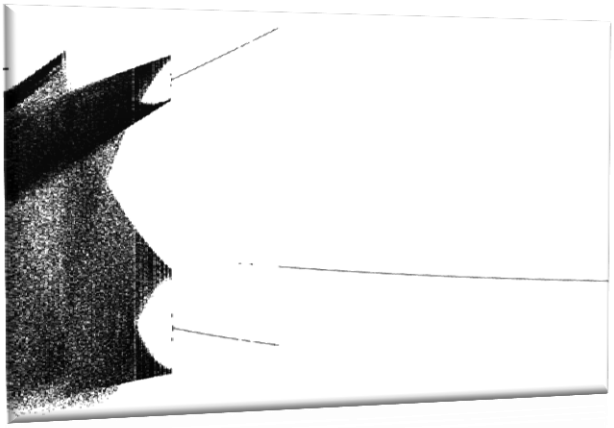
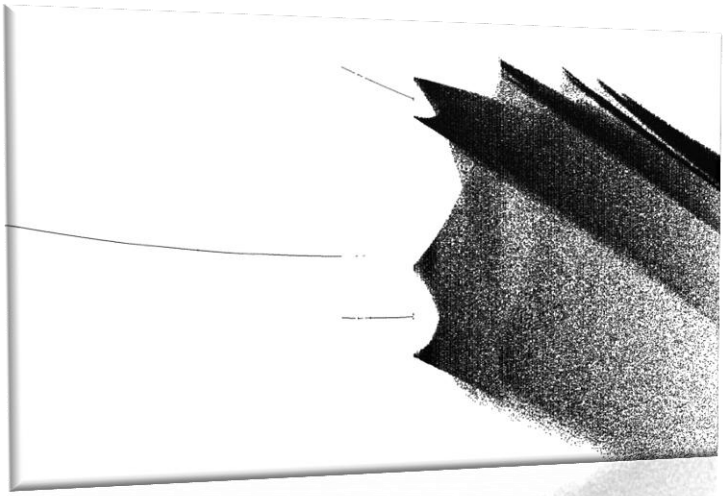


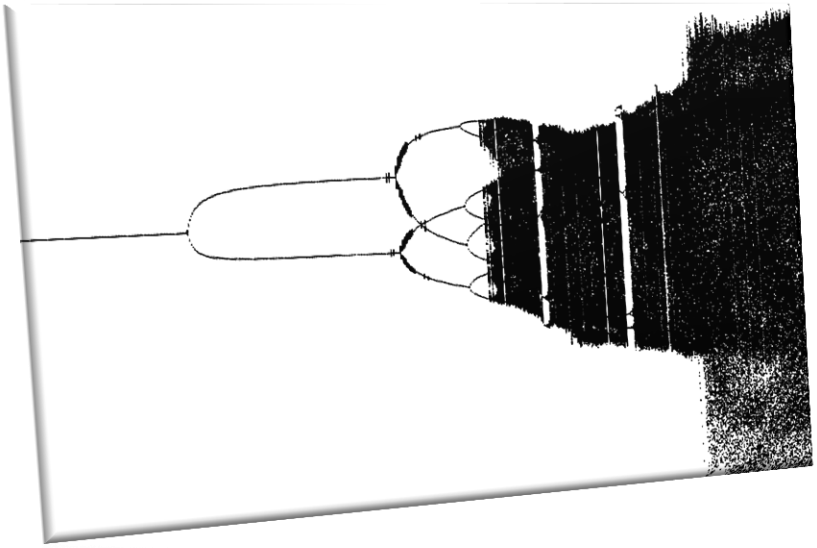
XXXI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia

MŰEGYETEM 1782

2012

Nemlineáris mechatronikai rendszerek viselkedésének vizsgálata





Készítette: Lőrincz András
Konzulens: Stumpf Péter Pál

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2012.04.01.

Tartalomjegyzék

I. Nemlineáris dinamika és káoszelmélet 4
1.1. Bevezető 4
1.2. Alapok 5
1.3. Egyensúlyi pontok 9
1. 4. Határciklus 13
1.5. Kvázi-periodikus és frekvenciazárt állapot 16
1.6. Átmenet a káoszba 18
1.9. Kaotikus állapot 20
II. A van der Pol oszcillátor 22
2.1. Bevezetés 22
2.2. Az egyenlet analitikus vizsgálata 22
2.3. A van der Pol egyenlet numerikus vizsgálata 32
2.4. Az áramkör megvalósítása 35
2.5. PSpice szimulációs összeállítás 38
2.6. Mérési eredmények 41
III. Egyenáramú hajtás nemlineáris viselkedése 44
3.1. Bevezető 44
3.2. Egyenáramú motorok matematikai leírása 44
3.3. Áramvezérelt állandó mágneses egyenáramú hajtás vizsgálata 51
3.4. Az áramvezérelt hajtás gyakorlati megvalósítása 59
3.5. Mérések és szimulációs eredmények 77
IV. Konklúzió 92
V. Irodalomjegyzék 93

Nemlineáris mechatronikai rendszerek viselkedésének vizsgálata

Investigation of the behaviour of nonlinear mechatronic systems

Lőrincz András, BME Mechatronikai mérnök BSc, VI. évfolyam

Konzulens: Stumpf Péter Pál, doktorandusz

BME, Automatizálási és Alkalmazott Informatikai Tanszék, Elektrotechnika csoport

A nemlineáris dinamika és azon belül is a káoszelmélet fiatalkora ellenére futótűzként terjed a tudományos élet különböző ágazataiban. Newton és Laplace azon klasszikus nézeteit fogalmazta át, mely szerint a világunkat egyszerű törvények irányítják és mely illúziót a számítástechnika lélegzetelállító fejlődése is erősített. Azonban napjainkban a természettudományos élet vezető kutatói azt vallják, hogy ez a nézet nem igazolható, mert számtalan, a természetben előforduló ismert egyszerű törvényszerűségek által leírt jelenségek kaotikusak, vagy kaotikusak lehetnek.

A TDK munka célja a mechatronikai mérnöki munkában előforduló nemlineáris jelenségek bemutatása és vizsgálata analitikusan módszerekkel, számítógépes szimulációkkal és mérésekkel. A dolgozat három fő részből áll. Az első rész egy rövid bevezetőt ad a nemlineáris dinamikába és a káoszelméletbe bemutatva a lényeges különbségeket a lineáris és nemlineáris rendszerek között.

A második rész a nemlineáris van der Pol egyenletet helyezi a középpontba bemutatva annak analitikus és numerikus módszerekkel történő vizsgálatát. A második rész továbbá leírja az egyenletet megvalósító analóg áramkör tervezését PSpice környezetben és megvalósítását a laboratóriumban, majd az analitikus és numerikus eredményeket alátámasztását mérési eredményekkel.

A harmadik rész egy áramcsúcs-vezérelt egyenáramú hajtás sebességszabályozásával foglalkozik. Bemutatásra kerül az egyenáramú hajtás modellezése MATLAB Simulink környezetben és megvalósítása a laboratóriumban. A harmadik fejezet részletesen leírja az egyenáramú hajtás teljesítményelektronikai részének megtervezését és elkészítését illetve a szabályozási algoritmus dsPIC mikrovezérlőben való implementálását. A hajtás főbb paramétereit nyomógombok segítségével egy LCD kijelzőn megjelenő felhasználói felületen állíthatóak. Mind szimulációkkal mind mérésekkel bemutatásra kerül a szakaszonként lineáris nemlineáris egyenáramú hajtás színes viselkedése, ahogy a paraméterek változtatásával a hajtás a stabil periodikus állapotból bifurkációs kaszkádon keresztül kaotikussá válik.

I. Nemlineáris dinamika és káoszelmélet

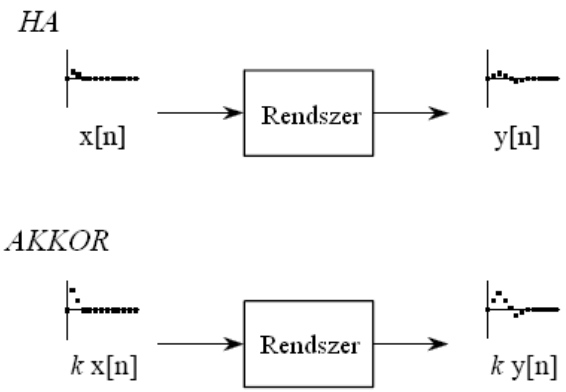
1.1. Bevezető

Jelenségek új osztálya lett nemrégiben felfedezve a nemlineáris dinamika témakörében. Mostanáig a káoszt és a rendet kölcsönösen kizárónak tekintették. Maxwell egyenletei uralják az elektromágneses jelenségeket, Newton törvényei írják le a klasszikus mechanika folyamatait. A rend világát képviselik, ami előre jelezhető. Azokat a folyamatokat nevezték kaotikusnak, amik nem követték a törvényeket és megjósolhatatlanok voltak. Noha a káoszt és a rendezettséget világunk két távoli arculatának gondolták, voltak megválaszolatlan kérdések. [2] Például, noha tudjuk az összes törvényszerűséget, ami a globális időjárásunkat alakítja, mégis képtelenek vagyunk előre jelezni. Vagy vegyük csak a folyadékrendszerek példáját, könnyen a rendezettség káoszba fordulhat, a lamináris áramlás turbulenssé válhat.
Nem várt felfedezés volt, hogy egyszerű törvényszerűségeket követő determinisztikus rendszerek - amelyek kétségtelenül a rend világához tartoznak, és amelyeket teljesen előre jelezhetőnek hittek – kaotikussá válhatnak. A matematikában, a logisztikus egyenlet vagy más néven populációnövekedési modell vizsgálata felfedte a közeli kapcsolatot a káosz és a rend között. Egy másik nagyon korai példa 1963-ból: Lorenz három differenciál egyenlete, amelyek a Navier-Stokes egyenlet termikusan előidézett konvekciót leíró egyenletéből származik. Tekinthetjük az előbbieket, mint a káoszelmélet két fő paradigmája. Tehát a modern felfogás szerint az előbbi két fogalom nem kölcsönösen kizáró, hanem szorosan kapcsolódnak egymáshoz.
A káoszelmélet, noha kétségkívül még mindig fiatal, futótűzként terjed a tudományok minden ágában. A fizikában felborította a Newton és Laplace óta meglévő klasszikus nézetet, miszerint a világunk egyszerű törvények által uralt és előre megjósolható. Ezt az illúziót táplálta a mind növekvő számítási kapacitást ígérő számítástechnika lélegzetelállító fejlődése. De ennek épp az ellenkezője történt. Kutatók ugyanis nemrégiben kijelentették, hogy ez a remény megalapozatlan, ugyanis nagyszámú, egyszerű törvények által uralt jelenség a természetben kaotikus, vagy lehet kaotikus. Egyik elsődleges tulajdonságuk az érzékeny függésük a kezdeti feltételektől. Noha a legprecízebb mérés is azt jelzi, hogy két eseményt ugyanabból a kezdeti feltételből indítjuk, mindig van valamilyen mérhetetlenül kicsi eltérés, ami a két esemény lefolyását más-más trajektóriák felé tolja. A bizonytalanság a kezdeti feltételekben felerősödik és elsöprő lesz kis idő múlva. Emiatt a képességünk, hogy jövőbeli felfedezéseket pontosan megjósoljunk ésszerűtlen. A sors iróniája, hogy a számítógépek segítsége nélkül a káosz modern elmélete és a geometriák – a fraktálok – soha nem lettek volna felfedezve.
A nemlineáris dinamika erősen kapcsolódik a bifurkáció elmélethez. Egy nemlineáris rendszer paramétereit változtatva, az egyensúlyi pontok helye és száma is megváltozhat. Ezen problémák vizsgálata a bifurkáció elmélet tárgya. A rendből káoszba vezető jól definiált utak létezése volt a második nagy felfedezés, ami újabb nagy meglepetésként hatott, mint az első, amely azt mutatta meg, hogy egy determinisztikus rendszer is lehet kaotikus.
A most következő résznek a fő célja, hogy összefoglalja a korszerű ismereteket a nemlineáris dinamikai rendszerekkel kapcsolatban.

1.2. Alapok

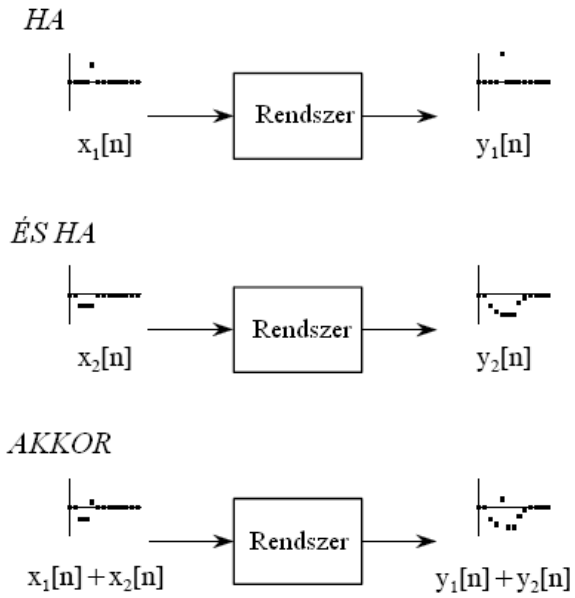
Lineáris és nemlineáris rendszerek

Egy rendszert lineárisnak nevezünk, ha rendelkezik két matematikai tulajdonsággal: homogenitás és additivitás. Ha meg tudjuk mutatni, hogy egy rendszer rendelkezik mindkét tulajdonsággal, akkor bebizonyítottuk, hogy a rendszer lineáris. A homogenitás azt jelenti, hogy a bemenő jel amplitúdójának megváltozása a kimenő jel amplitúdójának megfelelő mértékű megváltozását eredményezi (1.1. ábra). [10]



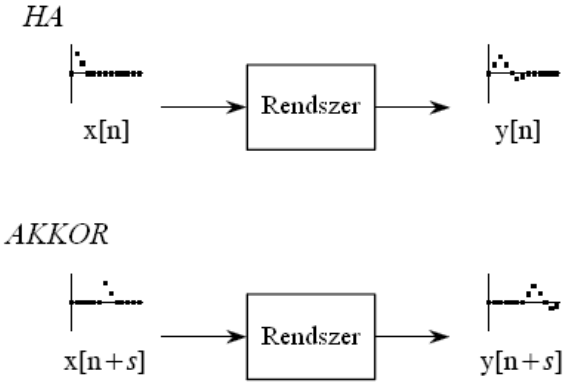
1.1. ábra: Homogenitás

A lineáris elemek egyik legfontosabb tulajdonsága a szuperpozíció tételének érvényessége, ami azt jelenti, hogy a rendszer kimenetei különböző bemenetektől additívak. Az additivitás pedig azt takarja, hogy a bemenő oldalon összeadott jelek a kimenő oldalon is összeadott jeleket produkálnak. Az 1.2. ábra ezt mutatja be szemléletesen.



1.2. ábra: Additivitás

Lényeges elem, hogy az összeadott jelek egymásra hatás nélkül mennek keresztül a rendszeren. Lineáris rendszerek esetében a szuperpozíció tétele nem csak egyensúlyi állapotban, hanem tranziens folyamatok alatt is érvényes. Nemlineáris rendszerekre azonban nem érvényes általánosan a szuperpozíció tétele.
Az eltolási invariancia jelentése, hogy a bemenő jelben lévő eltolás nem okoz semmi mást, csak egy ugyanolyan mértékű eltolást a kimenő jelben (1.3. ábra). Az eltolási invariancia nem kötelező feltétele a linearitásnak.



1.3. ábra: Eltolási invariancia

Ha például egy lineáris rendszer bemenete szinuszos hullám, akkor a kimenete is szinuszos hullám lesz, és pontosan ugyanazon a frekvencián, mint a bemenet. A kimeneti és a bemeneti szinusz jel amplitúdóban és fázisban különbözhet egymástól. Ez ismerős lehet az elektronikai ismereteinkből: egy áramkör leírható a frekvencia válaszából, a grafikonból, amely azt mutatja, hogy az erősítés és a fázis hogy változik a frekvenciával. Nemlineáris rendszereknél előfordulhat, hogy a bemeneti jel frekvenciájának felharmonikusai és szubharmonikusai is megjelennek. Emellett lineáris rendszerek esetében a bemeneti frekvenciát változtatva a kimenet amplitúdója és fázisszöge folytonos függvény szerint változik, nemlineáris rendszereknél akár ugrásszerű változások is bekövetkezhetnek.
Lineáris rendszerek állandósult állapota független a kezdeti feltételektől, míg nemlineáris rendszerek esetében az állandósult állapot függ a kezdeti feltételektől.
Míg előbbieknél a stabilitás a rendszer tulajdonsága és független a bemeneti jeltől, addig nemlineáris rendszerek esetén különböző bemeneti jelekre a rendszer instabillá válhat. Ez a tulajdonság a kezdeti feltételektől való függéssel együtt azt jelenti, hogy egy nemlineáris rendszer elvesztheti stabilitását azonos bemenet, de eltérő kezdeti feltétel esetén, illetve azonos kezdeti feltétel, de különböző bemenet esetén.

Nemlineáris rendszerek. A nemlineáris rendszereknek két nagy osztálya van: i) autonóm rendszerek, ii) nem autonóm rendszerek. [1] Mindkettőt elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerrel írhatjuk le és állapottérben (fázistérben) jeleníthetjük meg. A differenciálegyenletek száma megegyezik a független állapotváltozók számával (vagy dimenzióval), amik ahhoz szükségesek, hogy egyértelműen leírjuk a dinamikai rendszer állapotát.

Autonóm rendszer. Nincs a rendszerre ható külső bemenet vagy gerjesztő függvény. A rendszert leíró differenciálegyenlet-rendszer ekkor a következő:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \tag{1.1}$$

ahol $x^T = [x_1, x_2, \dots x_N]$ az állapotvektor
$v^T = [v_1, v_2, \dots v_N]$ a sebességvektor
$f^T = [f_1, f_2, \dots f_N]$ a nemlineáris vektorfüggvény
$\mu^T = [\mu_1, \mu_2, \dots \mu_N]$ a rendszer paramétervektora

T jelöli a transzponáltját egy vektornak
t az idő, és
N a rendszer dimenziója

Az idő nem jelenik meg expliciten; csak az állapotvektoron keresztül, közvetve van jelen.

Nem autonóm rendszerek. Időfüggő külső bemenetet és *u(t)* gerjesztő függvényt alkalmazunk a rendszerre. Differenciálegyenlet-rendszere a következő:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\mu}) \tag{1.2}$$

A t idő explicit módon megjelenik *u(t)*-ben. A fenti két egyenlet megoldható analitikusan és numerikusan is egy adott $\mathbf{x_0}$ kezdeti feltételre és egy $\boldsymbol{\mu}$ paramétervektorra. A megoldás a rendszer állapotát az idő függvényeként írja le. A megoldást megjeleníthetjük egy koordinátarendszerben, ahol az állapotváltozók a koordináták. Ezt hívjuk állapottérnek vagy fázistérnek. Bármely időpillanatban egy pont az állapottérben jelképezi a rendszer állapotát. Ahogy az idő változik, a rendszert jelképező pont egy pálya mentén mozog, amit trajektóriának nevezünk, és amely a kezdeti feltételből indul.

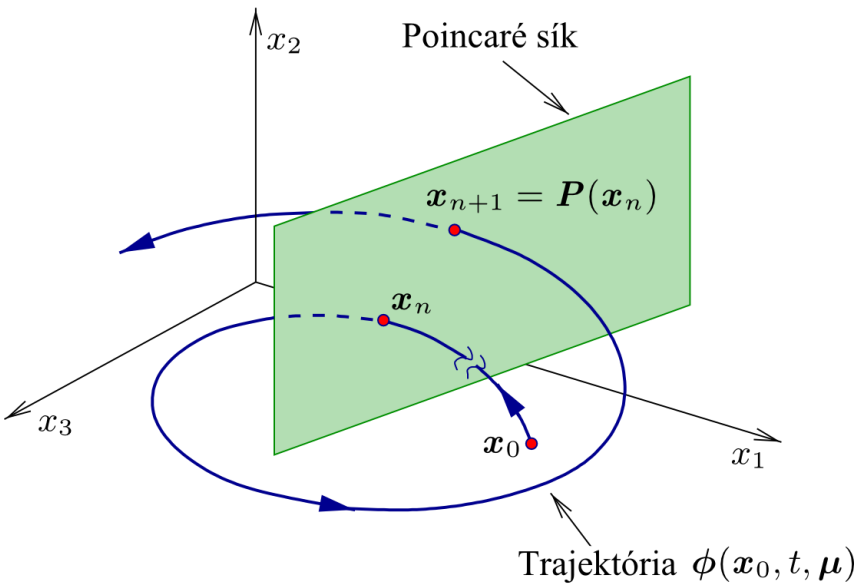
Korlátozások. A nem-autonóm rendszert mindig át lehet alakítani autonóm rendszerré egy új állapotváltozó $x_{N+1} = t$ bevezetésével. Így az autonóm rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszerben az utolsó differenciálegyenlet a következő lesz:

$$\frac{dx_{N+1}}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1 \tag{1.3}$$

Mivel az időt, mint állapotváltozót vezettük be, ezért az állapottér dimenzióinak száma eggyel megnőtt. Mostantól a megállapításainkat autonóm rendszerekre korlátozzuk, hacsak másként nem állítjuk. Ezzel a korlátozással élhetünk az általánosság megszorítása nélkül.
A tárgyalás során végig valós, disszipatív rendszerekre szorítkozunk. Ahogy az idő előrehalad, az állapotváltozók néhány végső pont, görbe, terület vagy bármilyen általános objektum felé fognak tartani az állapottérben. Ezeket hívjuk az adott rendszer attraktorainak, mivel bizonyos meghatározott trajektóriák ezekhez az objektumokhoz lesznek vonzva *(attract = vonz)*. A megállapításainkat a rendszer hosszú távú viselkedésére fókuszáljuk, mintsem analizáljuk a felfutási és tranziens folyamatokat. A trajektóriákat határosnak feltételezzük, mint ahogy a legtöbb fizikai rendszer is az. Nem mehetnek el a végtelenbe.

Matematikai leírás. Alapvetően két különböző fajta megközelítést használunk. Az első megközelítés az összes állapotváltozót folytonos mennyiségként kezeli és a folytonos idő modellt alkalmazza (CTM). Ahogy az idő változik a rendszer viselkedését egy mozgó pont

írja le az állapottérben, amely így egy trajektóriát eredményez, amelyet az (1.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából nyerünk.



1.4. ábra: Egy rendszer trajektóriája és egy Poincaré-sík

Az 1.4. ábra mutatja a folytonos trajektóriáját háromdimenziós rendszerre a $\Phi(x_0, t, \mu)$ függvénynek, ahol x_0 a kezdőpont.

A második megközelítés mintákat vesz a folyamatosan változó állapotváltozókból, és a rendszer viselkedését diszkrét vektorfüggvényként írja le a Poincaré-elgondolást felhasználva. Az 1.4. ábra mutatja, hogy miként veszünk mintát a háromdimenziós autonóm rendszerről. A trajektóriának az úgynevezett Poincaré-síkkal – általánosan a Poincaré-metszettel – közös metszési pontjait jegyezzük fel mintáknak. A Poincaré sík kiválasztása nem olyan kritikus mindaddig, amíg a trajektória merőlegesen metszi a felületét. A kapcsolat x_n és x_{n+1} között – az egymást követő metszési pontok, amelyeket mindig ugyanabból az irányból megközelítve hozunk létre – az úgynevezett Poincaré-térképfüggvénnyel írható le (Poincaré Map Function – PMF):

$$x_{n+1} = P(x_n) \tag{1.4}$$

Vegyük észre, hogy az *x* melletti index az időpontot jelöli, nem pedig az *x* vektor komponensét. A Poincaré metszet egy hipersík olyan rendszerek esetén, ahol a dimenziószám nagyobb, mint három, míg az egy- és kétdimenziós rendszerek esetén egy pont és egy egyenes vonal.

Olyan nem-autonóm rendszerek esetén, amelyeknek periodikus gerjesztő függvénye van, a mintákat mindig a gerjesztés meghatározott fázisában vesszük, például lehet mindig a kezdetén. Ezt hívjuk stroboszkópikus leképezésnek, ami úgy képzelhető el, mintha a mechanikai rendszer állapotváltozóit egy, a gerjesztés minden periódusában egyszer felvillanó lámpával vennénk, tehát mintha stroboszkópot alkalmaznánk. A PMF ezen mintavételezett értékek közötti kapcsolatot írja le.
Ha tudjuk, hogy a trajektóriák olyan differenciálegyenletet-rendszer megoldásai, amelyre fennáll az egzisztencia és unicitás tétele, akkor ez maga után vonja a matematikai összefüggést x_n és x_{n+1} között, ami pedig a PMF létezése. Ez a diszkrét időfüggvény

megoldható analitikusan vagy numerikusan is a differenciálegyenlettől függetlenül. Tehát a második megközelítésben a diszkrét idő modellt használjuk (DTM – Discrete-Time Model).
A Poincaré-metszet lecsökkenti a rendszer dimenziószámát eggyel, és a végtelenül kicsi időlépésekkel operáló differenciálegyenletek helyett véges nagyságú időlépést használó iteratív függvényekkel írja le azt. Másrészről a Poincaré-leképezés megtartja a lényegi információkat a rendszer dinamikájáról.
Noha az állapotváltozók sok rendszerben folyamatosan változnak, főleg a teljesítményelektronikában, mégis kedvezően modellezhetőek diszkrét iteratív függvényekkel. Néhány esetben a rendszer elválaszthatatlan a diszkrét idő modelltől, az állapotváltozóik nem folyamatosan változnak. Példák erre a digitális rendszerek vagy olyan modellek, amelyek a fajok populációjának fejlődését írja le.

1.3. Egyensúlyi pontok

Bevezetés. A nemlineáris világ jóval sokszínűbb, mint a lineáris. A nemlineáris rendszerek különböző állapotokban lehetnek, egy ezek közül az egyensúlyi pont (EP). Ez egy olyan pont az állapottérben, amely felé egy nemlineáris dinamikai rendszer trajektóriája tart, amint a tranziensei lecsengenek. Az állapotváltozók sebessége $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ zérus az egyensúlyi pontban

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{0} \tag{1.5}$$

Ennek a nemlineáris egyenletrendszernek a megoldása több egyensúlyi pontot is eredményezhet. Ezek sorban: $\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \dots \boldsymbol{x}_k^*, \dots \boldsymbol{x}_n^*$. A stabil egyensúlyi pontokat *attraktoroknak* nevezzük.

Vonzáskörzetek. Több attraktor létezésének természetes következménye az állapottér felosztása különböző régiókra, ezeket nevezzük vonzáskörzeteknek. Az adott vonzáskörzeten belül bármely kezdeti feltétel egy olyan trajektóriát indít el, amelyet végül magához vonz az adott vonzáskörzethez tartozó egyensúlyi pont. Két szomszédos vonzáskörzet határát szeparatrixnak nevezzük. Oly módon rendezik az állapotteret, hogy az adott vonzáskörzetben született trajektória soha nem fogja elhagyni azt.

Egyensúlyi pont körüli linearizálás. Kis perturbációt $\Delta x = x - x_k^*$ feltételezve az (1.1) egyenlet linearizálható az x_k^* egyensúlyi pont közelében. Az adott pont körül sorba fejtve és a magasabb rendű tagokat elhanyagolva az egyenlet a következőképpen néz ki:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k^* + \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k^*, \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{J}_k \Delta\boldsymbol{x} \tag{1.6}$$

Visszahelyettesítve az autonóm rendszer egyenletrendszerébe:

$$\frac{d\Delta\boldsymbol{x}}{dt} = \Delta\boldsymbol{v} \cong \boldsymbol{J}_k \Delta\boldsymbol{x} \tag{1.7}$$

ahol

$$J_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

az úgynevezett Jacobi mátrix. A parciális deriváltakat az x_k^* pontban kell kiértékelni. Az (1.7) egyenletben az $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\mu}) = 0$ esetet vizsgáljuk. J_k egy valós, idő független *N x N*-es mátrix. Az (1.7) megoldásait a következő formában keressük:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_r e^{\lambda t} \tag{1.9}$$

Ezt visszahelyettesítve (1.7)-be

$$\boldsymbol{J}_k \boldsymbol{e}_r = \lambda \boldsymbol{e}_r \tag{1.10}$$

Ennek λ-ra vonatkozó nemtriviális megoldásainak ki kell elégítenie a következő N-ed rendű egyenletet:

$$\det(\boldsymbol{J}_k - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{1.11}$$

ahol **I** az *N x N*-es egységmátrix. Az (1.7), (1.9) és (1.10) egyenletekből:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_k \boldsymbol{e}_r e^{\lambda t} = \lambda \boldsymbol{e}_r e^{\lambda t} \tag{1.12}$$

Ha a Δx vektor irányát az (1.9) egyenlet alapján választjuk meg, tehát hogy ha az időbeli változása csak a λ konstanstól függ, annak két fontos következménye van:

1. A $\boldsymbol{J}_k \boldsymbol{e}_r \, (= \lambda \boldsymbol{e}_r)$ szorzat csak az $\boldsymbol{e}_r$ λ-val való növekedését vagy kontrakcióját eredményezi. $\boldsymbol{e}_r$ iránya nem változik.

2. A sebesség vektor *Δv* perturbációjának iránya meg fog egyezni az $\boldsymbol{e}_r$ vektor irányával.

$\boldsymbol{e}_r$ irányát karakterisztikus iránynak hívjuk és $\boldsymbol{e}_r$ a sajátvektora a $\boldsymbol{J}_k$ Jacobi-mátrixnak. λ a sajátérték (vagy karakterisztikus exponens).

A megállapításaink során az (1.11) N darab különböző gyökére szorítkozunk (többszörös gyökök esetét nem tárgyaljuk). Ezek a gyökök rendre: λ_1, λ_2, … λ_m, … λ_N . Hasonlóan N darab különböző sajátvektorunk van. (1.7) egyenlet általános megoldása:

$$\Delta \boldsymbol{x}(t) = \sum_{m=1}^{N} \boldsymbol{e}_m e^{\lambda_m t} = \sum_{m=1}^{N} \boldsymbol{\delta}_m(t) \tag{1.13}$$

Itt azt feltételeztük, hogy a kezdeti feltétel $\Delta \boldsymbol{x}(t = 0) = \sum_{m=1}^{N} \boldsymbol{e}_m$. Az (1.11) egyenlet gyökei lehetnek valósak és komplex konjugáltak is, mivel az együtthatók ebben az egyenletben valós számok.

Ha komplex konjugált sajátvektor párunk van $\lambda_m = \hat{\lambda}_{m+1} = \sigma_m - j\omega_m$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $e_m = \hat{e}_{m+1} = e_{m,R} + je_{m,I}$, ahol a ^ jelöli a komplex konjugáltat és ahol σ_m, ω_m és $e_{m,R}, e_{m,I}$ valósak illetve valós értékű vektorok. A két komplex megoldásból $\delta_m(t) = e_m e^{\lambda_m t}$ és $\delta_{m+1}(t) = e_{m+1} e^{\lambda_{m+1} t}$ két lineárisan független valós megoldás születik:

$$s_m(t) = \frac{1}{2}[\delta_m(t) + \delta_{m+1}(t)] = e^{\sigma_m t}[e_{m,R} cos\omega_m t + e_{m,I} sin\omega_m t] \tag{1.14}$$

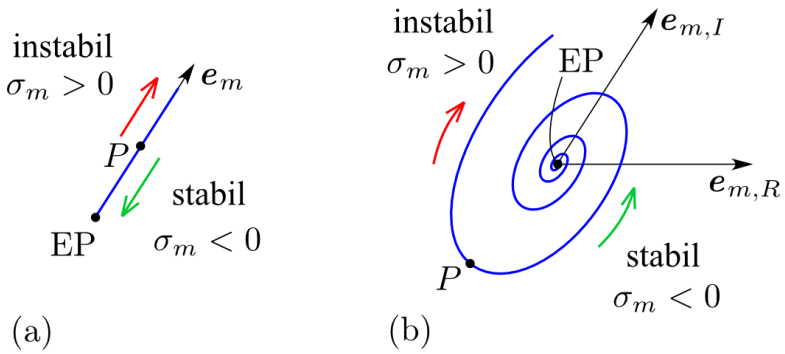
$$s_{m+1}(t) = \frac{1}{2j}[\delta_m(t) - \delta_{m+1}(t)] = e^{\sigma_m t}[e_{m,I} cos\omega_m t - e_{m,R} sin\omega_m t] \tag{1.15}$$

Ha a sajátérték valós $\lambda_m = \sigma_m$, akkor a λ_m-hez tartozó megoldás:

$$\boldsymbol{s}_m(t) = \boldsymbol{\delta}_m(t) = \boldsymbol{e}_m e^{\sigma_m t}$$

Vegyük észre, hogy egy sajátértékhez vagy sajátérték párhoz tartozó időfüggvények ugyanazok minden állapotváltozóra.

Stabilitás. Az egyensúlyi pont akkor és csak akkor stabilis, ha az egyensúlyi ponthoz tartozó sajátérték valós része (σ_m) negatív, máskülönben egy vagy több megoldás a végtelenbe tartana. $\sigma_m = 0$-t instabil állapotként kezeljük. Ha $\sigma_m < 0$, akkor ez egyensúlyi pont körüli összes kis perturbáció lecseng, és a rendszer visszaáll az egyensúlyi pontjába.

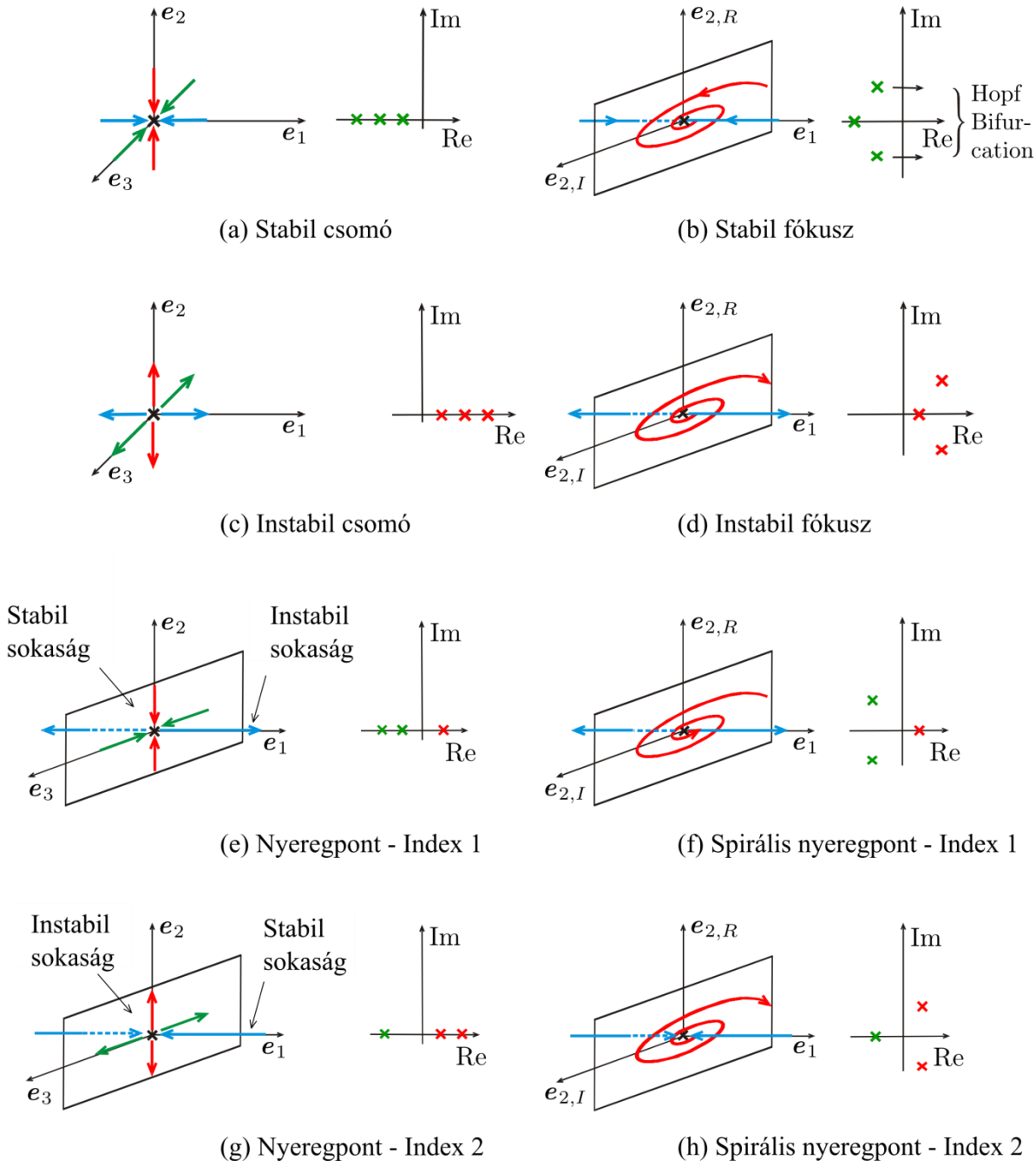


1.5. ábra: Stabil és instabil pályák

Az 1.5.a ábra egy egyensúlyi pontot és annak valós sajátértékű sajátvektorát mutatja, $\lambda_m = \sigma_m$. A pálya egy egyenes vonal az $\mathbf{e}_m$ vektor mentén. Az 1.5.b ábra komplex konjugált sajátértékekkel bíró egyensúlyi pontot, és $\mathbf{e}_m$ komplex sajátvektor, és annak $\mathbf{e}_{m,R}$ valós és $\mathbf{e}_{m,I}$ komplex komponenseit mutatja. A megoldás pályája egy spirál az egyensúlyi pont körül az $\mathbf{e}_{m,R}$ és $\mathbf{e}_{m,I}$ által kifeszített síkon. Mindkét esetben a P munkapont közeledik $(\sigma_m < 0)$ vagy távolodik $(\sigma_m > 0)$.

Egyensúlyi pontok osztályozása háromdimenziós állapottérben (N=3). A három sajátérték komplex síkbeli helyétől függően 8 egyensúlyi pont típust különböztethetünk meg (1.6. ábra). A három sajátvektort, mint referencia keretet használjuk, az origó az egyensúlyi pont. Jelölésként e_1, e_2 és e_3-at használunk, ha mindhárom sajátérték valós és e_1, $e_{2,R}$, $e_{2,I}$-t, ha van egy komplex konjugált sajátérték pár. A pályák (trajektóriák) időben exponenciálisan mozognak a sajátvektorok e_1, e_2 vagy e_3 mentén, ha a kezdeti feltétel rajtuk helyezkedik el.

Komplex konjugált sajátértékek esetén a trajektória spirális alakot vesz fel az $e_{2,R}$ és $e_{2,I}$ által kifeszített síkon, ha a kezdeti feltétel is innen származik. A munkapontot vonzza (taszítja) a stabil (instabil) egyensúlyi pont.



(a) Stabil csomó (b) Stabil fókusz

(c) Instabil csomó (d) Instabil fókusz

(e) Nyeregpont - Index 1 (f) Spirális nyeregpont - Index 1

(g) Nyeregpont - Index 2 (h) Spirális nyeregpont - Index 2

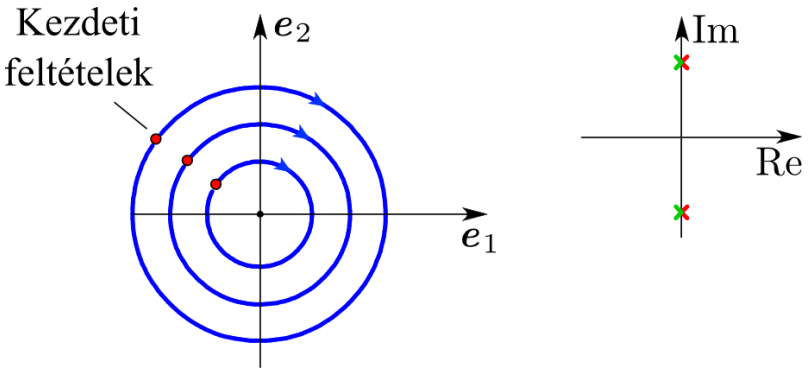
1.6. ábra: Egyensúlyi pontok osztályozása (N=3) esetén

Mindhárom sajátérték a komplex sík bal oldalán helyezkedik el a *stabil csomó* és a *stabil fókusz* esetén (6.(a) és 6.(b) ábrák). Mindhárom sajátérték a jobb oldalon van az *instabil csomópont* és *instabil fókusz* esetén (6.(c) és 6.(d) ábrák). Nyeregpontok esetén egy (6.(e) és 6.(f) ábrák) vagy két (6.(g) és 6.(h) sajátérték a jobb oldalon helyezkedik el.

A nyeregpontoknak nagyon fontos szerepe van a trajektóriák állapottérbeli elrendeződésénél. Egy sajátvektorhoz vagy sajátvektor párhoz tartozó trajektória lehet stabil, ha a sajátértékei a komplex sík bal oldalán helyezkednek el (6.(a) és 6.(b) ábrák) vagy

instabil, ha a jobb oldalon vannak (6.(c)…6.(f) ábrák. Az olyan trajektóriákat, amelyek egyenesen a nyeregpontokba, vagy egyenesen onnan elvezetnek stabil és instabil invariáns sokaságnak, vagy röviden sokaságnak nevezzük. A stabil vagy instabil sokaságon lévő munkapont nem tudja azt elhagyni. Egy nyeregpont sokaságai kétdimenziós állapottérben a szomszédos területet négy régióra osztják. Az adott régióban keletkező trajektória korlátozva van a régióra. A sokaságok részei a vonzáskörzeteket szétválasztó szeparatrixoknak. Ebben az értelemben a sokaságok felelősek az állapottér elrendeződéséért.

Végül, ha a σ_m valós rész zérus a komplex konjugált sajátérték párban és a dimenzió N = 2, akkor az egyensúlyi pontot centrumnak nevezzük. Az e_R-e_I referenciakeretben a trajektóriák körök (1.7. ábra). A sugarukat a kezdeti feltétel határozza meg.



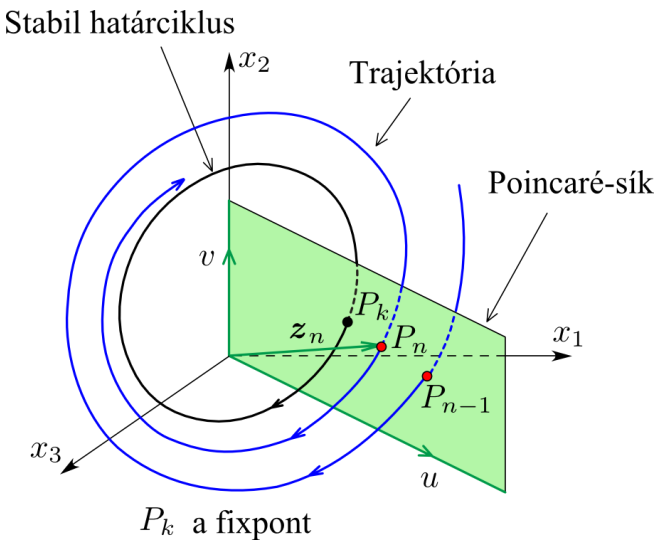
1.7. ábra: Centrum, komplex konjugált sajátértékek, N=2

A trajektóriák az állapottérben nem metszhetik egymást. Ez egyenes következménye a determinisztikus rendszernek, vagyis, hogy a rendszer állapotát egyértelműen meghatározza a munkapontjának állapottérbeli helye. Mivel a rendszert az (1.1) egyenlet írja le, az összes deriváltat az állapotváltozók pillanatnyi értékéből határozzuk meg. Következésképpen csak egy lehetséges irányban folytathatja az útját a trajektória.

1. 4. Határciklus

Két- vagy többdimenziós rendszerek mutathatnak periodikus (ciklikus) mozgást külső periodikus gerjesztés nélkül is. Ezt a viselkedést jeleníti meg az állapottérben a zárt görbéjű trajektória, amit határciklusnak nevezünk. Vannak stabil (vonzó) és instabil (taszító) határciklusok. Az alapvető különbség a stabil határciklus és a zárt trajektóriájú centrum között, hogy közeli kezdeti pontokból indított trajektóriákat a stabil határciklus magához vonzza és előbb vagy utóbb határciklusban végződnek, míg centrum esetén a trajektóriák mindvégig különböző (saját kezdeti feltételük által megszabott) pályákon fognak maradni.

A 1.8. ábra egy stabil határciklust mutat egy Poincaré-síkkal egyetemben, a dimenziószám 3. A határciklus a Poincaré-síkot *a P_k fixpontnak* nevezett pontban metszi, amely döntő szerepet játszik a nemlineáris dinamikában. A határciklus viselkedésének vizsgálata helyett a fixpontot tanulmányozzuk.



1.8. ábra: Stabil határciklus és Poincaré sík (N=3)

Poincaré-térképfüggvény (PMF). Ha a trajektóriát kicsit eltérítjük a határciklustól, akkor a diszkrét Poincaré-térképfüggvény fogja megadni a kapcsolatot a P_n metszési pont koordinátái és az előző P_{n-1} pont koordinátái között. Az összes pont a trajektória által generált metszési pont a Poincaré-síkon. A PMF a háromdimenziós állapottérben (1.8. ábra):

$$u_n = P_1(u_{n-1}, v_{n-1}) \tag{1.16a}$$

$$v_n = P_1(u_{n-1}, v_{n-1}) \tag{1.16b}$$

ahol P_1 és P_2 Poincaré-leképezések, u_n és v_n pedig a P_n metszési pont koordinátái. Vezessük be a pontba mutató helyvektort:

$$\boldsymbol{z}_n^T = [u_n, v_n] \tag{1.17}$$

Ennek segítségével felírva a Poincaré függvényt:

$$\boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}_{n-1}) \tag{1.18}$$

Ugyanezt a fixpontra felírva:

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}_{k-1}) \tag{1.19}$$

Az egyik előnye a Poincaré-leképezés használatának, hogy általa csökken a dimenziók száma eggyel, mivel hogy a P_k fixpont stabilitását a kétdimenziós állapottérben vizsgáljuk ahelyett, hogy a határciklus stabilitását vizsgálnánk a háromdimenziós állapottérben. A másik haszna pedig, hogy a differenciálegyenleteket differenciaegyenletekkel helyettesíthetjük.

Stabilitás. A stabilitást vizsgálhatjuk a Poincaré függvény segítségével ((1.18) egyenlet). Először is a $P\,(z_{n-1})$ nemlineáris függvényt linearizálni kell a $\mathbf{z}_k$ helyvektorú fixpontjában

kiértékelt $\mathbf{J}_k$ Jacobi mátrixának segítségével. Ha ismerjük $\mathbf{J}_k$-t, akkor az (1.18) egyenletet átírhatjuk $\mathbf{z}_k$ körüli kis perturbációk (zavarások) esetén a következő alakra:

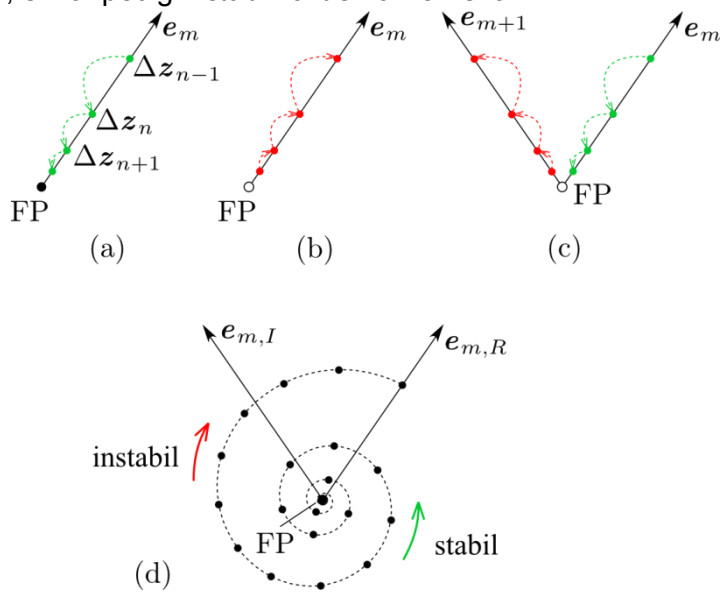
$$\Delta \boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{J}_k \Delta \boldsymbol{z}_{n-1} = \boldsymbol{J}_k^n \Delta \boldsymbol{z}_0 \tag{1.20}$$

ahol Δz_0 kezdeti kis eltérés a P_k fixponttól.

Helyettesítve $\mathbf{J}_k$ mátrixot λ_k sajátértékeivel és jobboldali $\mathbf{e}_{mr}$ és baloldali $\mathbf{e}_{ml}$ sajátvektoraival

$$\Delta \mathbf{z}_n = \left[\sum_{m=1}^{N-1} \lambda_m^n \, \mathbf{e}_{mr} \mathbf{e}_{ml}^T\right] \Delta \mathbf{z}_0 \tag{1.21}$$

Az (1.21) egyenletből következik, hogy a határciklus akkor és csak akkor stabilis, ha az összes sajátérték a komplex síkbeli egységsugarú körön belül helyezkedik el (mértani sorral analógia, amelynek csak akkor lesz véges összege, ha a kvóciens egynél kisebb).
Mind folytonos idő modell (CTM), mind diszkrét idő modell (DTM) esetén a Jacobi mátrix kis perturbációkra lett felírva ((1.7) és (1.20) egyenletek). Az alapvető különbség az, hogy CTM esetén a sebességvektort határozza meg, míg DTM esetén a következő iterációs lépést.
Tegyük fel, hogy az iteráció kezdeténél a legelső pont a Jacobi mátrix $\mathbf{e}_m$ sajátvektorán helyezkedik el. Az 1.9. ábra négy különböző iterációs eljárást mutat be, attól függően, hogy az adott $\mathbf{e}_m$-hez tartozó λ_m sajátérték milyen értéket vesz fel. 1.9.(a) és 1.9.(b) esetén λ_m valós, de értéke 1.9.(a) ábra esetén $0 < \lambda_m < 1$, 1.9.(b) esetén pedig $\lambda_m > 1$. Az a) esetben az egymást követő iterációk közelednek e_m mentén a fixpont felé, ekkor stabil csomópontról beszélünk, míg a b) esetben távolodnak tőle, ekkor instabil csomóról beszélünk. 1.9.(c) esetén mind λ_m, mind λ_{m+1} valósak, de $0 < \lambda_m < 1$ és $\lambda_{m+1} > 1$. Az egymást követő iterációk e_m mentén konvergálnak a fixponthoz, míg e_{m+1} mentén távolodnak, ez a fixpont tehát *nyeregpont*. Az 1.9.(d) ábra esetén a sajátértékek komplex konjugáltak. Az soron következő iterációk egy spirális pályán mozognak a fixpont körül (1.14 és 1.15 egyenletek). Ha $|\lambda_m|<1$, akkor az iterációk konvergálnak a fixponthoz, ekkor *stabil fókuszról* van szó. Ha $|\lambda_m|>1$ akkor az iteráció divergál, ekkor pedig *instabil fókuszról* van szó.



1.9. ábra: Az egymást követő iterációs pontok mozgása

1.5. Kvázi-periodikus és frekvenciazárt állapot

Folytonos idő modell esetén az egyensúlyi pont és határciklus mellett egy másik lehetséges mozgásállapot a kvázi-periodikus mozgás. Kvázi-periodikus állapotban a mozgás – elméletben – sohasem ismétli pontosan önmagát. Más megnevezések erre az irodalomban a *feltételesen periodikus* vagy *majdnem periodikus állapot*. A kvázi-periodikus állapot diszkrét rendszerek esetén is lehetséges. A *frekvenciazárt állapot* a kvázi-periodikus állapot egy speciális esete. A kvázi-periodikus állapot nem lehetséges egy- vagy kétdimenziós esetekben, vagyis a dimenziószám három vagy nagyobb kell, hogy legyen *(N ≥ 3)*. A káoszhoz hasonlóan a kvázi-periodikus állapot is aperiodikus. Kaotikus állapotban az állapottérben egymáshoz tetszőlegesen közel lévő két pont divergálni fog egymástól. Más szavakkal a kaotikus rendszer rendkívüli módon érzékeny a kezdeti feltételekre és a paraméterváltozásokra. Ezzel szemben kvázi-periodikus állapotban két pont, amely kezdetben is közel volt egymáshoz közel is marad az idő előrehaladtával.

Ez a mozgásfajta több különböző $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ szögsebességű mozgásnak a keveréke. Lineáris kombinációjuk L értékétől függően

$$L = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_m\omega_m \tag{1.22}$$

a mozgás lehet kvázi-periodikus, ha L ≠ 0, és lehet fáziszárt, ami pedig periodikus állapot, vagyis L = 0. Itt $k_1, k_2, \dots k_m$ bármely pozitív (vagy negatív) egész szám lehet ($k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ kivételével).

Az egyensúlyi pont, a határciklus, a kvázi-periodikus és fáziszárt állapotok *reguláris attraktorok*, míg kaotikus állapotban a rendszernek *különös attraktorai* vannak (később tárgyaljuk). A kvázi-periodikus mozgás központi szerepet játszik a Hamiltoni rendszerekben, ilyenek például azon mechanikai rendszerek, amelyeket súrlódás nélkül modelleztünk, tehát a nem disszipatív (konzervatív) rendszerek. Ezeknek nincsenek attraktoraik.

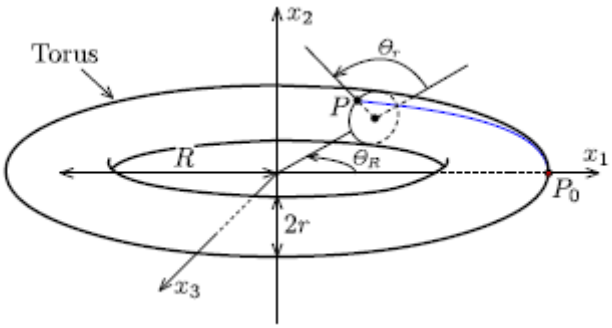
Nemlineáris rendszerek két frekvenciával. Kvázi-periodikus és fáziszárt mozgások előfordulnak a gyakorlatban olyan rendszerek esetén, amelyeknek sajátfrekvenciája és a rendszerre ható külső gerjesztő erő frekvenciája nem egyezik meg, vagy pedig két különböző sajátfrekvenciájuk van. A nemlinearitás miatt a különböző frekvenciákra nem érvényes a szuperpozíció elve. Induljunk ki az (1.22) egyenletből, és tegyük fel, hogy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \tag{1.23}$$

ahol $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ és $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ a periódusidői az egyes harmonikus oszcillációknak, p és q pedig pozitív egészek. Tegyük fel, hogy az összes közös szorzóval leegyszerűsítettünk a frekvenciahányadosban. Például, ha $f_1 / f_2 = 2/6$ akkor a 2, mint közös szorzót eltávolítjuk, és így $f_1 / f_2 = p/q = 1/3$ írható. Ha a frekvenciaarány két egész szám hányadosa, akkor ezt matematikai vonatkozásban racionális számnak hívjuk, ami azt jelenti, hogy a két frekvencia összemérhető, a rendszer viselkedése *periodikus*. Ez a *frekvenciazárt* állapot.

Másrészről, ha a hányados irracionális, akkor a két frekvencia nem arányos, a rendszer *kvázi-periodikus viselkedésű*. Az utóbbi két állítást könnyen megérthetjük, ha követjük a geometriai magyarázatot.

Geometriai értelmezés. Az 1.10. ábra mutat egy kétfrekvenciás kvázi-periodikus trajektóriát egy tórikus felületen a háromdimenziós állapottérben.



1.10. ábra: Kétfrekvenciás kvázi-periodikus trajektória a háromdimenziós állapottérben

Ha bevezetjük a következő két szöget $\theta_r = \omega_r t = \omega_1 t$ és $\theta_R = \omega_R t = \omega_2 t$, akkor ezek meghatározzák a trajektória egy pontját a tórusz felületén, feltéve, hogy a t = *0*-hoz tartozó P_0 kezdeti feltétel ismert. A tórusz közepe az origóban van, R a tórusz nagyobbik sugara, r pedig a keresztmetszetének sugara. A két szög θ_r *és* θ_R az idő előrehaladtával nő és emiatt a P pont a tórusz felületén mozog követve az $\boldsymbol{x}^T = [x_1,\ x_2,\ x_3]$ állapotvektor trajektóriáját. Az x állapotvektor három komponensét a következő egyenletek adják meg:

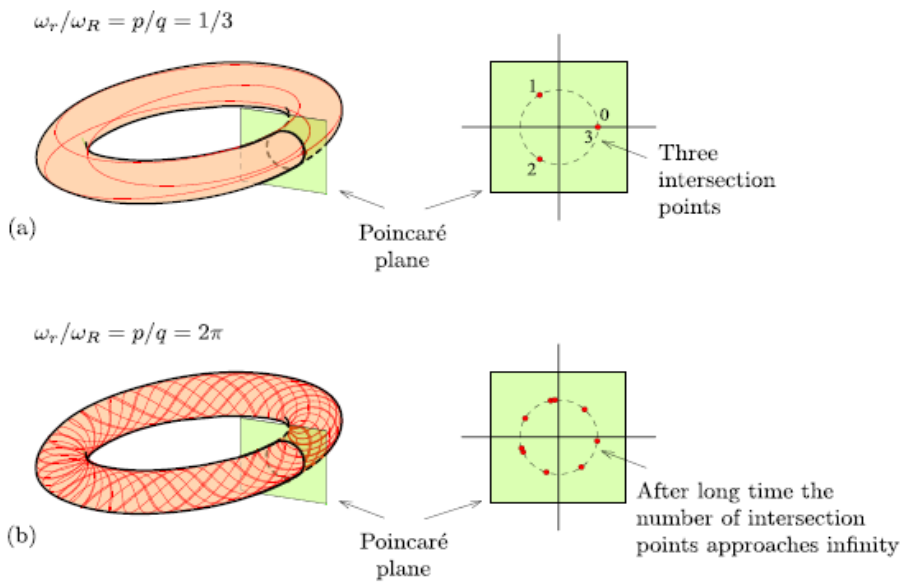
$$x_1 = (R + r \cdot cos\theta_r) \cdot cos\theta_R \tag{1.24.a}$$

$$x_2 = r \cdot sin\theta_r \tag{1.24.b}$$

$$x_3 = -(R + r \cdot cos\theta_r) \cdot sin\theta_R \tag{1.24.c}$$

A trajektória úgymond feltekeredik a tórusz r sugarú keresztmetszetére $\omega_R/2\pi$ időegységenkénti fordulattal. Mivel $\omega_r/\omega_R = p/q$ és feltéve, hogy p és q egész számok, az r és a R sugarú körök menti körülfordulások száma időegységenként p és q. Például, ha p=1 és q=3, akkor a P pont az R sugarú kör mentén három fordulatot tesz meg, míg az r sugarú kör mentén csak egyet. Az 1.11.(a) ábra mutatja a tóruszt és az őt metsző Poincaré-síkot. A Poincaré-síkon láthatóak a trajektóriával közös metszéspontjai. Ez esetben a p/q hányados egy racionális szám.

Másrészről, ha ez a hányados irracionális, például 2π, akkor amíg a P pont egyet fordul az R sugarú kör mentén, addig 2π fordulatot tesz meg a r sugarú kör mentén. A metszési pont fázistolása a Poincaré-síkon a P_0 kezdeti ponthoz képest mindig irracionális marad. Emiatt sohasem fog egybeesni a metszési pont P_0-lal, a trajektória sohase fog önmagába záródni. Ekkor a rendszer kvázi-periodikus állapotban van (1.11.(b) ábra).



1.11. ábra: Frekvenciazárt és kvázi-periodikus állapotok szemláltetése

1.6. Átmenet a káoszba

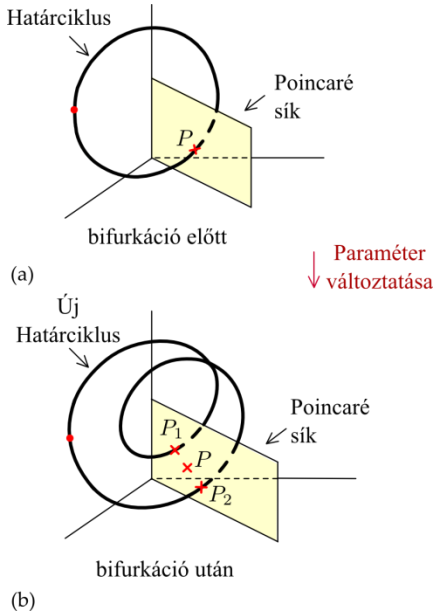
A káoszelmélet egyik nagy érdeme néhány tipikus út felfedése a szabályosból kaotikus állapotba. Fizikai megjelenésükben eléggé eltérő rendszerek is ugyanazt az utat mutatják. A káoszba való átmenetnek kész széles osztálya van: a helyi (lokális) és a globális bifurkációk. Az első esetben például egy egyensúlyi pont vagy határciklus elveszíti a stabilitását, ahogy a rendszer paramétereit változtatjuk. A helyi bifurkációknak három alosztálya van: periódusduplázás, kvázi-periodicitás és intermittencia. A leggyakoribb eset a periódusduplázódás. A második esetben, a globális bifurkáció nagyobb mértékű viselkedést jelent az állapottérben, több egyensúlyi pont és/vagy több határciklus veszti el a stabilitását. Két alosztálya van, a kaotikus tranziens és a krízis. Ez a fejezet csak a helyi bifurkációkkal foglalkozik.

A paraméterváltozás eredményeként létrejövő kvázi-periodikus út esetén a rendszer állapota először egyensúlyi pontból vált át határciklusba bifurkáción keresztül. Később ehhez hozzáadódik egy újabb frekvencia egy új bifurkáció által és a rendszer kvázi-periodikus állapotot mutat. Más szavakkal, két komplex konjugált sajátérték van az egységsugarú körön belül ebben az állapotban. Tovább változtatva a paramétert, a kaotikus állapotot tulajdonképpen a kvázi-periodikus állapotból érjük el.

Az intermittenciás út esetén a látszólagos periodikus és kaotikus állapotok váltakozva fejlődnek ki. A rendszer bizonyos intervallumokban periodikusnak tűnik, és hirtelen átvált robbanásszerűen a kaotikus állapotba. Az irreguláris mozgás lenyugszik és minden kezdődik elölről. Tovább változtatva a rendszer paramétereit a kaotikus állapotok hosszabbá válnak és végül a „periodikus” állapot nem áll vissza többé.

Periódusduplázásos bifurkáció. Vizsgáljuk a periódusduplázásos átmenetet, és feltételezzünk egy határciklust kiindulási állapotnak egy háromdimenziós rendszerben (1.12.

ábra). A trajektória a Poincaré síkot a P pontban metszi. Ahogy változtatjuk a rendszerparamétert, a Poincaré leképezés Jacobi mátrix P fixponthoz tartozó λ_1 sajátértéke a negatív valós tengely mentén mozog az egységsugarú körön belül. Közelít a -1 ponthoz, és az egységsugarú kört ebben a λ_1=-1 pontban metszi. A sajátérték ezek után kijut az egységkörből, a P fixpont elveszti a stabilitását az első iterációs lépésben. Ezzel egyidejűleg két új stabil fixpont (P_1 és P_2) jön létre a második iterációs lépésben, a két sajátérték meg fog egyezni λ_2= λ_3. A bifurkációs pontban az értékük +1, és ahogyan a rendszerparaméter tovább változik úgy egyre kisebb lesz. λ_2= λ_3 tovább halad a valós tengely mentén az origó felé. Folytatva a paraméterváltozást, újabb bifurkáció jön létre az előző minta alapján és a trajektória immáron a Poincaré-síkot négy helyen fogja metszeni (2x2) egy periódusban. A periódusduplázási folyamat tovább folytatódik, de a különbség két egymást követő bifurkáció között mind kisebbé és kisebbé válik.



1.12. ábra: Periódusduplázásos bifurkáció

Periódusduplázás általánosságban. A periódus duplázódás forgatókönyve a 1.13. ábrán látható, ahol μ a rendszer paramétere (az úgynevezett bifurkációs paraméter), x a rendszer fixponthoz tartozó egyik állapotváltozója vagy még általánosabban a trajektória metszési pontjai a Poincaré síkkal a tranziens folyamathoz tartozó metszési pontok kivételével. Ezen ok miatt a diagramot néha hívják végállapot diagramnak is. A gyakrabban használt „*bifurkációs diagram*" név a fellelhető bifurkációs pontokra utal.

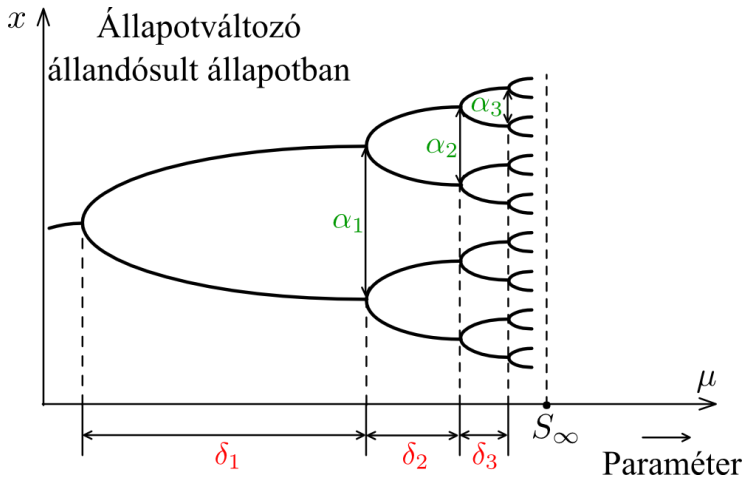
M. Feigenbaum bebizonyította, hogy két egymást követő bifurkációs pont között a μ paraméter tengelye mentén mért távolság egy konstans számhoz tart ahogy a bifurkáció rendje (k-val jelölve) tart a végtelenhez:

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k}{\delta_{k+1}} = 4{,}6693 \qquad (1.25)$$

ahol δ az úgynevezett Feigenbaum konstans. Felfedezték azt is, hogy az x tengely mentén mért bifurkációs pontok távolságának aránya pedig egy másik konstans számhoz tart, az úgynevezett Feigenbaum α-hoz:

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = 2{,}5029 \tag{1.26}$$

δ egy univerzális konstans a káoszelméletben, mint más alapvető számok, például a π, az e=2,7172.



1.13. ábra: Bifurkációs diagram

1.9. Kaotikus állapot

A kaotikus állapot csak nemlineáris rendszerekben jöhet létre. A létrejöttéhez szükséges feltételek a következők: legalább három vagy nagyobb dimenziójú autonóm rendszer és legalább kettő vagy nagyobb dimenziójú nem-autonóm rendszer, feltéve, hogy folytonos idő-modellel leírhatóak (CTM). Másrészről, ha diszkrét modellt használunk (DTM), két vagy több dimenzió elég invertálható iteratív függvényekhez és csak egy dimenzió vagy több a nem-invertálható rendszerekhez. Ezeken felül még néhány kvalitatív tulajdonság közös a kaotikus rendszerekben:

- a rendszerek determinisztikusak, az őket leíró egyenleteket teljesen ismerjük
- rendkívül érzékenyen függenek a kezdeti feltételektől
- egymás közelében lévő trajektóriák exponenciális távolodása a káosz egyik jele
- noha a rendszerek determinisztikusak, a viselkedésük hosszú távon megjósolhatatlan
- kaotikus állapotban a trajektóriák nem periodikusak, korlátosak, nem lehet újra produkálni őket és nem metszik egymást
- a trajektóriák mozgása véletlenszerű, a mögötte fellelhető renddel és szerkezettel

Amint már említve volt, a kezdeti feltételekből kiinduló trajektóriák disszipatív rendszerekben a tranziens folyamatot követően vagy a fixpontjukhoz, vagy határciklusukhoz, vagy kvázi-periodikus görbéikhez tartanak. Mindegyiket attraktornak vagy klasszikus attraktornak hívjuk, mivel a rendszer e három állapot valamelyikéhez tart. Ha a kaotikus állapot kialakul egy rendszerben, akkor is előbb utóbb elér egy attraktort a trajektóriája, az úgynevezett furcsa attraktort. A háromdimenziós térben a klasszikus

attraktorokhoz valamilyen geometriai formát rendelünk, a stacionárius állapothoz pontot, a határciklushoz egy zárt görbét és a kvázi-periodikus állapothoz egy felületet. A furcsa attraktorhoz ezzel szemben egy új geometriai forma, a *fraktálszerkezet* tartozik.

Lyapunov exponens. Koncepcionálisan a Lyapunov exponens egy kvalitatív teszt a rendszer kezdeti feltételekre való érzékenységére. A kaotikus rendszerek egyik tulajdonsága az exponenciális széttartása a közeli trajektóriának. A számítási metódus is általában erre a tulajdonságra épít, hogy meghatározza a λ Lyapunov exponenst.

A disszipatív rendszerekben a tranziens folyamat után a trajektóriák mindig megtalálják a speciális kezdeti feltételükhöz tartozó attraktort. Általánosságban az attraktort mint referencia trajektóriát használjuk λ számítására. Két közeli, egymástól d_0 távolságra lévő kezdeti pontból kiinduló trajektóriák közötti d távolságot a következő egyenlet adja meg:

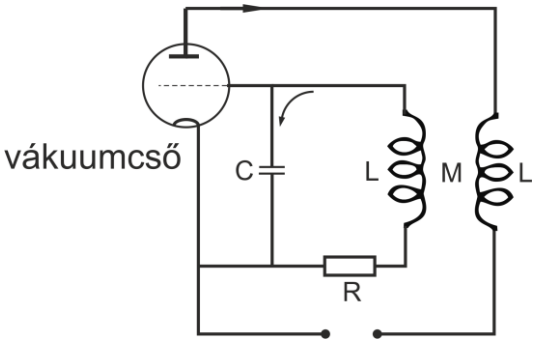
$$d = d_0 \cdot e^{\lambda t} \tag{1.27}$$

ahol λ a Lyapunov exponens. Az egyik kezdőpont az attraktoron van. Az egyenlet csak lokálisan lehet igaz, mert a kaotikus rendszerek korlátosak, d(t) nem nőhet a végtelenségig. A λ értéke függhet az attraktoron lévő kezdeti ponttól. Ahhoz, hogy egy attraktort egy Lyapunov exponenssel jellemezzünk, a fenti számítást nagyszámú, az attraktor mentén elosztott kezdeti feltételre meg kell ismételni. Végezetül a különböző értékekből számolt átlagos $\overline{\lambda}$ Lyapunov exponens fogja jellemezni a rendszert. A káosz kritériuma a $\overline{\lambda} > 0$. Ha $\overline{\lambda} \leq 0$, akkor a rendszer reguláris állapotban van.

II. A van der Pol oszcillátor

2.1. Bevezetés

A fejezet során bemutatásra kerülő nemlineáris egyenlet hosszú történetre tekint vissza. Az 1920-as években Balthasar Van der Pol[1] holland fizikus használta először egy vákuumcsöves elektronikus áramkör *(2.1. ábra)* működésének leírásához. Van der Pol vákuum csöveket (úgynevezett triódákat) tartalmazó elektronikus áramköröket vizsgált és azt találta, hogy stabil oszcillációikkal rendelkeznek, amelyeket határciklusoknak nevezünk. A vákuumcső úgy működött, mint egy szelep, amelynek kinyitását a vezérlőfeszültséggel lehetett szabályozni.



2.1. ábra: Vákuumcsöves van der Pol oszcillátor

A fejezet első része az egyenlet analitikus vizsgálatát mutatja be, míg a következő rész a Mathematica programban numerikus számítással kapott eredményeket tárgyalja a paraméterek függvényében. A fejezet utolsó része a van der Pol-oszcillátort megvalósító analóg áramkör felépítését mutatja be PSpice programban és a laboratóriumban.

2.2. Az egyenlet analitikus vizsgálata

Van der Pol a trióda csövön átáramló elektromos töltést *q(t)*-vel jelölve, a következő, lineáris, csillapított, harmonikus lengőmozgáshoz hasonló egyenlettel fejezte ki a töltések időbeli viselkedését:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 \qquad (2.1)$$

ahol γ az úgynevezett csillapítási tényező, ami a csillapítási vagy disszipációs energiát jelképezi. ω az a körfrekvencia, amellyel a töltés lengene csillapítatlan esetben. [3] Van der Pol úgy modellezte a trióda csövet, hogy a γ csillapítási paraméter függjön a q töltés

[1] Balthasar van der Pol (1889-1959) holland fizikus. Utrechtben tanult fizikát, 1920-ban megszerezte a doktorátusát. Fő kutatási területe a rádióhullámok terjedése, az elektronikus áramkörök elmélete volt. 1935-ben elnyerte az akkori Institute of Radio Engineers (ma IEEE) érdemrendjét. Érdekességképpen az 10443-as számú aszteroidát róla nevezték el.

mennyiségétől. Kis q értékekre a cső növeli a rezgések amplitúdóját az áramkör erősítő jellege miatt. Nagy q értékekre viszont a rezgő q töltés mennyiségét behatárolja az úgynevezett telítési hatás, mivel a vákuumcső és a környező áramkör csak egy bizonyos töltésmennyiséget képes szolgáltatni adott időperiódus alatt. Ezt a viselkedést úgy modellezte, hogy γ-t q-tól függővé tette oly módon, hogy kis q értékekre γ kisebb, mint 0 legyen. Az így létrejövő negatív „disszipáció" azt jelenti, hogy a rezgőmozgás amplitúdója nő ahelyett, hogy lecsengene. Nagy q értékekre pedig γ pozitívvá válik, ami pedig a lengő töltés energia disszipációját jelképezi.

Ennek modellezésére van der Pol a következő összefüggést választotta:

$$\gamma = -\gamma_0\left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right) \tag{2.2}$$

A továbbiakban $\gamma_0 > 0$ választással élve:

Ha $q < q_0$, akkor $1 - \frac{q^2}{q_0^2} = \frac{q_0^2 - q^2}{q_0^2} > 0 \longrightarrow -\gamma_0\left(\frac{q_0^2 - q^2}{q_0^2}\right) < 0$ γ negatív.

Ha $q > q_0$, akkor $1 - \frac{q^2}{q_0^2} = \frac{q_0^2 - q^2}{q_0^2} < 0 \longrightarrow -\gamma_0\left(\frac{q_0^2 - q^2}{q_0^2}\right) > 0$ γ pozitív.

Behelyettesítve a (2.2) egyenletet a (2.1) egyenletbe:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \gamma_0\left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right)\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 \tag{2.3}$$

A (2.3) egyenletet ω^2-tel osztva és átrendezve:

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2q}{dt^2} - \left(\frac{\gamma_0}{\omega} - \frac{\gamma_0}{\omega}\frac{q^2}{q_0^2}\right)\frac{1}{\omega}\frac{dq}{dt} + q = 0 \tag{2.4}$$

Bevezetve a következő változókat és a τ-val jelölt dimenziótalan időt:

$$Q = \frac{q}{q_0}\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}} \tag{2.5a}$$

$$R = \frac{\gamma_0}{\omega} \tag{2.5b}$$

$$\tau = \omega t \tag{2.5c}$$

A (2.4) egyenlet tovább alakítható:

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} - (R - Q^2)\frac{dq}{d\tau} + q = 0 \tag{2.6}$$

A q és Q változók idő szerinti deriváltjai:

$$Q = \frac{q}{q_0}\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}} \longrightarrow q = \frac{Q \cdot q_0}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}}}$$

$$\dot{Q} = \frac{\dot{q}}{q_0}\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}} \longrightarrow \dot{q} = \frac{\dot{Q}\cdot q_0}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}}}$$

mivel $\gamma_0,\ q_0$ $és$ ω nem függenek az időtől.

Az előzőek alapján a (2.6) egyenlet kifejezhető:

$$\left(\frac{Q\cdot q_0}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}}}\right)\cdot\frac{d^2Q}{d\tau^2} - \left(R - Q^2\right)\left(\frac{Q\cdot q_0}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}}}\right)\frac{dQ}{d\tau} + \left(\frac{Q\cdot q_0}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{\omega}}}\right)Q = 0 \tag{2.7}$$

A szögletes zárójelben lévő konstansokkal egyszerűsítve a Van der Pol egyenlet a következő formában fejezhető ki:

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2} - (R - Q^2)\frac{dQ}{d\tau} + Q = 0 \tag{2.8}$$

Bevezetve az $I = \dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau}$ változót a (2.8) egyenlet két darab elsőrendű differenciálegyenletté alakítható a következőek szerint:

$$\dot{Q} \equiv f_1(Q, I) = I \tag{2.9}$$

$$\dot{I} \equiv f_2(Q, I) = (R - Q^2)I - Q \tag{2.10}$$

Egyensúlyi pontok és stabilitásuk. Definíció szerint az egyensúlyi pontokban az állapotváltozók deriváltjai zérus. Ezek alapján:

$$f_1(Q, I) = 0 \qquad\qquad f_2(Q, I) = 0$$

$$I = 0 \qquad\qquad (R - Q^2)I - Q = 0$$

$$ha\ I = 0, akkor\ Q = 0$$

Tehát a rendszerre jellemző egyetlen fixpont az *Q = 0, I = 0* koordinátájú pont, amely az oszcilláció nélküli állapotra vonatkozik. A fix pont stabilitásvizsgálatához a Jacobi mátrix sajátértékeit kell meghatározni az egyensúlyi pontban. Fontos kiemelni, hogy az egyensúlyi helyzetek és pontok környezetében történő kis mozgásokat/rezgéseket vizsgáljuk.

Felhasználva a Jacobi mátrix definícióját (1.7-es egyenlet):

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2QI - 1 & R - Q^2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Ennek értéke az egyensúlyi pontban:

$$\underline{\underline{J}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2QI - 1 & R - Q^2 \end{pmatrix}_{|\substack{Q=0 \\ I=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & R \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

A Jacobi mátrix sajátértékei és sajátvektorai:

$$\det\left(\underline{\underline{E}}\cdot\lambda-\underline{\underline{J_1}}\right)=0 \tag{2.13}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda-R\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-R)+1=\lambda^2-R\lambda+1=0$$

A másodfokú egyenlet megoldása:

$$\lambda_{1,2}=\frac{R\pm\sqrt{R^2-4}}{2} \tag{2.14}$$

<u>Különböző R értékekre a következőképpen alakul az egyensúlyi pont stabilitása:</u>

- $R<0\longrightarrow$ mivel R a definíció szerint pozitív, így ez az eset kizárható. Ha mégis megengednénk, akkor a negatív valós rész és a képzetes rész jelenléte miatt az egyensúlyi pont *stabil fókusz* lenne
- $R=0\longrightarrow$ ez az érték csak határátmenetben létezik, ha $\omega\to\infty$ vagy ha $\gamma_0\to 0$, tehát ha nagyon nagy a rendszer sajátkörfrekvenciája vagy nagyon kicsi a csillapítása. Ebben az elméleti esetben egy *centrumról* van szó, mivel a sajátértékek tisztán képzetesek. Ez egy stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis állapot.
- $0<R<2\longrightarrow$ A diszkrimináns képzetes, tehát komplex konjugált gyökpárról van szó. Mivel $Re(\lambda_{1,2})>0$ az egyensúlyi pont egy *instabil fókusz.*
- $R=2\longrightarrow$ ekkor a diszkrimináns nulla, ami azt jelenti, hogy mindkét gyök ugyanakkora. Mivel $Re(\lambda_{1,2})>0$ instabil csomópontról van szó
- $R>2\longrightarrow$ $Re(\lambda_{1,2})>0$ és mivel nincs képzetes része a sajátértéknek, ezért az egyensúlyi pont egy instabil csomópont

Ezek alapján a csak határátmenetben létező $R=0$ esetet kivéve a van der Pol egyenlet egyensúlyi pontja instabil. Azonban e fixpont stabilitásának elemzése nem határozza meg egyértelműen azt, hogy mi történik azokkal az instabil trajektóriákkal, amelyeket eltaszít magától.

Fizikai korlátok miatt ezen trajektóriák nem kerülhetnek túl messze a (0,0) ponttól, hiszen ha a csillapítási tag pozitívvá válik a hozzá kapcsolódó disszipációs energia korlátozni fogja a trajektória kiterjedését. A van der Pol egyenlet megoldása a kezdeti értéktől függetlenül egy állandósult rezgőmozgás lesz függetlenül attól, hogy nincs gerjesztés. Ez az állandósult rezgőmozgás, melynek képe az állapotváltozók fázissíkján (állapotsíkon) egy zárt trajektória a már a bevezetőben is említett, kizárólag nemlineáris rendszerekre jellemző *határciklus.* [4]

A rendszer energiájának vizsgálata. A határciklus megértéséhez vizsgáljuk az oszcillátor energiájának időfüggését. Felírva a rendszer energiáját egy mechanikus oszcillátor a kinetikus és potenciális energiával analóg módon.

$$W(I,Q)=\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{2.15}$$

L jelöli a rezgőkör induktivitását és C pedig a kapacitását. Az egységek tetszőlegesen megválaszthatóak, például L = 1 és C = 1-nek. Ezek alapján az energia időbeli változásának mértéke:

$$\frac{dW}{d\tau} = I\frac{dI}{d\tau} + Q\frac{dQ}{d\tau} \tag{2.16}$$

Felhasználva a (2.9) és (2.10) egyenleteket I és Q deriváltjaira a (2.16) egyenlet tovább alakítható:

$$\frac{dW}{d\tau} = I[(R - Q^2)I - Q] - QI = I^2R - I^2Q^2 - QI + QI$$

$$\frac{dW}{d\tau} = I^2(R - Q^2) \tag{2.17}$$

Átlagolva ezt az energiaváltozást egy rezgési periódusra:

$$\overline{\frac{dW}{d\tau}} = \overline{RI^2} - \overline{I^2Q^2} = \overline{R\dot{Q}^2} - \overline{\dot{Q}^2Q^2} \tag{2.18}$$

ahol a felső vonás jelöli a tagok időbeli átlagát. Pontosabban az egyenletet egy rezgési periódusra nézve átlagolhatjuk, amelyet rövidnek feltételezzük az $1/\gamma_0$ csillapítási időhöz képest. A jobb oldali első tag az energiatermelés mértékének időbeli átlagát jelenti. Természetesen, az energiát az áramkörhöz tartozó tápegység szolgáltatja. A negatív előjelű második tag jelöli az energia disszipáció mértékét. Állandósult állapot akkor érhető el, ha ez a két tag egyensúlyba kerül.

Harmonikus rezgőmozgást feltételezve a töltés időfüggvénye a következőképpen írható le:

$$Q(t) = Q_0 sin(\omega t) = Q_0 sin\tau \tag{2.19}$$

Behelyettesítve a (2.19) egyenletet a (2.18) egyenletbe meghatározható, miként függ a rezgőmozgás amplitúdója R-től. Ehhez a következő időbeli átlagolások szükségesek:

$$\dot{Q}(t) = Q_0\omega \cdot cos(\omega t)$$

$$\overline{\dot{Q}^2} = \overline{\left(Q_0\omega \cdot cos(\omega t)\right)^2} = \overline{{Q_0}^2\omega^2 \cdot cos^2(\omega t)}$$

Mivel Q_0 és ω időtől függetlenek, ezért időbeli átlaguk saját maguk.

A levezetés során felhasználva a $cos^2(\omega t) = \frac{1+cos(2\omega t)}{2}$ trigonometriai azonosságot:

$$\overline{cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos^2(\omega t)\, d\omega t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{cos(2\omega t)}{2}\right) d\omega t = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\omega t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{sin(2\omega t)}{4}\right]_0^{2\pi}\right)$$

$$\overline{cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\dot{Q}^2} = \frac{1}{2}\omega^2 Q_0^2 \tag{2.20}$$

$$\overline{\dot{Q}^2 \cdot Q^2} = \overline{\left[{Q_0}^2\omega^2 \cdot cos^2(\omega t)\right] \cdot \left[{Q_0}^2 sin^2(\omega t)\right]}$$

Mivel Q_0 és ω időtől függetlenek, ezért elég a következőt meghatározni:

$$\overline{cos^2(\omega t)\cdot sin^2(\omega t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos^2(\omega t)\cdot sin^2(\omega t)\, d\omega t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{cos(2\omega t)}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{cos(2\omega t)}{2}\right) d\omega t$$

$$\overline{cos^2(\omega t)\cdot sin^2(\omega t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{cos^2(2\omega t)}{4}\right) d\omega t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{cos(4\omega t)}{8}\right) d\omega t = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\omega t}{8}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{sin(4\omega t)}{32}\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{8}+0\right) = \frac{1}{8}$$

$$\overline{\dot{Q}^2\cdot Q^2} = \frac{1}{8}\omega^2 Q_0^4 \tag{2.21}$$

Mint ahogy korábban írtam, állandósult állapotban $\frac{dW}{d\tau} = 0$ a (2.18) egyenletben. Kifejezve ezt az egyenletet a (2.20) és (2.21) egyenletek behelyettesítésével:

$$\overline{R\dot{Q}^2} = \overline{\dot{Q}^2 Q^2} \tag{2.22}$$

$$R\frac{1}{2}\omega^2 Q_0^2 = \frac{1}{8}\omega^2 Q_0^4$$

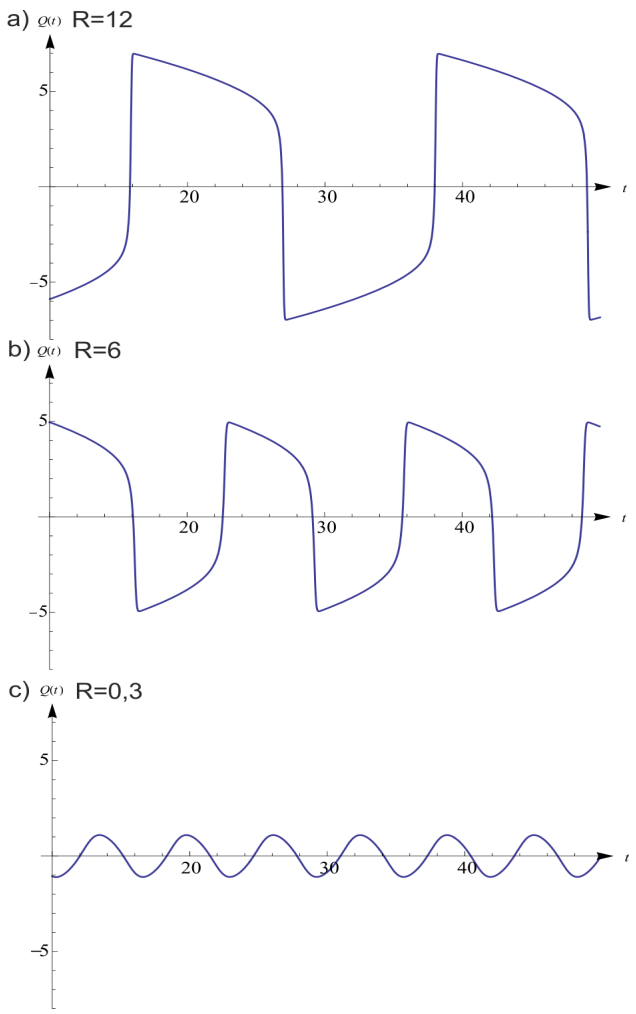
$$R = \frac{1}{4}Q_0^2$$

$$Q_0 = 2\sqrt{R} \tag{2.23}$$

Kicsi R értékek mellett a töltés szinuszosan fog oszcillálni. Ez a rezgés az állapotsíkon egy $2\sqrt{R}$ sugarú közelítőleg kör alakú trajektóriának feleltethető meg.

Növelve R értékekét a rezgés eltorzul, és egyre jobban eltér a harmonikus rezgéstől. Ezeket a rezgések, amelyek hirtelen váltanak egyik szélsőértékükből a másikba, van der Pol alapján *„relaxációs oszcillációknak”* nevezik. A jelenség R=12 esetre a 2.2.a ábrán látható. Minden egyes ciklusban Q(t) lassan lecsökken +7-ről +4-re, majd hirtelen átvált -7 értékre nagyon rövid idő alatt. A periódus második felében Q(t) lassan növekszik -7-ről -4 értékig, majd hirtelen visszaált +7 értékre, és a jelenség megismétlődik. Minél nagyobbnak választjuk R értékét, annál gyorsabban történik meg a két szélsőérték között a váltás, és annál nagyobb a rezgés periódusideje. Ezt a jelenséget szemlélteti a 2.2.b ábra az előzőhöz képest fele akkora R értékre. Amikor R értéke kicsi, akkor a már korábban feltételezett szinuszoshoz közelítő időfüggvényt kapunk, amely a 2.2.c ábrán látható.

A határciklus stabilitása. A határciklus lehet stabilis illetve labilis. A határciklus stabilis, ha kis mértékben kimozdítjuk a rendszert és az visszatér a határciklusba. Ellenkező esetben labilis. A határciklus stabilitásvizsgálatának egyik igen gyakran alkalmazott módszere az úgynevezett „lassan változó amplitúdó és fázis módszere”. A módszer másik elnevezése KBM átlagoló módszer, ahol a rövidítés a módszert megalkotó *Krylov, Bogoliubov* és *Mitropusky* orosz matematikusokra utal.



2.2. ábra: Relaxációs oszcilláció

Átrendezve a (2.8) egyenletet:

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2} + Q = (R - Q^2)\frac{dQ}{d\tau} \tag{2.24}$$

Ha ennek az egyenletnek a jobb oldala zérus lenne, akkor Q időben szinuszosan rezegne. Ebből kiindulva, továbbra is kis R értéket feltételezve a következő kifejezést írható fel Q-ra és idő szerinti deriváltjára.

$$Q(\tau) = a(\tau) \cdot \sin(\tau + \phi(\tau)) \tag{2.25a}$$

$$\dot{Q}(\tau) = a(\tau) \cdot \cos(\tau + \phi(\tau)) \tag{2.25b}$$

ahol $a(\tau)$ az időben változó amplitúdó és $\phi(\tau)$ időben változó fázisszög, melyeket úgy kell definiálni, hogy a (2.25) egyenletek igazak maradjanak, hiszen a (2.25a) egyenlet deriválásából nem következik egyértelműen a (2.25b) egyenlet.

Ahhoz azonban, hogy ezek a kifejezések konzisztensek legyenek az általános deriváltakkal, a következő egyenlőségnek teljesülnie kell:

$$\dot{a} \cdot \sin(\tau + \phi) + a \cdot \cos(\tau + \phi) \cdot \left(\dot{\phi} + 1\right) = a \cdot \cos(\tau + \phi) \tag{2.26}$$

A baloldali kifejezés (2.25a) deriválásából jön, míg a jobboldali a (2.25b) egyenlet.

$$\dot{a} \cdot \sin(\tau + \phi) + a \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\tau + \phi) = 0 \tag{2.27}$$

A (2.27) egyenlet fejezi ki azt a feltételt, aminek teljesülnie kell $a(\tau)$ és $\phi(\tau)$ változókra.

Kiszámolva Q második deriváltját a (2.25b) egyenlet deriválásával:

$$\ddot{Q} = \dot{a} \cdot \cos(\tau + \phi) - a \cdot \sin(\tau + \phi) \cdot \left(\dot{\phi} + 1\right) \tag{2.28}$$

Behelyettesítve (2.25) és (2.28) egyenleteket (2.24)-be:

$$\ddot{Q} + Q = (R - Q^2) \cdot \dot{Q}$$

$$\dot{a} \cdot \cos(\tau + \phi) - a \cdot \sin(\tau + \phi) \cdot \left(\dot{\phi} + 1\right) + a \cdot \sin(\tau + \phi) = [R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)]a \cdot \cos(\tau + \phi)$$

$$\dot{a} \cdot \cos(\tau + \phi) - a \cdot \sin(\tau + \phi) \cdot \dot{\phi} = [R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)] \cdot a \cdot \cos(\tau + \phi) \tag{2.29}$$

Az $\dot{a}$ és $\dot{\phi}$ változók kifejezéséhez szorozzuk meg első lépésben a (2.27) egyenletet $\sin(\tau + \phi)$-vel, a (2.29) egyenletet pedig $\cos(\tau + \phi)$-vel.

$$\dot{a} \cdot \sin^2(\tau + \phi) + a \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\tau + \phi) \sin(\tau + \phi) = 0$$

$$\dot{a} \cdot cos^2(\tau + \phi) - a \cdot \sin(\tau + \phi) \cos(\tau + \phi) \cdot \dot{\phi} = [R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)] \cdot a \cdot \cos^2(\tau + \phi)$$

Az eredményül kapott két egyenlet összege:

$$\dot{a} \cdot [\sin^2(\tau + \phi) + cos^2(\tau + \phi)] = [R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)] \cdot a \cdot \cos^2(\tau + \phi)$$

Felhasználva a $\sin^2(\tau + \phi) + cos^2(\tau + \phi) = 1$ trigonometriai azonosságot, a következő alak adódik $\dot{a}$-ra:

$$\dot{a} = [R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)] \cdot a \cdot \cos^2(\tau + \phi) \tag{2.30a}$$

Második lépésként a (2.27) egyenletet $\cos(\tau + \phi)$-vel, a (2.29) egyenletet pedig $(-\sin(\tau + \phi))$-vel szorozva:

$$\dot{a} \cdot \sin(\tau + \phi) \cos(\tau + \phi) + a \cdot \dot{\phi} \cdot \cos^2(\tau + \phi) = 0$$

$$\dot{a} \cdot \cos(\tau + \phi)\,(-\sin(\tau + \phi)) + a \cdot \sin^2(\tau + \phi) \cdot \dot{\phi} = [R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)] \cdot a \cdot \cos(\tau + \phi)(-\sin(\tau + \phi))$$

A két egyenlet összege:

$$a \cdot \dot{\phi} \cdot [\sin^2(\tau + \phi) + \cos^2(\tau + \phi)] = -[R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)] \cdot a \cdot \cos(\tau + \phi) \sin(\tau + \phi)$$

$$\dot{\phi} = -[R - a^2 \cdot \sin^2(\tau + \phi)] \cdot \cos(\tau + \phi) \sin(\tau + \phi) \tag{2.30b}$$

Jól látható, hogy a (2.30) egyenletrendszer pontosan ekvivalens a (2.24) kiindulási egyenlettel, hiszen eddig a pontig nem éltünk közelítésekkel. Fontos megjegyezni, hogy ha egy trajektória elég közel kerül a határciklushoz, akkor az „a” amplitúdója és a „Φ” fázisa csak lassan fog változni a rezgés periódusának időskáláján. Emiatt az idő szerinti deriváltjai e mennyiségeknek közel nullának tekinthetőek egy lengési periódusra nézve. Ezeket a kijelentéseket alkalmazva a határciklus közeli trajektóriákra, közelítő egyenleteket kaphatunk az amplitúdóra és fázisra a (2.30) egyenletek bal oldalának egy periódusra vett

integrálásával, konstansnak feltételezve az „a” amplitúdót és a „Φ” fázist. Az integrálások elvégzéséhez, a következő segédintegrálásokra van szükség:

a) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos^2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin^2\tau \cdot cos^2\tau\, d\tau = \frac{1}{8}$ (2.31)

c) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin^2\tau \cdot sin\tau \cdot cos\tau\, d\tau = ?$

Az a) és b) integrálásokat levezetése már korábban szerepelt $\tau = \omega t$ helyettesítéssel, így csak a c) integrál értékét kell meghatározni:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin^2\tau \cdot sin\tau \cdot cos\tau\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin^2\tau \cdot \frac{\sin(2\tau)}{2} d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\tau)}{2}\right)\cdot\frac{\sin(2\tau)}{2} d\tau =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(2\tau)}{4} - \frac{\sin(4\tau)}{8}\right) d\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(2\tau)}{8} - \frac{\cos(4\tau)}{32}\right]_0^{2\pi} = 0$$

A kiszámítás során felhasználva a $sin^2\tau = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\tau)}{2}$ és $sin\tau \cdot cos\tau = \frac{\sin(2\tau)}{2}$ trigonometriai azonosságokat.

Alkalmazva a (2.31)-es egyenleteket a (2.30) egyenletekben:

$$\dot{a} = \overline{R \cdot a \cdot \cos^2(\tau+\phi) - a^3 \cdot \sin^2(\tau+\phi) \cdot \cos^2(\tau+\phi)}$$

$$\dot{a} = R \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{a}{2}\left(R - \frac{a^2}{4}\right) \quad (2.32a)$$

$$\dot{\phi} = \overline{-R \cdot \cos(\tau+\phi)\sin(\tau+\phi) + a^2 \cdot \sin^2(\tau+\phi) \cdot \cos(\tau+\phi)\sin(\tau+\phi)}$$

$$\dot{\phi} = 0 + 0 = 0 \quad (2.32b)$$

Amikor egy trajektória eléri a határciklust, $\dot{a} = 0$ lesz:

$$\frac{a}{2}\left(R - \frac{a^2}{4}\right) = 0$$

$$a = 2\sqrt{R} \quad (2.33)$$

A KBM módszer segítségével ugyanaz az érték jön ki a rezgés amplitúdóra, mint előzőleg a (2.23) egyenletben a rendszer energiájának vizsgálatával. A most bemutatott módszer segítségével meghatározható az a sebesség is, amivel egy közeli trajektória megközelíti a határciklust. A megközelítés mértékének megállapításához fejtsük Taylor-sorba az elsőrendű tagig a (2.32a) egyenlet jobb oldalát a határciklus $a^* = 2\sqrt{R}$ értéke körül.

$$\dot{a} = f(a) = f(a^*) + \frac{df}{da}(a - a^*) + \ldots \quad (2.34)$$

$$\left.\frac{df}{da}\right|_{a=2\sqrt{R}} = \left.\left[\frac{R}{2} - \frac{3a^2}{8}\right]\right|_{a=2\sqrt{R}} = \frac{R}{2} - \frac{12R}{8} = -R \quad (2.35)$$

$$\dot{a} = -R(a - a^*) \quad (2.36)$$

ahol $a^* = 2\sqrt{R}$. Az egyenlet egy elsőrendű differenciálegyenlet, amelynek megoldása egy exponenciális függvény, mégpedig negatív kitevővel. Ez azt jelenti, hogy a trajektória exponenciálisan közelíti meg a határciklust. Az *a(τ)* amplitúdó és az *a** határciklus amplitúdó közötti különbséget *d(τ)*-val jelölve a (2.36) egyenlet a következő formát ölti:

$$d(\tau) = d_0 e^{-R\tau} \quad (2.37)$$

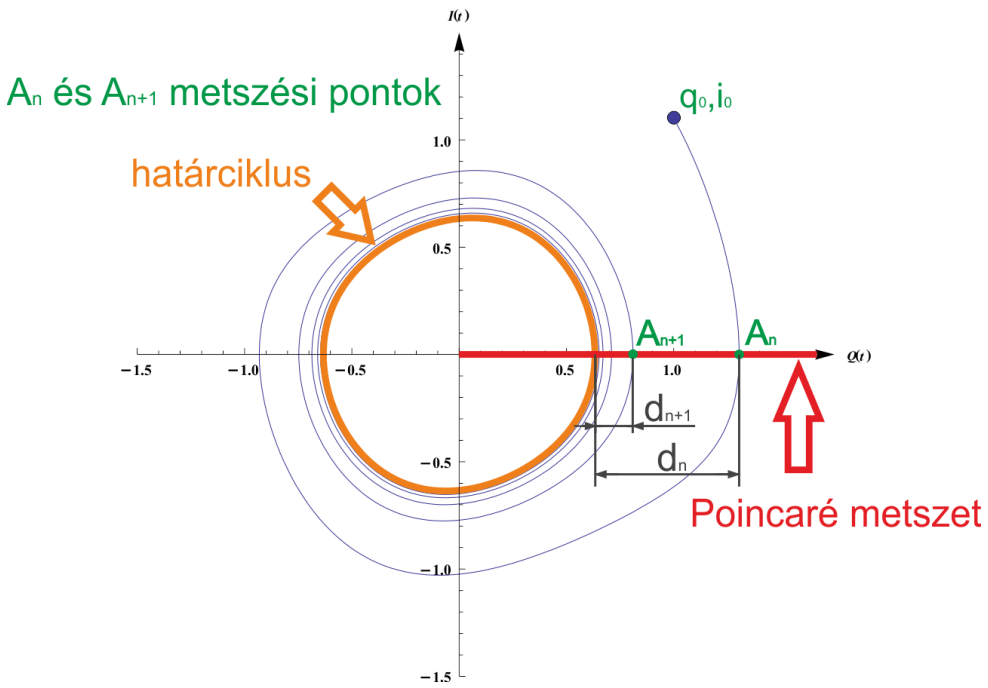
ahol d_0 a differencia kezdeti értéke τ=0-ban. Következtetésként levonható, hogy a határciklus stabil, mert a határciklus mindkét oldalán elhelyezkedő trajektóriák megközelítik azt bizonyos τ idő elteltével.

A (2.37) egyenlet felhasználható a van der Pol-oszcillátor egy közelítő Poincaré-térkép függvényének meghatározásához. A Poincaré-metszet legyen a pozitív Q tengely az állapotsíkon. Ekkor az *a(τ)* trajektória megadja azon pont helyét, ahol a trajektória áthalad ezen a metszeten *(2.3. ábra)*.

Egy periódust vizsgálva és felhasználva, hogy $\tau = \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$, a két metszés között eltelt idő $\tau = 2\pi$ lesz az általunk választott időegységben. A (2.37) egyenletet tovább gondolva, az megadja a Poincaré-leképezést a határciklus amplitúdójától mért távolsággal kifejezve:

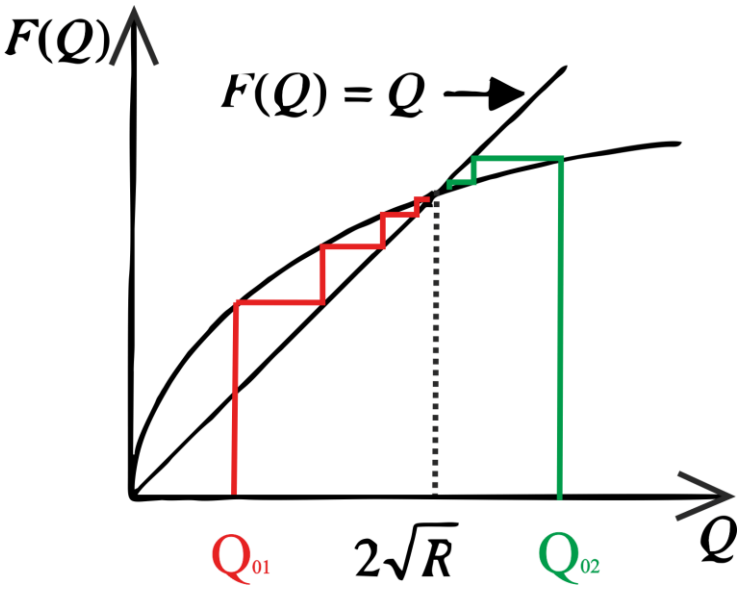
$$d_{n+1} = d_n e^{-2\pi R} \tag{2.34}$$

Azért került 2π a kitevőbe, mert periódusonként egyszer veszünk „mintát” a függvényünkből, és a periódusidő pedig 2π. A határciklussal való metszéspont, amire $d_n=0$, láthatjuk, hogy egy stabil fixpontja a Poincaré-leképezésnek, mivel d_{n+1} is zérus lesz, tehát a pontból nem mozdulunk el az iterációs lépések során.



2.3. ábra: Poincaré metszet és metszési pontok

Vizsgáljuk meg grafikus módszerrel is a van der Pol oszcillátor Poincaré függvényét. A *2.4. ábrán* látható az *F(Q)* Poincaré-függvény kis *R* értékekre. A határciklust a 45 % meredekségű egyenes és a Poincaré-leképezés metszéspontjában kapjuk. Két kezdeti értékre Q_{01} és Q_{02} is megvizsgálva a viselkedést látható grafikusan is, hogy a határciklust mindkét oldalról megközelítik a kezdeti feltételekből indított trajektóriák, míg az instabil egyensúlyi pontba (0,0) egyik sem tart.

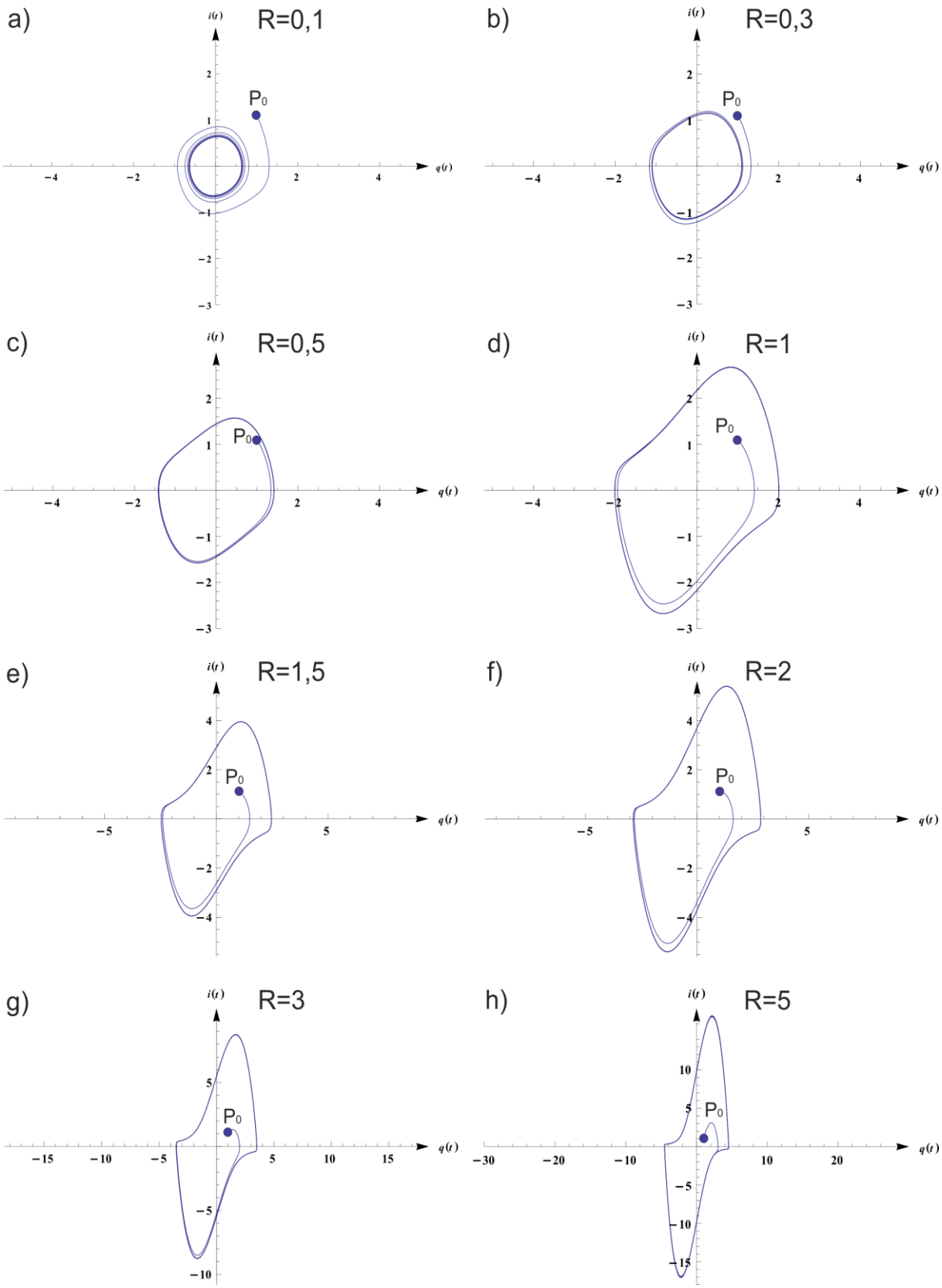


2.4. ábra: A van der Pol egyenlet közelítő Poincaré leképezése kis R értékekre

2.3. A van der Pol egyenlet numerikus vizsgálata

A van der Pol differenciálegyenletet ((2.9) és (2.10) egyenletek) numerikus módszerrel is megvizsgáltam, a Wolfram cég Mathematica nevű programját használtam fel. A megoldások kereséséhez a program numerikus differenciálegyenlet megoldó modulját használtam (*NDSolve* parancs), majd pedig megjelenítettem grafikusan az eredményeket az állapottérben (*ParametricPlot* parancs és beállításai). A differenciálegyenletek mellett szükség van két kezdeti feltétel megadására is, illetve, hogy az időparaméterben meddig számolja ki a megoldásokat a program. A megoldást kirajzoltathatjuk, mint időfüggvényt, a program lehetőséget ad q(t) és i(t) együttes ábrázolására is. De ami számunkra fontosabb, hogy az x és y tengelyen ábrázolhatunk egy-egy függvényt, ez lesz a rendszer állapotsíkos ábrázolása. A vízszintes tengelynek q(t)-t választottam, míg a függőleges tengelynek i(t)-t. A Mathematica függvényeket az I. Függelék tartalmazza.

A 2.5. ábra mutatja az R=0,1-től egészen R=5-ig néhány kiragadott értékre az állapotsíkon a rendszer trajektóriáját. Az eredmények kiértékelésekor ügyeljünk a léptékezésre. Ezen ábra léptékezése megegyezik a később ismertetendő PSpice szimulációs (2.12. ábra) és a mérési eredményeket bemutató (2.16. ábra) ábrákéval, ezzel is segítve összevetésüket. Az a) ábrától kezdve folyamatosan növeljük R értékét egészen az h) ábráig. Minden esetben ugyanaz a kezdeti feltétel: $(Q;\, I) = (1;\, 1{,}1)$. Bármely más (kivéve a *0,0*) kezdeti feltétel esetén is végül ugyanahhoz a határciklushoz tartanának a trajektóriák. Mint láthatjuk minden R értékre stabil lesz a határciklus, és a határciklushoz való közeledés mértéke is függeni fog R-től, lásd (2.37) egyenlet. Míg $R = 0{,}1$ esetén viszonylag lassan közelít a trajektória, addig $R = 0{,}5$ esetén ez a közelítés már sokkal gyorsabb. Kis R értékekre analitikusan már meghatároztuk a várható sugarát a határciklusnak, most ezt ellenőrizzük $R = 0{,}1$ esetére.

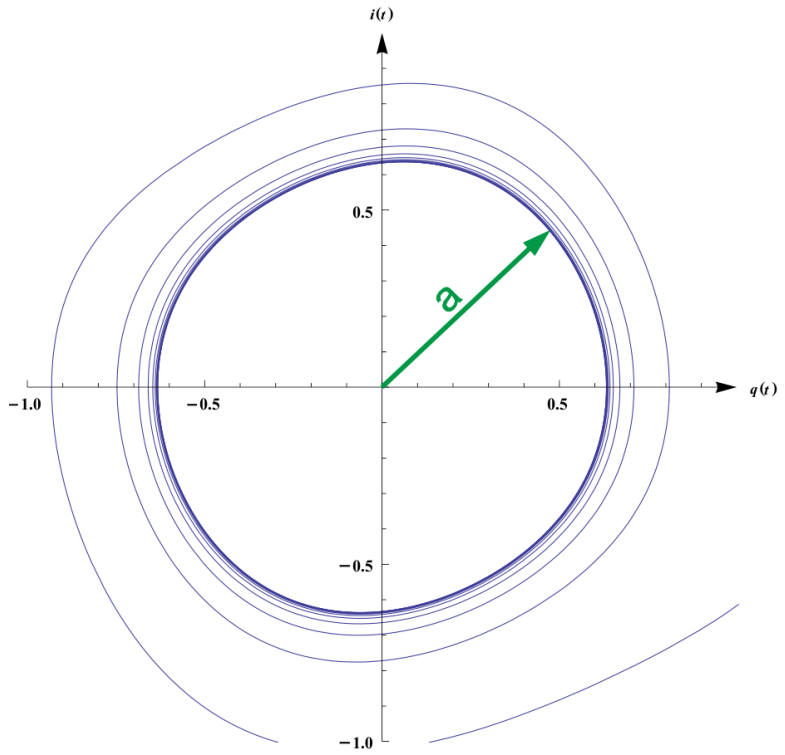


2.5. ábra: Numerikus szimuláció eredményei különböző R értékekre

A (2.33) egyenlet alapján:

$$a|_{R=0,1} = 2\sqrt{0,1} = \frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0,6325 \tag{2.35}$$

Ha most megnézzük erre az esetre a trajektóriát a 2.6. ábrán, leolvashatjuk, hogy a sugara valóban nagyon közel esik ehhez az értékhez. Tehát még ekkora R értékekre is megfelelő az analitikus számítás eredménye.

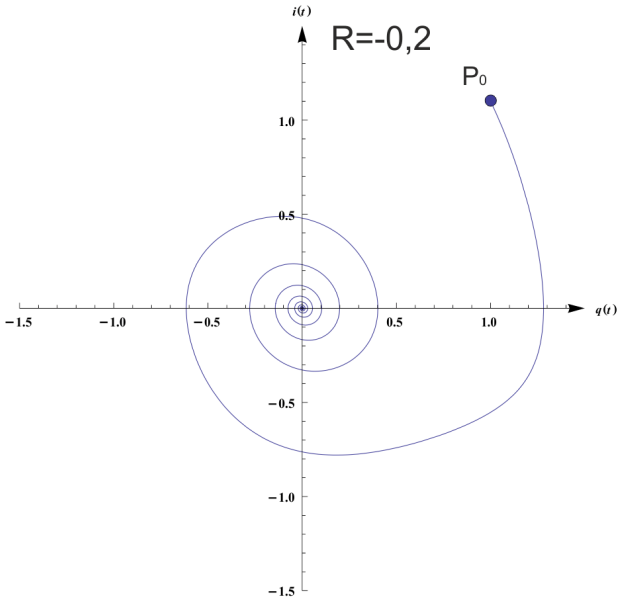


2.6. ábra: R=0,1 esetén a határciklus sugara

Megfigyelhetjük, hogy körülbelül $R = 1$-től kezdődően erőteljesen torzulni kezd a határciklus állapottérbeli alakja, mint majd később látjuk az időfüggvényeken, ekkor kezd kialakulni az úgynevezett „relaxációs oszcilláció” (lásd 2.2. ábra).

Negatív R érték a definíciója szerint nem lehet ((2.5b) egyenlet), numerikus szimulációval azonban megvizsgáltam ezt a lehetőséget, hiszen egy általánosított (2.6) alakú differenciálegyenletben előfordulhatna ez az eset is, emellett a később ismertetendő áramkör is alkalmas negatív R értékek felvételére.

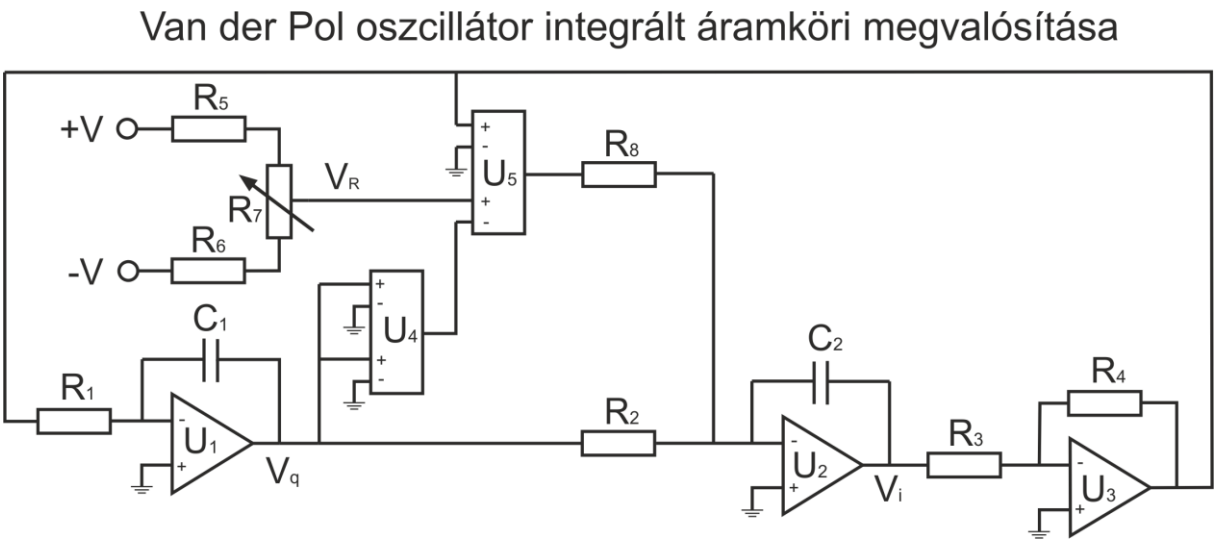
A 2.7. ábra mutatja a rendszer viselkedését $R = -0,2$ esetén. Az állapottérben egy stabil fókuszra ismerünk rá, a trajektória spirális közeledése ugyanis ezt feltételezi. Ez időtartományban annyit tesz, hogy a rendszer közel szinuszos lengései lecsengenek az idő előrehaladtával.



2.7. ábra: Negatív R érték esetén a trajektória

2.4. Az áramkör megvalósítása

Egy, a van der Pol-egyenletet megvalósító áramkör a 2.8. ábrán látható. [7]



2.8. ábra: Az áramkör

Az áramkör által megvalósított van der Pol egyenlet a következő formát ölti:

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2} - \alpha(R - Q^2)\frac{dQ}{d\tau} + Q = 0 \qquad (2.36)$$

Mint láthatjuk, a (2.36) egyenlet $\alpha = 1$ helyettesítéssel pontosan az előzőleg vizsgált egyenletet adja (2.8). A V_q és V_i feszültségek a (2.9) és (2.10) egyenletek alapján Q és I értékekre vonatkoznak. Mérőszámuk meg fog egyezni rendre Q és I értékeivel. Az

áramkörben jelölt U_1, U_2 és U_3 integrált áramkörök standard műveleti erősítők, mint például a TL084-es típus. Az U_4 és U_5 eszközök AD633 típusú integrált áramkörök, amelyek differenciális bemenetekkel rendelkező analóg szorzó áramkörök, kimenetük pedig 1/10-es osztással rendelkezik. A két áramkör adatlapja a 2. Függelékben található. A többi áramköri elemre a javasolt értékeket a 2.1 táblázat tartalmazza (mindegyik szabványos érték):

Komponens	**Érték**
R_1, R_2, R_3, R_4	10 [kΩ]
R_5, R_6	470 [kΩ]
R_7	100 [kΩ] potenciométer
R_8	100 [Ω] (lásd (2.41) egyenlet)
C_1, C_2	0.1 [μF]

2.1. Táblázat: Az áramkör megépítésénél használt értékek

Az R_8 érték változtatásával tudjuk beállítani a számunkra megfelelő α értéket. Mivel az analízis során az α=1 speciális esetet vizsgáltuk, ezért most is ezzel a beállítással fogunk élni. α kiszámítási képletében az U_2 előtti csomópontban összeadódó áramok arányát használjuk fel:

$$\alpha = \frac{R_2}{100 \cdot R_8} = \frac{10000}{100 \cdot R_8} = \frac{100}{R_8} \tag{2.37}$$

A nevezőben a 100-as szorzó a két analóg szorzó áramkör tulajdonságából fakad, ugyanis mindegyiknek a kimenete 1/10-es osztóval rendelkezik.

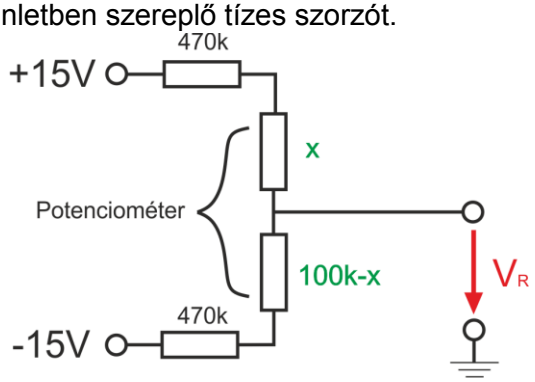
Így már a kívánt α értékhez szükséges R_8-at is kiszámolhatjuk:

$$R_8 = \frac{100}{\alpha} = 100\ [\Omega] \tag{2.41}$$

Az R paramétert az R_7 potenciométerrel alkotott feszültségosztóval (2.9. ábra) állíthatjuk be, ahol:

$$R = 10 \cdot V_R \tag{2.42}$$

Az R_5 és R_6 ellenállások finomabb V_R feszültség beállítást biztosítanak, nagyjából kompenzálják a (2.42) egyenletben szereplő tízes szorzót.



2.9. ábra: Potenciométeres feszültségosztó

Hogy megtudjuk mekkora lesz a V_R kimenő feszültség, meg kell határoznunk először a terheletlen feszültségosztón átfolyó áramot.

$$i_{össz} = \frac{V}{R_{össz}} = \frac{15-(-15)}{2\cdot 4{,}7\cdot 10^5+10^5} \approx 2{,}885\cdot 10^{-5}\ [A] \tag{2.43}$$

Adott potenciométer álláshoz tartozó x ellenállás és V_R feszültség közötti összefüggés:

$$V_R = 15 - (4{,}7\cdot 10^5 + x)\cdot i_{össz} \tag{2.44}$$

A potenciométer szélső állásaira a következő értékek adódnak a feszültségre és ebből fakadóan az R paraméter értékeire is:

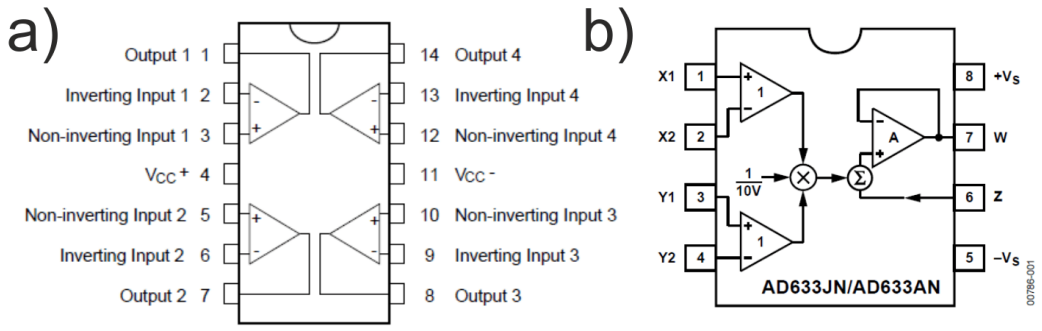
$$V_{Rmin} = 4{,}7\cdot 10^5\cdot i_{össz} - 15 \approx -1{,}4424\ [V]$$
$$R_{min} = V_{Rmin}\cdot 10 = -14{,}424$$

$$V_{Rmax} = 15 - 4{,}7\cdot 10^5\cdot i_{össz} \approx +1{,}4424\ [V]$$
$$R_{max} = V_{Rmax}\cdot 10 = +14{,}424$$

Most csak az elméleti részben is tárgyalt pozitív R értékekre vizsgáljuk meg az áramkör működését.
Még egy fontos jellemző a rendszer válaszának frekvenciája. Jelen esetben ezt az integrátorként működő műveleti erősítők (U_1 és U_2) időállandója szabja meg. Tegyük fel, hogy mindkét integrátornak ugyanazok az R és C értékei. A rendszer válaszának frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2\pi\cdot 10[k\Omega]\cdot 0{,}1[\mu F]} = 159{,}155\ [Hz] \tag{2.45}$$

Természetesen a C_1 és C_2 kondenzátorok kapacitásának változtatásával a frekvencia változtatható.
Az áramkörhöz TL084-es műveleti erősítőt használtunk, aminek 16 lábú DIP *(Dual In-line Package)* tokozása van és négy műveleti erősítő helyezkedik el benne. Bekötési diagramja a *2.10.a) ábrán* látható. A *2.10.b) ábrán* pedig az AD633 analóg szorzó lábkiosztását láthatjuk. Mindkét áramkört ±15 [V] tápfeszültséget igényel. Rövidített adatlapjuk megtalálható a II. Függelékben.



2.10. ábra: a) TL084 műveleti erősítő, b) AD633 analóg szorzó

Az analóg szorzó működését leíró képlet a következő (a 2.10.b) ábrán a lábak betűjeleit használva):

$$W = \frac{(X_1 - X_2)\cdot(Y_1 - Y_2)}{10\ [V]} + Z \qquad (2.46)$$

A 2.8. ábra sematikus rajzától eltérően az áramkörnek még van egy szinteltoló Z bemenete, amelynek értéke hozzáadódik a differenciális bemenetek szorzatának 1/10-éhez. Ahhoz, hogy semekkora feszültség ne adódjon a szorzathoz, fontos, hogy ezt a láb is földre legyen kötve, hiszen ekkor ugyanis Z=0 [V] adódik az eredményhez, és így nem hamisítja meg a mérési eredményeinket. Ha nem kötnénk földre a lábat, a környezetéből zajokat szedhetne fel, ezzel valamilyen ΔZ értékkel eltolná a kimenő W feszültségértéket.

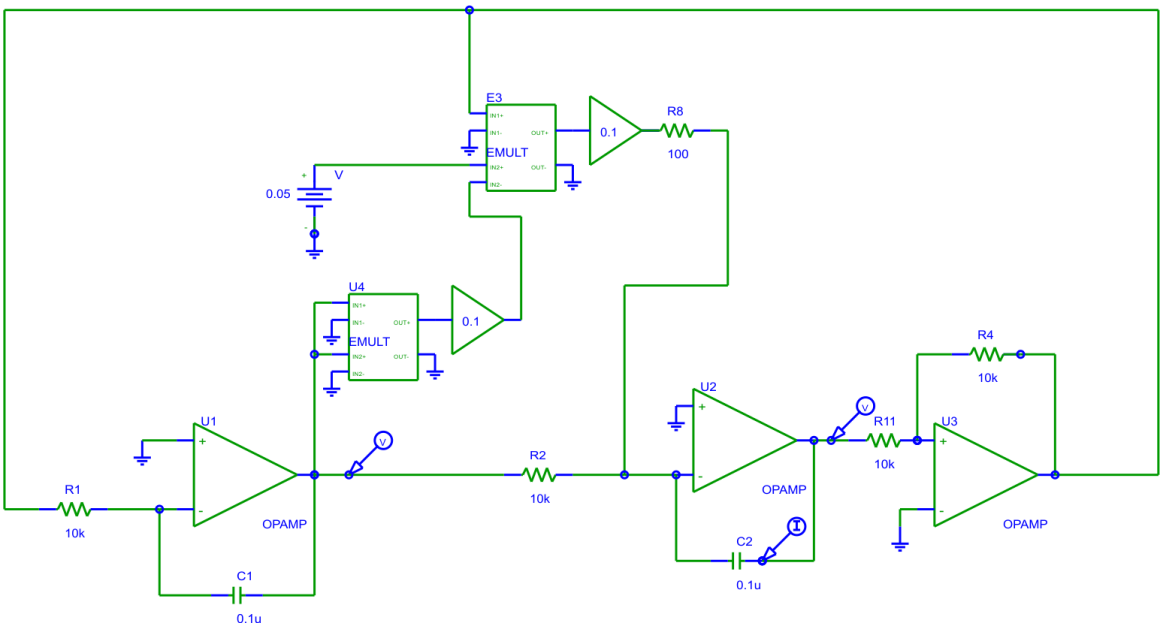
2.5. PSpice szimulációs összeállítás

Mielőtt a méréseket elvégeznénk, numerikus szimulációval is megvizsgáltam a rendszer viselkedését. Erre a célra a PSpice programot használtam. A programban lehetőségünk van összeállítani tetszőleges áramköröket és azok például AC, DC, munkaponti és tranziens szimulációját elvégezni. Számunkra most a tranziens szimuláció fontos. Ennek beállításait az *Analysis* menü *Setup* almenüjében kapcsolhatjuk be. Mivel a rendszerünk frekvenciája közepesnek mondható, időállandója szintúgy, ezért a [0 s – 3 s] intervallumon végeztem el a szimulációt, ezt a *Final Time* 3 [s]-ra állításával értem el. Ez idő alatt a tranziensek már lecsengenek és beáll az állandósult állapot. Ha azt akarjuk, hogy a program csak az utolsó x [s]-ot rajzolja ki, akkor ennek beállítására is lehetőség van a *Print Delay* mező kitöltésével. Lépésköznek - a frekvenciához viszonyítva elegendően kicsi - maximum 10^{-5} [s]-os lépésközt választottam *(Step Ceiling)*.
Alkatrészeknek a 2.8. ábrán feltüntetett elemek programbeli megfelelőit használtam fel, a szimulációs programbeli összeállított áramkör az 2.11. ábrán látható.

A szimuláció esetén is 0.1 [μF]-os kondenzátorokat, ám a feszültségosztó helyett egy állítható feszültségű feszültségforrást használtam. Ez utóbbi azért előnyös, mert így közvetlenül, utánaszámolás nélkül és pontosan be tudjuk állítani V_R értékét. Mivel a programban lévő analóg multiplexer nem rendelkezik a kimenetén 1/10 – es osztással, ezért ezt egy utána helyezett 0,1-es szorzóval oldottam meg *(Gain).* Nagyobb kondenzátorokra esetleg a nagyobb időállandó miatt lehet szükség, így könnyebben megjeleníthetővé válnak a mennyiségek a mérés során is. 1 [μF]-os kondenzátorok esetén ugyanis a rendszer válaszának frekvenciája megközelítőleg 16 [Hz] lesz.

Ahhoz, hogy meg tudjuk később jeleníteni a számunkra fontos mennyiségek időbeli változását, úgynevezett *Markereket* kell elhelyeznünk az áramkörben. Én két feszültség markert helyeztem el (a 2.8. ábra jelöléseivel élve: V_q és V_i), illetve egy árammarkert. A szimulációnknak ugyanis szüksége van kezdeti feltételekre, hogy kimozduljon az instabil (0,0) egyensúlyi pontból. Ezt legkönnyebben úgy érhetjük el, hogy például az egyik integrátor kondenzátorára adunk valamilyen q_0 kezdeti töltést. Az árammarkert ezen megadás helyességének ellenőrzésére használtam. Bármilyen kicsi eltérés a (Q,I)=(0,0) helyzettől már megfelelő, mert mint ahogy korábban bebizonyítottuk, a (0,0) pont taszítja magától a trajektóriákat. A valóságosan megépített áramkörnél amiatt nem lesz szükség kezdeti feltétel

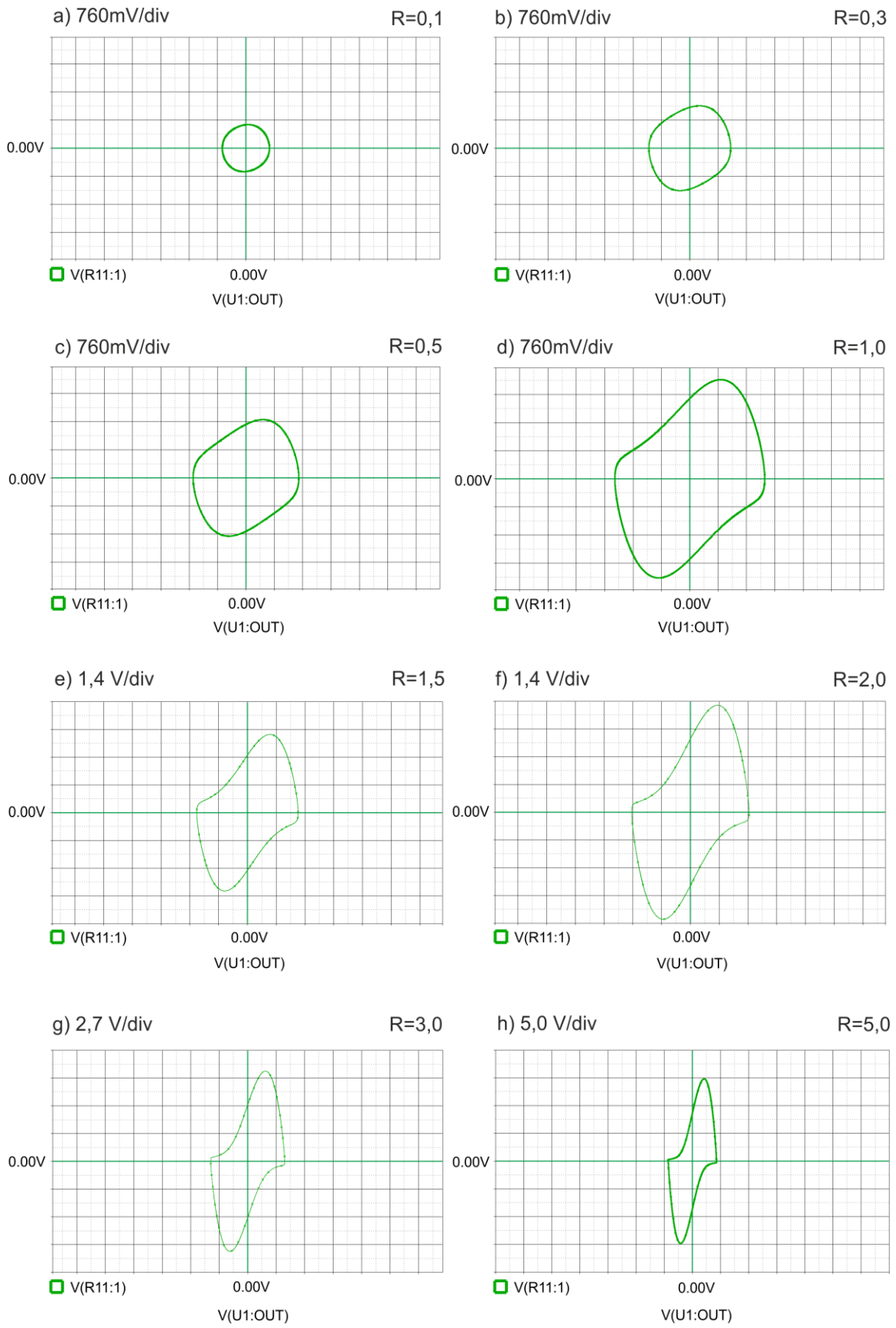
megadására, mert az áramkör a környezetéből óhatatlanul is összeszed kisebb elektromos zajokat, amelyek a vezetékekben feszültségeket indukálhatnak, és ez pedig *(0,0)*-tól eltérő kezdeti feltételeket szolgáltat.



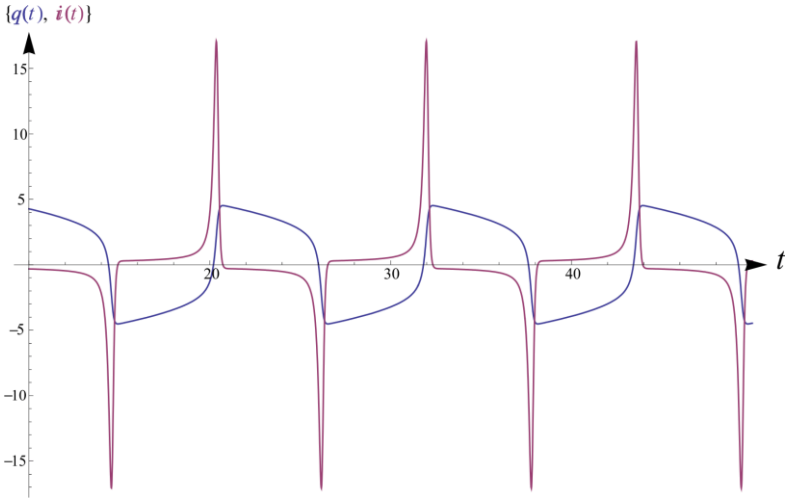
2.11. ábra: Az áramkör PSPice-ban

A PSpice-ban szimulált trajektóriákat a 2.12. ábra mutatja. Jól látható, hogy az analóg áramkör segítségével szimulált értékek megegyeznek az előző részben bemutatottakkal. Osztásköznek egymáshoz közeli R értékek esetén igyekeztem ugyanazt használni, ennek értékét fel is tüntettem a trajektóriák mellett. 760 [mV]/osztás léptékkel lehetővé vált a 0,1 és 1 közötti R értékekhez tartozó trajektóriák egymáshoz képesti méretarányos ábrázolása. Jól látható a trajektóriák R-rel arányos növekedése. Az is látható, hogy a kis R értékekre érvényes megállapítás – miszerint a határciklus sugara egyenesen arányos az R paraméterrel (2.33 egyenlet) – nagy R értékekre érvényét veszti. $R=0,1$ esetén még közelítőleg igaz, azonban ez felett már nem. A 2.12.d ábrától kezdődően már jó észrevehető, hogy a paraméter növelésével I(t)-nek nagyobb mértékben növekszik az amplitúdója, mint Q(t)-nek. Ezt a következőképpen magyarázhatjuk: nagyobb R értékekre egyre inkább jelentkezik Q(t) időfüggvényében a relaxációs oszcilláció jelensége, amelynek egyik fő ismérve a szélsőértékek közötti gyors, hirtelen átmenet. Mivel I(t) a töltésmennyiséget jelentő Q(t) deriváltja, ezért ahol Q(t) hirtelen változik, ott I(t) időfüggvényében nagy ugrás keletkezik (2.13. ábra).

A 2.12.e és 2.12.f jelű trajektóriák az előzőekhez képest nagyobb, de ugyancsak közös, 1,4 [V]-os osztással rendelkeznek; R=3 és R=5 értékekre azonban már a nagy kiterjedésbeli különbség miatt nem alkalmaztam azonos osztásközt (2.12.g és 2.12.h ábrák). Az trajektóriák kiterjedése tehát ezen osztásköz figyelembevételével értékelhető ki.



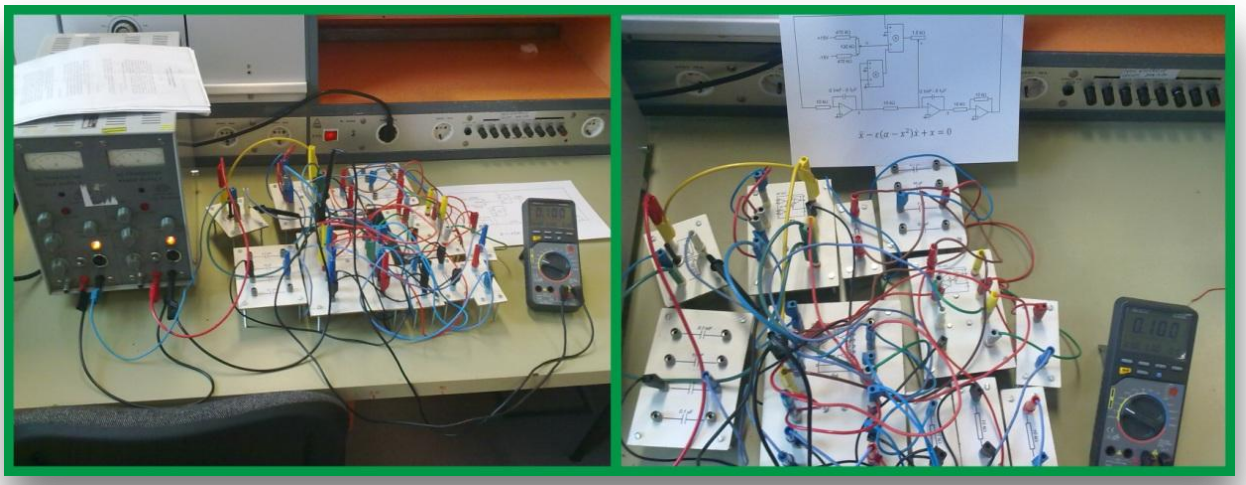
2.12. ábra: PSpice szimuláció különböző R értékekre



2.13. ábra: R=5 paraméterértékre Q(t) és I(t) időfüggvénye

2.6. Mérési eredmények

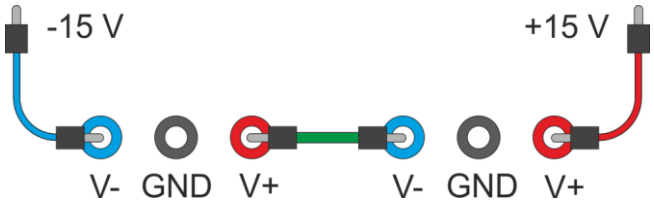
Az áramkör laboratóriumi összeállításként, panelekből készült el, ugyanis később felhasználható lesz hallgatói mérésekre is. A 2.14. ábrán láthatjuk a fényképét, amely az Automatizálási és Alkalmazott Informatikai Tanszék laboratóriumában készült.



2.14. ábra: Fotó a mérési elrendezésről

Mint ahogy a 2.14. ábrán látható, a V_R feszültség a 2.9. ábrán látható potenciométeres feszültségosztó segítségével állítható, és pontos értékét digitális multiméter segítségével követhetjük. A műveleti erősítők és az analóg multiplexerek egy állítható feszültségű labortápegységből kapják a működésükhöz szükséges $\pm$ 15 [V]-ot. A tápegység rendelkezik két független egységgel. Ha ezek ellentétes polaritású bemeneteit összekötjük – tehát közös potenciálra hozzuk -, akkor e közös ponthoz képest kaphatunk pozitív illetve negatív

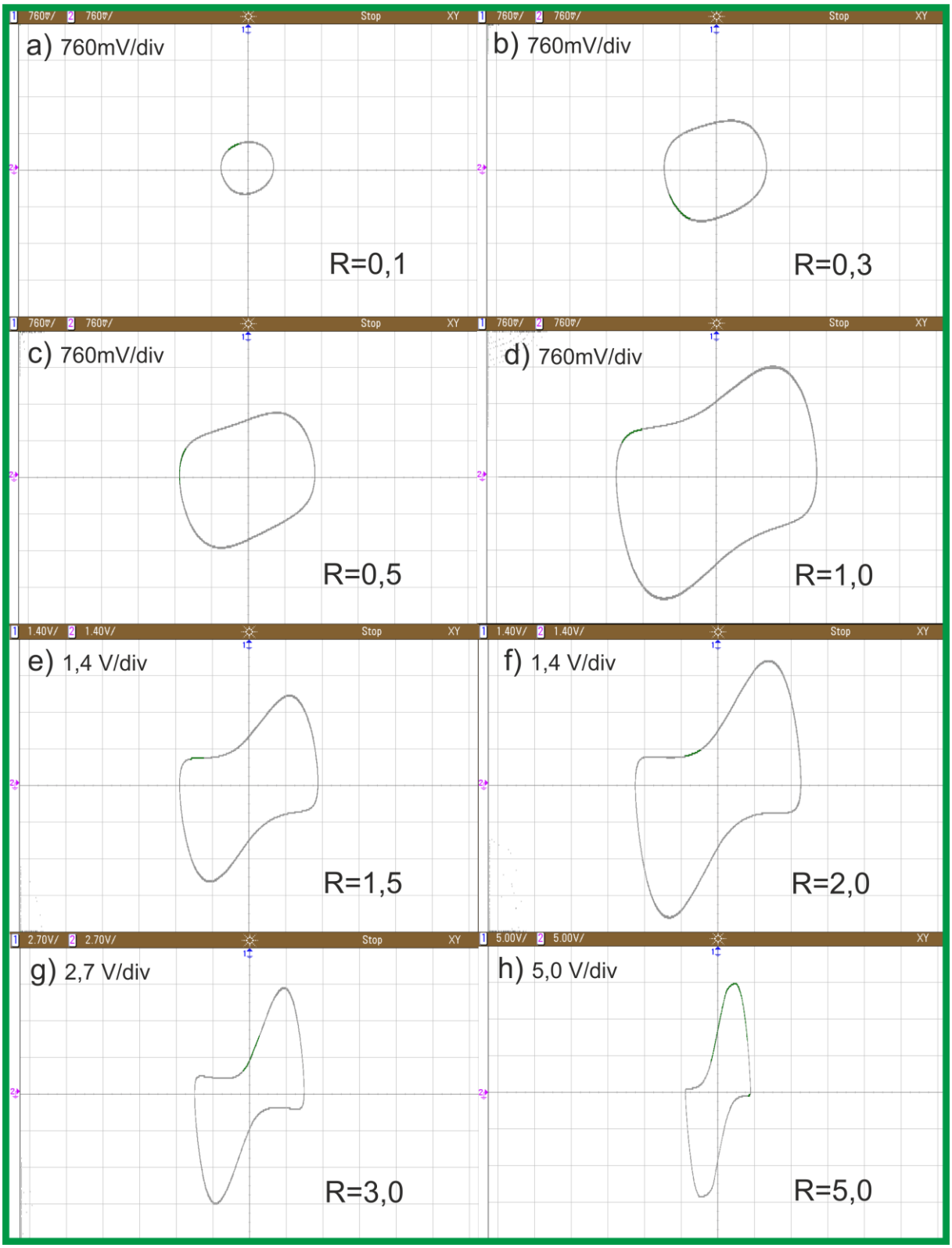
értelemben feszültséget, amelyeket függetlenül egymástól a kívánt értékűre állíthatunk. A bekötést szemlélteti a 2.15. ábra.



2.15. ábra: Tápegység bekötése sematikusan

A 2.8. ábrán V_q-val és V_i-vel jelölt feszültségeket digitális oszcilloszkóppal mértem le. Az oszcilloszkóp X bemenetét az U_1 jelölésű műveleti erősítő kimenetére kapcsoltam, míg az Y bemenetét U_2 kimenetére. Mint ahogy a legtöbb ilyen mérőeszköz, úgy az általunk használt Agilent DSO6012A digitális oszcilloszkóp is rendelkezik úgynevezett XY üzemmóddal, ami a trajektóriák állapotsíkban való megjelenítéséhez szükséges. Az oszcilloszkóp beépített funkciójának segítségével a mérési eredmények különböző digitális formátumban lementhetőek USB porton keresztül a későbbi számítógépes adatfeldolgozáshoz. A 2.16. ábrán látható mérési eredmények az oszcilloszkóp képernyőképének másolatai.

A mérési eredmények görbéi a 2.16.c ábráig nagyon jó egyezést mutatnak a PSpice szimuláció és a numerikus megoldás eredményeivel. A 2.16.d – 2.16.g mérési eredmények *Q(t)* tengely irányában jobban elnyújtottak, ez a vártnál kicsivel nagyobb V_q, és kicsivel kisebb V_i feszültségeket jelent. Érdekes módon $R=5$ paraméterértékre ez az eltérés nagyjából kompenzálódik. Az eltérések egyik lehetséges oka lehet, hogy V_R feszültséget a feszültségosztóval nem lehetett nagyon pontosan beállítani, mivel a tápegység két kimenetén változott időről időre a feszültség, nem volt tökéletesen stabil. Így például az $R=0,1$ értékhez szükséges $V_R=0,01$ [V] feszültség beállítása nagy figyelmet igényel. A pontosabb V_R feszültség-beállítás érdekében kicseréltem a 2.9. ábrán látható feszültségosztóban a két 470 [kΩ]-os ellenállást 820 [kΩ]-ra, ezzel finomítva a beállítható feszültséget. A művelet hátránya, hogy a beállítható R tartomány leszűkül, de a mérés során szükséges összes érték beállítható vele.



2.16. ábra: Mérési eredmények Agilent digitális oszcilloszkóppal

III. Egyenáramú hajtás nemlineáris viselkedése

3.1. Bevezető

A hajtások nagyon széles teljesítményspektrumban használatosak, néhány [W]-tól kezdve egészen több ezer [kW]-ig. A modern villamos hajtások többsége változtatható fordulatszámon és teljesítményviszonyok mellett képes működni, melyet, ahol lehet, nem mechanikus hajtóművek segítségével, hanem jobb hatásfokú teljesítmény elektronikai konverterekkel valósítanak meg. Bár az egyenáramú motorok szerepe egyre jobban csökken, és manapság az ipari hajtások több mint 70%-a aszinkron motoros kivitelben készül, a kisebb teljesítményszinteknél a egyenáramú motor hajtás továbbra is meghatározó, elegendő csak a robotikára gondolni. Az egyenáramú hajtások egyik fő előnye szemben az indukciós motorokkal a lineáris jellegből fakadó egyszerű irányíthatóságuk. Fő hátrányuk viszont a mechanikai kommutáció miatt a nagyobb fenntartási költség a szénkefék cseréje miatt, illetve a külső vagy az állandó mágneses gerjesztés miatti többlet költség.

Általánosságban az egyenáramú hajtások sebességszabályozása két módon történhet, armatúraszabályozással vagy a gerjesztőkör szabályozásával. Állandó mágneses gerjesztésű motor esetén a gerjesztést nem tudjuk változtatni. Ennél a motorfajtánál tehát csak az armatúraszabályozás jöhet szóba, amelynek két alapvető módja lehet: armatúra feszültségszabályozás vagy armatúra áramszabályozás. A feszültségszabályozás fő előnye az olcsóbb és egyszerűbb megvalósítás, míg az áramszabályozásnak a fő érdeme a közvetlen nyomatékszabályozás. Noha az egyenáramú motor önmagában egy lineáris elem a bemutatásra kerülő változtatható fordulatszámú szabályozott hajtás már egy, a többszörös negatív hurkú visszacsatolás illetve a teljesítményelektronikai áramkör miatt, úgynevezett szakaszonként lineáris nemlineáris rendszer. Ahogy a fejezet későbbi részei bemutatják a hajtás a paraméterek változtatásával színes viselkedést mutat. A periodikus állapotból bifurkációs kaszkádon keresztül a hajtás kaotikussá válhat.

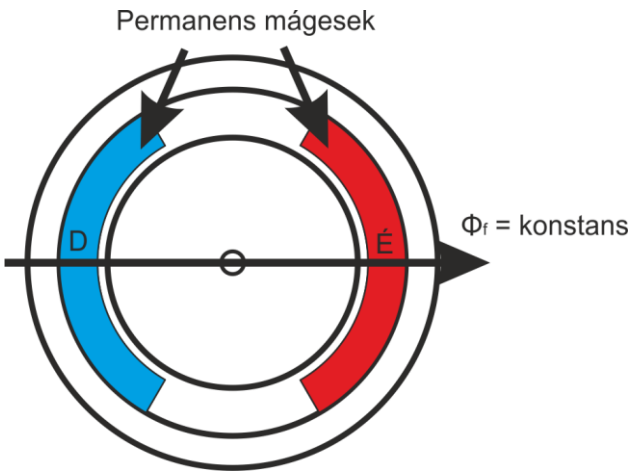
A fejezet részletesen tárgyalja az egyenáramú motor modellezését, a sebességszabályozás analitikus és numerikus vizsgálatát. Bemutatja részletesen a laboratóriumban megvalósított hajtást és mérési eredményekkel validálja az kapott numerikus eredményeket.

3.2. Egyenáramú motorok matematikai leírása

Egy egyenáramú motorban a Φ_g főpólus fluxust az állórész, az úgynevezett sztátor hozza létre. [6] Ez történhet egy állandó mágnes segítségével, mint ahogy az a 3.1. ábrán látható – ekkor a Φ_g fluxus állandó lesz -, vagy pedig gerjesztő tekercsek segítségével, ahol a gerjesztés i_g árama változtatja a Φ_g fluxust. Ha a mágneses telítődés elhanyagolható, akkor:

$$\Phi_g = k_g \cdot i_g \tag{3.1}$$

ahol k_g a gerjesztés arányossági tényezője.



3.1. ábra: Permanens mágneses egyenáramú motor

A rotor hordozza hornyaiban az úgynevezett armatúratekercselést, ellentétben az AC (váltóáramú) motorokkal, ahol is a tekercselés a sztátoron van a nagyobb teljesítmények könnyebb kezelhetősége érdekében.

Egy egyenáramú gépnek az armatúratekercselése a rotoron kell elhelyezkedjen ahhoz, hogy a tekercs vezetőiben ébredő feszültségek és benne folyó áramok mechanikai egyenirányítását elvégezhesse, és így biztosítson egyenáramot és egyenfeszültséget az armatúratekercs kivezetésein. A forgórész tekercselése valójában egy önmagába záródó, folytonos tekercselés, amely a kommutátor szegmensekhez van hozzávezetve. Ezek a szegmensek –amelyek általában rézből készülnek a jobb elektromos vezetőképesség miatt – el vannak szigetelve egymástól és a tengellyel együtt forognak. Minimum egy, de inkább több szénkefepár teremt kontaktust a kommutátor szegmensek (és így a forgórész vezetői) és az armatúratekercselés állórészen lévő kivezetései között, amelyek az egyenfeszültséget és áramot szolgáltatják a motor számára.

Egy egyenáramú motorban az elektromágneses nyomatékot a Φ_g fluxus és az i_a armatúraáram kölcsönhatása hozza létre:

$$M_{em} = k_t \cdot \Phi_g \cdot i_a \tag{3.2}$$

ahol k_t a motor nyomaték-konstansa. Φ_g fluxus jelenlétében az armatúravezetők ω_m szögsebességű forgása hozza létre az armatúrakörben az elektromotoros erőt. Így tehát az indukált feszültség:

$$U_i = k_e \cdot \Phi_g \cdot \omega_m \tag{3.3}$$

ahol k_e a motor feszültség-konstansa. SI mértékegység-rendszert használva k_t és k_e értékei jó közelítéssel numerikusan megegyeznek, holott mértékegységük természetesen különböző. Ez bizonyítható, ha egyenlővé tesszük az elektromos és a mechanikai teljesítményt. Az elektromos teljesítményt a következő egyenlet fejezi ki:

$$P_e = U_i \cdot i_a = k_e \cdot \Phi_g \cdot \omega_m \cdot i_a \tag{3.4}$$

A mechanikai teljesítményt pedig a következő:

$$P_m = \omega_m \cdot M_{em} = k_t \cdot \Phi_g \cdot \omega_m \cdot i_a \tag{3.5}$$

Állandósult állapotban

$$P_e = P_m \tag{3.6}$$

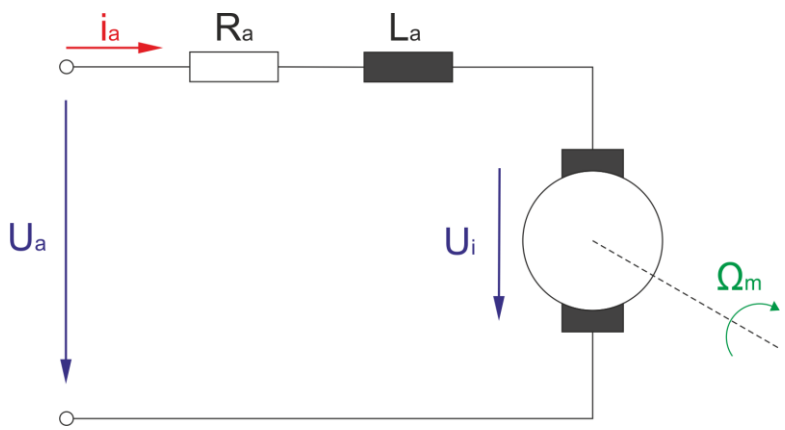
(3.6)-ba beleírva (3.4) és (3.5) kifejezéseket és egyszerűsítve:

$$k_e \left[\frac{V}{Wb \cdot rad/s}\right] = k_t \left[\frac{Nm}{A \cdot Wb}\right] \tag{3.7}$$

A gyakorlatban az armatúra kivezetéseire U_a armatúrafeszültséget kapcsolunk, ez hozza létre az i_a áramot. Tehát i_a áramot az U_a feszültség, az indukált feszültség, az armatúra tekercs R_a ellenállása és L_a induktivitása határozza meg:

$$U_a = U_i + R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di}{dt} \tag{3.8}$$

Ezt az egyenletet illusztrálja a 3.2. ábra egyenértékű kapcsolása.



3.2. ábra: Egyenáramú motor egyenértékű kapcsolása

A motor szögsebességét az M_{em} elektromágneses nyomaték és a terhelőnyomaték interakciója határozza meg:

$$M_{em} = J \cdot \frac{d\omega_m}{dt} + B \cdot \omega_m + M_t(t) \tag{3.9}$$

Itt J és B a motor és a terhelés együttes egyenértékű tehetetlensége és csillapítása és M_t a terhelés nyomatéka.

Gyakran az állórészt permanens mágnesből készítik, így a gerjesztő köri fluxus állandó lesz. Bevezetve a következő konstansokat

$$K_T = k_t \cdot \Phi_g \tag{3.10}$$

$$K_E = k_e \cdot \Phi_g \tag{3.11}$$

a (3.2) és (3.3) egyenletek átalakíthatóak:

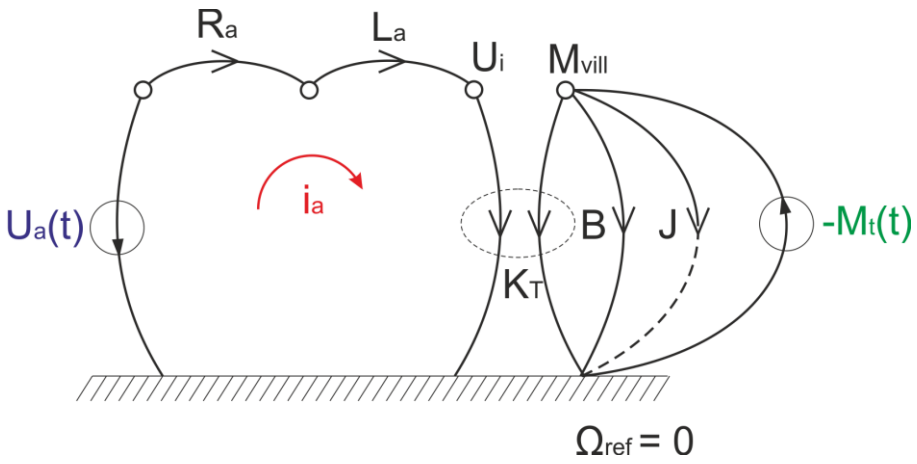
$$M_{em} = K_T \cdot i_a \tag{3.12}$$

$$U_i = K_E \cdot \omega_m \tag{3.13}$$

ahol K_E-re és K_T-re továbbra is fennáll, hogy numerikusan közel egyenlők, hiszen k_t és k_e csak egy konstanssal lett megszorozva. A nagybetűs jelölés is arra utal, hogy permanens mágneses motor esetén ezek a mennyiségek állandóak.

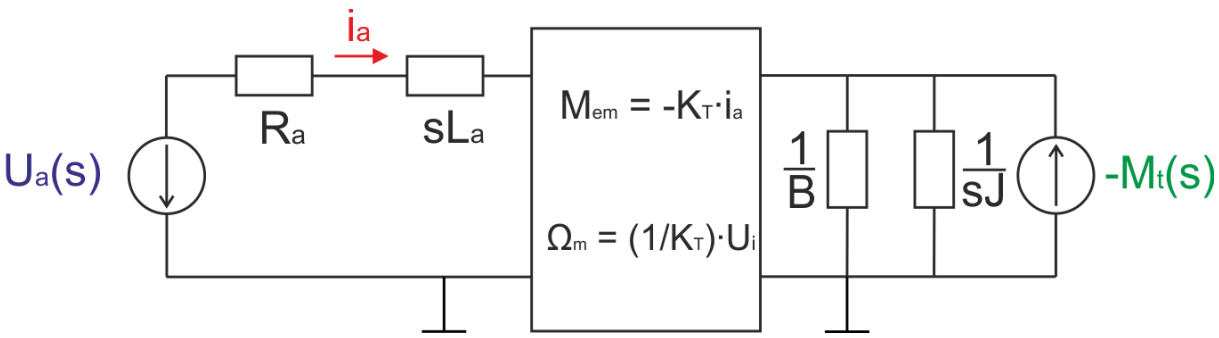
Átviteli függvény meghatározása. Ahhoz, hogy a motor frekvenciafüggését vizsgálhassuk, át kell térnünk operátor tartományba. A motor átviteli függvénye meghatározható közvetlenül a differenciálegyenletekből, de ugyanerre az eredményre jutunk, ha az impedancia módszert alkalmazzuk.

Első lépésként (felhasználva a 3.2 ábrán lévő egyenértékű kapcsolást és jelöléseit) rajzoljuk meg a motor struktúra gráfját (3.3. ábra). [9] Láthatjuk, hogy ez egy vegyes, elektro-mechanikus rendszer, amelyben az energiaátalakítást egy váltó végzi el, amelynek együtthatója a (3.10) egyenlettel definiált K_T, vagy ha úgy tetszik K_E, hiszen mindkettő azonos numerikus értékű, csak míg K_T a mechanikai oldalhoz tartozik, addig K_E a villamos oldalhoz. A váltóról még lesz szó a későbbiekben.



3.3. ábra: Egyenáramú motor struktúra gráfja

Alakítsuk át a 3.3. ábra struktúra gráfját impedancia modellé (3.4. ábra). A neve is mutatja, hogy ebben a felírási módban az egyes elemeket impedanciájukkal helyettesítjük.



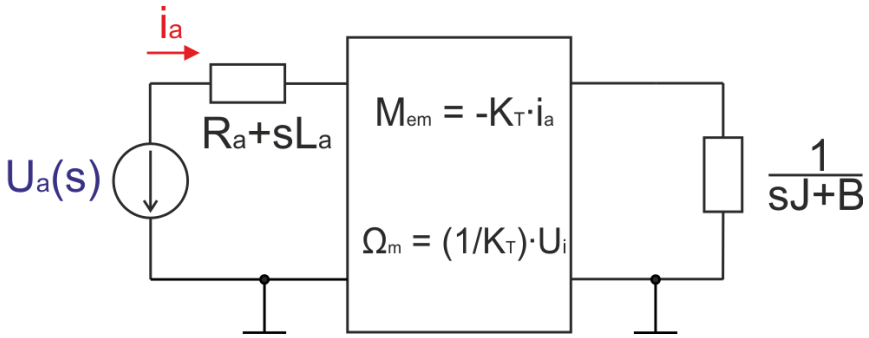
3.4. ábra: DC motor impedancia modellje

A váltó egyenleteit a motorra jellemző (3.12) és (3.13) egyenletekből nyerhetjük. A váltó első egyenletében a negatív előjel az átmenő változó iránya miatt adódik. Mivel az egyenáramú motor önmagában egy lineáris rendszer, ezért érvényes rá a szuperpozíció elve. Tehát minden további nélkül felírható a következő:

$$\Omega(s) = Y_1(s) \cdot U_a(s) \pm Y_2(s) \cdot M_t(s) \tag{3.14}$$

ahol s a Laplace operátor, $Y_1(s)$ a motor armatúrafeszültségre vonatkozó, $Y_2(s)$ pedig a terhelőnyomatékra vonatkozó átviteli függvénye. A második tagot hajtónyomaték esetén hozzáadjuk, míg terhelőnyomaték esetén levonjuk az első tagból, ezt jelenti a $\pm$ jel.

Vizsgáljuk meg a rendszert először $M_t(s) = 0$ választással, ekkor $U_a(s)$-re vonatkozó átviteli függvényét fogjuk megkapni. $M_t(s)$ átmenő változós forrás, amely szakadásként kezelhető ebben az esetben. Egyben össze is vonhatjuk az egymással soros kapcsolásban lévő R és sL impedanciákat, közös eredőjük $R + sL$ lesz. $\frac{1}{B}$ és $\frac{1}{sJ}$ párhuzamos eredője reciprokuk összegének reciproka lesz, azaz $\frac{1}{sJ+B}$. Az így leegyszerűsödött kapcsolás a 3.5. ábrán látható.



3.5. ábra: Impedanciák összevonása

A váltó egyenleteit felhasználva megállapítható a villamos oldali és a mechanikai oldali impedanciák közötti összefüggés:

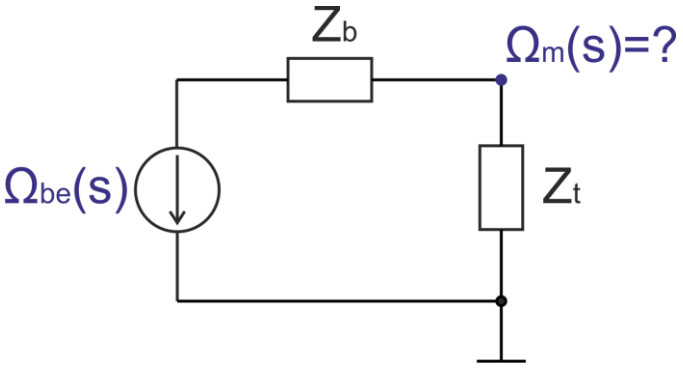
$$\frac{\Omega_m}{M_{em}} = \frac{\frac{1}{K_T}}{K_T} \cdot \frac{U_a}{i_a} \tag{3.15}$$

$$Z_{rot} = \frac{1}{K_T^2} \cdot Z_{vill} \tag{3.16}$$

A villamos keresztváltozós forrást is transzformáljuk át mechanikaivá:

$$\Omega_{be}(s) = \frac{U_a(s)}{K_T} \tag{3.17}$$

Amint azt a 3.6. ábra is mutatja, az áttranszformálás után egy egyszerű feszültségosztó kapcsolást kapunk, ahol Z_t jelöli a terhelő impedanciát, Z_b pedig a forrás belső impedanciáját.



3.6. ábra: A kapcsolás mechanikai rendszerbe transzformálása

Felhasználva (3.16) egyenletet:

$$Z_b = \frac{R_a + sL_a}{K_T^2} \text{ és } Z_t = \frac{1}{sJ+B} \tag{3.18}$$

A feszültségosztó képletét felírva és tovább alakítva:

$$\frac{\Omega_m(s)}{\Omega_{be}(s)} = \frac{\frac{1}{sJ+B}}{\frac{1}{sJ+B}+\frac{R+sL}{K_T^2}} = \frac{K_T^2}{(sJ+B)(R+sL)+K_T^2} = \frac{K_T^2}{s^2L_aJ+s(JR_a+L_aB)+R_aB+K_T^2} = \frac{K_T^2}{R_aB+K_T^2} \cdot \frac{1}{\frac{s^2L_aJ}{R_aB+K_T^2}+s\frac{JR_a+L_aB}{R_aB+K_T^2}+1}$$

Az egyenlőség bal oldalába behelyettesítve (3.17) egyenletet:

$$Y_1(s) = \frac{\Omega_{be}(s)}{U_a(s)} = \frac{K_T}{R_aB+K_T^2} \cdot \frac{1}{\frac{s^2L_aJ}{R_aB+K_T^2}+s\frac{JR_a+L_aB}{R_aB+K_T^2}+1} \tag{3.19}$$

Ahhoz, hogy jobb belátásunk legyen a rendszer viselkedésébe, súrlódásos tagot – ami általában kicsi – hanyagoljuk el B=0-nak feltételezve. Továbbá csak a motor inerciáját véve a terhelés nélkül, J helyett írhatunk J_m-et. A (3.19) egyenlet a következőképp alakul át:

$$Y_1(s) = \frac{\Omega_{be}(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{K_t}\frac{1}{\frac{s^2L_aJ_m}{K_T^2}+s\frac{J_mR_a}{K_T^2}+1} \tag{3.20}$$

Definiálva a következő konstansokat:

$$T_m = \frac{J_mR_a}{K_T^2} \text{ – mechanikai időállandó} \tag{3.21}$$

$$T_e = \frac{R_a}{L_a} \text{ – villamos időállandó} \tag{3.22}$$

és beírva őket (3.20) egyenletbe, a következő adódik:

$$Y_1(s) = \frac{1}{K_t} \cdot \frac{1}{s^2T_mT_e+sT_m+1} \tag{3.23}$$

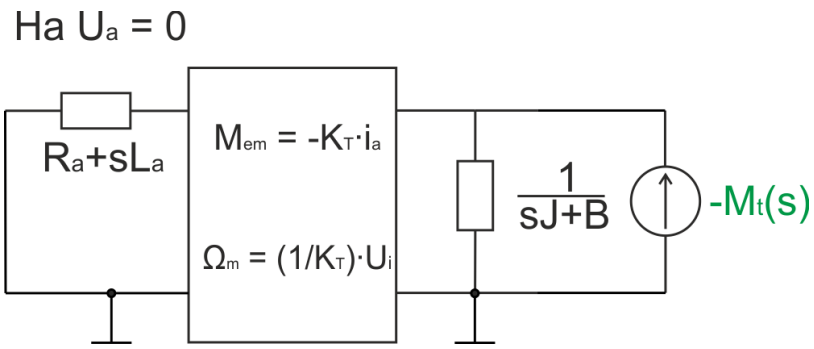
Mivel általánosságban elmondható, hogy $T_m \gg T_e$, ezért élhetünk azzal a közelítéssel, hogy az sT_m tagot $s(T_m + T_e)$ taggal helyettesítjük. A (3.23) egyenlet így szorzótényezőkre bontható:

$$Y_1(s) = \frac{1}{K_t} \cdot \frac{1}{(sT_m+1)(sT_e+1)} \tag{3.24}$$

A villamos időállandó azt határozza meg, hogy milyen gyorsan épül fel az armatúraáram egy ΔU_a armatúrafeszültség-ugrásra adott válaszként a rotor szögsebességét konstansnak feltételezve. A mechanikai időállandó T_m meghatározza, milyen gyorsan épül fel a szögsebesség egy ugyancsak ΔU_a armatúrafeszültség-ugrás hatására, feltéve, hogy T_e elhanyagolható és az armatúraáram azonnal tud változni.

Most nézzük meg miként hat a zavaró jellemző (a terhelőnyomaték) a motorra, ehhez a 3.4. ábrán $U_a(s) = 0$ esetet vizsgáljuk. Mivel $U_a(s)$ keresztváltozó forrás, ezért a Thevenin-elv

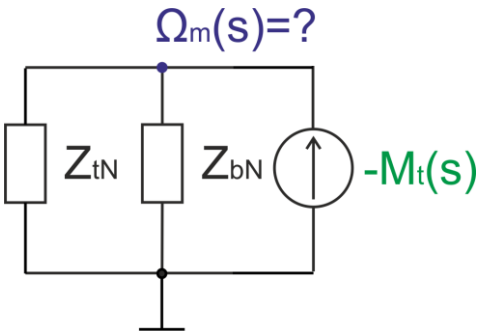
értelmében rövidzárral helyettesíthető. Az impedanciák összevonása a 3.7. ábrát eredményezi.



3.7. ábra: $U_a(s)=0$ esetén a kapcsolás

Elvégezve most is az impedanciák transzformációját (3.16 egyenlet), a következő egyenértékű kapcsolás kapható, ahol Z_{tN} a terhelő impedancia, míg Z_{bN} a Norton-féle ideális átmenőváltozó-forrás belső impedanciája.

$$Z_{bN} = \frac{1}{sJ+B} \quad \text{és} \quad Z_{tN} = \frac{R_a+sL_a}{K_T^2} \tag{3.25}$$



3.8. ábra: Norton-féle helyettesítő kapcsolás

A 3.8. ábra alapján kiszámolható $\Omega_m(s)$.

$$\Omega_m(s) = M_t(s) \cdot Z_e = M_t(s) \cdot (Z_{tN}\ x\ Z_{bN}) \tag{3.26}$$

ahol x az úgynevezett replusz művelet. A (3.26) egyenletet kifejtve és átrendezve:

$$Y_2(s) = \frac{\Omega_m(s)}{M_t(s)} = \frac{Z_{tN} \cdot Z_{bN}}{Z_{tN} + Z_{bN}} = \frac{\frac{R_a+sL_a}{K_T^2} \cdot \frac{1}{sJ+B}}{\frac{R_a+sL_a}{K_T^2} + \frac{1}{sJ+B}} = \frac{R_a+sL_a}{s^2L_aJ+s(JR_a+L_aB)+R_aB+K_T^2}$$

$$Y_2(s) = \frac{R_a+sL_a}{R_aB+K_T^2} \cdot \frac{1}{\frac{s^2L_aJ}{R_aB+K_T^2} + s\frac{JR_a+L_aB}{R_aB+K_T^2} + 1} \tag{3.27}$$

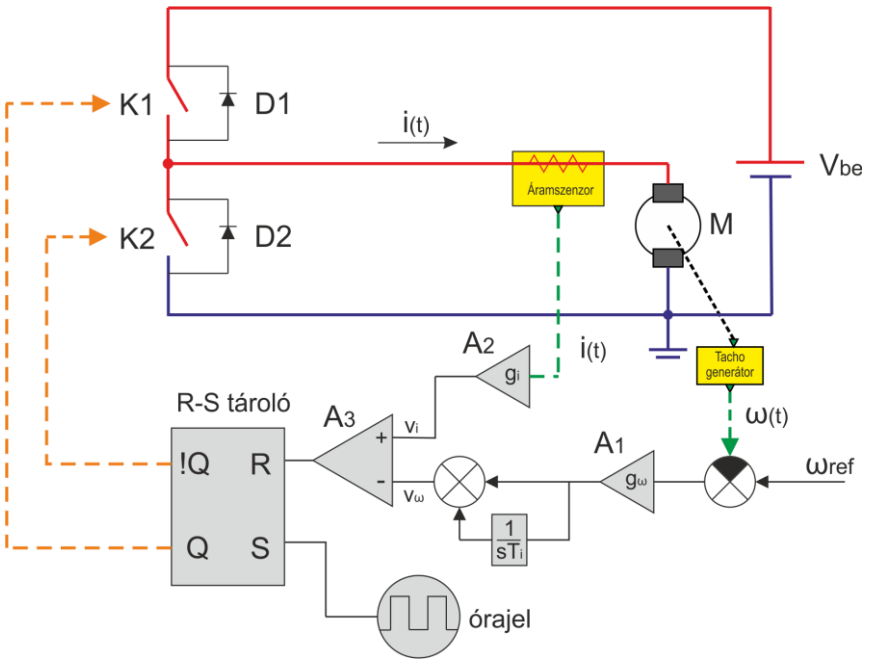
3.3. Áramvezérelt állandó mágneses egyenáramú hajtás vizsgálata

Az áramszabályozott egyenáramú hajtás rendszer működése a 3.9. ábra alapján megérthető. [5] Az A_1 és A_2 műveleti erősítőknek rendre g_ω és g_i az erősítése, a szögsebesség és az áram vezérlőjele pedig $v_\omega - val$ és $v_i - vel$ jelölt. A vezérlőjeleket leíró egyenletek a következők:

$$v_\omega(t) = g_\omega \cdot \left(\omega_{ref} - \omega_m(t)\right)\left(1 + \frac{1}{sT_I}\right) \tag{3.28}$$

$$v_i(t) = g_i \cdot i_a(t) \tag{3.29}$$

ahol $i_a(t)$ a motor armatúraárama, $\omega_m(t)$ a motor tengelyének szögsebessége, és ω_{ref} a DC motor referencia-szögsebessége és a T_i az integrálási időállandó.



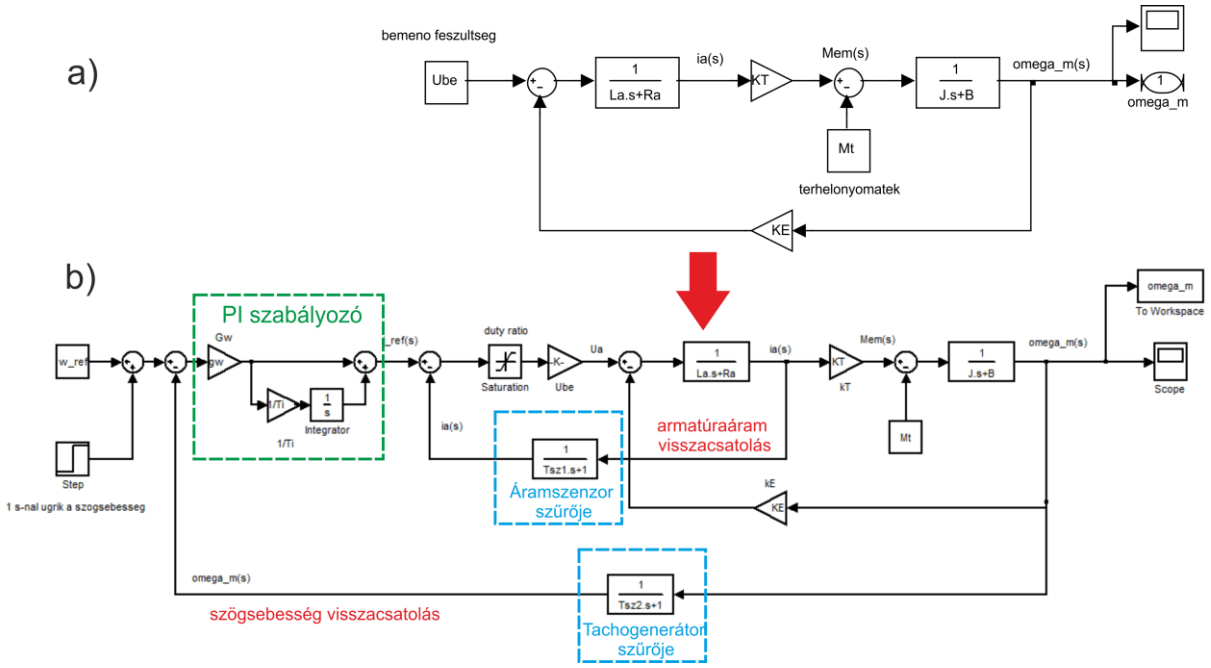
3.9. ábra: Áramvezérelt egyenáramú hajtás elvi vázlata

A két, műveleti erősítőből kijövő jel egy komparátor bemeneteire kerül, amelynek kimenete egy R-S tároló Reset bemenetére ad impulzust, ez az R-S tároló vezérli az K_1 és K_2 jelű kapcsolókat. A flip-flop Set bemenetére egy T periódusidejű órajel forrás csatlakozik, amely minden periódus elején beállítja a flip-flopot. Ekkor a K_1 kapcsoló bekapcsol, a K_2 jelű pedig ki. A K_1 kapcsoló zárva (K_2 pedig nyitva) marad mindaddig, amíg $v_i(t)$ túl nem lépi $v_\omega(t)$ értékét, mikor is a tároló Reset jelet kap, és a Q kimenete nullába vált, !Q pedig logikai 1-be. Ez maga után vonja K_1 kapcsoló kikapcsolását, és K_2 működésbe lép. Ez az állapot fennmarad a következő órajel ciklus elejéig, mikor is az R-S tároló Set bemenetére logikai 1 kerül újra, és a folyamat K_1 kapcsoló bekapcsolásával újraindul. Ha a Set és Reset jel egyszerre lép fel, akkor az áramkör Reset dominánsan viselkedik; mindaddig nem kerül a kimenete logikai magas értékre míg az új órajel impulzus meg nem érkezik a Set bemenetre.

Az itt felhasznált analóg és digitális áramkörök helyett a sebességszabályozás digitális mikrokontrollerbe lett implementálva. A megvalósításra később visszatérünk a 3.4. alfejezetben.

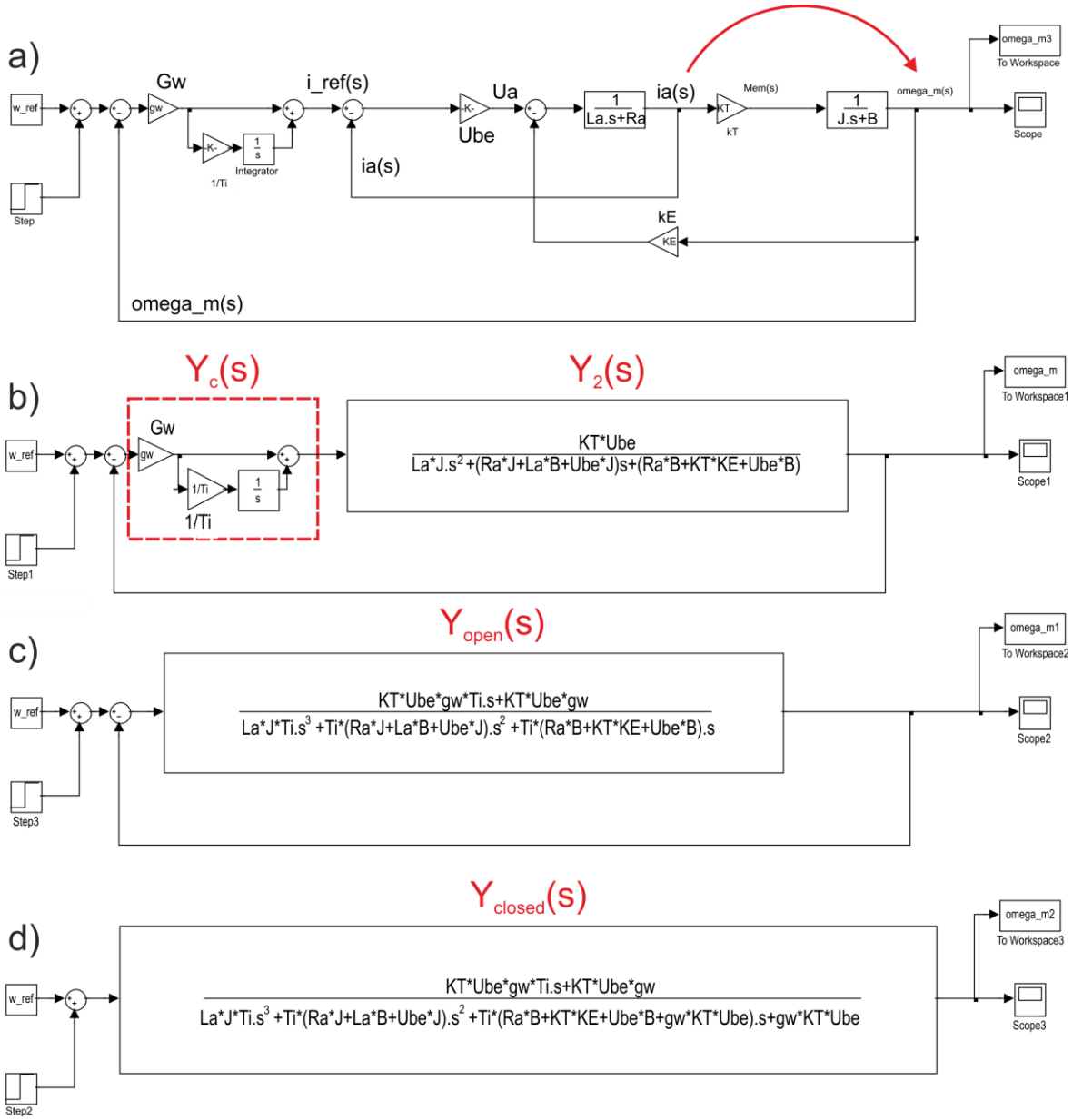
Vizsgálat a lineáris rendszerelmélet segítségével. Fontos tudnunk, hogy a rendszerünk a lineáris rendszerelmélet szerint stabil-e, hogy eldönthessük, az általunk tapasztalt jelenségek valóban a nemlineáris hatásokból fakadnak, nem pedig a rendszer eredendően instabil voltából. A 3.9. ábra elvi vázlata alapján felrajzolható a motor szabályozásának lineáris modellje. Ehhez szükség van a DC motor hatásvázlatára is, amelyet a (3.8) – (3.13) egyenletek Laplace transzformálásával és rendezésével kaphatunk meg. A végeredmény, tehát az egyenáramú motor hatásvázlata a 3.10.a ábrán látható.

Ha a motor áramjelét és szögsebességét visszacsatoljuk a 3.9. ábrának megfelelően, és a szenzorok kimenő jeleit egy-egy RC taggal szűrjük is, emellett beiktatunk egy PI szabályozót a motorral sorba, akkor a 3.10.b ábrán láthatóvá alakul át a hatásvázlat. A szabályozó bemenete a referencia szögsebesség és a szűrőáramkörön keresztül visszacsatolt mért szögsebesség. A szabályozó kimenete, mint egy referencia áramjel értelmezhető, amelyet összehasonlítunk a motor armatúraáramának ugyancsak szűrt jelével, és a különbséget az U_{be} bemenő feszültséggel megszorozva kapjuk a motor U_a armatúrafeszültséget. Az U_{be} konstanst megelőző telítődést modellező tag a rendszer működési elvéből származó PWM jel kitöltési tényezőjét limitálja, melynek értéke 0 és 1 között változhat.



3.10. ábra: Lineáris modellek hatásvázlatai: a) Egyenáramú motor b) Egyenáramú motor áramvezérelt sebességszabályozása

Feltételezve hogy a rendszer időállandóihoz mérten nagyon kicsik a szűrőáramkörök időállandói, a további vizsgálat során ezek a tagok elhanyagolhatóak, hatásukat ugyanis várhatóan a vágási körfrekvenciánál jóval magasabb körfrekvencián fejtik ki. A szűrők tervezésére és időállandójának beállítására a 3.4. fejezetben még visszatérünk.



3.11. ábra: A szabályozás átviteli függvénye

Mivel a szabályozást egységugrásra (csak kis referencia-szögsebesség ugrásokra) fogjuk vizsgálni, ezért további egyszerűsítésként elhagyható a nemlinearitást okozó telítődést jelző blokk. Most a rendszer $\omega_{ref}(t) - re$ adott válaszára vagyunk kíváncsiak, így a terhelőnyomatékot, mint másik bemenetet $M_t = 0 - nak$ választjuk. Az így kapott modellt már átalakíthatjuk a hatásvázlat egyszerűsítési módszerek segítségével, és egy-egy átviteli függvényt kell kapjunk a felnyitott körre és a visszacsatolt körre végeredményként. A kiinduló linearizált átviteli függvényt és a fontosabb egyszerűsítési lépéseket a 3.11.a) – 3.11.d) ábrán láthatjuk. Az a) ábrán piros nyíl jelöli az első lépést. A kijelölt csomópont áthelyezésével kapunk három, egymásba ágyazott negatív visszacsatolású hurkot, amelyeket már a visszacsatolt kör egyenértékű átviteli függvényével helyettesíthetjük. A b) ábrán már felismerhetjük a szabályozót ($Y_c(s)$) és az azzal sorba kapcsolt szabályozott szakaszt ($Y_2(s)$). A visszacsatoló ág átviteli függvénye a már korábban említett

elhanyagolások miatt 1, amit merev visszacsatolásnak nevezzük. Mivel a szögsebességet [rad/s]-ban tudjuk mérni, ezért [rad/s]-ban is írjuk elő. Ahhoz, hogy a rendszer stabilitását kvantitatívan is megvizsgálhassuk, elő kell állítani a nyitott kör átviteli függvényét, ezt a c) ábra $Y_{open}(s)$-sel jelöli.

$$Y_{open}(s) = Y_c(s) \cdot Y_2(s) = \frac{g_\omega \cdot K_T \cdot U_{be} \cdot (1+sT_i)}{s^3 \cdot L_a J T_i + s^2 T_i \cdot (R_a J + L_a B + U_{be} J) + sT_i \cdot (R_a B + K_T K_E + U_{be} B)} \quad (3.30)$$

Ezt mereven visszacsatolva kapjuk a zárt szabályozási kör átviteli függvényét, amely a bemenő referencia szögsebesség és a kimenő szögsebesség között teremt kapcsolatot.

$$Y_{closed}(s) = \frac{Y_{open}(s)}{1+Y_{open}(s)} \quad (3.31)$$

$$Y_{closed}(s) = \frac{g_\omega \cdot K_T \cdot U_{be} \cdot (1+sT_i)}{s^3 \cdot L_a J T_i + s^2 T_i \cdot (R_a J + L_a B + U_{be} J) + sT_i \cdot (R_a B + K_T K_E + U_{be} B + g_\omega \cdot K_T \cdot U_{be}) + g_\omega \cdot K_T \cdot U_{be}} \quad (3.32)$$

Az úgynevezett Bode amplitúdó- és fázisdiagram alapján meghatározhatjuk, hogy a rendszerünk stabilan viselkedik-e, és miként alakul a frekvenciamenete. Fontos a stabilitás kérdésénél a fázistartalék kérdése. A fázistartalék számítási képlete az alábbi:

$$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) \quad (3.33)$$

Egy rendszert akkor nevezünk stabilnak, ha a vágási körfrekvencián – ahol az amplitúdó görbe elmetszi a 0 [dB]-es tengelyt (ω_c) – még pozitív fázistartalékkal rendelkezik. Tulajdonképpen a -180° feletti fázisszög még stabil, de közel érve ehhez az értékhez már nagyon nagy lengésekkel áll csak be a rendszer, -180°-nál pedig állandósult lengések állnak elő (természetesen ehhez külső energiabetáplálás szükséges). Monoton csökkenő amplitúdó-menet esetén a vágási körfrekvenciánál kisebb körfrekvenciákon a rendszer erősítése nagyobb, mint 1, alatta azonban lecsökken az erősítése. Jóval nagyobb frekvenciákon ez olyannyira jelentőssé válik, hogy a rendszer az ilyen frekvenciájú bemenőjeleket már nem képes követni, a kimenő jel amplitúdója tart a nullához.

Ahhoz, hogy numerikus értékeket is kapjunk rendszerünk stabilitásáról, fázistartalékáról, számszerűsíteni kell a motor és a szabályozó paramétereit.

A használt motor egy ***Baldor M-2240-A*** típusú permanens mágneses egyenáramú motor.

Számítás szempontjából fontos paraméterei:

Megnevezés	**Jelölés**	**Érték**	**Mértékegység**
Névleges feszültség	U_n	50	$[V]$
Névleges áram	I_n	*2,05*	$[A]$
Névleges nyomaték	M_n	*0,21*	$[Nm]$
Névleges fordulatszám	rpm_n	*3500*	$\left[\frac{rpm}{min}\right]$
Tehetetlenségi nyomaték (motor + tachométer)	J	$3{,}5 \cdot 10^{-5}$	$[kgm^2]$
Viszkózus súrlódási együttható	B	$4{,}26 \cdot 10^{-5}$	$\left[\frac{Nm}{s^2}\right]$
Nyomaték konstans	K_T	0,115	$\left[\frac{Nm}{A}\right]$
Feszültség konstans	K_E	0,115	$[Vs]$
Armatúra ellenállás	R_a	4	$[\Omega]$
Armatúra induktivitás	L_a	$7{,}7 \cdot 10^{-3}$	[H]

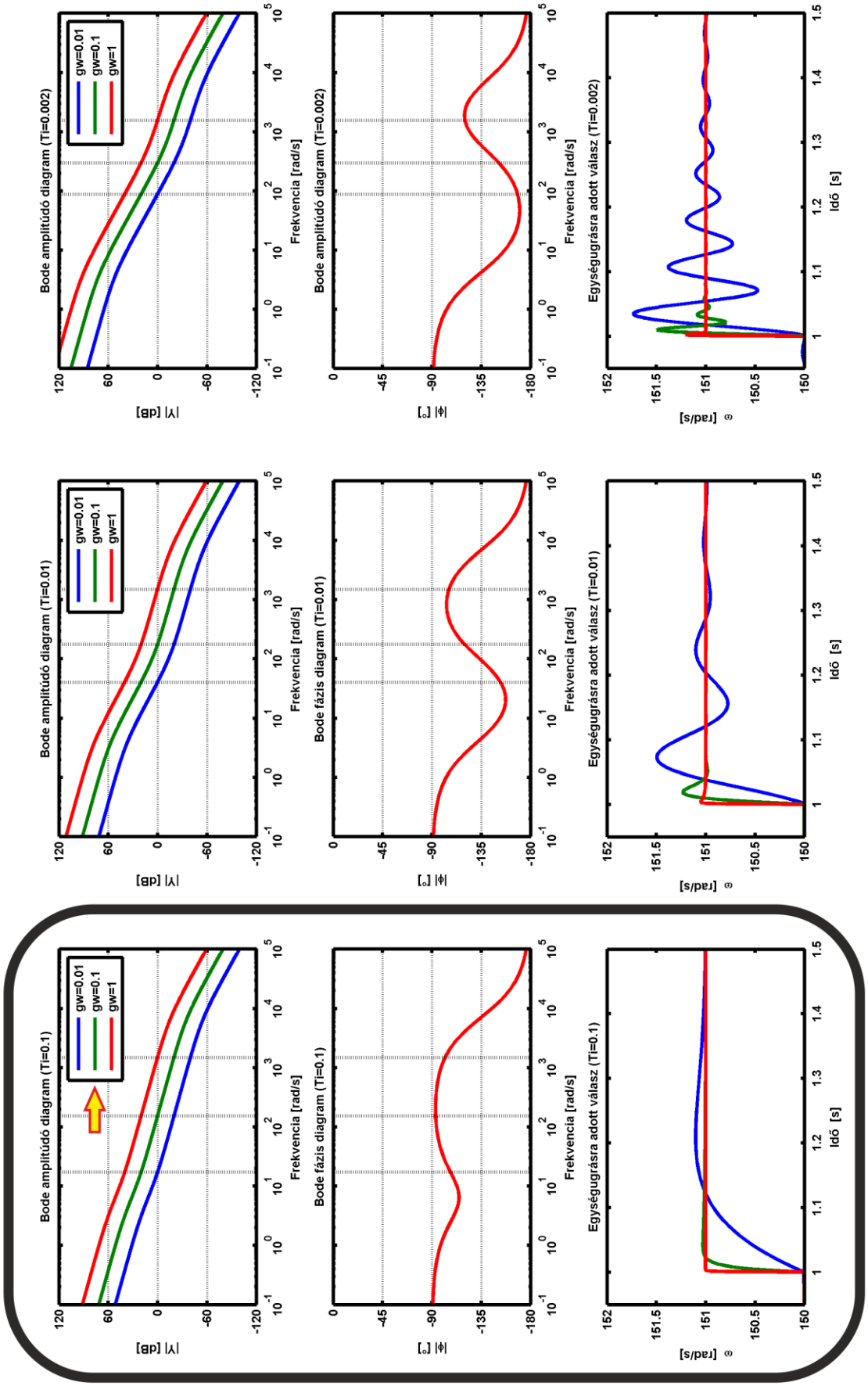
3.1. Táblázat

Felhasználva a (3.21) és (3.22) egyenleteket, és behelyettesítve a motor adatait az időállandókra a következőket kapjuk:

$$T_{mb} = 10{,}6\ [ms]$$

$$T_{eb} = 1{,}925\ [ms]$$

A hajtással szembeni alapvető követelmény, hogy a névleges értékeken stabilan működjön. A rendszer frekvenciaválaszát és egységugrásra adott időbeli válaszát a szabályozó különböző T_i és g_ω értékeire is megvizsgáltuk. Az eredmények a 3.12. ábrán láthatóak, míg a fázistartalékokra, a vágási körfrekvenciára illetve a t beállási időre vonatkozó adatokat a 3.2. táblázat tartalmazza. A rendszer válaszát megvizsgáltuk T_i = 0,1; 0,01 és 0,002 [s] értékekre, minden esetben G_ω=1; 0,1 és 0,01 aleseteket is megvizsgálva.



3.12. ábra: A rendszer válasza a lineáris rendszerelmélet alapján

T_i	g_ω	Sorszám	$\omega_c \left[\frac{rad}{s}\right]$	φ_t [°]	t_{be} [s]
0,1	0,01	1.	17,13	73,08	0,1
	0,1	2.	152,55	86,54	0,02
	1	3.	1448,70	77,78	0,005
0,01	0,01	4.	40,411	27,48	0,3
	0,1	5.	175,15	60,188	0.05
	1	6.	1491,90	74,31	0,004
0,002	0,01	7.	87,85	11,92	0,5
	0,1	8.	297,41	29,11	0,07
	1	9.	1560,00	59,83	0,002

3.2. Táblázat

Az egységugrásra adott válasz vizsgálata során a szögsebesség-referenciajelet 150 [rad/s]-ra állítottuk be.

A különböző értékekre kapott Bode amplitúdó és fázisdiagramokból is látszik, hogy a rendszerünk a vizsgált frekvenciatartományban stabilan működik, a fázistolás egyetlen esetben sem éri el a -180°-ot, de többször megközelíti. A táblázatban a fázistartalékok oszlopában zöld színnel jelöltem egy szabályozás esetén elfogadható értékeket, amikor nincs jele lengésnek, vagy az nagyon hamar lecsillapodik. Egy szabályozás esetén a 60° körüli vagy afeletti fázistartalék már nagyon jónak mondható. Vegyük szemügyre az 1. és 2. sorszámú eseteket, ahol a rendszer beállása szinte tökéletes, nagyon gyorsan és minimális túllendüléssel áll be a rendszer. Nullához közeli fázistartalékkal rendelkező rendszer erős lengésekkel áll csak be. A 7. sorszámú eset ábráján látható például, hogy a rendszer az egységugrást követően még majdnem fél másodpercig lengéseket végez. Ez nagyobb referencia szögsebesség ugrás esetén még jelentősebbé válik, és ez egy szabályozott rendszer esetén elfogadhatatlan.

A vágási körfrekvencia tekintetében a kitűzött célnak 125 [rad/s]-os értéket választottunk. Ez annyit takar, hogy a rendszer a bejövő referenciajel változását 125 [rad/s] körfrekvenciáig követni tudja, a felett azonban a válasz amplitúdója erőteljesen lecsökken, tehát a nagyobb frekvenciájú jeleket már nem tudja átvinni. Egy sebességszabályozás esetén ez a nagyjából 20 [Hz]-es érték reális követelmény. A vágási körfrekvencia oszlopában sárgával jelöltem a túl alacsony és a szükségtelenül magas vágási körfrekvenciákat, a számunkra megfelelőeket pedig zölddel jelöltem. A beállási idők oszlopában ugyancsak sárgával jelöltem a nem megfelelő, tehát túl nagy beállási idejű variánsokat. Ha a rendszer lengésekre hajlamos, az jelentősen megnöveli a beálláshoz szükséges időt. Megfelelőnek tűnhet tehát a 2. és az 5. sorszámú eset, ezek közül most a *2. sorszámút* választjuk a kisebb túllendülés miatt.

Következtetésként levonhatjuk, hogy a vizsgált paraméterekkel a rendszerünk tökéletesen stabil, nem mutat semmilyen instabilitást, gyors és pontos az alapjelre adott válasza.

A sebességszabályozás vizsgálata az időtartományban.

Az eddig ismertetett lineáris modell nem pontosan mutatja be a rendszer viselkedését, hiszen nem veszi figyelembe a kapcsolók kapcsolgatásából fakadó nemlinearitásokat. A következőkben bemutatom a rendszer pontos viselkedését leíró differenciálegyenlet rendszert.

Mint ahogy azt korábban írtam az áramkör elvi bemutatásánál, a kapcsolók állásának megfelelően vagy a teljes bemenő feszültség rákerül a motor kapcsokra, vagy a kapcsok a kapcsolón keresztül rövidre záródnak. Így tulajdonképpen két lineáris struktúrát tudunk megkülönböztetni (továbbiakban 1-es illetve 2-es struktúra). A hajtás egy változó struktúrájú szakaszonként lineáris rendszer. Minden kapcsolás után egy másik lineáris struktúra valósul meg. A lineáris struktúrák a T_r kapcsolási periódusonként ismétlődnek.

Felhasználva motort működését leíró (3.8) – (3.13) egyenleteket a következő két elsőrendű lineáris differenciálegyenletet kapjuk a motor viselkedésére:

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K_E}{L_a} \cdot \omega_m + \frac{1}{L_a} \cdot U_a(t) \tag{3.34}$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = +\frac{K_T}{J} \cdot i_a - \frac{B}{J} \cdot \omega_m - \frac{1}{J} \cdot M_t \tag{3.35}$$

ahol $U_a(t)=U_{be}$ ha a felső kapcsoló vezet (1-es struktúra), míg $U_a(t)=0$, ha az alsó (2-es struktúra).

Az állapotváltozók vektorának $\underline{x}^T = [i_a\ \omega_m]$-t, míg a bemeneti vektornak $\underline{u}^T = [U_a\ M_t]$-t választva felírhatjuk az egyenáramú motor egyenleteit állapotteres formában:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_E}{L_a} \\ +\frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ M_t \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Ami alapján az $\boldsymbol{A_1=A_2=A}$ állapot-átmeneti, B_1 és B_2 bemeneti mátrixra a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_E}{L_a} \\ +\frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

ahol az 1,2 a megfelelő struktúra sorszáma. Annak ellenére, hogy mind a két struktúra lineáris a hajtás nemlineáris lesz, mert a kapcsolási időpont a zárt szabályozási körnek megfelelően az állapotváltozók értékétől is függ. A hajtás a paraméterek változtatásával színes viselkedést mutat, ahogy azt a későbbi szimulációs és mérési eredmények bemutatják majd. A periódikus állapotból bifurkációs kaszkádon keresztül a hajtás kaotikussá válhat.

A zárt hurkú szabályzó integráló tulajdonsága miatt egy újabb állapotváltozót kell bevezetni. Az új állapotváltozó a PI szabályzó $v_\omega(t)$ kimenete lesz. Felhasználva a (3.28)-as egyenletet és a 3.9. ábrát a következő összefüggést kapjuk:

$$v_\omega(t) = g_\omega \cdot \left(\omega_{ref} - \omega_m(t)\right) + \frac{g_\omega}{T_I} \int \left(\omega_{ref} - \omega_m(t)\right) dt \tag{3.38}$$

A fenti egyenletet deriválva

$$\dot{v}_\omega(t) = g_\omega \cdot \dot{\omega}_m(t) + \frac{g_\omega}{T_i} \cdot (\omega_{ref} - \omega_m(t)) \tag{3.39}$$

Behelyettesítve a 3.32-es egyenletet a következő kapjuk

$$\dot{v}_\omega(t) = \frac{g_\omega \cdot K_T}{J} \cdot i_a - g_\omega \left(\frac{B}{J} + \frac{1}{T_i}\right) \omega_m - \frac{g_\omega}{J} \cdot M_t + \frac{g_\omega}{T_i} \cdot \omega_{ref} \tag{3.40}$$

Az állapotváltozó- és a bemeneti vektort kibővítve $\underline{x}^T = [i_a \quad \omega_m \quad v_\omega]$ és $\underline{u}^T = [U_a \quad M_t \quad \omega_{ref}]$ vektornak, a következő állapot-átmeneti és bemeneti mátrixot kapjuk:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_E}{L_a} & 0 \\ +\frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ \frac{g_\omega K_T}{J} & -\frac{g_\omega (T_i \cdot B + J)}{J T_i} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{B_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J} & 0 \\ 0 & -\frac{g_\omega}{J} & \frac{g_\omega}{T_i} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J} & 0 \\ 0 & -\frac{g_\omega}{J} & \frac{g_\omega}{T_i} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

A zárt hurkú sebességszabályozás pontos időbeli viselkedését - figyelembe véve a kapcsolgatásokat - a fenti két elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer megoldásával kapjuk, felhasználva a kapcsolási egyenletet, ahol a két struktúra közötti váltás megtörténik:

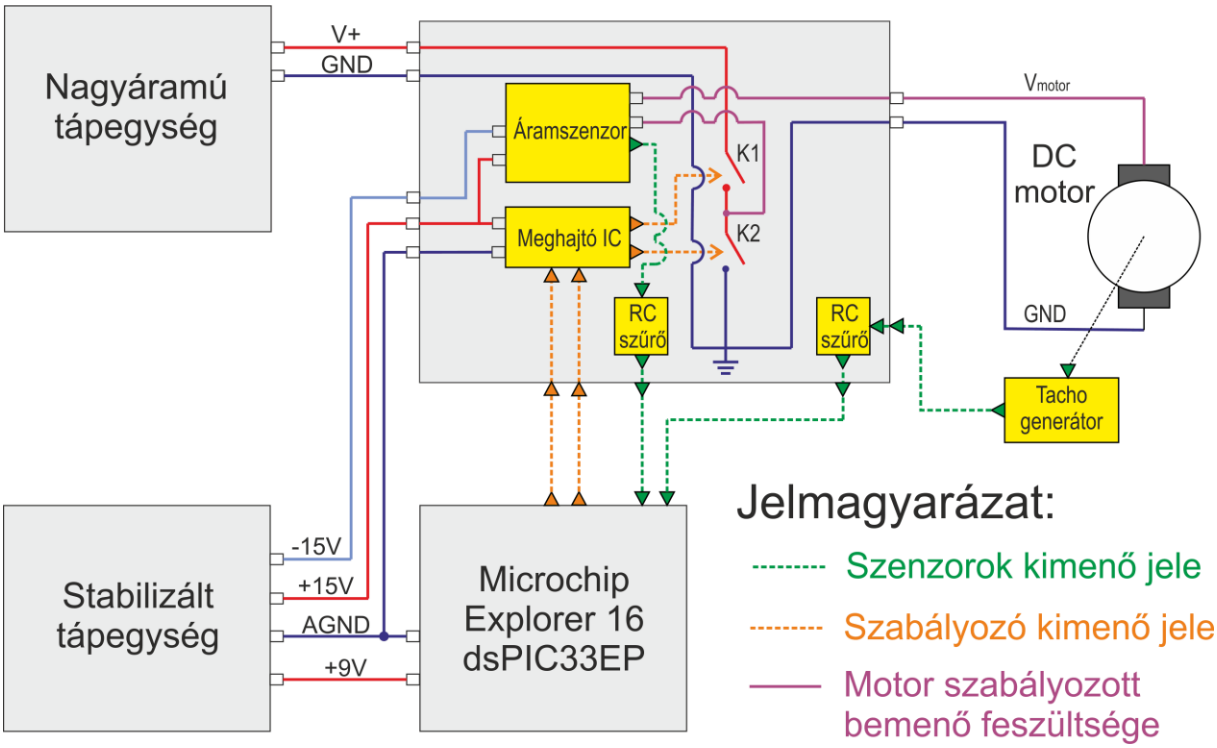
$$i_a(t_1) - v_\omega(t_1) = 0 \tag{3.42}$$

A hajtás időbeli viselkedését a fenti egyenletek alapján a MATLAB/Simulink program segítségével oldottam meg. A szimulációs eredmények a 3.5. fejezetben találhatóak.

3.4. Az áramvezérelt hajtás gyakorlati megvalósítása

A 3.9. ábrán szereplő áramkör vezérlő elemeinek funkcióit egyetlen mikrokontrollerrel valósítottam meg. A mikrokontroller, vagy mikrovezérlő egyetlen közös áramkörbe integrált RISC (csökkentett utasításkészletű) processzor és több periféria áramkör. Integráltságát tekintve a mikrovezérlő a mikroprocesszor és a PLC között áll. A mikroprocesszor nem tartalmaz perifériális áramköröket, míg a PLC már kimeneti meghajtó, illetve bemeneti illesztő áramköröket is tartalmaz. A mikrokontroller képes kiváltani az órajel forrást, az R-S tárolót, a jel amplitúdóját megváltoztató erősítőket és kivonó áramkört, és végül a komparátort, mindezt digitális, programozható formában. Képest az analóg jelek beolvasására és digitálissá alakítására, így alkalmas a szenzorok analóg jeleit is fogadni.

Az így áttervezett áramkör elvi vázlatát mutatja a 3.13. ábra. Az egész áramkörnek öt fő egysége van: egy nagyáramú és egy kisáramú tápegység, a szabályozási feladatokat megoldó egység, a meghajtó egység és végül a motor. A motorhoz ezen kívül kapcsolódik még egy tengelykapcsolón keresztül egy terhelőmotor is, mindez egy közös talapzaton helyezkedik el, erről a mechanikai felépítést szemléltető 3.14. ábra kapcsán lesz szó.



3.13. ábra: Az áttervezett áramkör elvi vázlata

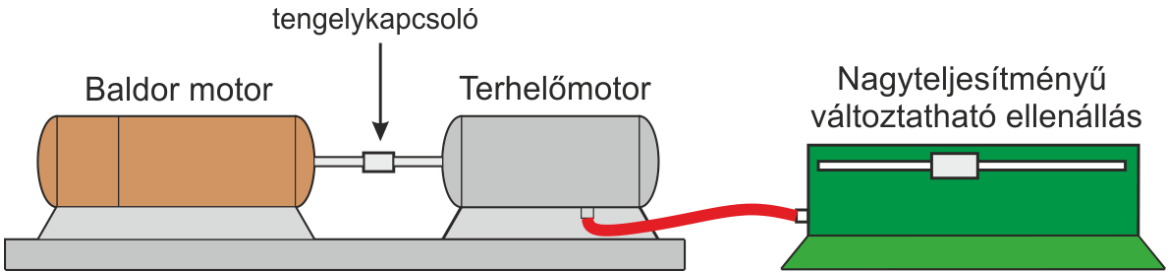
Az egyes áramköri egységek rövid ismertetése. A *nagyáramú tápegység* szolgáltatja a motor működéséhez szükséges energiát. Valójában egy toroid tekercsről van szó, amelynek szekunder oldala egyenirányítva van és a feszültségingadozások kisimítása végett két pufferkondenzátort is tartalmaz, együttes névleges értékük $14700\ [uF]$. A kimeneti feszültség fokozatmentesen állítható.

A *kisáramú (stabilizált) tápegység* a vezérlő és szabályozó áramkörök táplálását szolgálja. Mivel ezek az áramkörök érzékenyek a tápfeszültség változására, ezért a tápegység mindegyik kimenetén stabilizált feszültség jelenik meg, bizonyos teljesítményhatárok között függetlenül a terheléstől, az áramkörünk azonban messze nem lépi túl ezt a határt. A tápegységen belül megadott szabványos feszültségértékeket kiadó stabilizált tápegység IC-k találhatóak és egy kisteljesítményű transzformátor egyenirányítással. A berendezés rendelkezik $\pm$ 15, +9, +5 és +3,3 [V] kimenő feszültségekkel és emellett ez szolgáltatja a vezérlő áramkörök számára a földpotenciált is (AGND).

A *szabályozó egység* egy Microchip Explorer 16 fejlesztőpanelből és a benne lévő Microchip dsPIC33EP512MU810 típusszámú mikrokontrollerből áll. Ezen mikrokontroller a Microchip 16 bites chipjeihez tartozik, fejlett jelfeldolgozási funkciókkal, meggyőző teljesítménnyel (optimális esetben 60 millió utasítás másodpercenként), emellett rendelkezik a feladat elvégzéséhez nélkülözhetetlen 10/12 bites A/D átalakító modullal. Az implementáció során egy Explorer 16 fejlesztő panelon található alfanumerikus LCD kijelzőt, 4 nyomógombot és 8 LED-del használtam, hogy bármikor módosítani tudjuk a szabályozás paramétereit, és erről visszajelzést is kapjunk.

A *meghajtó egység* feladata a mikrokontroller kimeneti jelének illesztése a folyamathoz illetve a folyamatból érkező jelek kondicionálása, a szabályozó által értelmezhető

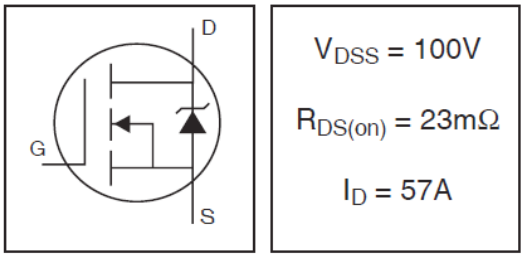
tartományba konvertálása. Az egész egység egy nyomtatott áramkört formál. Helyet kapott rajta a kapcsolók meghajtását végző integrált áramkör, egy áramszenzor, két elektronikus kapcsoló (MOSFET), egy RC szűrő áramkör az áramszenzor kimenetére, és egy RC szűrő és egyben 1/10 arányú feszültségosztó a motorhoz kapcsolódó és annak szögsebességével arányos jelet adó tachogenerátor kimenetére kötve. *Motornak* a Baldor nevű cég egy kifejezetten kis inerciájú motorját választottuk, a kis tehetetlensége miatt ugyanis könnyebben megfigyelhetőek rajta a nemlineáris jelenségek, nem jelentkezik olyan súllyal a tehetetlenségének integráló jellege. A motorhoz kapcsolódik egy szintén Baldor gyártmányú tachométer is. A motor egy talapzaton felfogatva helyezkedik el. Ugyanezen talapzaton van a terhelőmotor is, amely a terhelőnyomatékot szolgáltatja, az armatúrájára kapcsolt nagyteljesítményű ellenállással tudjuk a motor által kifejtett nyomatékot változtatni.



3.14. ábra: A mért motor és a terhelőmotor kapcsolása

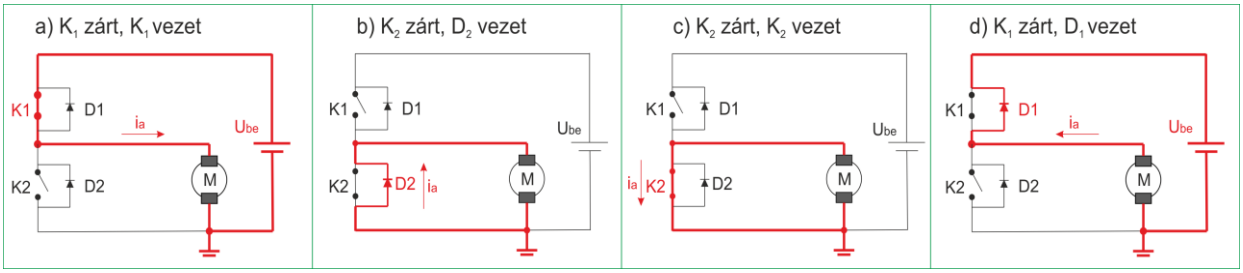
A meghajtó áramkör tervezése.

A mikrokontroller kimeneteit közvetlenül nem kapcsolhatjuk össze a motor áramkörének kapcsolóival és a szenzorokkal, szükség van a jelek kondicionálására és teljesítményszintjének konvertálására. Ezen okok miatt volt szükség egy vezérlő áramkör létrehozására, amely ellátja mind a szenzorok jeleinek szűrését, mind a K_1 és K_2 jelű elektronikus kapcsolók működtetését. Fontos követelmény volt a kapcsolókkal szemben, hogy közel ideális kapcsolóként viselkedjenek, tehát nagyon gyorsak legyenek, meredek a felfutásuk, kicsi legyen a zárt állapotbeli ellenállásuk, nyitott kapcsolóállás esetén pedig közel végtelen. Áramköri szempontból fontos volt még, hogy a lehetőségekhez mérten villamosan elválasszák a vezérlő áramkört a teljesítmény-áramkörtől. Ezen feltételeknek legjobban a MOSFET (**M***etal* **O***xide* **S***emiconductor,* magyarul: fém-oxid félvezető) tranzisztorok felelnek meg. A választásom az *International Rectifier IRF3710* teljesítmény MOSFET tranzisztorára esett (3.15. ábra). Működéskori drain-source ellenállása csupán 23 [mΩ], akár 57 [A] is folyhat rajta, és egészen 100 [V] feszültségig használható.



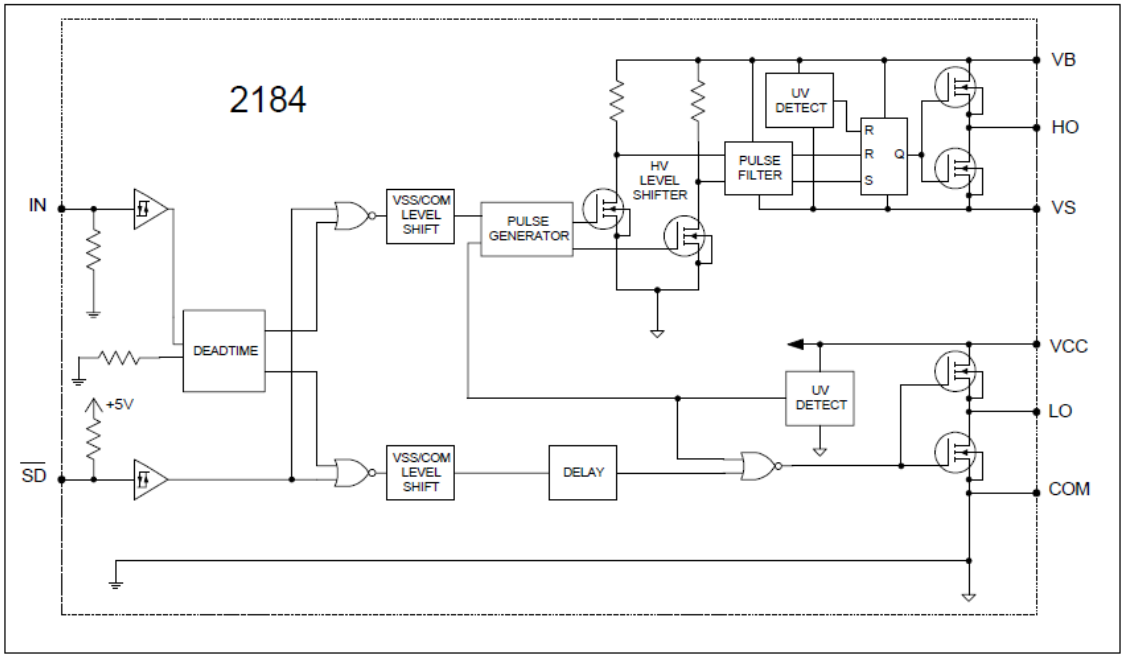
3.15. ábra: IRF3710 MOSFET tranzisztor

A tranzisztorral párhuzamosan egy integrált ellenirányú dióda van. Szerepe, hogy a MOSFET számára záró irányú áramoktól megvédje a tranzisztort. A működését szemlélteti a 3.16. ábra, ahol az áramkör záródását piros színnel jelöltem. Amikor a K_1 kapcsoló zárt, a tápfeszültség rájut a motorra, az áramkör a tápegységen és a motoron keresztül záródik. Amikor azonban a K_1 kapcsolót kikapcsoljuk, és a K_2-t be, akkor a motorban lévő induktivitás miatt az áram nem ugrásszerűen csökken nullára és egy ideig K_2 tranzisztort záróirányban feszítené elő, ez a tönkremenetelét okozná. Ekkor lép működésbe a D_2 dióda, amely zárja az áramkört. Amikor az induktivitás árama lecsökken nullára, akkor a motor, mint feszültségforrás lép életbe, és az előzőhöz képest fordított irányban járatja át az áramkörön az áramot, ekkor a K_2 kapcsolón keresztül záródik az áramkör. Amikor K_1 kapcsolót újból bekapcsoljuk az előzőeknek megfelelően, ameddig az áram iránya nem fordul meg addig a K_1-el párhuzamos dióda vezet. Könnyen belátható, ha a motor terhelve van és az áram nem csökken nullára, akkor K_1 kapcsoló és a K_2-vel párhuzamos dióda vezet csak.



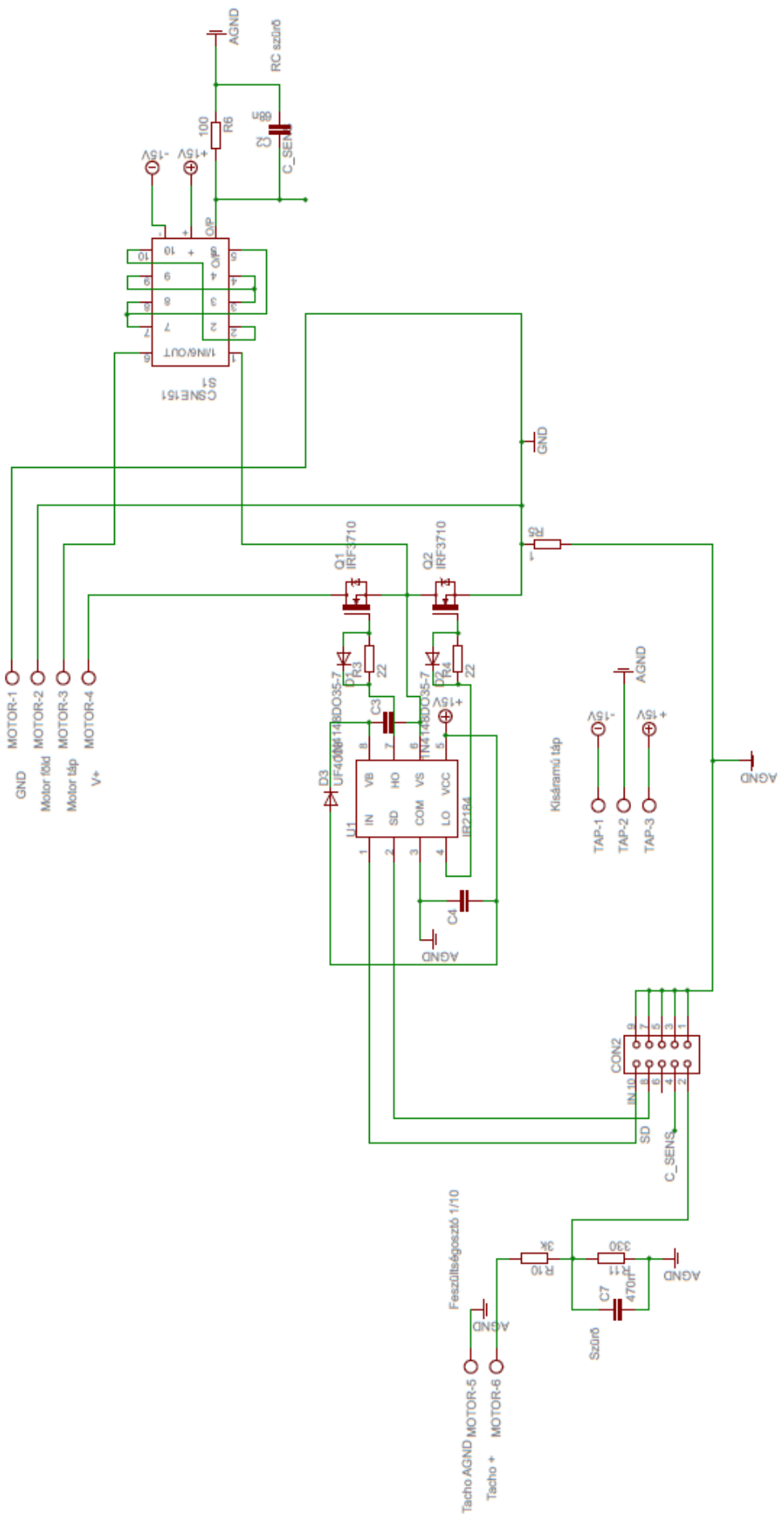
3.16. ábra: Védődióda szerepe

A hajtás paramétereiből következik, hogy nagy áramok lehetnek, de a feszültségek nem emelkednek számottevően 50 [V] fölé. A tranzisztorok adatlapja a III. Függelékben megtalálható. A tranzisztorokhoz ugyancsak az *International Rectifier* által gyártott *IR2184* nevű félhíd meghajtó áramkört használtam. A chip blokkdiagramja a 3.17. ábrán látható, ez alapján megérthető a működése.



3.17. ábra: IR2184 IC blokkdiagramja

Két logikai bemenettel rendelkezik, az egyikre *(IN)* adjuk a vezérlőjelet, amelyet a mikrokontroller ad ki, a másik pedig egy azonnali lekapcsoló bemenet ($\overline{SD}$). Nagyon hasznos, hiszen segítségével, ha valami hiba történik a szabályozásban, azonnal le tudjuk kapcsolni az áramkört, ezzel elkerülhetjük a berendezés tönkremenetelét. Az $\overline{SD}$ bemenet aktív nulla állapotú, ami azt jelenti, hogy az áramkör akkor kapcsol le, ha erre a bemenetére logikai 0 szintű jel kerül, és akkor engedélyezi a működést, ha a bemenetre logikai 1 szint kerül. A bemenetek kompatibilisek a szabványos 3,3 és 5 [V]-os logikai szintekkel, a mikrokontroller az előbbit képes szolgáltatni. Az ábra jobb oldali kimenetei két nagyobb csoportba rendeződnek, a felsőt nevezzük felső- vagy lebegőoldali kimenetnek, míg a másik az alsó oldali kimenet. Az *LO* nevű kimenetre csatlakozik a K_2 jelű tranzisztor, míg a *HO* nevű kimenetére a K_1 jelű tranzisztor. Amíg le van tiltva az áramkör ($\overline{SD} = 0$), addig az alsó oldali, azaz az LO kimeneten lévő tranzisztor be van kapcsolva, míg a magas oldali, azaz HO oldali tranzisztor kikapcsolt állapotban van. Ennek az a szerepe, hogy így a 3.9. ábra alapján bekötött motor mindkét armatúra csatlakozója földpotenciálon van, tehát a motoron nem folyik áram, megáll. Így érhető el a vészleállítás funkció. A meghajtó chip további előnye, hogy rendelkezik előre beprogramozott fix holtidővel (500 [ns]), ami megakadályozza, hogy a két tranzisztor egyszerre legyen bekapcsolt állapotban, ekkor ugyanis rövidzár keletkezne az áramkörben, nagyon nagy áramokkal. Az n-csatornás MOSFET tranzisztoroknak működési alapelvükből fakadóan a vezérlő bemenetükön (GATE) a SOURCE bemenetükhöz képest pozitív feszültségnek kell megjelennie, hogy bekapcsoljanak. Mint a nevük is sugallja, a GATE-SOURCE feszültség nagyságával tudjuk szabályozni a tranzisztor nyitását. Az IRF3710 adatlapjáról leolvasható, hogy gyakorlatilag 9 [V] feletti U_{gs} feszültség esetén már teljesen kinyitott a tranzisztor, azaz, mint kapcsoló teljesen be van kapcsolva. A meghajtó IC tápfeszültsége, mint majd látjuk a kapcsolási rajzból $15\ [V] - U_{dióda}$ (ez a dióda a tápforrás felé visszahatást akadályozza meg), tehát maximum ekkora feszültséget tudna kiadni a kimenetein, ami az alsó oldali tranzisztornál meg is felel, hiszen ennek a SOURCE lába a földpotenciálra van kötve. Azonban a magas oldali tranzisztor esetében már ez a feszültség nem lenne elegendő, hiszen ennek a SOURCE lábán már a tápfeszültség jelenik meg, amely a hajtás esetében jóval az előbb említett 15 [V] körüli feszültség felett van. Tehát a felső oldali tranzisztor nem kapcsolna be. Ezt a chip az úgynevezett „bootstrap” működési móddal tudja kiküszöbölni. Ennek lényege, hogy a kapcsolási periódus azon fázisában, amikor az alsó tranzisztor van bekapcsolva (K_2), a VS és VB kimenetek közé rakott kondenzátor (C_3) feltöltődik a tápfeszültségre, és amikor a K_1-nek kell bekapcsolnia, akkor erre a tápfeszültséggel feltöltött kondenzátorra rákapcsolja még a saját belső 15 [V] feszültségét is. A gyors kapcsolási periódusok miatt a kondenzátornak nincs ideje kisülni, így a rajta fellépő feszültség a tápfeszültség plusz a belső IC feszültség lesz. Az így kiadódó feszültség már alkalmas a felső oldali tranzisztor meghajtására. A módszer előnye, hogy nem kell nagy feszültséggel táplálnunk az IC-t, hátránya viszont, hogy bizonyos időközönként ki kell sütni és újra feltölteni a kondenzátort. Az áramkör tehát kisebb, mint 100%-os kitöltési tényező mellett működőképes csak. Jelen alkalmazásban ez tökéletesen megfelel a célnak, a kitöltési tényező szinte soha nem éri el a 100 %-ot. Arra az esetre, ha mégis ekkora kitöltésre lenne szükség, a mikrokontrollerbe implementált program bizonyos időközönként (0,1 [s]-onként) gondoskodik a kondenzátor újrafeltöltéséről. Erről még lesz szó a mikrokontrollerbe implementált kód leírása kapcsán.



3.18. ábra: A meghajtó áramkör kapcsolási rajza

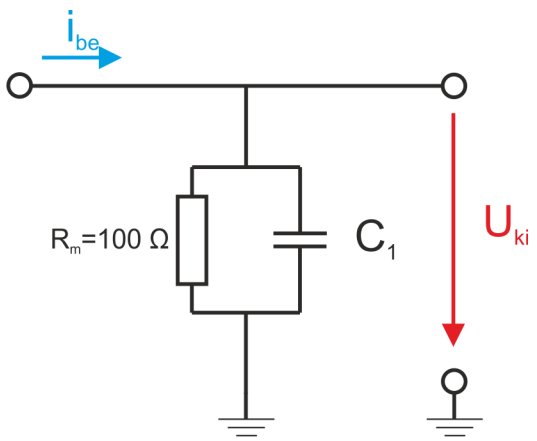
A meghajtó áramkör kapcsolási rajzát a 3.18. ábrán láthatjuk. A panel három csatlakozási blokkal rendelkezik. Egy a nagyáramú tápvezetékeknek és a tachogenerátor jeleinek lett kialakítva, egy a stabilizált $\pm$ 15 [V] feszültségnek és kisáramú földnek, és egy a mikrovezérlő felé és onnan érkező jeleknek. Áramszenzornak a Honeywell által gyártott CSNE-151 típusszámú nyomtatott áramkörre forrasztható alkatrészt választottam (3.19. ábra), adatlapja megtalálható a IV. Függelékben. Ez egy zárthurkú Hall-elemes áramszenzor, amely bekötésétől függően leosztja bizonyos arányban a primer oldalán folyó áramot, és a leosztott áramot adja ki a szekunder oldalán. Ehhez az oldalhoz csatlakozik egy pontos mérőellenállás, amelyen eső feszültséget tudjuk mérni a mikrokontroller AD átalakítójával.

3.19. ábra: Honeywell CSNE-151 áramszenzor

A IV. Függelékben ugyancsak megtalálható a szenzor lábkiosztása és bekötési javaslatai. A hajtás paramétereihez igazodva a 4. számú bekötést választottam, amely 6 [A] névleges áramot enged meg, és a kimenetet $\frac{1}{250}$ arányban osztja le, tehát névlegesen 24 [mA] áramot ad ki. Mérőellenállásnak 100 és 320 [Ω] között bármilyen értéket választhatunk, én 100 [Ω]-os ellenállást használtam. Itt nincs szükség nagy teljesítményű ellenállásra, hiszen névleges állapotban a következő disszipációval kell számolni (feltételezzük, hogy a mikrokontroller analóg lába nagyon nagy bemeneti ellenállású):

$$P_d = i_m^2 \cdot R_{100} = 0{,}024^2 \cdot 100 = 0{,}058\ [W] \tag{3.43}$$

A kereskedelemben kapható furatszerelt ellenállás-tokozások teljesítmény-disszipációja ennek majdnem tízszerese, 0,5 [W] körül alakul. A továbbiakban tehát nem szükséges ellenőrizni ilyen kicsi feszültségeknél az ellenállásokra eső teljesítményt, mert bőven a megengedhető határ alatt lesznek. Az áramszenzor nagyon szép, zajmentes jelet szolgáltat, ennek ellenére a mérések során szükségessé vált egy szűrőáramkör beiktatása. A szűrőáramkör a mérőellenállásból és a vele párhuzamosan kapcsolt szűrőkondenzátorból áll (3.20. ábra). [8] Az áramkört az áramszenzorból érkező áramjel táplálja, és a kimenő feszültségre, mint aluláteresztő szűrő funkcionál.



3.20. ábra: Az áramszenzorhoz kapcsolt aluláteresztő szűrő

A szűrő átviteli függvénye a következő lesz:

$$Y(s) = \frac{U_{ki}}{i_{be}} = R_m x \frac{1}{sC_1} = \frac{\frac{R_m}{sC_1}}{R_m + \frac{1}{sC_1}} = \frac{R_m}{sR_mC_1+1} \tag{3.44}$$

A (3.44)-ből már megkapható a statikus erősítése, és az időállandója:

$$A = R_m = 100 \text{ és } T_1 = R_mC_1 \tag{3.45}$$

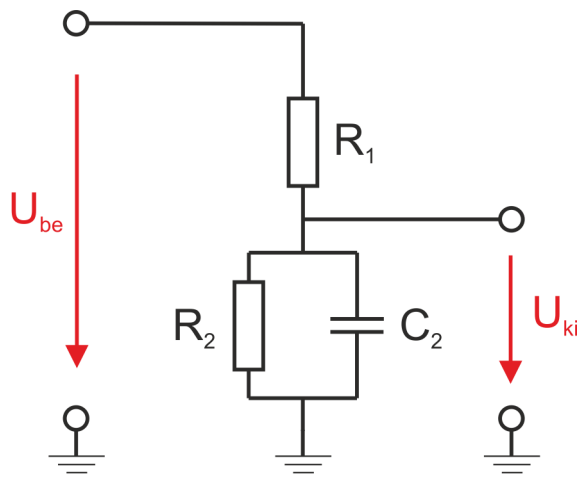
Méréseim alapján a törési frekvencia 20000 és 25000 [Hz] közé kell essen, hogy a jelet még ne torzítsa, de megfelelően leszűrje a nagyfrekvenciás zajkomponenseket. A (3.45) egyenlet alapján a szükséges kapacitás:

$$\omega_{1d} = f_{1d} \cdot 2\pi = 25000 \cdot 2\pi = 157079 \left[\frac{rad}{s}\right] \longrightarrow T_{1d} = \frac{1}{\omega_{1d}} = 6{,}366 \cdot 10^{-6}\ [s] \tag{3.46}$$

$$C_{1d} = \frac{T_{1d}}{R_m} = 63{,}66\ [nF] \tag{3.47}$$

Ehhez az értékhez a szabványos kapacitásértékek közül a *68* [nF] áll a legközelebb, tehát ezt választottam. Ezzel a kondenzátorral a törési frekvencia *23400 [Hz]*-re adódik, amely a célul kitűzött tartományba esik.

A tachogenerátor által szolgáltatott jel azonban már jóval zajosabbnak bizonyult, ráadásul szükséges volt a kiadott feszültségek arányos leosztása is, hiszen a mikrokontroller analóg bemenetére maximum 3,3 [V] feszültség kerülhet, a tachogenerátor által szolgáltatott jel pedig ennél jóval magasabb feszültségű. A gyártó által megadott konstans $7\ [V/krpm]$, tehát névlegesen 7 [V] feszültséget ad ki 1000 [ford/min] fordulatszámon. Névleges fordulatszámon ez 24,5 [V] feszültséget jelentene. Hogy a mérőrendszert alkalmas legyen nagyobb fordulatszámú motorok mérésére is, ezért 1/10 arányú feszültségosztót iktattam az áramkörbe, így egészen 33 [V] kiadott feszültségig működőképes. A szűrő kapcsolása a 3.21. ábrán látható.



3.21. ábra: Tachométerre kapcsolt feszültségosztó és szűrőáramkör

Felírva a kimenő és a bemenő feszültségek arányát operátortartományban:

$$Y(s) = \frac{U_{ki}(s)}{U_{be}(s)} = \frac{R_2 x \frac{1}{sC_2}}{R_1 + R_2 x \frac{1}{sC_2}} = \frac{\frac{R_2}{sR_2C_2+1}}{R_1 + \frac{R_2}{sR_2C_2+1}} = \frac{\frac{R_2}{sR_2C_2+1}}{\frac{sR_1R_2C_2+R_1+R_2}{sR_2C_2+1}} \tag{3.48}$$

$$Y(s) = \frac{R_2}{sR_1R_2C_2+R_1+R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1}{s\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_2+1} \tag{3.49}$$

A választott szabványos értékű alkatrészek a következők lettek:

$$R_1 = 3000\ [\Omega]$$

$$R_2 = 330\ [\Omega]$$

$$C_2 = 470\ [nF]$$

A (3.49) egyenlet egy egytárolós tag átviteli függvénye, amelyben a statikus erősítés és az időállandó a következő lesz:

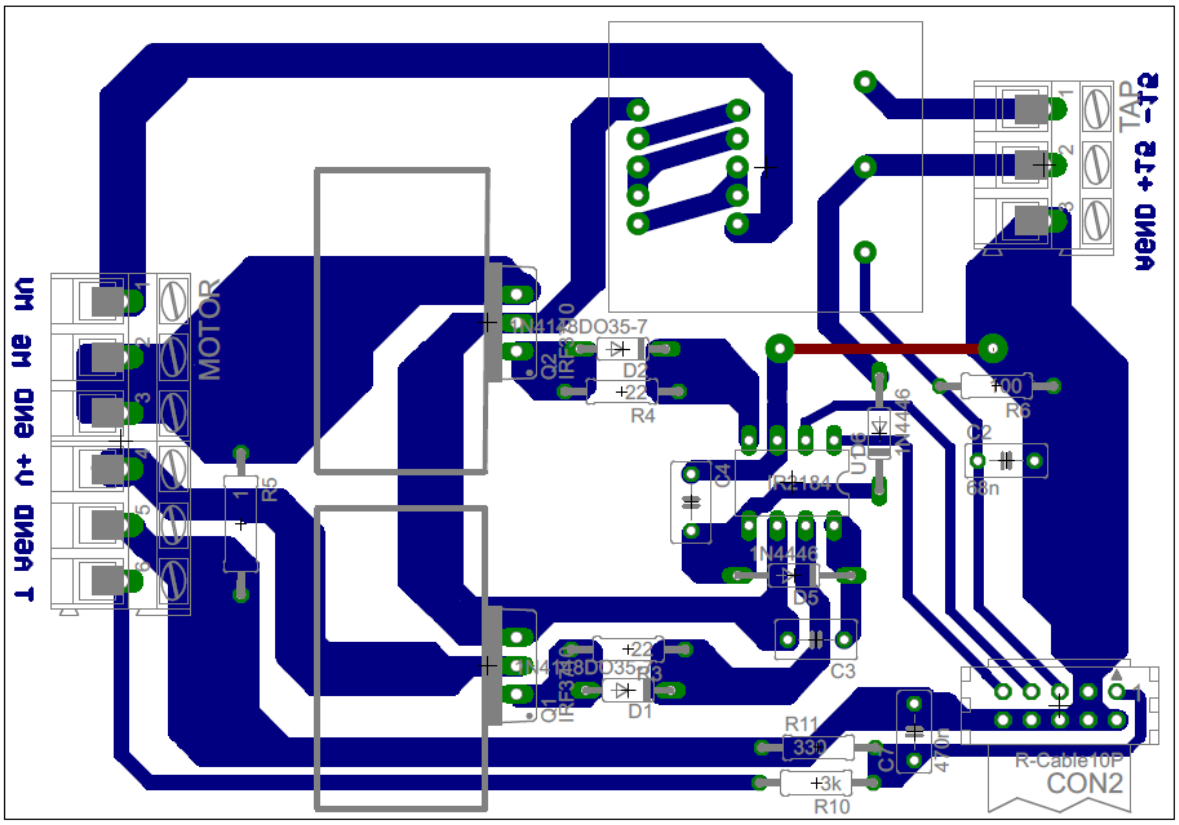
$$A = \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{330}{3000+330} \approx 0{,}1 \tag{3.50}$$

$$T_2 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} C_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-4} [s] \tag{3.51}$$

A (3.51) egyenletből a törésponti frekvencia $f_2 = 1137\ [Hz]$-re adódik.

A (3.44) és (3.51) számú átviteli függvényeket frekvencia-átviteli függvénnyé alakítva megkaphatjuk az amplitúdó- és fázismenetet és a vágási körfrekvenciákat. Ezeket az ábrákat az V. Függelék tartalmazza.

A meghajtó egység nyomtatott áramkörét *Eagle Layout Editor* programban terveztem meg. A megtervezett áramkör a 3.22. ábrán látható.



3.22. ábra: A meghajtó áramkör nyomtatott áramköri terve

A panelon el vannak különítve a teljesítmény és a vezérlő egységek. Előbbiek a baloldalon helyezkednek el, ide tartozik a nagyáramú tápcsatlakozó, a motor csatlakozó, a tachogenerátor csatlakozó. A motor tápvezetéke keresztülmegy az áramszenzor primer tekercsén, majd a K_1 és K_2 tranzisztor közös lábára csatlakozik. Azok a vezetékek, ahol nagyobb áramok folynak, ki vannak szélesítve, hogy minél kisebb ellenállásuk legyen. A jobb felső sarokban található a stabilizált feszültségek bekötésére szolgáló sorkapocs, az ebből kiinduló kivastagított sziget az analóg földpotenciál. Erre csatlakozik a tachogenerátor földpotenciálja is. A nyomtatott áramkör közepén helyezkedik el maga a meghajtó IC, a működéséhez szükséges alkatrészekkel. Az LO és a HO jelű lábai egy-egy ellenálláson és diódán keresztül csatlakoznak a tranzisztorok GATE lábára. Ezen diódák szerepe, hogy a tranzisztorok kisütését kikapcsolásukkor még gyorsabbá tegyék. Noha a MOSFET-ek nagyon kis bekapcsoláskori ellenállással rendelkeznek, nagyon nagy áramok esetén megnőhet a disszipációjuk, ezért egy-egy hűtőbordát szereltem fel rájuk. Normál üzemi körülmények között azonban nem szabad melegedniük. A rajtuk eső feszültség 6 [A] mellett is csak 0,138 [V] lenne, a motoron azonban folyamatosan nem fog ekkora áram folyni. A jobb alsó sarokban található a szabályozóegység csatlakozója. Ide csatlakozik a tachogenerátor szűrt és 1/10 arányban leosztott feszültségjele, és innen jön a meghajtó IC felé a vezérlőjel és a lekapcsoló jel. Az egész nyomtatott áramkör mérete csupán 105x73 [mm].

A szabályozás megvalósítása dsPIC33EP mikrokontrollerrel.

A Microchip által gyártott dsPIC33EP512MU810 mikrovezérlő fejlett jelfeldolgozási képességekkel rendelkezik. Akár 12 bites AD átalakításra képes, de ha fontos a gyorsaság, akkor 10 bites módban is működik. Én ez utóbbi beállítást választottam, hiszen ahhoz, hogy megfelelően jó időbeli felbontású szabályozást lehessen készíteni, másodpercenként több tízezerszer kell mintát vennünk mind a tachogenerátor, mind az áramszenzor által szolgáltatott jelekből. A 10 bites felbontás miatt az analóg lábra kerülő feszültség a beállított referenciafeszültség-határok között 1023 részre osztható, a legkisebb mérhető feszültségváltozás:

$$V_{LSB} = \frac{V_{ref+} - V_{ref-}}{1023} = \frac{3300-0}{1023} = 3{,}226\ [mV] \tag{3.52}$$

Az LSB (Least Significant Bit) index a legkisebb helyi értékű bitre utal. Mint a képletből is látható, referenciafeszültségeknek az kontroller tápfeszültségét és a földpotenciált választottam. A motor áramára vetítve ez a felbontás a következőt jelenti, tekintetbe véve, hogy mi már a szekunder oldali $\frac{1}{250}$ arányban leosztott áramot mérjük egy 100 [Ω]-os ellenálláson: a mérhető maximális szekunder áram 33 [mA], amely a motor armatúra áramát tekintve 8,25 [A]-nek felel meg. Így a felbontásból adódóan a mérhető legkisebb armatúraáram-változás:

$$\Delta i_a = \frac{8250}{1023} = 8{,}06\ [mA] \tag{3.53}$$

Ez a motor névleges áramára nézve

$$h_{iamax} = \frac{8{,}06}{2050} = 0{,}393\ \% \tag{3.54}$$

maximális hibát jelent. A szakaszos üzemmódból fakadóan nagyobb áramugrásokra lehet számítani,- ami a periodikus ki- és bekapcsolásokból fakadó állandó tranziens állapotnak tulajdonítható – ez esetben pedig ez az arány még kisebb lesz. A tachogenerátor által szolgáltatott jel, mivel 1/10 arányú osztáson megy keresztül, maximum 33 [V] lehet. Ez alapján a minimálisan mérhető szenzorfeszültség-változás:

$$\Delta u_{tacho} = \frac{33000}{1023} = 32{,}26\ [mV] \tag{3.55}$$

Ennél fontosabb információ, hogy ez mit is jelent a motor mért szögsebességére nézve. A tachogenerátor konstansát K=7-nek véve a maximális mért szögsebesség-hiba:

$$\Delta\omega = \frac{32{,}26}{7{,}5} \cdot \frac{2\pi}{60} = 0{,}48\ \left[\frac{rad}{s}\right], \tag{3.56}$$

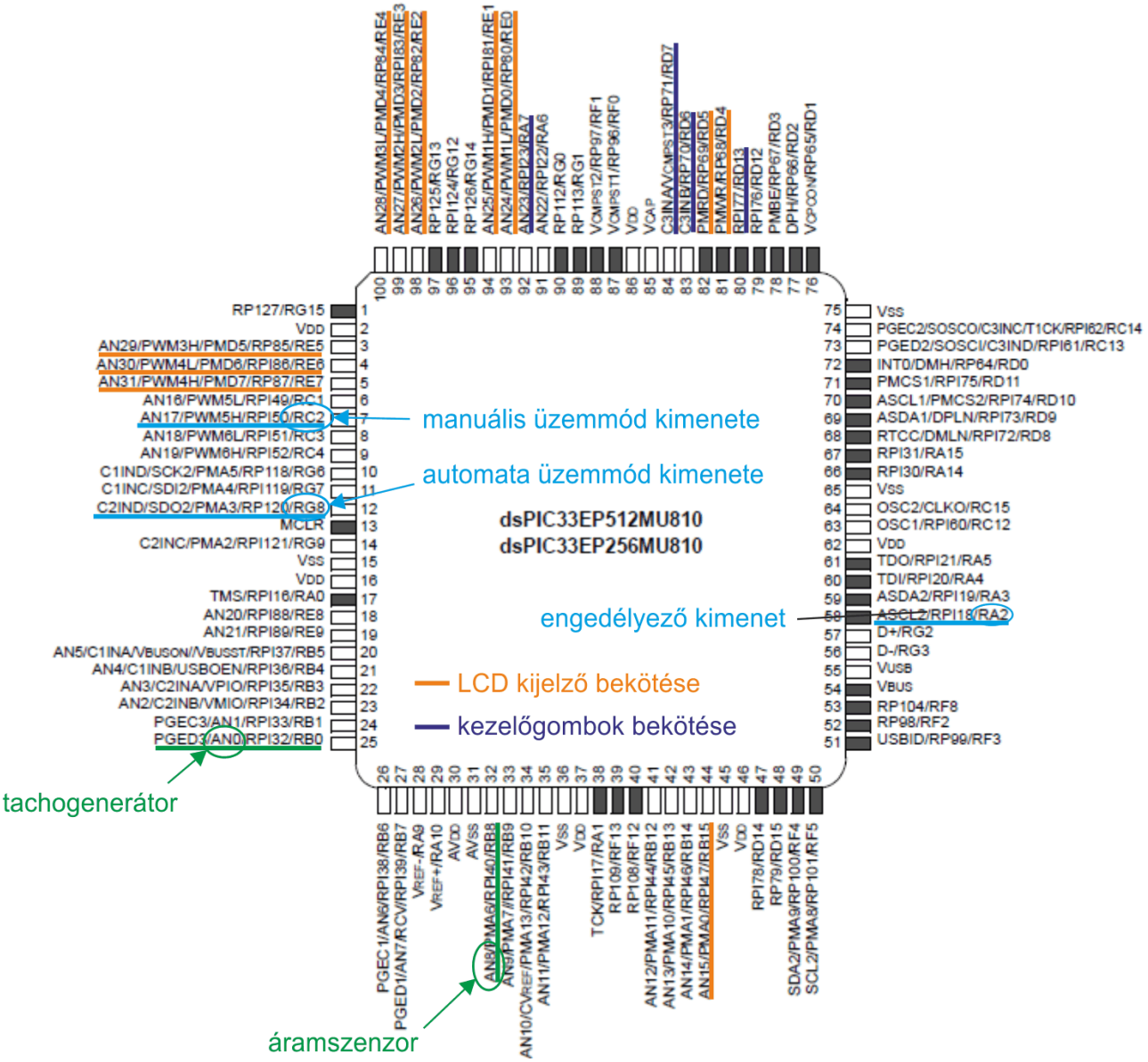
ugyanis a percenkénti fordulat és a szögsebesség között a váltószám $\omega = \frac{rpm}{60} \cdot 2\pi$. Ez a motor névleges szögsebességére nézve

$$h_{\omega max} = \frac{0{,}45}{366{,}52} = 0{,}13\ \%\text{-os} \tag{3.57}$$

maximális hibát jelent csupán.

Az időbeli diszkretizálásból is eredhetnek hibák. Az órajeladás és ez által a bekapcsolás 400 [Hz]-es frekvenciával történik, egy periódus tehát 2500 [μs] ideig tart. Minden egyes ilyen

periódusban 125-ször veszünk mintát az áram és szögsebesség jelből, tehát minden periódust 125 időegységre osztunk. Fontos megjegyezni, hogy a mikrokontrollernek két AD átalakító egysége is van, ezáltal képes a szimultán mintavételezésre, így garantáltan azonos időpontbeli értékekkel dolgozhatunk. Mivel a lekapcsolás feltétele a (3.38) egyenlet szerint az, hogy az áramból számítható v_i jel nagyobb legyen a szögsebességből számítható v_ω jelnél, ezért a maximálisan vétett időbeli hiba a periódusidő 1/125-öd része plusz a szabályozó számításaihoz szükséges idő, ami biztosan kisebb ennél az 1/125-öd résznél. Legrosszabb esetben tehát a beavatkozási késleltetés 2/125-öd része a periódusidőnek, azaz 40 [μs]. A teljes periódusra nézve ez 1,6 [%] időbeli hibát jelent legrosszabb esetben.



3.22. ábra: A fontosabb funkciót ellátó lábak bekötése dsPIC33EP512MU810 mikrokontrolleren

A 3.22. ábrán látható a mikrokontroller lábkiosztása, és jelölve vannak rajta a fontosabb funkciókat betöltő lábak is. Csak a legfontosabbakat említve: az AN0 jelű analóg bemenetre kerül a tachogenerátor leosztott jele, az AN8 jelűre pedig az áramszenzor jele. Az engedélyező kimenet szerepét az RA2 jelű láb látja el, míg automata üzemmódban (amikor is a tényleges szabályozás működik) a szabályozó jel az RG8-as lábon jelenik meg. Ha

manuális üzemmódban szeretnénk használni a rendszert, azaz, ha mi akarjuk kézzel állítani a kiadott PWM jel kitöltési tényezőjét, akkor az RC2 lábat kell használnunk. Az LCD kijelző a sárgával kiemelt lábakra van bekötve, ez alapértelmezettként is így van kialakítva a fejlesztőpanelen. Kapunk továbbá 8 db LED-et a panelen, ezekhez különböző funkciók visszajelzését rendeltem.

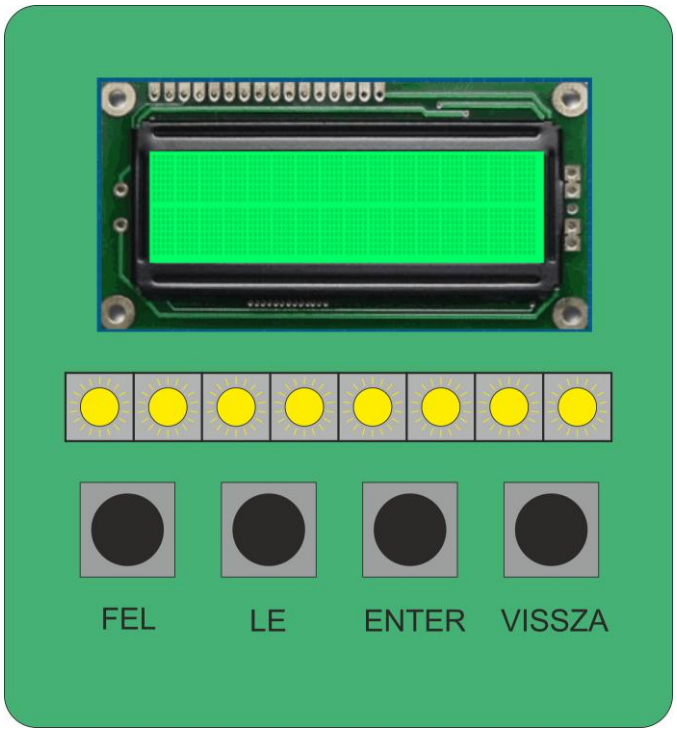
A PIC mikrovezérlőre a programot C programozási nyelven írtam meg. Ez a nyelv magasabb szintű, mint az Assembly nyelv, de még mindig hardver közelinek mondható, nagy hatékonysággal lehet a segítségével programozni.

A program a következő fő részekből áll:

- a különböző perifériákat inicializáló rész
- a felhasználói menü kezelőprogramja
- AD átalakító és szabályozó rész

A *perifériákat inicializáló rész* szerepe, hogy beállítsa a megfelelő működési frekvenciára a mikrokontrollert (120 MHz); deklarálja, mely bemeneteket használunk analógként; inicializálja az LCD kijelzőt; definiálja a PWM modul működését a manuális üzemhez; konfigurálja a Timer5 és az AD modul működését és végül a ki-és bemeneti lábakat.

A *menükezelő program* biztosítja a felhasználó felé a visszajelzést. A felhasználói felület sematikusan a 3.24. ábrán látható. A funkciók működéséről 8 LED ad visszajelzést, a menürendszer pedig a karakteres LCD kijelzőn jelenik meg. A kezelő a következő négy gomb segítségével tud navigálni a menüben: FEL LE ENTER VISSZA.



3.24. ábra: Felhasználói felület

Ezen programrész segítségével választhatjuk ki, hogy manuális üzemmódban használjuk-e a rendszert – tehát mi állítjuk be a PWM jel kitöltési tényezőjét százalékosan –, vagy pedig automatikus üzemmódban, amikor is a referencia szögsebességet tudjuk beállítani.

Lehetőség van a következő paraméterek programon belüli állítására:

- motor indítása/leállítása
- referencia szögsebesség (automata) / kitöltési tényező (manuális)
- motor tachogenerátorának K konstansa
- szabályozás g_ω arányos tagja
- opcionálisan az áramjelnek is adható $g_i = 1$-től különböző szorzó
- automata / manuális üzemmód
- manuális üzemmódban PWM frekvencia (400, 1000, 2000, 4000, 10000 Hz)

Lekérdezhetőek a következő adatok:

- aktuális szögsebesség (automata és manuális)/ aktuális kitöltési tényező (manuális)
- aktuális kapcsolási frekvencia
- szenzorok által mért adatok (AD érték, illetve a mért szögsebesség és fordulatszám, motor árama, áramszenzor árama)
- hibajelzés, történt-e hiba a számolás során
- a szabályozó számítási időszükséglete
- szoftververzió száma

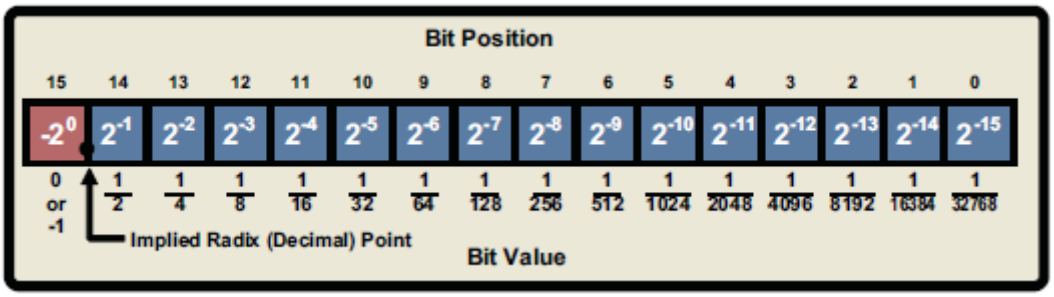
Automatikus üzemben a kapcsolási frekvencia fixen 400 [Hz]. Azért volt szükség kisebb frekvencia alkalmazására, mert így még könnyebben lemérhetőek a szögsebesség és az áram ingadozásai, könnyebben kimutatható a periódusduplázódás és a kaotikus jelenségek.

Az AD átalakító és szabályozórész működése röviden a következő:

- másodpercenként 50000-szer, azaz 20 [μs]-onként meghívódik a Timer5 nevű beépített számláló interruptja, ez triggereli az AD átalakító modul konverzióját. A modul szukcesszív approximációs elven működik (SAR), aminek nagy előnye, hogy fix ideig tart az AD átalakítás, emellett viszonylag rövid időbe telik a konverzió. Általánosságban elmondható, hogy ahány bites a modul, annyi lépésben alakít át. Ugyanebben az interrupt lekezelő rutinban inkrementálódik minden egyes eseménykor egy számláló, amely a szabályozó működéséhez elengedhetetlen, nevezetesen ahhoz, hogy minden 2500 [us]-ban kapcsoljon be a kimenet. Emellett inkrementálódik még egy számláló is, ami pedig a már korábban említett „bootstrap” működési elv miatt szükséges kondenzátorfeltöltődést biztosítja.
- ha az AD modul végzett a konverzióval, ez egy újabb interruptot generál. Ezen interrupt lekezelő rutinban történik a tulajdonképpeni számolás. Beolvassuk mindkét csatorna által mért és fixpontos ábrázolási formára alakított értéket, elvégezzük a szükséges átalakításokat, szorzásokat. Kiszámoljuk a PI szabályzó kimenetét, majd ezután megvizsgáljuk, hogy fennáll-e a (3.41) egyenlet által leírt lekapcsolási feltétel. Ha igen, akkor a kimenetet 0 logikai szintre állítjuk, ellenkező esetben marad 1. Függetlenül a számolás eredményétől, minden egyes periódus elején (2500 [μs]-onként) logikai magas szintre állítjuk a kimenetet, ez biztosítja a 3.9. ábra alapján már megfogalmazott minden periódus eleji SET jel beállítását.
- A „bootstrap” (feszültség-utánhúzó) kondenzátor teljes kisülését is ez a programrész akadályozza meg. Mivel ez akkor következne be, ha hosszabb ideig (~0,5 [s]) nem történne kapcsolás, és teljes kitöltési tényező lenne, ezért a program megvizsgálja,

hogy az elmúlt 0,1 [s]-ban volt-e lekapcsolás, és ha nem, akkor az adott periódus végén 20 [us] ideig lekapcsolja a kimenetet. Ha azonban a szabályozó lekapcsolta legalább egyszer is az elmúlt 0,1 [s]-ban a kimenetet, akkor ennek a programrésznek a számlálója nullázódik, és nem avatkozik be. Mivel a motort olyan szögsebesség-tartományban üzemeltetjük, hogy 100 %-os kitöltéssel valószínűleg nem kell számolni, így a mérések pontosságát ez nem fogja befolyásolni.

A program írásakor nagy nehézséget jelentett a megfelelő számítási gyorsaság elérése. A *dsPIC33EP* típusú mikrokontroller ugyanis nem rendelkezik külön dedikált lebegőpontos számolóegységgel, így e számolások nagyon sok időt vettek el. Csak P szabályozó esetén a kevesebb számítás miatt elegendően gyorsnak bizonyult akár 1 [kHz] kapcsolási frekvencián is a program működése. Azonban ha PI szabályozót alkalmaztunk, akkor a célként kitűzött másodpercenkénti 50 ezer mintavétel lecsökkent 16 ezerre. Ahhoz, hogy megtartsuk a nagyobb mintavételi frekvenciát és emellett PI szabályozót is használhassunk, a programbeli számolásokat át kellett írni *fixpontos számábrázolási formába*. Ebben a ábrázolási módban a bináris pont helye - ami a bal oldalon található egészeket elválasztja a jobb oldalon lévő törtektől - rögzített, és a számokat többnyire kettes komplemens kódban ábrázolják. A számok ábrázolásának két fontos jellemzője van a felhasználás szempontjából: az ábrázolandó számok nagysága és az ábrázolás pontossága. A két jellemző az alkalmazott regiszterméretettől és bináris pont helyétől függ. Ha a bináris pontot balra toljuk el, akkor a számok ábrázolási tartománya csökken és az ábrázolás pontossága nő. Abban az esetben, ha a bináris pont a regiszter bal szélén van, akkor a szám *fixpontos tört.* Amennyiben a bináris pont jobbra mozdul, akkor a számok ábrázolási tartománya nő és az ábrázolás pontossága csökken. Abban az esetben, ha a bináris pont a regiszter jobb szélén van, akkor a szám *fixpontos egész.* A dsPIC33EP-hez tartozó hivatalos C fordítóprogram tartalmaz fixpontos aritmetikájú függvényeket. [11] Két különböző formátumú fixpontos szám kezelésére alkalmas, egy 16 bites és egy 32 bites. A 16 bites formátum a következőképpen alakul (3.25. ábra), elnevezése Q1.15, továbbiakban Q15:

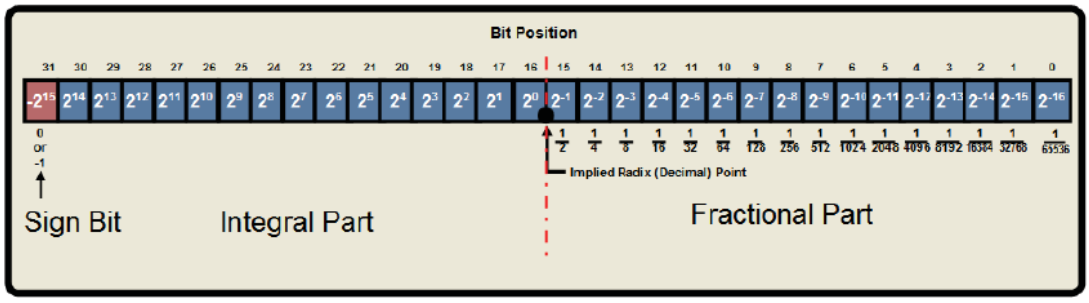


3.25. ábra: Q1.15 fixpontos számábrázolás

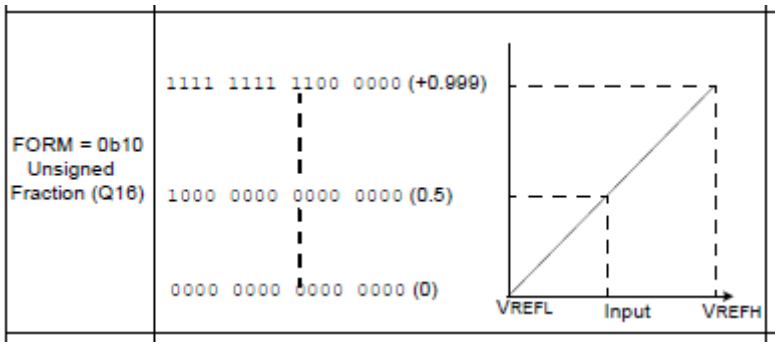
A maximálisan ábrázolható szám ebben az esetben 0,999, a minimálisan ábrázolható pedig -1. A 32 bites formátum elnevezése Q15.16 (továbbiakban Q16), ami utal arra, hogy 15 bit helyezkedik el a tizedesvessző előtt, és 16 utána (3.26. ábra). A legnagyobb helyiértékű bit (MSB – Most Significant Bit) az előjel bit, ha 1, akkor negatív számról van szó, ha 0, akkor pozitívról. Az ábrázolható számtartomány: [-32768.0, +32767.999]. Az AD átalakító hardveresen képes az eredményeket fixpontosan ábrázolni, ezzel is időt nyerhetünk a szabályozó számolásainál. A mért érték kifejezése a következőképpen alakul például a motor áramára nézve:

$$i = i_{ad} \cdot 8{,}25 \tag{3.58}$$

ahol i_{ad} az AD átalakító által szolgáltatott 0 és 0,999 közötti fixpontos szám.



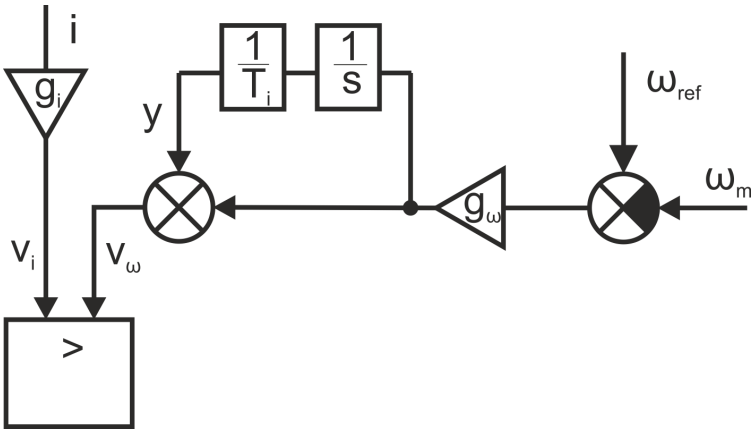
3.26. ábra: Q15.16 fixpontos számábrázolás



3.27. ábra: Az AD átalakító által szolgáltatott érték

Hogy ne vesszen a típuskonverziókkal időt, az AD átalakító által szolgáltatott értéket is egyből Q16 formátumba menti a program (3.27. ábra). A fixpontos számokkal azért tud olyan gyorsan számolni a chip, mert nem kell a tizedesvessző helyét minden egyes összeadásnál és szorzásnál kiszámítania, és ez alapján az egymásnak megfelelő helyiértékeket illesztenie. A tizedesvessző fix helyen, esetünkben a 16. legértékesebb bit után helyezkedik el. Ezáltal fixpontos műveleteknél a két számot csak binárisan kell összeadnia illetve szoroznia, majd a kapott számot fixpontosként értelmeznie.

A következőkben leírom a szabályozó számítási lépéseit. A jelölések a 3.28. ábrának és a VI. Függelékben található kódrészletnek megfelelőek.



3.28. ábra: A szabályozó által kapott jelek

A következőkben kiemeltem a szabályozást végrehajtó kód főbb részeit.

```
current_ad=ADC1BUF0;
tacho_ad=ADC1BUF1;
```

Beolvassuk az AD átalakító által szolgáltatott fixpontos értékeket, ezeket *current_ad* és *tacho_ad* fixpontos változókban letároljuk.

```
hiba_frac=ref_frac-tacho_ad;
```

Számolunk előjelhelyesen egy fixpontos hibaszámot, ami a menüprogramban 0 és 1 közé lenormált és fixpontossá alakított referencia szögsebesség és az ugyancsak 0 és 1 közötti mért szögsebesség különbsége.

```
omega_hiba_n=_Q16multi_sign(hiba_frac,C);
```

Ebben a lépésben a lenormált hibaváltozót beszorozzuk egy C konstanssal, amelynek értéke a tachogenerátor K konstansától függ. Beszorzás után $[rad/s]$ dimenziójú hibaváltozót kapunk. Mivel a fordítóhoz adott fixpontos függvények nem tudtak negatív számokat szorozni, ezért készíteni kellett egy olyan függvényt, amelyik kezeli a negatív számokat is. Ehhez készült a *Q16 _Q16multi_sign(Q16 x, Q16 y);* prototípusú függvény. A kódja ugyancsak megtalálható a VI. Függelékben.

```
current=_Q16mac(current_ad,c_szorz,0);
```

Az áramszenzor kimenő jelének méréséből származó 0 és 1 közötti értéket be kell szorozni egy, a rendszerre jellemző konstanssal, esetünkben ez *c_szorz=8,25*. Mivel azonban itt is fixpontos számok szorzásáról van szó, ezért előtte ezt a konstanst a főprogramban fixpontossá kell alakítani. Az áramjel a mérés mikéntjéből fakadóan nem lehet negatív, ezért itt használhatjuk a gyorsabb beépített előjel nélküli szorzót.

```
y_n=_Q16multi_sign(omega_hiba_n_1,A_hiba)+y_n_1;
```

Ebben a lépésben az integrátor adott időpillanatbeli (n.) értékét számoljuk ki. Mivel itt diszkrét szabályozásról van szó, ezért a folytonos idejű $\frac{1}{sT_i}$ integrátort diszkrét idejűvé kellett alakítani. Az átalakított, immár impulzus-átviteli függvény a következő:

$$\frac{hT_i}{z-1} \tag{3.59}$$

Az n. időpillanatban a kimenetére felírt függvény:

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{T_i} \cdot h \cdot u[n-1] \tag{3.60}$$

A (3.60) egyenletben y[n] az integrátor n. időpillanatbeli kimenetét jelenti, u[n-1] pedig az előző pillanatbeli bemenő értékét, T_i az integrálási időállandó, h pedig a lépésköz. Vezessük be az A_hiba nevű változót:

$$A_{hiba} = \frac{h}{T_i} \cdot g_\omega \tag{3.61}$$

Az integrátor előző pillanatbeli bemenete a következő:

$$u[n-1] = g_\omega \cdot omega_{hiba}[n-1] \tag{3.62}$$

Így a (3.63) egyenlet a kódsornak megfelelő formát veszi fel:

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{T_i} \cdot h \cdot g_\omega \cdot omega_{hiba}[n-1] = y[n-1] + A_{hiba} \cdot omega_{hiba}[n-1] \tag{3.63}$$

```
if(tick%50==0)
{
        LATGbits.LATG8=1;
}
```

Az időzítő másodpercenként 50000-szer inkrementálja a *tick* változó értékét, és minden 125. ilyen inkrementáláskor a szabályozó bekapcsolja a kimenetet, tehát kiadja a SET jelet. Ez 400 [Hz]-es kapcsolási frekvenciát jelent.

```
if(_Q16multi_sign(gw,omega_hiba_n)+y_n<_Q16mac(current,gi,0))
{
        LATGbits.LATG8=0;
        sd=0;
}
```

Ez a kódrészlet tartalmazza a lekapcsolási feltételt. Ha az áram értékének g_i-szerese (vizsgálatainkban $g_i = 1$) nagyobb értéket vesz fel, mint az integrátor kimenete plusz az omega hibajel g_ω-szorosa, akkor a kimenet nullába vált, tehát kiadjuk a RESET jelet. Az sd változó is lenullázódik, ha a kimenetet lekapcsoljuk, hiszen ilyenkor a „bootstrap" kondenzátor fel tud töltődni, nincs szükség később nem a szabályozó által betervezett kikapcsolásra.

```
else if(tick%50>48 && sd>4999)
{
        LATGbits.LATG8=0;
        sd=0;
}
```

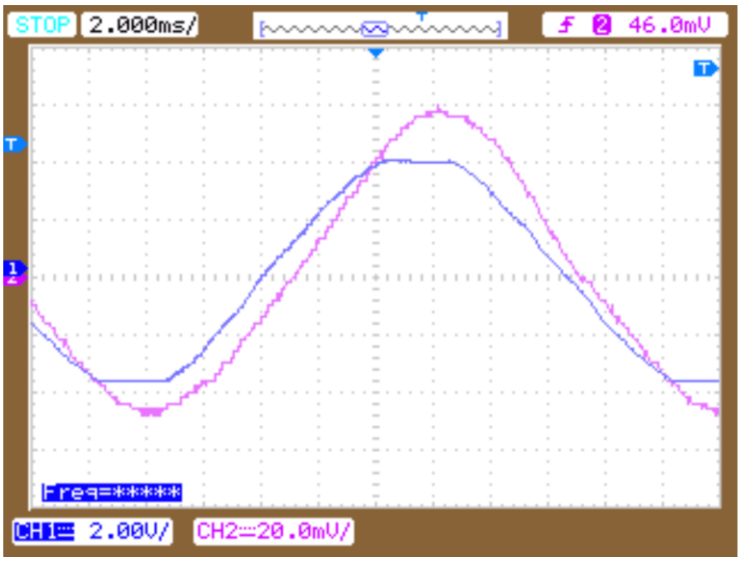
Ez a programrész akkor lép működésbe, ha az sd változó már elért egy bizonyos értéket (ez jelen esetben 0,1 [s] múlva következik be) és a periódus végén vagyunk. Az sd változó csak abban az esetben tud elérni ekkora értéket, ha már 0,1 [s] óta teljes kitöltési tényező mellett megy a rendszer. Mivel a névlegeshez képest jóval alacsonyabb fordulatszámon üzemeltetjük a motort, ez maximum a felfutáskor jelentkezhet. Ez utóbbi esetben is kikerülhető az úgynevezett soft-start technikával, mikor is a referencia szögsebességet fokozatosan növeljük.

3.5. Mérések és szimulációs eredmények

A motor paramétereinek lemérése.

Ahhoz, hogy a szimulációk az adott rendszer viselkedését tükrözzék, szükség volt a paraméterek lemérésére. Noha a vizsgált egyenáramú motor gyártója részletesen megadta a jellemző értékeket, ennek ellenére ellenőrizni kellett az értékek pontosságát.

Első lépésként a motor armatúrakapcsait kis amplitúdójú váltófeszültségre kapcsoltam. A motor ekkor, mint egy soros RL kör kezelhető (3.2. ábra), és a váltófeszültségre adott válasz fázistolásából és nagyságából meghatározható a motor induktivitása és az ellenállása is. A mérés oszcilloszkóp segítségével történt. A ráadott feszültségnél ügyelni kell rá, hogy a motoron lehetőleg a névlegesnél nagyobb áram ne folyjék. Egy mérési eredményt közöl a 3.29. ábra.



3.29. ábra: Az egyenáramú motor impedanciájának meghatározása

Az 1. csatorna mérte a bemenő feszültséget, míg a 2. csatorna egy árammérő szenzor segítségével a tekercsekben folyó áramot. A szenzor kimenete 100 mV /1 A.

Többször egymás után is elvégezve a mérést a következő értékek adódtak:

$$L_a = 7{,}7 \cdot 10^{-3}\ [H]$$

$$R_a = 6\ [\Omega]$$

A motor induktivitása tehát a gyári értéknek megfelel, a mért ellenállás azonban nagyobb a megadottnál. Ennek oka lehet, hogy nem tudjuk közvetlenül a tekercsre ráadni a feszültséget. Emiatt a motorban található szénkeféken és kommutátorokon eső feszültség is, mint ellenállás jelenik meg. A gyártó tehát valószínűleg nem a kapcsokon mérhető ellenállással számol. Ennek oka, hogy a motor tengelyét más szöghelyzetbe forgatva az ellenállás jelentősen megváltozhat, ez a szénkefék nem egyenletes érintkezéséből fakad.

Következő lépésként ellenőrizni kellett a motorhoz kapcsolódó tachométer pontosságát. Nagyon fontos tudni egy sebességszabályozásnál a pontos sebességet. A tényleges fordulatszámot egy hitelesített stroboszkóppal mértem, majd összehasonlítottam a

tachométerre megadott K konstansból számítható fordulatszámmal. A két érték között jelentős eltérés adódott, és a mérési eredményekből az volt leszűrhető, hogy a K konstans értéke a gyárilag megadott K=7 helyett:

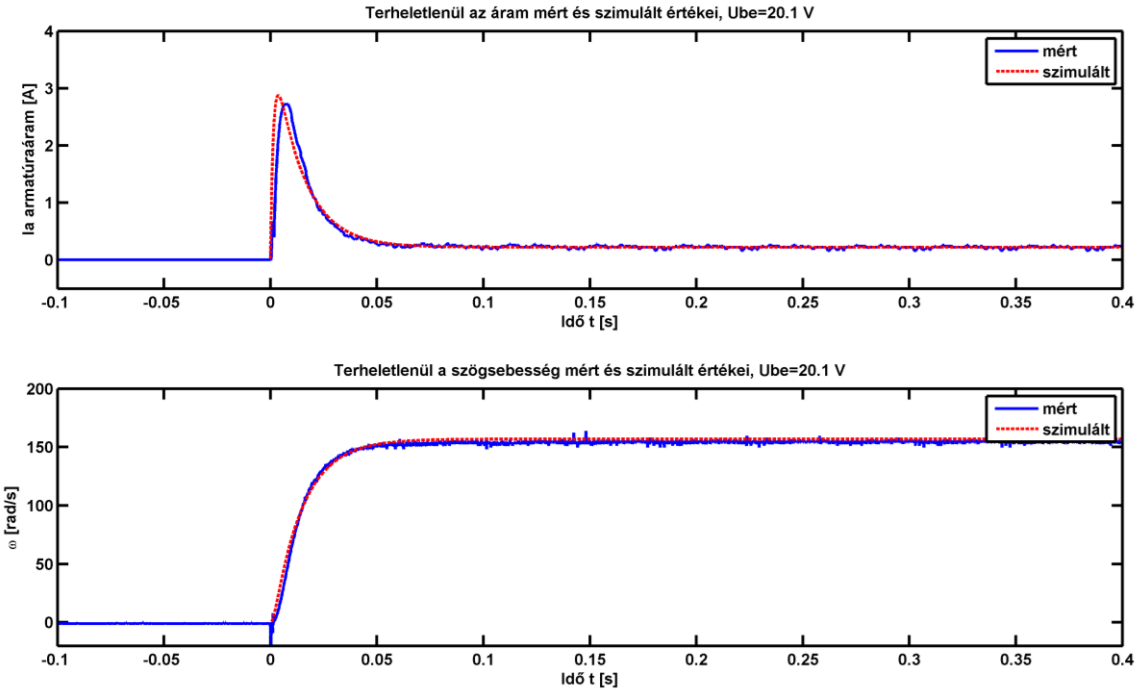
$$K = 7{,}48 \left[\frac{V}{krpm}\right]$$

Ugyanilyen elven – tehát stroboszkóppal – ellenőrizve a motorra megadott feszültség-konstanst is, a gyárilag megadott érték helyett (3.1. Táblázat) a következő adódott:

$$K_E = 0{,}1196\ [Vs]$$

K_E és K_T konstansok értéke közötti numerikus eltérés a motorban ébredő veszteségekből adódik, ugyanis nem az összes elektromos teljesítmény fordítódik hasznos munkavégzésre.

A motorhoz egy tachométer kapcsolódik, amely inerciája még hozzáadódik a motor inerciájához. Mivel közös tengelyen vannak, a forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomatékukat egyszerűen összegezni kell. Az együttes inerciát méréssel határoztuk meg, felhasználva, hogy a motor felfutása többek között a tehetetlenségétől függ. Ehhez meghatározott feszültséget kapcsoltam a motorra és figyeltem a felfutását. A mért és a szimulált felfutást egy közös diagramban ábrázolva a 3.30. ábra adódik.



3.30. ábra: A motor felfutása terheletlenül

A mérés és a szimuláció összehangolásából kiadódó tehetetlenség:

$$J_b = J_{bm} + J_{bt} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}\ [kgm^2] \tag{3.64}$$

Fontos megjegyezni, hogy a tápegységet ideálisnak vettem a szimuláció során, jóllehet ez a valóságban nem áll fenn. Ez tetten érhető a bekapcsoláskori kisebb áramtüskéken és az állandósult állapotbeli áramlengéseken. Ez utóbbiak kiváltó oka, hogy a tápegység a

hálózatból nyert váltófeszültséget egyenirányítja, és az ebből származó hullámosságot az alkalmazott kondenzátorok nem képesek teljességgel kiküszöbölni.

Mint ahogy a 3.14. ábra is mutatja, a terhelést egy másik egyenáramú motor és a kivezetéseire kötött tolóellenállás jelenti. Szükséges ennek a motornak is tudni a tehetetlenségét. A két motor tengelye egy tengelykapcsolón keresztül van összekapcsolva. A kis ébredő nyomatékok miatt vehetjük a torziós merevségét nagyon nagynak. Rugalmas hatását elhanyagolva a két motor tehetetlensége összegezhető. A szimulációs és mérési eredmények összehasonlításából a következő adódott:

$$J_{ö} = J_b + J_t = 6{,}5 \cdot 10^{-5}\ [kgm^2] \tag{3.65}$$

ahol J_t jelöli a terhelő motor tehetetlenségét a forgási tengelyére számítva, míg $J_ö$ a két motor és a tachométer együttes, közös tengelyre számított inerciája.

A motor lineáris modelljébe nincs belevéve az esetleges Coulomb súrlódás hatása. Ez a jelenséget leíró egyenlet nemlineáris mivolta miatt van így. Valós rendszereknél ez a súrlódás azonban elég jelentős lehet, ezért megvizsgáltam milyen összetevőkből adódik össze a motor súrlódása. A Coulomb súrlódás hatását, mint konstans nyomatékot vettem figyelembe. A két feltételezett súrlódási forma tehát:

- viszkózus súrlódás, amely a szögsebességgel és a B konstanssal arányos
- Coulomb súrlódás, amely a felületeken ható erőktől és a súrlódási együtthatótól függ

Ahhoz, hogy ezeket numerikusan is megállapítsuk, mérni kellett a hajtó motor (Baldor) áramát, a kapocsfeszültségét és a tachométer által kiadott feszültséget. Ez utóbbit átszámíthatjuk szögsebességre a $\omega = \frac{U_{tacho}}{K} \cdot \frac{1000}{60} \cdot 2\pi$ képlettel, jelen esetben K=7,5. Állandósult állapotot feltételezve, amikor is $\frac{d\omega_m}{dt} = 0$, a (3.9) egyenlet a (3.12) behelyettesítésével a következő formát veszi fel:

$$i_a = \frac{B}{K_T} \cdot \omega_m + \frac{1}{K_T} M_t \tag{3.66}$$

Az egyenletben a meghatározni kívánt B és M_t az ismeretlenek, a többi adatot a mérések szolgáltatják. A procedúrát csak a Baldor motorra, illetve a két motorra együtt is elvégeztem, 6-6 mérési ponttal. A pontokat $\omega_m - i_a$ koordinátarendszerben ábrázolva, és trendvonalat felvéve a kiadódó egyenesek a (3.66) egyenlettel megegyező alakúak lettek.

A kapott eredmények:

	B [Nms]	**M_k [Nm]**
Baldor motor	3,45e-5	0,02
Baldor + terhelő motor	2,07e-4	0,079

3. Táblázat: Súrlódásos tagok megállapítása

A Baldor motor konstans súrlódási nyomatékára akkor is nagyjából ez az érték adódik ki, ha figyelembe vesszük, hogy a gyártó által megadott névleges nyomaték és névleges áram hányadosa nem adja ki az ugyancsak gyári adat nyomaték-konstanst. Gyári nyomaték-konstanssal számolva a névleges áram melletti nyomaték nagyjából 0,02 [Nm]-rel nagyobbra adódik, mint a névleges. A gyártó tehát valószínűleg névleges nyomaték alatt a névleges

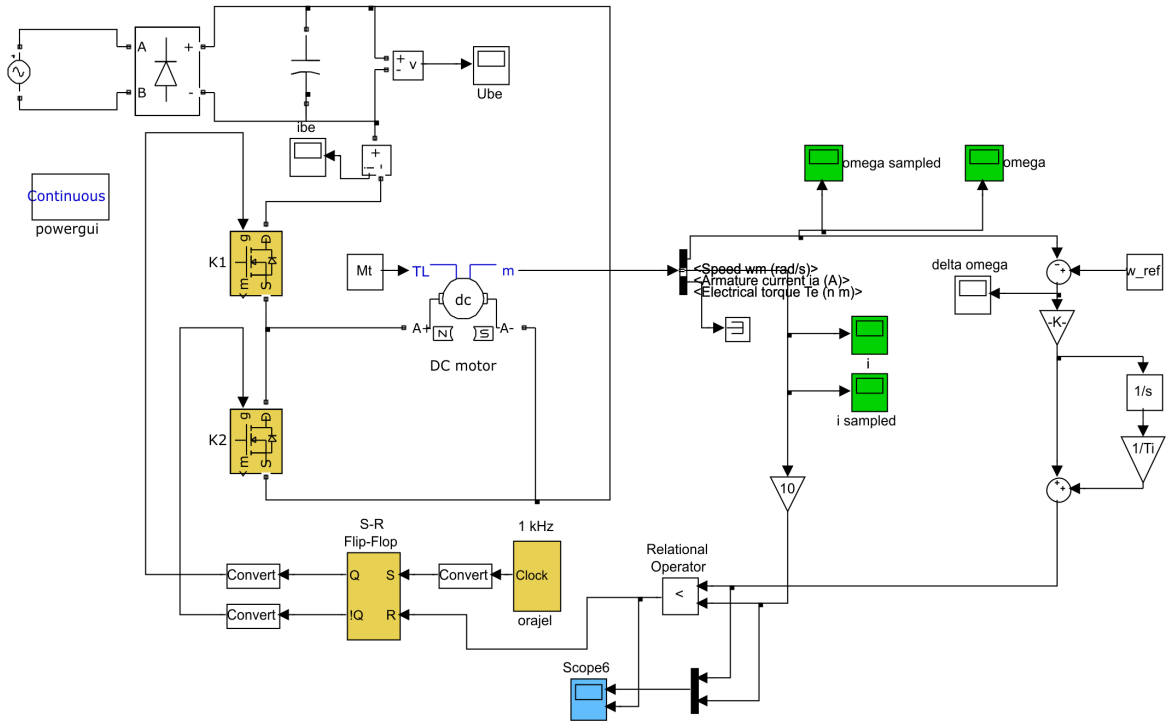
hasznos hajtónyomatékot érti, ami azt jelenti, hogy a konstans súrlódási nyomatékra még szuperponálódik a hasznos nyomaték. Ez utóbbi névleges értéke a megadott 0,21 [Nm].

A 3.30 ábra is jelzik, hogy ezen értékeket használva a szimuláció jó egyezést mutatott egy adott feszültség hatására kialakuló szögsebesség és armatúraáram tekintetében a mérésekkel.

A nemlineáris modell szimulációja.

Ahhoz, hogy vizsgálni tudjam a fellépő nemlineáris jelenségeket, amelyek a (3.41) és (3.42) egyenletek által leírt rendszert jellemzik, a 3.9. ábra alapján elkészült két folytonos idejű nemlineáris modell is. A vizsgálatokat Matlab Simulinkben végeztem el, amely az összeállított blokkdiagram segítségével ugyanezeket a differenciálegyenleteket oldja meg. Attól függően, hogy a bemenő feszültség U_{be} vagy 0, más differenciálegyenlet-rendszert kell megoldania, tehát a megoldás szakaszosan történik. Minden egyes szakasz kezdeti feltétele az előző szakasz kapcsolási pontbeli értéke.

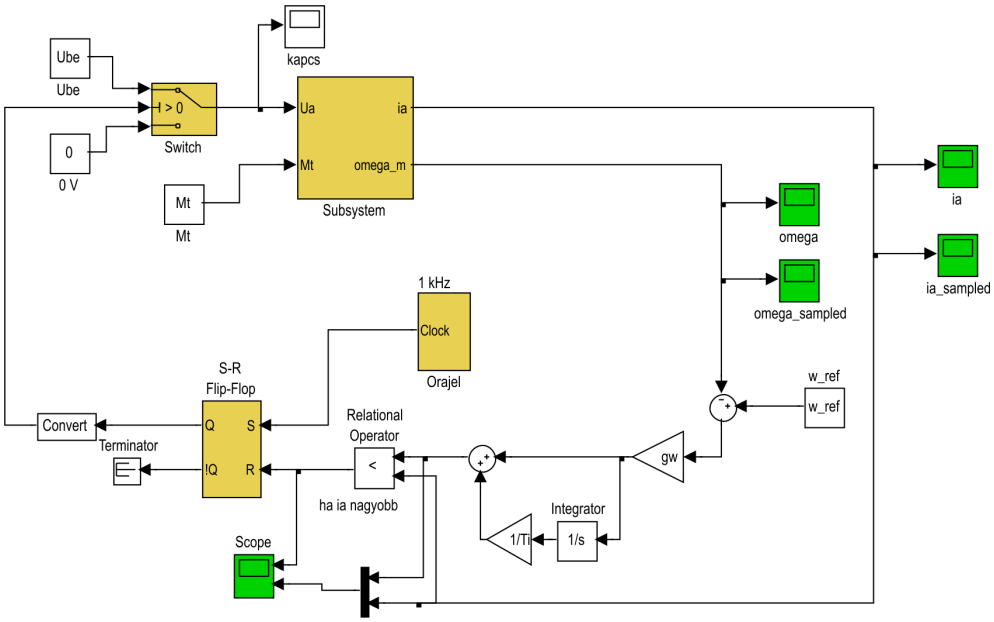
Az első modell a komplexebb, figyelembe veszi a tápegység nem ideális voltát, ami az általa szolgáltatott feszültség hullámosságában nyilvánul meg. Emellett az áramkör SimPowerSystems modullal készült, segítségével a MOSFET tranzisztorok és ellenirányú dióáik hatása is figyelembe vehető. A modell a 3.31. ábrán szerepel.



3.31. ábra: Komplexebb nemlineáris modell

Komplexitásából adódó hátránya, hogy jóval lassabban számol, mint egy egyszerűbb, csupán átviteli függvényekkel operáló modell. A számítási idő fontos szempont egy bifurkációs diagram készítésénél, ahol körülbelül 1000*1000 pont kerül felvételre. Egy nála

gyorsabb számítással kecsegtető modell a 3.32. ábrán látható. Itt elhanyagoltam a nem ideális kapcsolók és tápegység hatását. A szimulációk összehasonlítása azt mutatta, hogy nincsenek jelentős különbségek a két modellel kapott eredmények között. Ezért a továbbiakban a 3.32. ábra szerinti megvalósítást alkalmazom.



3.32. ábra: A szimulációk során alkalmazott nemlineáris modell

Érdemes végigkövetni, hogyan áll elő az instabil állapot egy bistabilitásra hajlamos rendszerben, amelynek helyzetét az x koordináta jellemzi. Ezt a jelenséget már tárgyalta az 1.8. Fejezet. Az áramvezérelt egyenáramú szakaszonként lineáris nemlineáris rendszer, ami színes viselkedést produkál a paramétereinek változtatásával. Egy kiválasztott μ paraméterét növelve valamilyen μ_c kritikus értéknél a rendszer viselkedése kvalitatív megváltozik. Kvalitatív változáson itt a megoldás stabilitásának különféle megváltozásait kell érteni és a változás jellegétől függően többféle bifurkációról beszélhetünk. A szimulációk azt mutatták, hogy a hajtásra az úgynevezett periódus-duplázódás típusú bifurkáció jelensége áll fenn, amit további periódus-kettőződések sorozata követ, míg végül a hajtás kaotikussá válik.

<u>A hajtást jellemző bifurkációs paraméterek a következők lehetnek:</u>

- g_ω: a szabályozó arányos tagja
- U_{be}: a bemenő feszültség nagysága
- M_t: a terhelőnyomaték nagysága
- T_i: integrálási időállandó
- f_{PWM}: kapcsolási frekvencia
- (ω_{ref}): referencia szögsebesség

Paramétereknek olyan mennyiségeket célszerű választani, amelyek a szabályozásban könnyen változathatóak. A fentiek mindegyike teljesíti ezt a kritériumot. A referencia szögsebesség azért került zárójelbe, mert a mérések során végig ezen a szögsebességen vizsgálódtam, azon (már korábban is említett) ok miatt, hogy a terhelőmotor tartósan ennél nagyobb szögsebességen nem üzemeltethető. A szabályozó tervezésekor a 3.3. Fejezet szerint a célkitűzés az volt, hogy névleges paraméterek mellett stabil rendszert kapjunk. A

hangsúly tehát ezen paraméterek melletti viselkedés vizsgálata. A névleges állapot a következő szerint van definiálva:

$$U_{be} = 50\ [V]$$

$$T_i = 0{,}1\ [s]$$

$$g_\omega = 0{,}1\ [-]$$

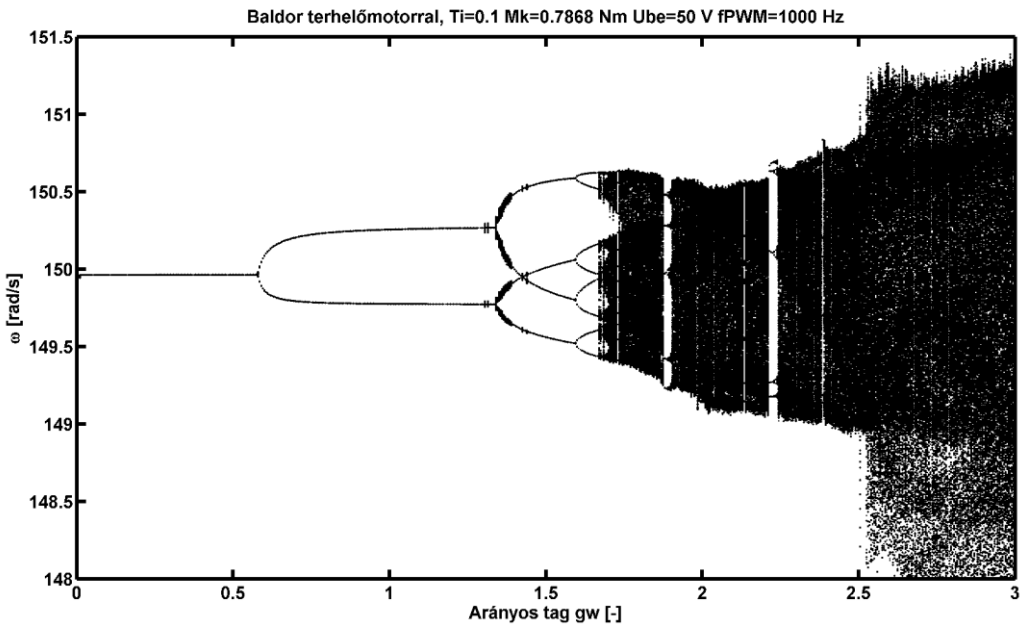
$$M_t = 0{,}21\ [Nm]$$

$$f_{PWM} = 1000\ [Hz]$$

$$\omega_{ref} = 150 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

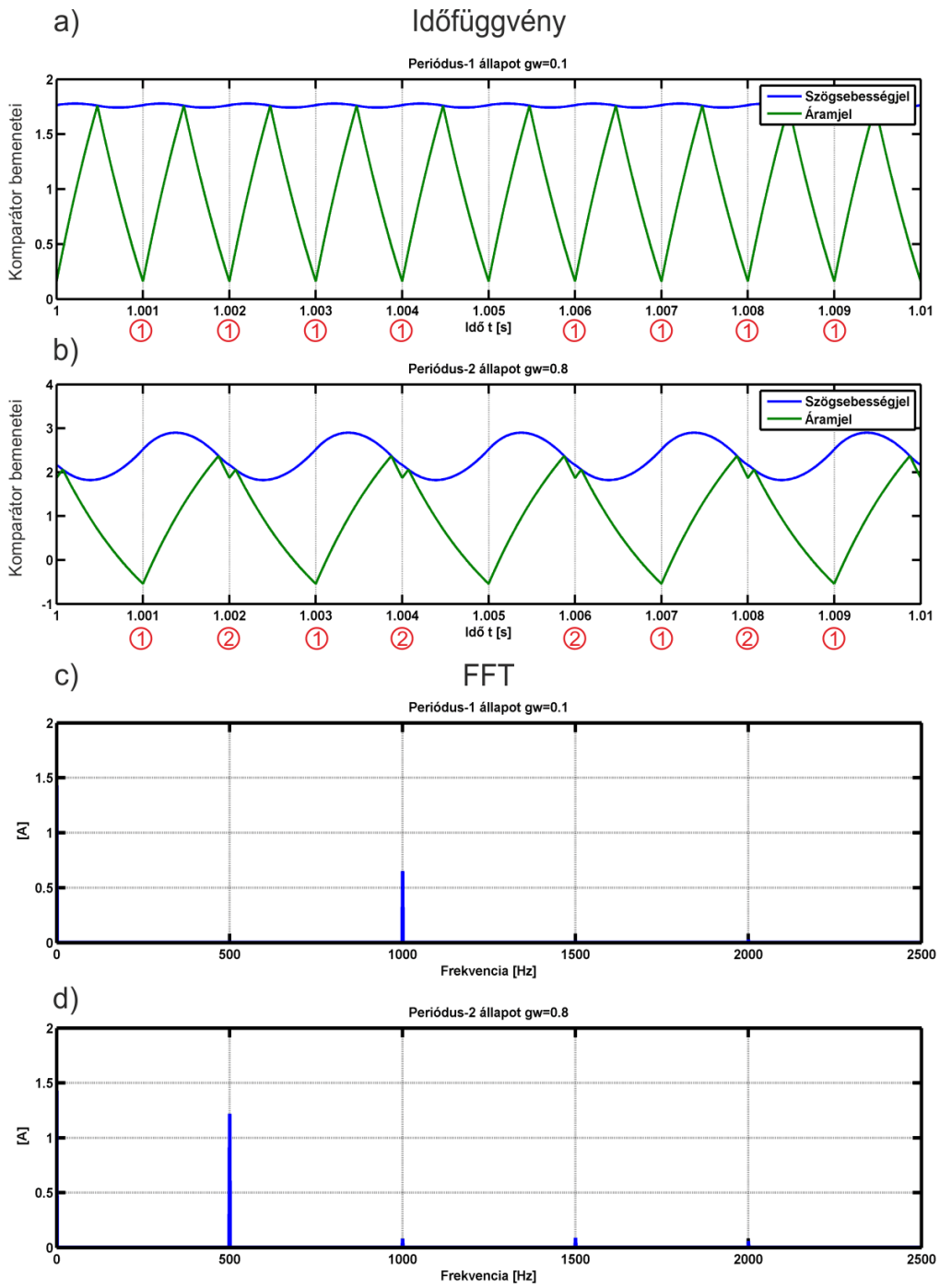
Ez utóbbiba beletartozik a terhelőmotor konstans súrlódási nyomatéka is, de a Baldor motor saját súrlódásból származó nyomatékterhelése nem. Minden egyes szimulációban a felsorolt paraméterek közül egyet kiragadva és változtatva értékét egy skálán a motor valamelyik állapotváltozóját figyeljük. A két megfigyelt állapotváltozó a motor szögsebessége (ω_m) illetve az armatúraárama (i_a) lehet.

A rendszert Poincaré-leképezés segítségével vizsgáljuk. A gerjesztés – jelen esetben tehát a kapcsolási periódus – minden egyes periódusának ugyanabban a pillanatában mintát veszünk az állapotváltozók értékéből. Olyan nem-autonóm rendszerek esetén, amelyeknek periodikus gerjesztő függvénye van, a mintákat mindig a gerjesztés meghatározott fázisában vesszük, például lehet mindig a kezdetén. Ezt hívjuk stroboszkópikus leképezésnek, ami úgy képzelhető el, mintha a mechanikai rendszer állapotváltozóit egy, a gerjesztés minden periódusában egyszer felvillanó lámpával vennénk, tehát mintha stroboszkópot alkalmaznánk. Ezt az adott paraméter vizsgált tartománybeli értékeire megismételjük, és a kapott eredményeket egy x-μ koordinátarendszerben ábrázoljuk.

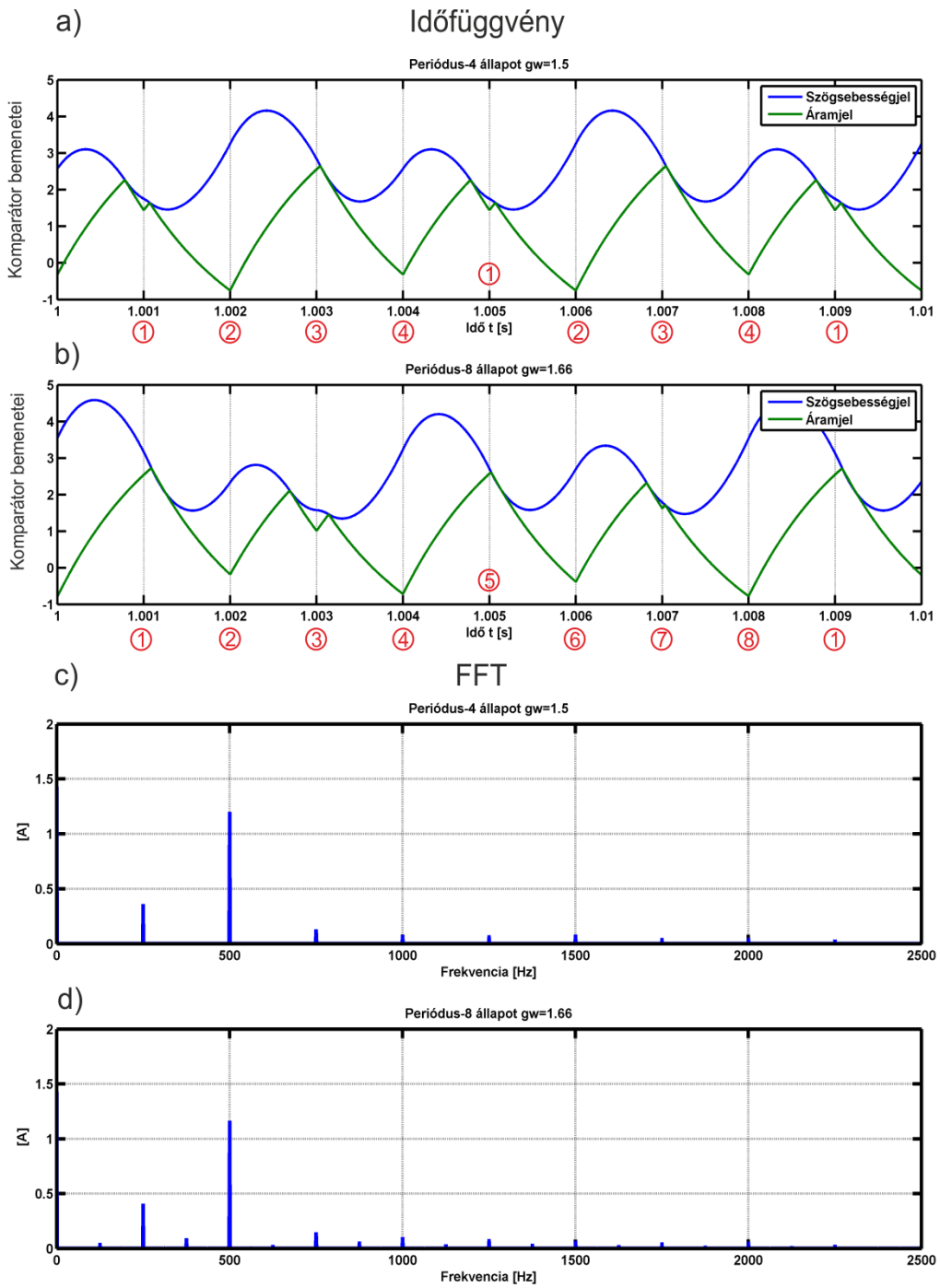


3.33. ábra: Bifurkációs diagram a két motorra együtt, paraméter a szabályozó arányos tagja

Az iparban használt hajtások esetében a kapcsolási frekvencia több kHz körül alakul. A mérések és a szimuláció során azért lett kisebb frekvencia alkalmazva, mert így jelentősebbek és ezáltal könnyebben kimérhetőek a szögsebesség- és árambeli ingadozások. Éppen ezért a szimulációkat szinte kivétel nélkül 1 [kHz]-es frekvencián végeztem. Különböző eseteket vizsgáltam meg, nevezetesen, hogy a Baldor motor terheletlenül vagy egy M_t terhelőnyomatékkal van terhelve, illetve a 3.14. ábra szerinti két motor össze van kötve, és a másik motor jelenti a terhelést. Természetesen ilyenkor megváltozik a rendszer tehetetlensége és a B súrlódási együttható is.



3.34. ábra: Periódus-1 és periódus-2 állapotok



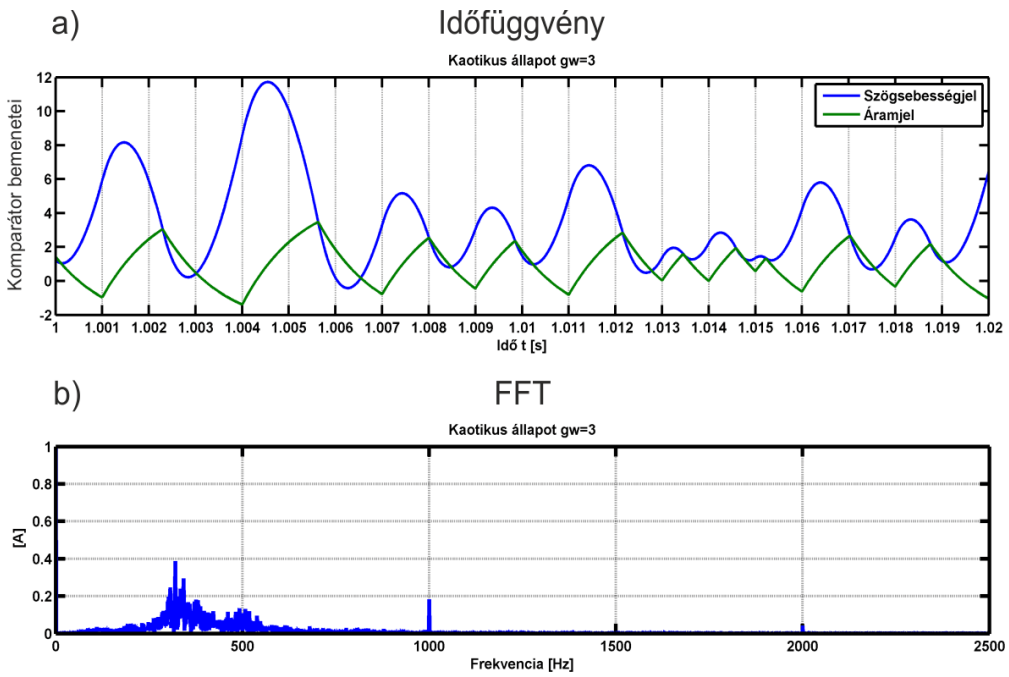
3.35. ábra: Periódus-4 és periódus-8 állapotok

Vizsgáljuk meg a periódusduplázódás jelenségét az adott rendszerre. A 3.33. ábra a két összekötött motorra, mint rendszerre leszimulált bifurkációs diagram, a rendszerparaméter pedig jelen esetben a szabályozó arányos tagja, g_ω. Az $M_k = 0.7868\ [Nm]$ eset megfelel a külön hozzáadódó terhelés nélkül a másik motor meghajtásának. Nagyjából $g_\omega = 0{,}58$-ig a periódus-1 állapot áll fenn, ekkor a motor szögsebessége és árama a kapcsolási frekvenciával (jelen esetben 1000 [Hz]) leng. Minden egyes periódus elején mintát veszünk a szögsebességből, és mivel a mintavétel (és egyben a gerjesztés) frekvenciája megegyezik a szögsebesség-ingadozás frekvenciájával, ezért minden periódusban ugyanaz lesz a mintavételezett érték. Mindez leolvasható a 3.34.a) ábráról, ahol is a feltüntetett g_ω érték

mellett a szabályozó bemeneteire érkező áram és szögsebességgel arányos jel időfüggvénye látható. A periódus-1 eset $g_\omega = 0{,}58$-ban átvált periódus-2 esetté, amikor is a továbbra is változatlan mintavételi időpontokhoz már két különböző szögsebesség érték tartozik.

Ez a jelenség látható a 3.34.b) ábrán, megfigyelhetőek a megduplázódott periódusidejű lengések. Mind az áram, mind a szögsebesség fele akkora frekvenciával leng. Ezt bizonyítandó végezhető FFT analízis is például az áramjelre. A gyors Fourier-transzformáció megmutatja melyek a jelben előforduló domináns frekvenciák. Jól látható, hogy a periódus-1 esethez tartozó c) ábrán a legnagyobb amplitúdójú komponens (az egyenáram mellett) az 1 [kHz]-es komponens. Periódus-2 állapotban ez áttevődik 500 [Hz]-re, ami az előző frekvencia fele, ez pedig a periódusidő megduplázódását jelenti. Tovább növelve g_ω értékét, 1,34 felett átvált periódus-4 állapotba, amely egészen 1,59-ig tart. Ezen állapot időfüggvénye látható a 3.35.a) ábrán, gyors Fourier-transzformáltja pedig a c) ábrán.

A c) ábráról leolvasható, hogy megjelenik az 500 [Hz]-es komponens mellett a kétszer akkora periódusidejű 250 [Hz]-es komponens is. $g_\omega = 1{,}59$ fölé menve bekövetkezik még egy periódusduplázódás, amelyet a 3.36.b) és d) ábrák szemléltetnek. A frekvenciák már jobban szétszóródnak, de még mindig fellelhető bennük a rendezettség. Megjelenik a 125 [Hz] és a többszörösei is. Megfigyelhető, hogy a periódusduplázódások egyre kisebb paraméterváltozás hatására következnek be, mint ahogyan arról az 1.6. Fejezet is beszámolt.

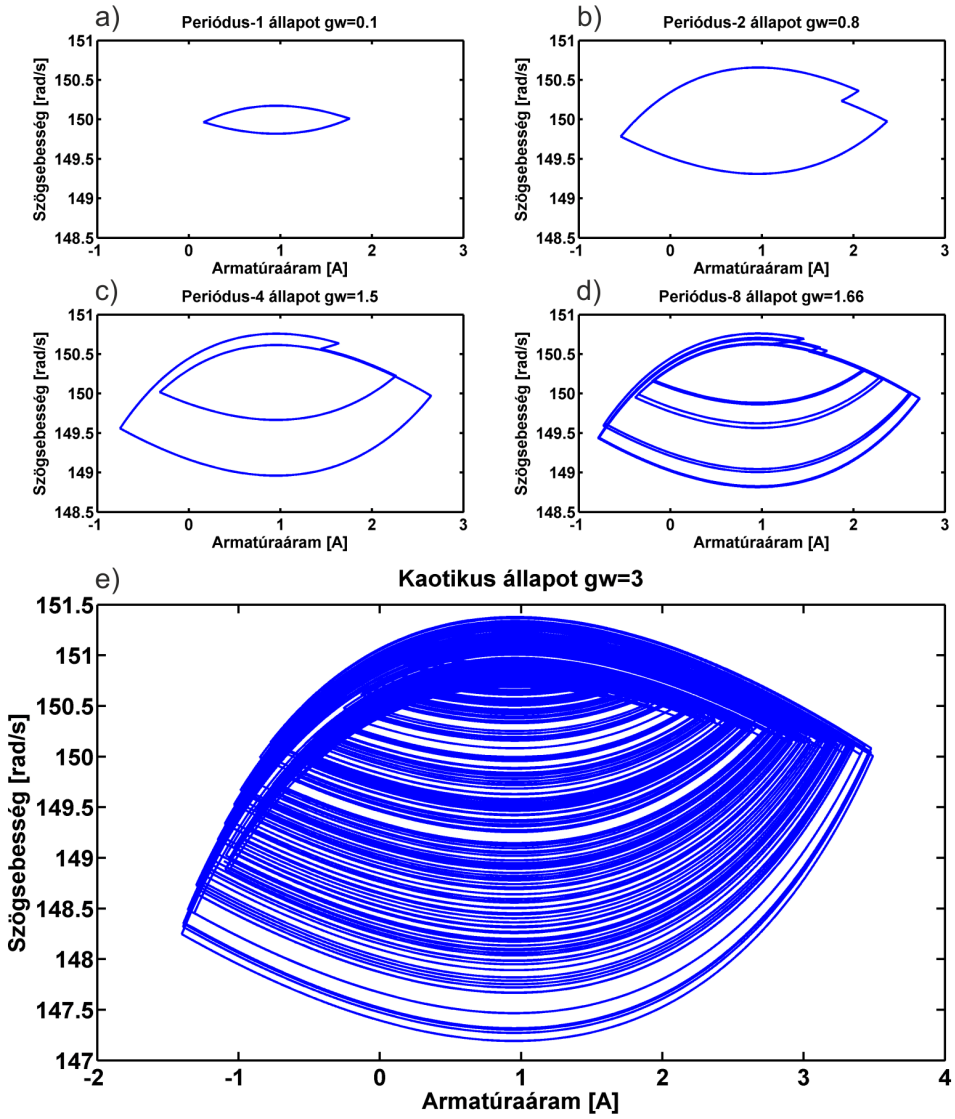


3.36. ábra: Kaotikus állapot

A 3.33 ábráról már nem olvasható le nagyobb, periódus-16 állapot, $g_\omega = 1{,}665$ felett a viselkedés átvált kaotikusba. A kaotikus állapotot bizonyos paraméterértékeknél még megszakítja egy-egy periódus-4 állapot, de 2,4 felett már nem áll vissza többé a periodikus állapot. Egy kiragadott értékre láthatjuk a rendszer viselkedését kaotikus állapotban a 3.36. ábrán. A kirajzolt időintervallumban nem tér vissza egyszer sem a kiinduló állapot, nem fedezhető fel semmiféle periodikus mozgás. Ezt bizonyítandó el lett végezve kaotikus

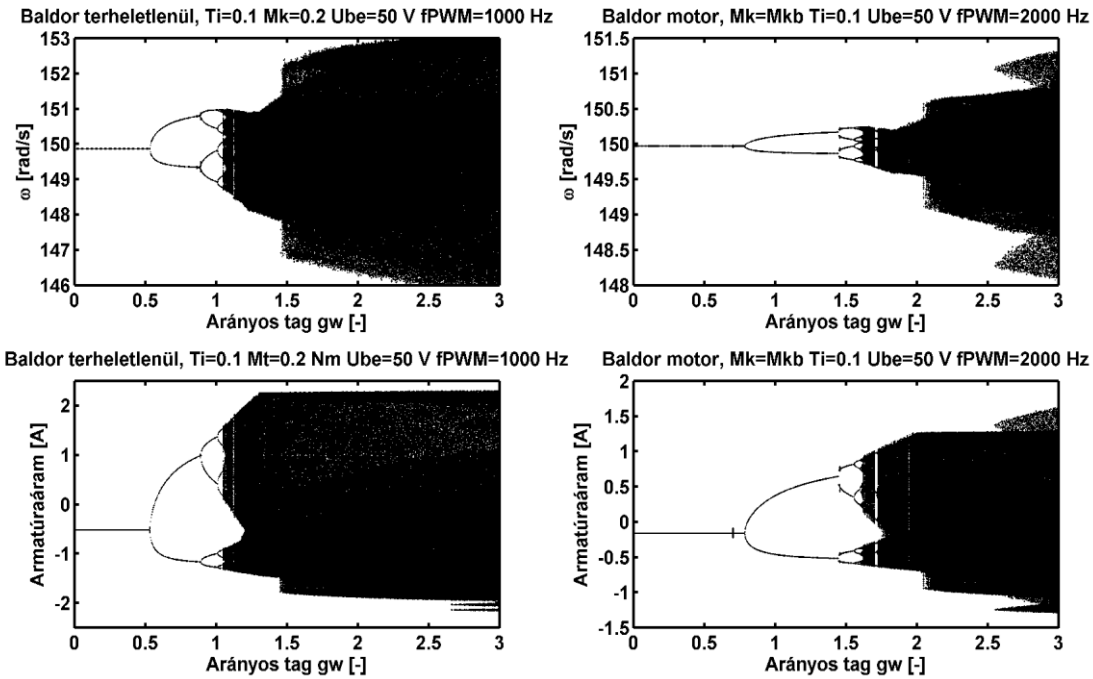
állapotra is a Fourier-analízis. A 0 és 1000 [Hz] közötti frekvenciákon megoszlik a teljes energiatartalom, egyedül a kapcsolási frekvencia fedezhető fel benne, mint domináns felharmonikus.

Periodikus esetben a trajektória a fázissíkban önmagába záródó görbe lesz. A különböző esetekre mutatja a fázissík trajektória alakját a 3.37. ábra. Periódus-1 esetben a várakozásoknak megfelelően egy önmagába záródó görbét kapunk. Ugyanez igaz a többi periodikus esetre is. Periódus-2 állapotban a trajektórián megjelenik egy törés, ugyanúgy, ahogyan a 3.34. ábrán az áramjelnél láthattuk. Periódus-4 állapotban a rendszer pontja két „kört” tesz meg, mire újra visszatér a kiindulópontba, periódus-8 állapotban pedig ez a szám már nyolc. Látható, hogy a periódus minden egyes részében kicsit eltér a trajektória lefutása, de még önmagába záródik a görbe. Nem igaz ez azonban a kaotikus állapotra, ahol is a trajektória soha nem tér vissza önmagába. A 3.37.e) ábrán 1 [s] ideig vizsgáltam a motort, tovább vizsgálva még több helyre eljut a trajektória, befutja a fizikai korlátok által megszabott, rendelkezésére adott teret.



3.37. ábra: Fázissík trajektóriák periodikus és aperiodikus esetekre

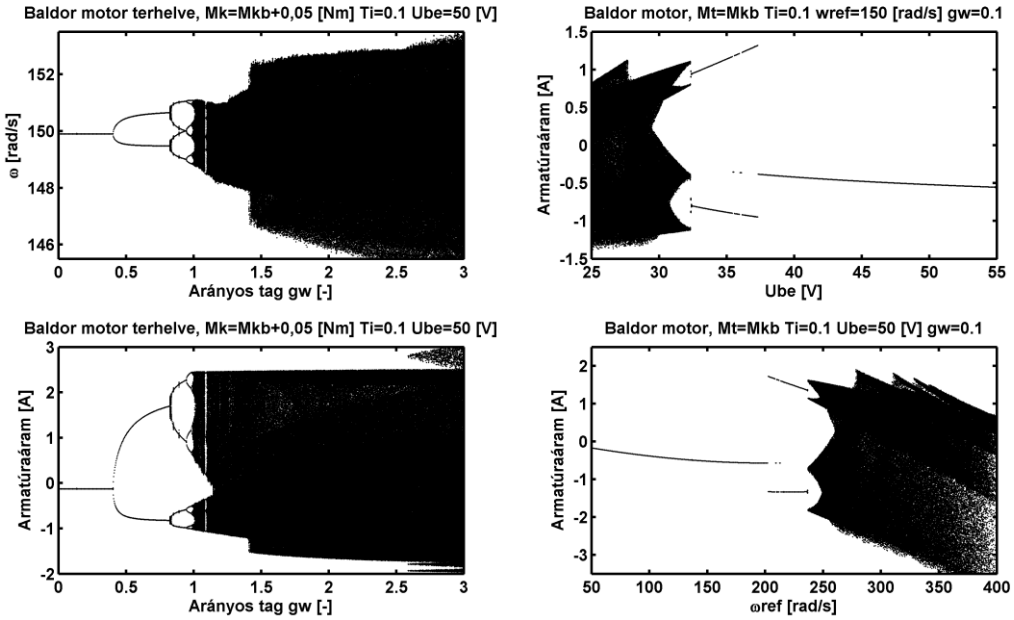
A 3.38. ábra a kapcsolási frekvencia hatását mutatja a g_ω arányos tag, mint paraméter függvényében. A bal oldali diagramok mutatják 1000 [Hz] kapcsolási frekvenciára a szögsebesség (felül) és az armatúraáram (alul) mintavételezett értékeit. Jobb oldalon pedig e diagramok 2000 [Hz] kapcsolási frekvencia melletti párjai találhatóak. Mindegyik ábrán szépen látható a periódusduplázódás jelensége. Megfigyelhető, hogy a kapcsolási frekvencia növelése stabilizáló hatással bír a rendszerre nézve, nagyobb g_ω értékek engedhetőek meg. Ebben az esetben a periódus-1 állapot valamivel $g_\omega = 0{,}78$ feletti értékig fennáll, szemben a fel ekkora kapcsolási frekvencia melletti 0,58-as értékkel. A kapcsolási frekvenciára, mint paraméterre való érzékenység nagyban függ a motor és a terhelés paramétereitől, de elmondható, hogy amely paraméterekre a kisebb kapcsolási frekvencia mellett stabil a rendszer, azon paraméterek nagy valószínűséggel stabilak lesznek nagyobb kapcsolási frekvencián is. Ez a nagyobb mintavételezésből származó késleltető tag instabilizáló hatásának tudható be.



3.38. ábra: Bifurkációs diagramok, a kapcsolási frekvencia hatása

Megvizsgálható ezen felül a szögsebesség és az armatúraáram a motorra kifejtett terhelőnyomaték mellett is. A paraméterek (bemenő feszültség, kapcsolási frekvencia, integrálási időállandó) változatlanok a 3.38. ábra bal oldali diagramjaihoz képest, azonban a Baldor motorra jellemző konstans súrlódási nyomatékhoz még hozzáadódik egy általános 0,05 [Nm] nagyságú terhelőnyomaték is, amelyet azonban nem a hozzá kapcsolódó terhelőmotorral fejtünk ki. A 3.39. ábra bal oldali diagramjai mutatják az ily módon kapott bifurkációs diagramokat. Megfigyelhető, hogy a megnövekedett terhelőnyomaték miatt a periódus-1 állapot csupán $g_\omega = 0{,}4$ értékig tart szemben a korábban kapott 0,58-as értékkel. Ez a megállapítás a többi periodikus állapotra is fennáll, miszerint a megnövekedett terhelőnyomaték hatására már kisebb bifurkációs paraméter hatására bekövetkezik a periódusduplázódás, a rendszer kisebb szabályozó arányos tag-értékekre elveszti a

stabilitását. Jelen esetben stabilnak a periódus-1 állapotot tekintem. Nagyjából $g_\omega = 1$ érték felett már kaotikus viselkedés tapasztalható.

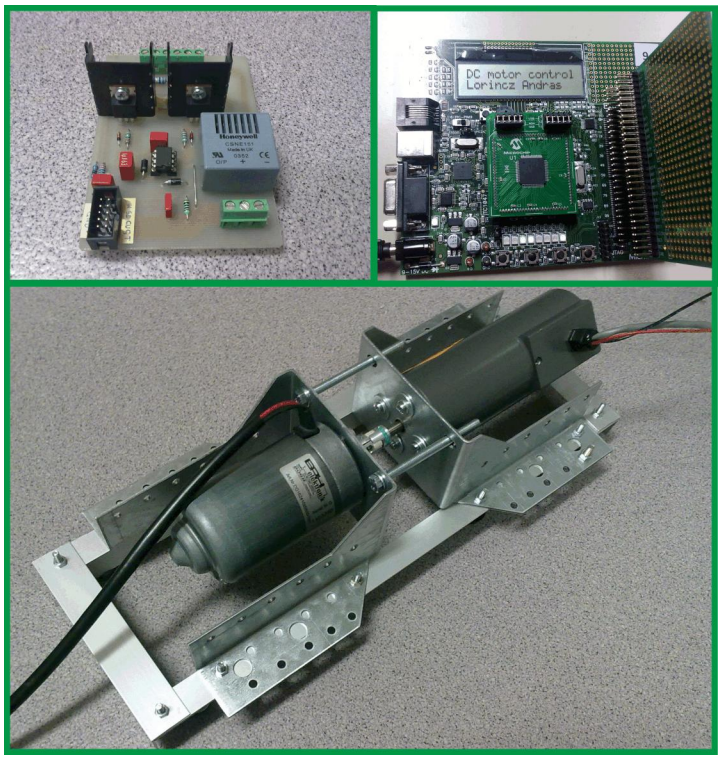


3.39. ábra: A megnövekedett terhelőnyomaték, a bemenő feszültség, és a referencia szögsebesség hatása

Az azonban kijelenthető, hogy a káoszhoz vezető út ebben az esetben is hasonló képet mutat, mint ahogyan azt a 3.38. ábrán láthattuk, vagyis, hogy bifurkációs kaszkádokon keresztül jut el a rendszer a kaotikus állapotba. A 3.39. ábra jobb oldali diagramjain a meghajtó áramkör bemenő feszültsége és a referencia szögsebesség, mint bifurkációs paraméter hatását követhetjük nyomon. Terhelés nélkül a rendszer 150 [rad/s] szögsebesség mellett egészen 38 [V] bemenő feszültségig stabil működést mutat, azonban ha megnövelnénk a terhelést, ezen a feszültségszinten már nagy valószínűséggel elvesztené stabilitását. Ha megtartjuk a bemenő feszültség névleges értékét, akkor a referencia szögsebességet egészen 200 [rad/s]-ig növelhetjük anélkül, hogy periódusduplázódást tapasztalnánk. Azonban ez esetben is a nagyobb terhelés instabilabb működést eredményezne.

Mérési eredmények.

A laboratóriumi mérési összeállítás főbb alkotóegységei a 3.40. ábrán láthatóak. Az alsó, legnagyobb képen maga a hajtás megvalósítása látható, jobb oldalon a Baldor motorral és baloldalon a terhelőmotorral. A két motor egy közös vázszerkezeten helyezkedik el. A bal felső képen a meghajtó áramkör látható, rajta a tranzisztorokkal, az áramszenzorral és a meghajtó IC-vel. A jobb oldali képen pedig a Microchip által gyártott Explorer 16 fejlesztőpanel helyezkedik el, az LCD kijelzőjén pedig a motorszabályozó program főképernyője fogad. A mérések segítségével szerettem volna a szimuláció során tapasztalt jelenségeket a valóságban is bemutatni. A mérések megvalósítása során azonban nehézséget okozott a motor szögsebességének pontos lemérése, beleértve az általunk mérni kíván kis szögsebesség-ingadozásokat is.



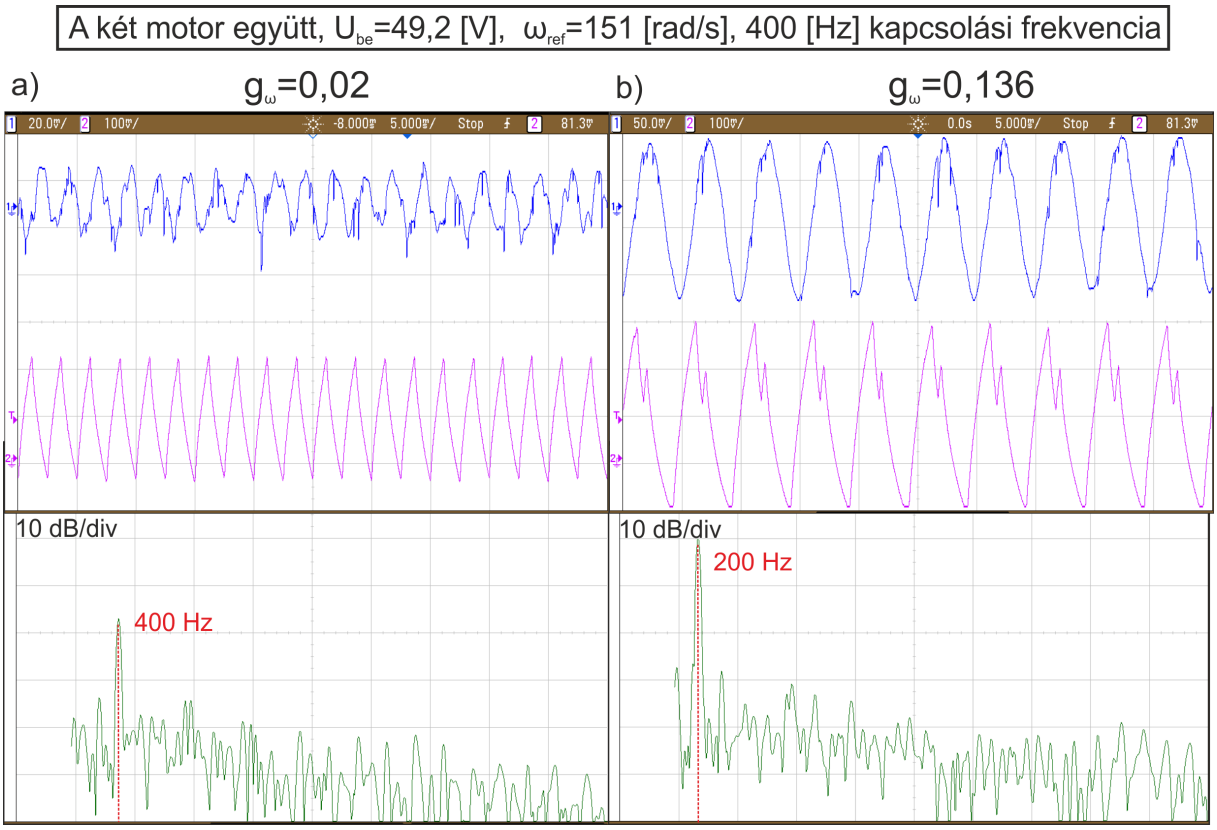
3.40. ábra: A mérési összeállítás fontosabb egységei

A használt tachométer egy régebbi mérési elvű szenzor, amelynek a kimenő jele sajnálatos módon nagyon zajos. Mivel tulajdonképpen ez egy generátorként üzemelő egyenáramú motor, ezért az armatúrakapcsaira a feszültség ugyanúgy kommutátor-szegmenseken és szénkeféken keresztül jut el, mint a motor esetében. Ez a mechanikus kommutáció jelentős zajforrás, a nem tökéletes érintkezés miatt kisebb-nagyobb elektromos szikrák keletkezhetnek, amelyek a kimenő jel minőségét lerontják.

Ez a minőségbeli romlás olyan mértékű, hogy a tervezett 1000 [Hz]-es kapcsolási frekvencia mellett a motor szögsebességében fellépő hullámzások nem a 3.34.a) ábrának megfelelően alakulnak, ugyanis ekkora kapcsolási frekvencia mellett e szögsebesség-ingadozások nagyon kismértékűek. Helyette a zajokból és az átlag szögsebességgel arányos jelből összeadódó kimenet mérhető. A felmerülő problémák miatt csökkentettem a kapcsolási frekvenciát 250 illetve 400 [Hz]-re. Ekkor már jóval nagyobbak a szögsebesség-ingadozások, és ezáltal könnyebben mérhető a jel. További szűréseket is alkalmazni kellett, hogy a tachogenerátorból származó zaj egy részét eltávolítsa, a jelet kondicionálja. Ezek a zajok összességében, mint virtuális véletlenszerű szögsebesség-ingadozások jelennek meg a szabályozó bemenetén, és ez instabilitást, kaotikus viselkedést okoz.

Az első méréseket 400 [Hz] kapcsolási frekvencia mellett végeztem, a két motort összekapcsolva. A bemenő feszültség $U_{be} = 49{,}2\ [V]$, az integrálási időállandó $Ti = 0{,}1$ és a referencia szögsebesség $\omega_{ref} = 150\ [rad/s]$. A 3.41.a) ábra egy periódus-1 állapotot mutat, ez jól látható az áramjeleken. Az Agilent DSO6012A oszcilloszkóp képes FFT transzformációra is, így ezzel is megvizsgálva a jelet a várt eredményt kapjuk: a 400 [Hz] frekvenciájú komponens dominál, az FFT ábráján egy osztás 10 [dB]-nek felel meg. A g_ω bifurkációs paramétert tovább növelve periódus-2 állapotba kerül a rendszer, egy kiragadott értékre láthatóak az időfüggvények és az FFT transzformált a 3.41.b) ábrán. Egyértelműen látható a periódusidő megduplázódása és az ezzel járó nagyobb szögsebesség jel (kék) és

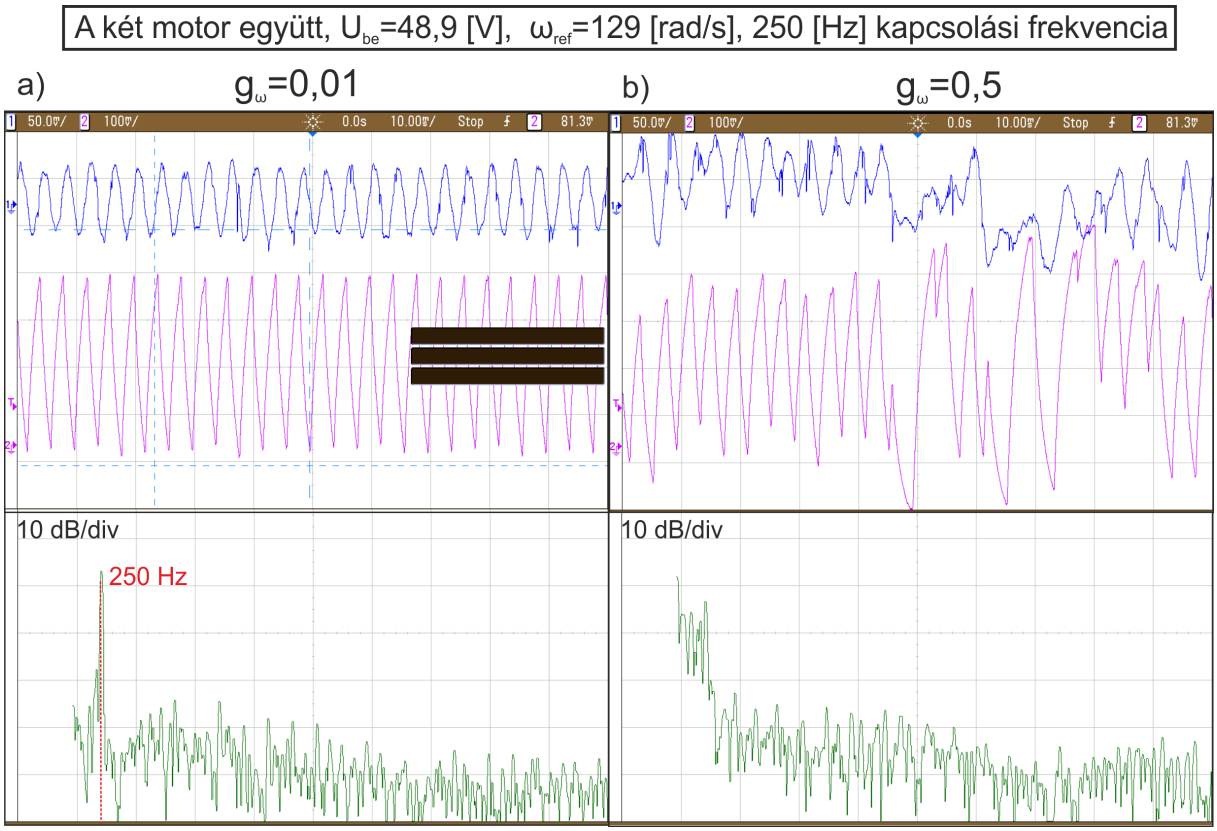
áramjel (lila) ingadozások. Fontos megjegyezni, hogy ezen az ábrán feltüntetett szögsebesség jel nem egyezik meg a 3.34, 3.35 és 3.36 ábrákon megjelenített jellel, hisz utóbbiak esetén a PI szabályozó kimenete szerepel.



3.41. ábra: Periódus-1 és periódus-2 állapotok 400 Hz-en

E mérés során nem volt a hajtómotoron külön terhelést a tolóellenálláson keresztül, csak a két motor együttes súrlódási nyomatékával kellett számolni. Végeztem egy olyan mérést is, amikor közel névleges nyomaték mellett üzemelt a motor. A motoron fellépő terhelőnyomaték $M_t = 0{,}202\ [Nm]$-re adódott, a kapcsolási frekvencia le lett csökkentve 250 [Hz]-re, a referencia szögsebesség pedig $\omega_{ref} = 129\ [rad/s]$-ra lett állítva.

Már korábbi szimulációk is mutatták, hogy a kapcsolási frekvencia csökkentése és a terhelőnyomaték növelése külön-külön is instabilizáló hatású (3.38. ábra és 3.39. ábra). Ebben a mérésben megvizsgáltam, milyen hatást fejt ki, ha mindkét változtatást kieszközöljük. Kis g_ω érték mellett a működés a korábbiakban már stabilnak definiált periódus-1 állapot. A 3.42.a) ábráról leolvasható, hogy ekkora kapcsolási frekvencia mellett már jelentősek az áramingadozások a szögsebesség-ingadozásokkal egyetemben. Az áram gyors Fourier-transzformációja megmutatta, hogy valóban egy frekvencia domináns, mégpedig a kapcsolási frekvencia. Instabil viselkedést figyelhetünk meg (3.42.b) ábra), ha a g_ω értékét 0,5 környékére emeljük. Az áram és a szögsebesség jelében semmilyen szabályos ismétlődés nem figyelhető meg, ezt bizonyítja erre az időfüggvényre is elvégzett gyors Fourier-transzformáció. A jel sok, különböző frekvenciájú jelből áll össze. A motorból származó zajok is jelzik a kaotikus működést, hallatszik a nem egyenletes, instabil járása.



3.42. ábra: Periódus-1 és kaotikus állapotok 250 Hz-en

A mérések megmutatták, hogy a megépített rendszer viselkedése hasonlóan színes, mint a modellezett és leszimulált rendszeré. Kisebb arányos tag értékek mellett periódus-1 állapotú a rendszer, míg növelve ezt a paraméterértéket jellemző lesz a periódusduplázódás jelenségén keresztül vezető út a káoszba.

IV. Konklúzió

A káoszelmélet, noha kétségkívül még mindig fiatal, futótűzként terjed a tudományok minden ágában. A fizikában felborította a Newton és Laplace óta meglévő klasszikus nézetet, miszerint a világunk egyszerű törvények által uralt és előre megjósolható. A dolgozat első fejezete a nemlineáris dinamika és a káoszelmélet ismertetésével foglalkozik: tárgyalja a lineáris és nemlineáris rendszerek közötti alapvető különbségeket, az egyensúlyi pontokat, határciklusokat, kvázi-periodikus és frekvenciazárt állapotokat, ismerteti a káosz kialakulásának lehetőségeit. A második fejezet a van der Pol-egyenlet bemutatására és ezen keresztül a határciklusokra helyezi a hangsúlyt. A fejezet keretein belül megvizsgáltam az egyenlet fixpontjának stabilitását, különböző energiavizsgálati módszerekkel képet kaptam a kialakuló határciklus alakjáról és stabilitásáról. Ezek után numerikus módszerekkel is ellenőriztem az elmélet által adott eredményt. A van der Pol-egyenletet megvalósító áramkör megépítésre került, az előzőleg PSpice programmal leszimulált eredményeket összevetettem a kapott mérési eredményekkel, és nagyon jó egyezést mutattak.

A nemlineáris dinamika erősen kapcsolódik a bifurkáció elmélethez. Egy nemlineáris rendszer paramétereit változtatva, az egyensúlyi pontok helye és száma is megváltozhat. Ezen jelenség vizsgálatának céljából egy áramvezérelt egyenáramú hajtás vizsgálatába kezdtem. Felépítettem a szabályozás lineáris modelljét, megállapítottam a lineáris rendszerelmélet segítségével, hogy a megadott és beállított paraméterek mellett stabil működést mutat, pozitív fázistartalékkal rendelkezik. Áttértem a szabályozás nemlineáris modellezésére, bevezetésre kerültek a szögsebesség-szabályozást leíró egyenletek az időtartományban. Az elméleti rész után hozzáfogtam a gyakorlati megvalósításhoz, melynek során elkészítésre került egy meghajtó áramkör és a szabályozást végrehajtó egység által futtatott program. Mérések végzése előtt, hogy képet kapjunk a viselkedéséről, szimulációkat végeztem Matlab Simulink környezetben. Több nemlineáris modell is elkészült a problémára. Bebizonyosodott, hogy a szabályozás több esetben bifurkációs kaszkádokon keresztül veszti el stabilitását. Kirajzoltattam a periodikus és a kaotikus esetekre is a komparátorba beérkező jelek időfüggvényeit, fázissík trajektóriáit, majd ezeknek a függvényeknek a gyors Fourier-transzformáltját is. A mérések megkezdése előtt szükséges volt a Baldor által gyártott motor paramétereinek ellenőrzésére, amelyet a tényleges mérések követtek. Kis kapcsolási frekvenciákon felvettem a tachogenerátor és az áramszenzor kimenő feszültségeit tartalmazó időfüggvényeket, amelyekre a digitális oszcilloszkóp segítségével ugyancsak végeztem FFT analízist. A mérési eredmények megmutatták, hogy a szabályozás a szimulációk során kapotthoz hasonlóan színes viselkedést mutat, többek között periódusduplázódás jelenségét. Az is bebizonyosodott, hogy a kapcsolási frekvencia csökkentése és a terhelőnyomaték növelése negatívan befolyásolja a szabályozás stabilitását.

További fejlesztési lehetőségek lehetnek a tachométer lecserélése valamilyen más, kevésbé zajos kimenetű szenzorra, például egy enkóderre vagy mágnesszalagos szenzorra. A mérési eredményeket később ki lehetne küldeni személyi számítógépre, ahol további adatfeldolgozás válna ezáltal lehetővé. Labview program segítségével lehetne fogadni az adatokat soros porton keresztül, majd akár bifurkációs diagramokon megjeleníteni.

V. Irodalomjegyzék

[1] I. Nagy, Z. Sütő „Nonlinear Dynamics” fejezet a „Control and Mechatronics” című kézikönyvben, szerkesztette: J. D. Irwin, D. Wilamowski, Taylor&Francis /CRC Press, 2011, ISBN: 978-1-4398-0287-8

[2] Multimedia Material for Teching and for E-learning in Nonlinear Dynamics, készítette az Automatizálási és Alkalmazott Informatikai Tanszék Gépészeti Elektronika Csoportjának munkaközössége

[3] Robert C. Hilborn: Chaos and Nonlinear Dynamics, an Introduction for Scientists and Engineers, Oxford University Press, 2000, ISBN: 978-01-985-07239

[4] David Acheson: From Calculus to Chaos, Oxford University Press, 1997, ISBN: 0-19-850077-7

[5] K. T. Chau, Zheng Wang – Chaos in Electric Drive Systems: Analysis, Control and Application, 2011, John Wiley & Sons (Asia), ISBN: 978-0-470-82633-1

[6] Ned Mohan, Tore M. Undeland, William P. Robbins: Power Electronics, Converters, Applications and Design, Wiley, 2003, ISBN: 978-81-265-1090

[7] Ned J. Corron – A simple circuit implementation of a Van der Pol Oscillator, http://ccreweb.org/documents/physics/chaos/vdp2006.html

[8] Christoph Schenk, Dr. Simon Gyula, Dr. Szalai Pálné, Ulrich Tietze – Analóg és digitális áramkörök, Műszaki Könyvkiadó,1993, ISBN: 963-16-0010-6

[9] Dr. Huba Antal – Mechatronika I. előadásjegyzet

[10] Dr. Lipovszki György – Jelfeldolgozás előadásjegyzet

[11] Microchip – 16 bit Language Tools Libraries, DS51456G

[12] Lucio di Jasio – Programming 16-bit Microcontrollers in C: Learning to Fly the PIC 24, 2007, Elsevier Inc, ISBN-13:978-0-7506-8292-3

VI. FÜGGELÉKEK

I. Függelék – Van der Pol egyenlet Mathematica fájl

Van der Pol

```
Needs["PlotLegends`"]
```

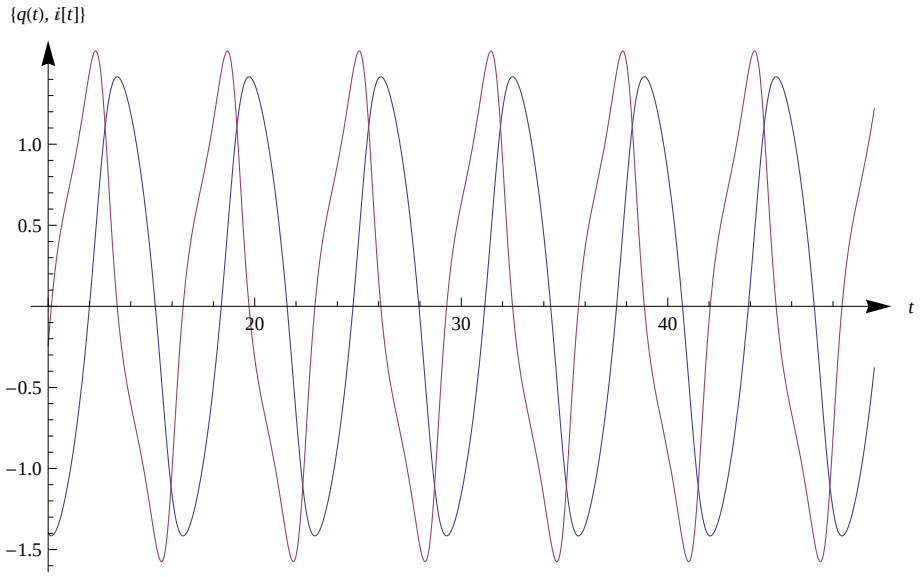
```
R = 0.5
```

```
0.5
```

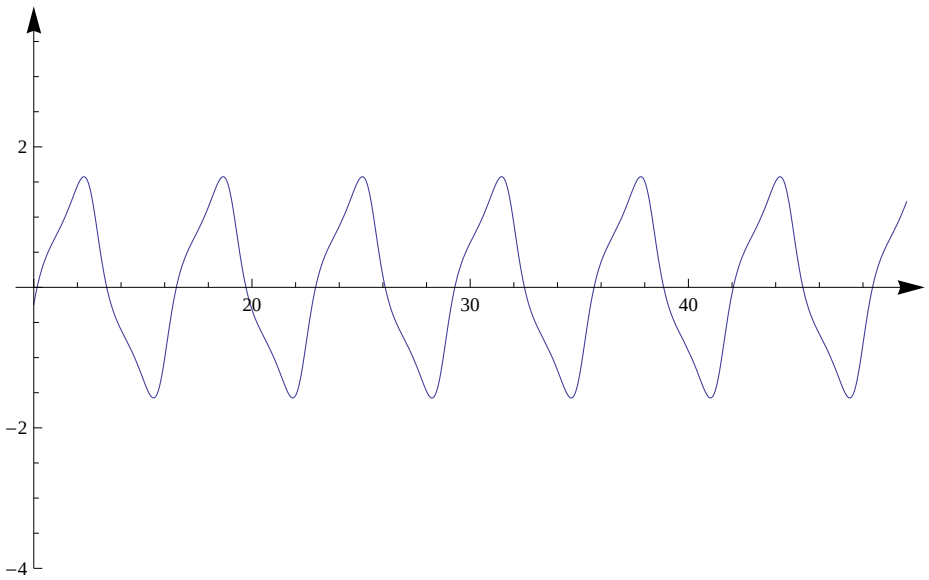
```
solution = NDSolve[{q'[t] == i[t], i'[t] == (R - q[t]^2) * i[t] - q[t], {q[0] == 1, i[0] == 1.1}},
  {q, i}, {t, 100}, AccuracyGoal → 8, PrecisionGoal → 8,
  MaxSteps -> Infinity]      (*MaxSteps->10^6*)
```

```
{{q → InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>],
  i → InterpolatingFunction[{{0., 100.}}, <>]}}
```

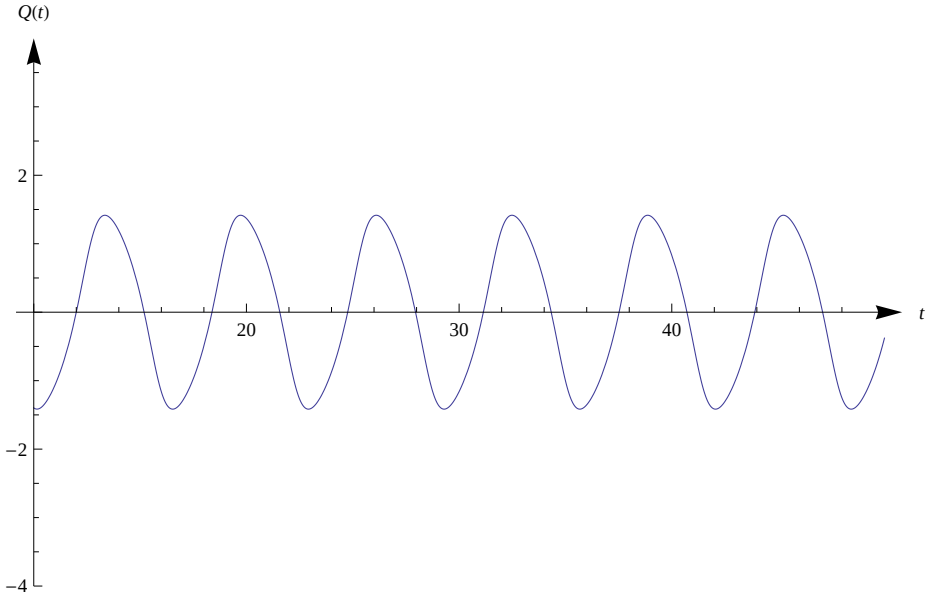
```
Plot[Evaluate[{q[t], i[t]} /. solution], {t, 10, 50},
 PlotStyle -> Automatic, AxesStyle → Arrowheads[0.03],
 AxesLabel → {t, {q[t], I[t]}}]    (*PlotLegend→{"q(t)", "i(t)"}*)
```




```
Plot[Evaluate[i[t] /. solution], {t, 10, 50},
 PlotStyle -> Automatic, AxesStyle → Arrowheads[0.03], PlotRange → {-4, 4}]
```

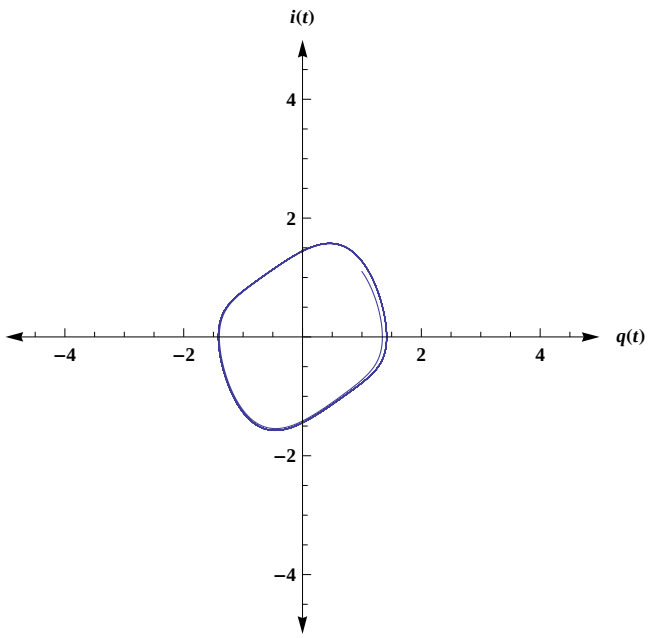


```
Plot[Evaluate[q[t] /. solution], {t, 10, 50}, PlotStyle -> Automatic,
 PlotRange → {-4, 4}, AxesStyle → Arrowheads[0.03], AxesLabel → {t, Q[t]}]
```

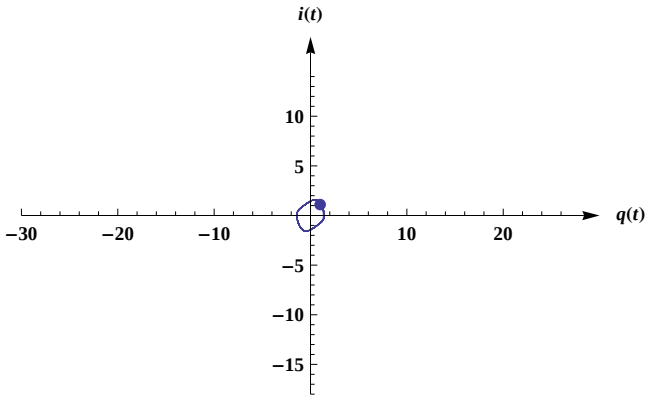



```
h = solution[[1, 1, 2]];
```

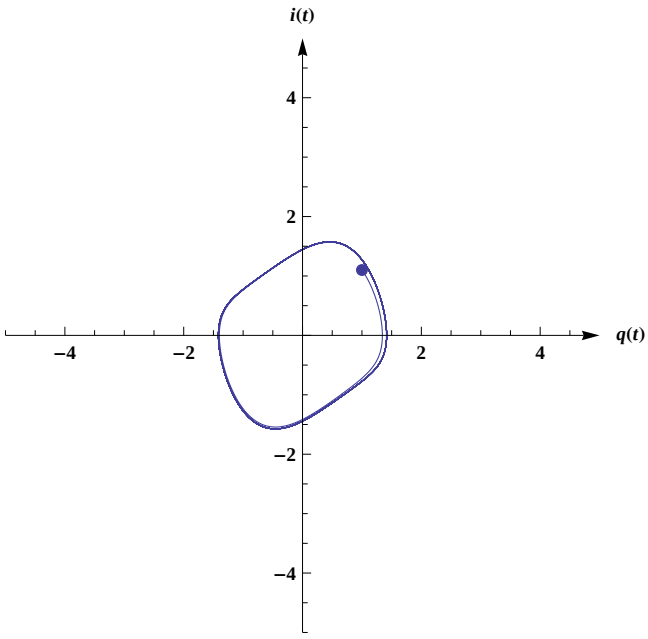
```
trajectory = ParametricPlot[Evaluate[{q[t], i[t]} /. solution], {t, 0, 100},
  PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}, AspectRatio → 1 / 1, AxesLabel → {q[t], i[t]},
  LabelStyle → Directive[Bold], AxesStyle → Arrowheads[{-0.03, 0.03}]]
```



```
Show[ListPlot[Table[{h[t], h'[t]}, {t, 0, 00, 0.25}], PlotStyle → PointSize[0.02]],
 trajectory, PlotRange → {{-30, 30}, {-18, 18}}, AxesLabel → {q[t], i[t]},
 LabelStyle → Directive[Bold], AxesStyle → Arrowheads[0.03]]
```




```
Show[ListPlot[Table[{h[t], h'[t]}, {t, 0, 00, 0.25}], PlotStyle → PointSize[0.02]],
 trajectory, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}, AxesLabel → {q[t], i[t]},
 LabelStyle → Directive[Bold], AspectRatio → 1 / 1,  AxesStyle → Arrowheads[0.03]]
```



II. Függelék – AD633 és TL084 adatlapok

Low Cost Analog Multiplier

AD633

FEATURES

4-quadrant multiplication
Low cost, 8-lead SOIC and PDIP packages
Complete—no external components required
Laser-trimmed accuracy and stability
Total error within 2% of full scale
Differential high impedance X and Y inputs
High impedance unity-gain summing input
Laser-trimmed 10 V scaling reference

APPLICATIONS

Multiplication, division, squaring
Modulation/demodulation, phase detection
Voltage-controlled amplifiers/attenuators/filters

CONNECTION DIAGRAMS

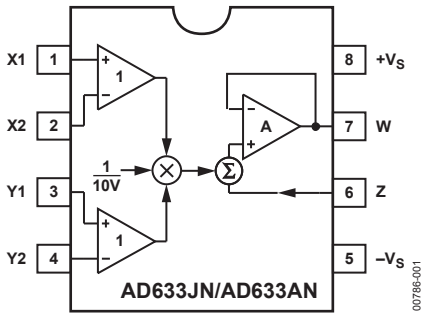


Figure 1. 8-Lead PDIP

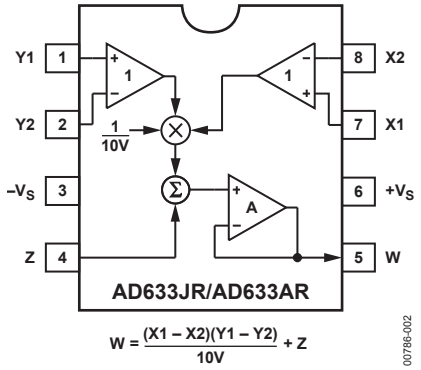


Figure 2. 8-Lead SOIC

GENERAL DESCRIPTION

The AD633 is a functionally complete, four-quadrant, analog multiplier. It includes high impedance, differential X and Y inputs, and a high impedance summing input (Z). The low impedance output voltage is a nominal 10 V full scale provided by a buried Zener. The AD633 is the first product to offer these features in modestly priced 8-lead PDIP and SOIC packages.

The AD633 is laser calibrated to a guaranteed total accuracy of 2% of full scale. Nonlinearity for the Y input is typically less than 0.1% and noise referred to the output is typically less than 100 μV rms in a 10 Hz to 10 kHz bandwidth. A 1 MHz bandwidth, 20 V/μs slew rate, and the ability to drive capacitive loads make the AD633 useful in a wide variety of applications where simplicity and cost are key concerns.

The versatility of the AD633 is not compromised by its simplicity. The Z input provides access to the output buffer amplifier, enabling the user to sum the outputs of two or more multipliers, increase the multiplier gain, convert the output voltage to a current, and configure a variety of applications.

The AD633 is available in 8-lead PDIP and SOIC packages. It is specified to operate over the 0°C to 70°C commercial temperature range (J Grade) or the −40°C to +85°C industrial temperature range (A Grade).

PRODUCT HIGHLIGHTS

1. The AD633 is a complete four-quadrant multiplier offered in low cost 8-lead SOIC and PDIP packages. The result is a product that is cost effective and easy to apply.
2. No external components or expensive user calibration are required to apply the AD633.
3. Monolithic construction and laser calibration make the device stable and reliable.
4. High (10 MΩ) input resistances make signal source loading negligible.
5. Power supply voltages can range from ±8 V to ±18 V. The internal scaling voltage is generated by a stable Zener diode; multiplier accuracy is essentially supply insensitive.

Rev. G
Information furnished by Analog Devices is believed to be accurate and reliable. However, no responsibility is assumed by Analog Devices for its use, nor for any infringements of patents or other rights of third parties that may result from its use. Specifications subject to change without notice. No license is granted by implication or otherwise under any patent or patent rights of Analog Devices. Trademarks and registered trademarks are the property of their respective owners.

One Technology Way, P.O. Box 9106, Norwood, MA 02062-9106, U.S.A.
Tel: 781.329.4700 **www.analog.com**
Fax: 781.461.3113
©2010 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

FUNCTIONAL DESCRIPTION

The AD633 is a low cost multiplier comprising a translinear core, a buried Zener reference, and a unity-gain connected output amplifier with an accessible summing node. Figure 9 shows the functional block diagram. The differential X and Y inputs are converted to differential currents by voltage-to-current converters. The product of these currents is generated by the multiplying core. A buried Zener reference provides an overall scale factor of 10 V. The sum of (X × Y)/10 + Z is then applied to the output amplifier. The amplifier summing node Z allows the user to add two or more multiplier outputs, convert the output voltage to a current, and configure various analog computational functions.

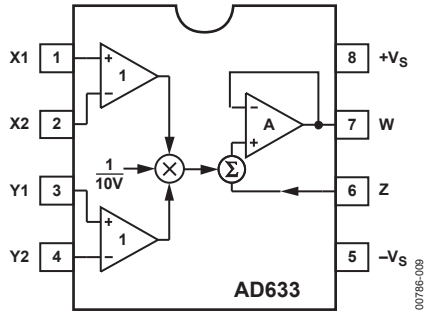


Figure 9. Functional Block Diagram (AD633JN Pinout Shown)

Inspection of the block diagram shows the overall transfer function is

$$W = \frac{(X1 - X2)(Y1 - Y2)}{10\,V} + Z \qquad (1)$$

ERROR SOURCES

Multiplier errors consist primarily of input and output offsets, scale factor error, and nonlinearity in the multiplying core. The input and output offsets can be eliminated by using the optional trim of Figure 10. This scheme reduces the net error to scale factor errors (gain error) and an irreducible nonlinearity component in the multiplying core. The X and Y nonlinearities are typically 0.4% and 0.1% of full scale, respectively. Scale factor error is typically 0.25% of full scale. The high impedance Z input should always reference the ground point of the driven system, particularly if it is remote. Likewise, the differential X and Y inputs should reference their respective grounds to realize the full accuracy of the AD633.

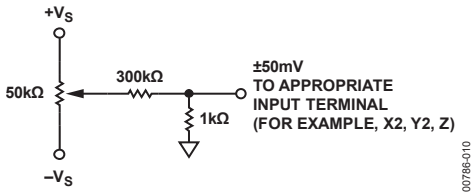


Figure 10. Optional Offset Trim Configuration

TL084

General purpose JFET quad operational amplifier

Features

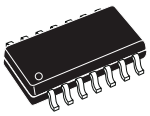
- Wide common-mode (up to V_{CC}^{+}) and differential voltage range
- Low input bias and offset current
- Output short-circuit protection
- High input impedance JFET input stage
- Internal frequency compensation
- Latch up free operation
- High slew rate: 16V/µs (typ)

Description

The TL084, TL084A and TL084B are high-speed JFET input quad operational amplifiers incorporating well matched, high voltage JFET and bipolar transistors in a monolithic integrated circuit.

The devices feature high slew rates, low input bias and offset currents, and low offset voltage temperature coefficient.

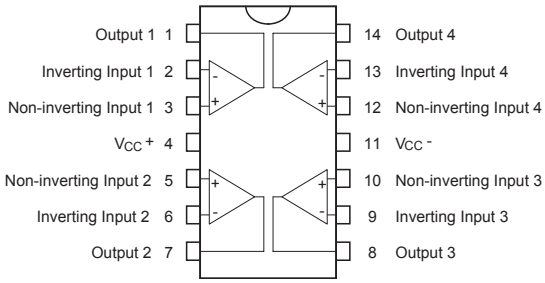
N
DIP14
(Plastic package)



D
TSSOP-14
(Thin shrink small outline package)

D
SO-14
(Plastic micropackage)

Pin connections
(Top view)



III. Függelék – IRF3710 tranzisztor adatlap

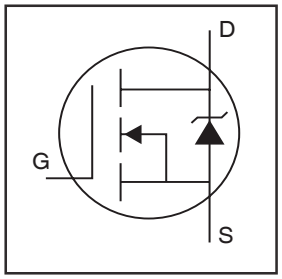
International
IOR Rectifier

PD - 91309C

IRF3710

HEXFET® Power MOSFET

- Advanced Process Technology
- Ultra Low On-Resistance
- Dynamic dv/dt Rating
- 175°C Operating Temperature
- Fast Switching
- Fully Avalanche Rated



V_{DSS} = 100V

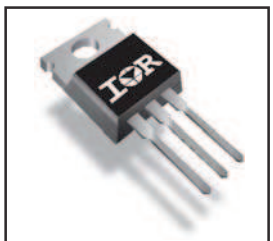
$R_{DS(on)}$ = 23mΩ

I_D = 57A

Description

Advanced HEXFET® Power MOSFETs from International Rectifier utilize advanced processing techniques to achieve extremely low on-resistance per silicon area. This benefit, combined with the fast switching speed and ruggedized device design that HEXFET power MOSFETs are well known for, provides the designer with an extremely efficient and reliable device for use in a wide variety of applications.

The TO-220 package is universally preferred for all commercial-industrial applications at power dissipation levels to approximately 50 watts. The low thermal resistance and low package cost of the TO-220 contribute to its wide acceptance throughout the industry.



TO-220AB

Absolute Maximum Ratings

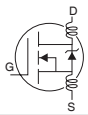
	Parameter	Max.	Units
I_D @ T_C = 25°C	Continuous Drain Current, V_{GS} @ 10V	57	A
I_D @ T_C = 100°C	Continuous Drain Current, V_{GS} @ 10V	40	
I_{DM}	Pulsed Drain Current ①	230	
P_D @T_C = 25°C	Power Dissipation	200	W
	Linear Derating Factor	1.3	W/°C
V_{GS}	Gate-to-Source Voltage	± 20	V
I_{AR}	Avalanche Current①	28	A
E_{AR}	Repetitive Avalanche Energy①	20	mJ
dv/dt	Peak Diode Recovery dv/dt ③	5.8	V/ns
T_J T_{STG}	Operating Junction and Storage Temperature Range	-55 to + 175	°C
	Soldering Temperature, for 10 seconds	300 (1.6mm from case)	
	Mounting torque, 6-32 or M3 srew	10 lbf•in (1.1N•m)	

Thermal Resistance

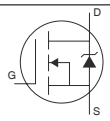
	Parameter	Typ.	Max.	Units
$R_{\theta JC}$	Junction-to-Case	——	0.75	°C/W
$R_{\theta CS}$	Case-to-Sink, Flat, Greased Surface	0.50	——	
$R_{\theta JA}$	Junction-to-Ambient	——	62	

09/15/09

Electrical Characteristics @ T_J = 25°C (unless otherwise specified)

	Parameter	Min.	Typ.	Max.	Units	Conditions
$V_{(BR)DSS}$	Drain-to-Source Breakdown Voltage	100	——	——	V	V_{GS} = 0V, I_D = 250μA
$\Delta V_{(BR)DSS}/\Delta T_J$	Breakdown Voltage Temp. Coefficient	——	0.13	——	V/°C	Reference to 25°C, I_D = 1mA
$R_{DS(on)}$	Static Drain-to-Source On-Resistance	——	——	23	mΩ	V_{GS} = 10V, I_D =28A ④
$V_{GS(th)}$	Gate Threshold Voltage	2.0	——	4.0	V	V_{DS} = V_{GS}, I_D = 250μA
g_{fs}	Forward Transconductance	32	——	——	S	V_{DS} = 25V, I_D = 28A④
I_{DSS}	Drain-to-Source Leakage Current	——	——	25	μA	V_{DS} = 100V, V_{GS} = 0V
		——	——	250		V_{DS} = 80V, V_{GS} = 0V, T_J = 150°C
I_{GSS}	Gate-to-Source Forward Leakage	——	——	100	nA	V_{GS} = 20V
	Gate-to-Source Reverse Leakage	——	——	-100		V_{GS} = -20V
Q_g	Total Gate Charge	——	——	130	nC	I_D = 28A
Q_{gs}	Gate-to-Source Charge	——	——	26		V_{DS} = 80V
Q_{gd}	Gate-to-Drain ("Miller") Charge	——	——	43		V_{GS} = 10V, See Fig. 6 and 13
$t_{d(on)}$	Turn-On Delay Time	——	12	——	ns	V_{DD} = 50V
t_r	Rise Time	——	58	——		I_D = 28A
$t_{d(off)}$	Turn-Off Delay Time	——	45	——		R_G = 2.5Ω
t_f	Fall Time	——	47	——		V_{GS} = 10V, See Fig. 10 ④
L_D	Internal Drain Inductance	——	4.5	——	nH	Between lead, 6mm (0.25in.) from package and center of die contact 
L_S	Internal Source Inductance	——	7.5	——		
C_{iss}	Input Capacitance	——	3130	——	pF	V_{GS} = 0V
C_{oss}	Output Capacitance	——	410	——		V_{DS} = 25V
C_{rss}	Reverse Transfer Capacitance	——	72	——		f = 1.0MHz, See Fig. 5
E_{AS}	Single Pulse Avalanche Energy②	——	1060⑤	280⑥	mJ	I_{AS} = 28A, L = 0.70mH

Source-Drain Ratings and Characteristics

	Parameter	Min.	Typ.	Max.	Units	Conditions
I_S	Continuous Source Current (Body Diode)	——	——	57	A	MOSFET symbol showing the integral reverse p-n junction diode. 
I_{SM}	Pulsed Source Current (Body Diode)①	——	——	230		
V_{SD}	Diode Forward Voltage	——	——	1.2	V	T_J = 25°C, I_S = 28A, V_{GS} = 0V ④
t_{rr}	Reverse Recovery Time	——	140	220	ns	T_J = 25°C, I_F = 28A
Q_{rr}	Reverse Recovery Charge	——	670	1010	nC	di/dt = 100A/μs ④
t_{on}	Forward Turn-On Time	Intrinsic turn-on time is negligible (turn-on is dominated by L_S+L_D)				

Notes:

① Repetitive rating; pulse width limited by max. junction temperature. (See fig. 11)

② Starting T_J = 25°C, L = 0.70mH R_G = 25Ω, I_{AS} = 28A, V_{GS}=10V (See Figure 12)

③ $I_{SD} \leq$ 28A, di/dt $\leq$ 380A/μs, $V_{DD} \leq V_{(BR)DSS}$, $T_J \leq$ 175°C

④ Pulse width $\leq$ 400μs; duty cycle $\leq$ 2%.

⑤ This is a typical value at device destruction and represents operation outside rated limits.

⑥ This is a calculated value limited to T_J = 175°C .

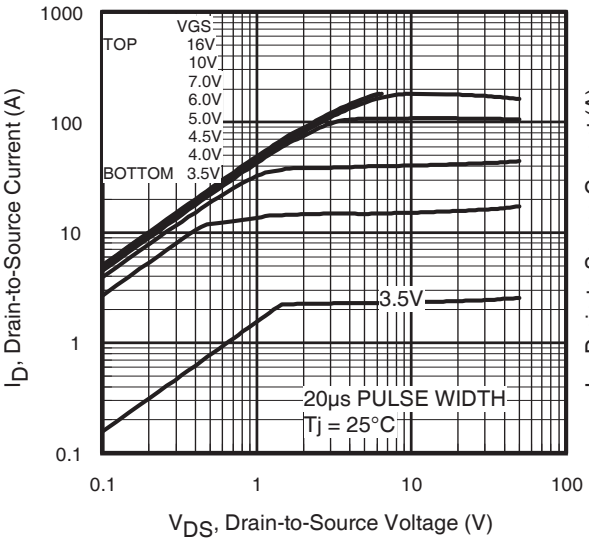


Fig 1. Typical Output Characteristics

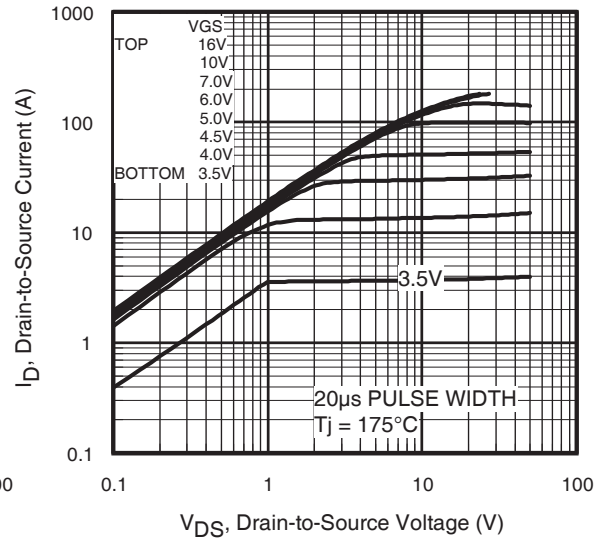


Fig 2. Typical Output Characteristics

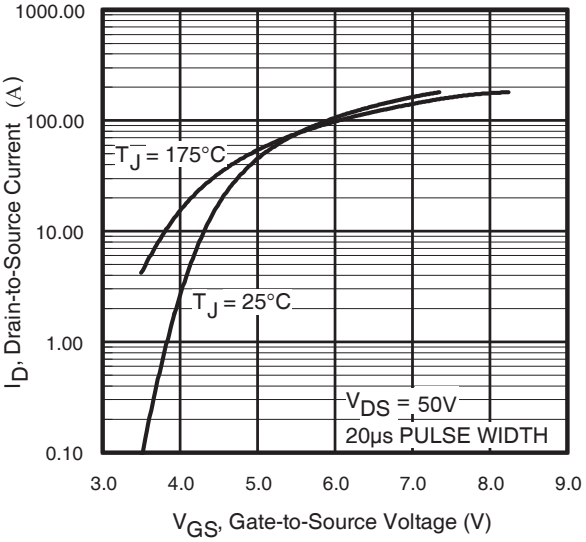


Fig 3. Typical Transfer Characteristics

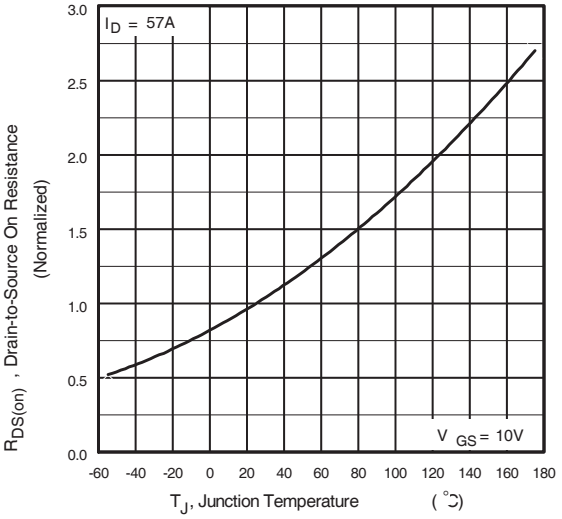


Fig 4. Normalized On-Resistance Vs. Temperature

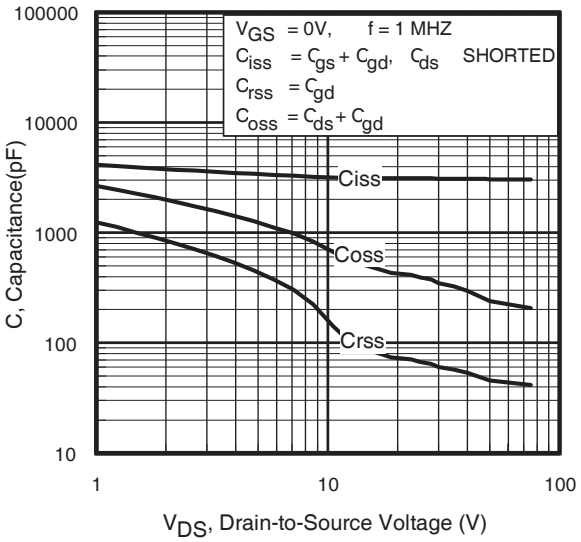


Fig 5. Typical Capacitance Vs. Drain-to-Source Voltage

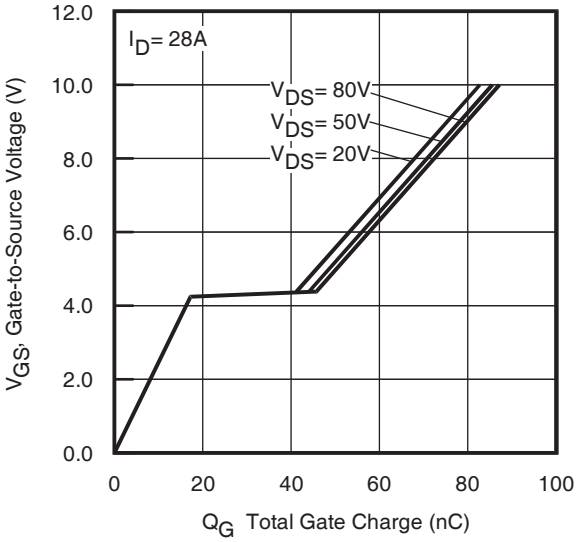


Fig 6. Typical Gate Charge Vs. Gate-to-Source Voltage

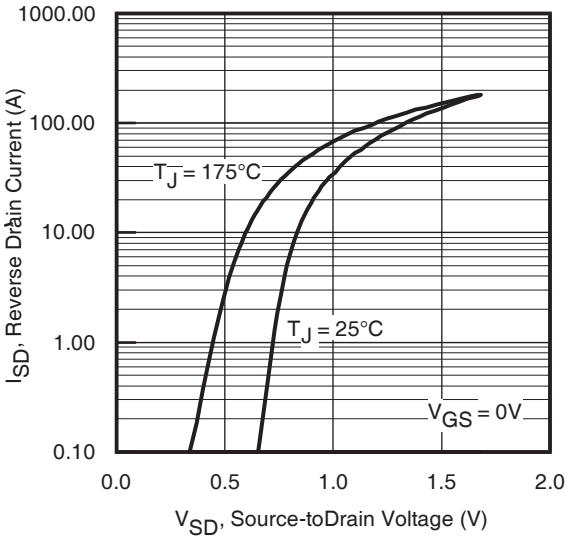


Fig 7. Typical Source-Drain Diode Forward Voltage

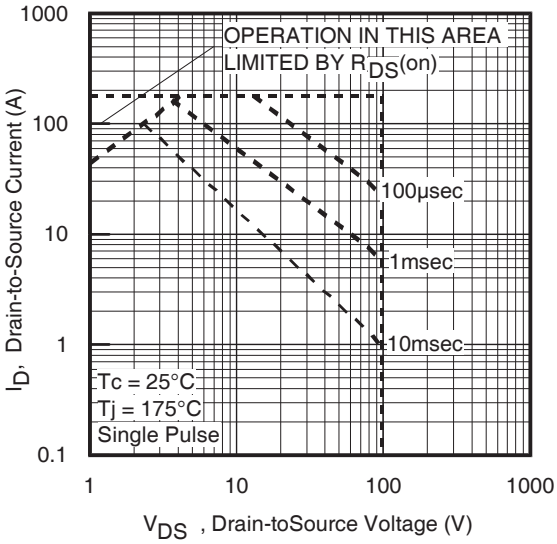


Fig 8. Maximum Safe Operating Area

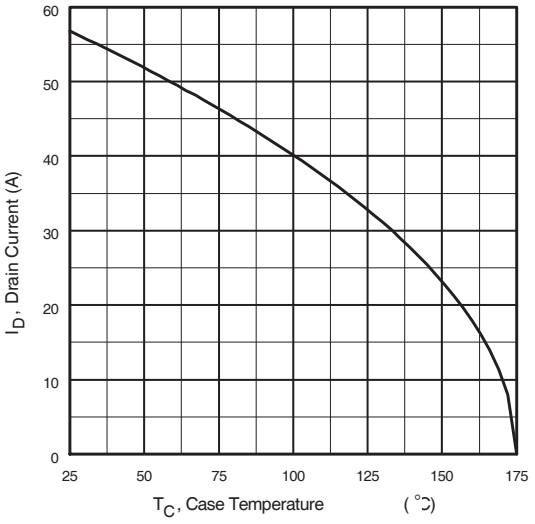


Fig 9. Maximum Drain Current Vs. Case Temperature

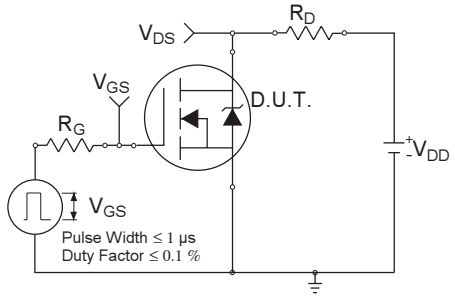


Fig 10a. Switching Time Test Circuit

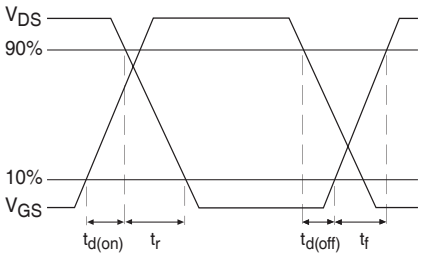


Fig 10b. Switching Time Waveforms

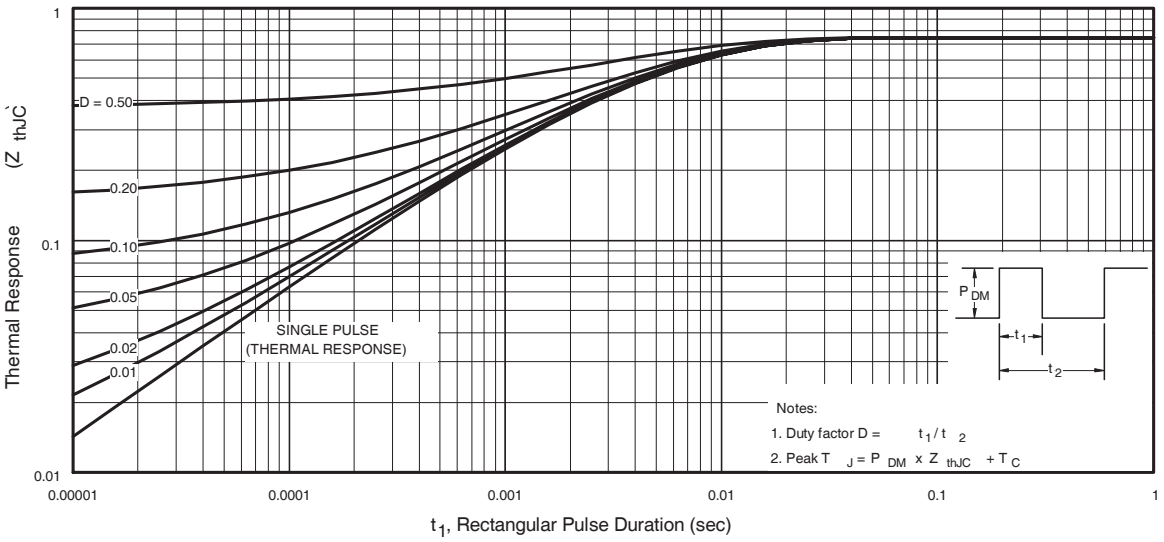


Fig 11. Maximum Effective Transient Thermal Impedance, Junction-to-Case

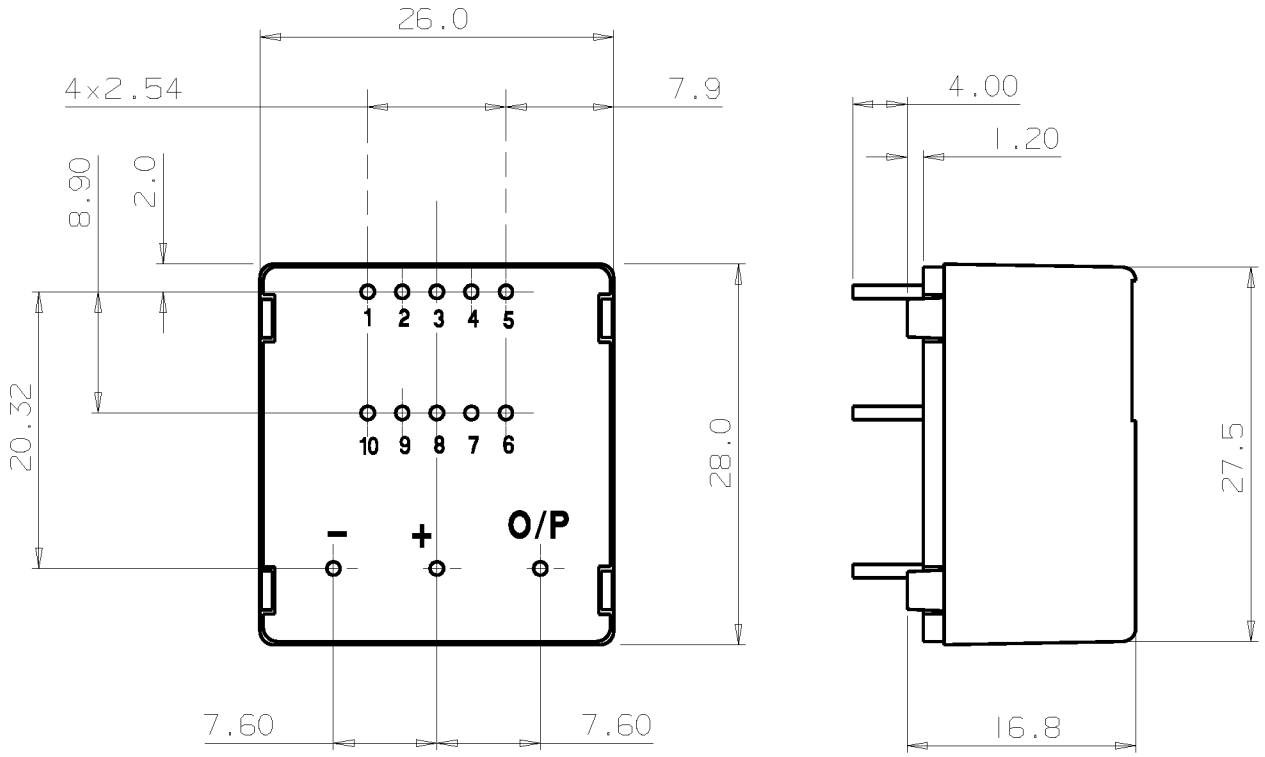
IV. Függelék – CSNE-151 áramszenzor adatlap és bekötési rajz

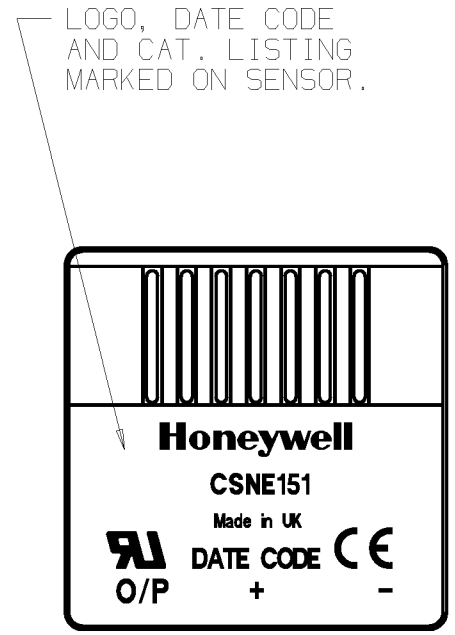
DO NOT SCALE PRINT

Honeywell

5A TO 25A MULTI - RANGE CURRENT SENSOR

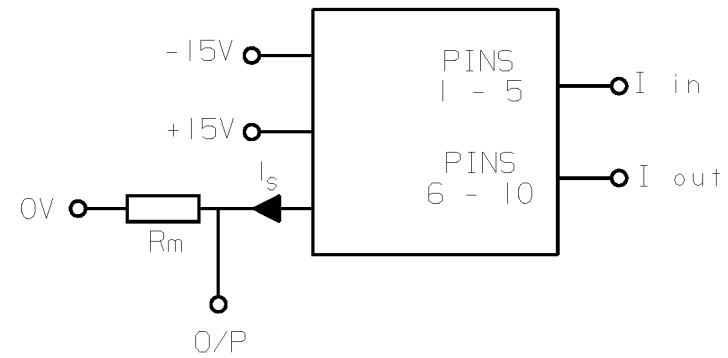
CATALOGUE LISTING
CSNE151





RECOMMENDED P.C.B. HOLE :- Ø1.2

ELECTRICAL SCHEMATIC



DESCRIPTION

CSNE151 IS A MULTI-RANGE CURRENT SENSOR MODULE BASED ON THE 'NULL BALANCE' HALL EFFECT PRINCIPLE. 5,6,8,12 OR 25A CAN BE MEASURED BY SELECTING THE APPROPRIATE 1 TO 5 PRIMARY TURNS.

ELECTRICAL DATA

NOMINAL PRIMARY CURRENT Ipn:- 25A rms
MEASURING RANGE Ip:- 0 TO ±36A

LOAD RESISTANCE:-	Rm min	Rm max
±25A.t max	100Ω	320Ω
+36A.t max	100Ω	190Ω

SUPPLY VOLTAGE:- ±15V (±5%)
DIELECTRIC STRENGTH:- 5.0KVrms/50Hz/1min.
CURRENT CONSUMPTION:- 10 + Is mA
PRIMARY INTERNAL RESISTANCE:- <1.25mΩ/TURN
SECONDARY INTERNAL RESISTANCE:- 110Ω MAX AT +70°C.

ACCURACY DATA

OFFSET :- ±0.05 mA TYP.
±0.15 mA MAX.

OFFSET DRIFT WITH TEMP.:- ±0.17mA TYP.
±0.6mA MAX.

LINEARITY:- ±0.2% Ipn
RESPONSE TIME :- <1µS
FREQUENCY:- DC TO 150KHz

ENVIRONMENTAL DATA

OPERATING TEMP.:- 0 TO +70°C
STORAGE TEMP.:- -40 TO +90°C

PRIMARY TURNS	PRIMARY CURRENT		NOM. OUTPUT CURRENT (mA) Is	PRIMARY RESISTANCE (mΩ)	PRIMARY INSERTION INDUCTANCE (µH)	PIN CONNECTIONS
	NOM. Ipn (A)	MAX. Ip (A)				
1	25	36	25	0.3	0.023	5 4 3 2 1 IN; OUT 6 7 8 9 10
2	12	18	24	1.1	0.09	5 4 3 2 1 IN; OUT 6 7 8 9 10
3	8	12	24	2.5	0.21	5 4 3 2 1 IN; OUT 6 7 8 9 10
4	6	9	24	4.4	0.37	5 4 3 2 1 IN; OUT 6 7 8 9 10
5	5	7	25	6.3	0.58	5 4 3 2 1 IN; OUT 6 7 8 9 10

CSNE151

DRAWING NUMBER M

ISSUE 6

3/94

DRAWN M. LOCH
CHECK
DESIGN
AUTHOR'N

THE COPYRIGHT OF THIS DRAWING IS THE PROPERTY OF HONEYWELL LTD. THE DRAWING IS SUPPLIED IN CONFIDENCE AND MUST NOT BE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN THAT FOR WHICH IT IS SUPPLIED.

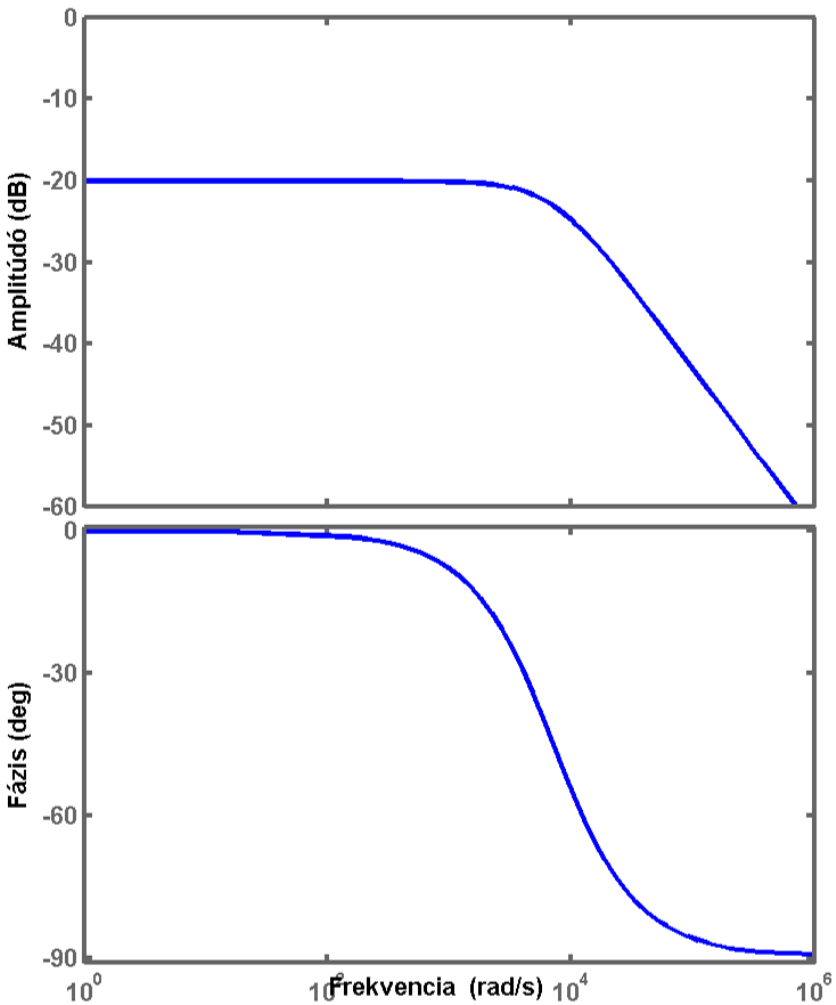
THIRD ANGLE PROJECTION

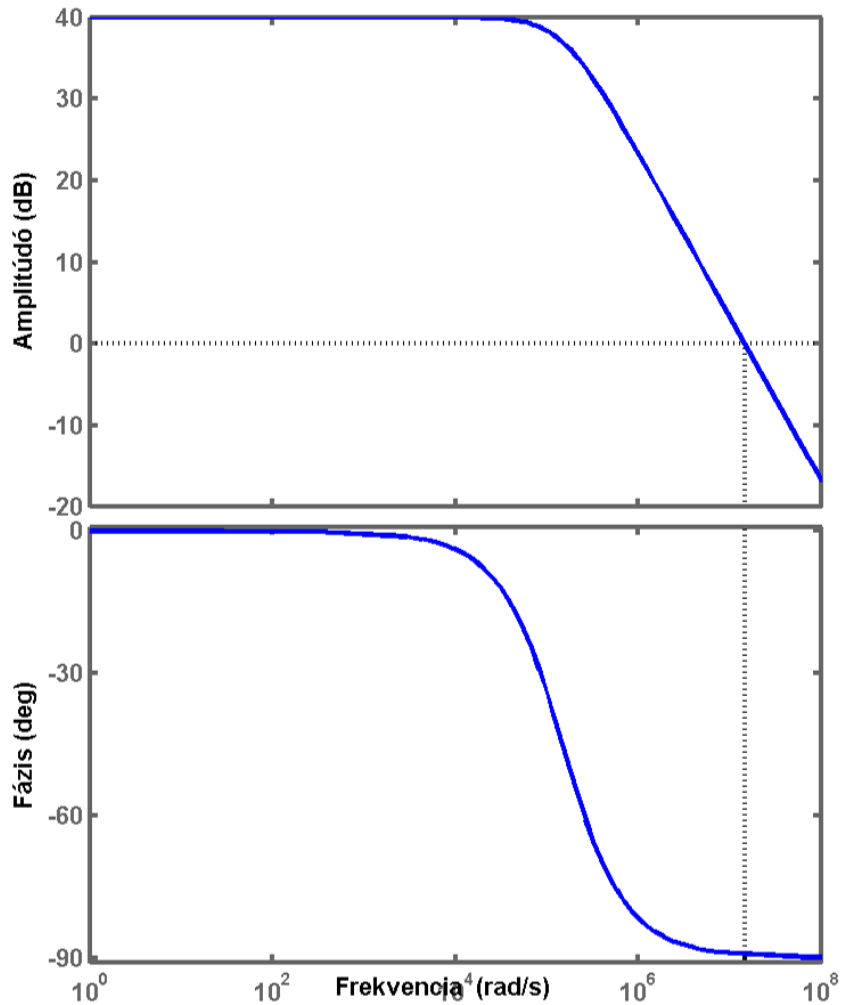
MODIFY ON CAD SYSTEM ONLY

SCALE :- 2:1

DIMENSIONS ARE IN MILLIMETRES

V. Függelék – Szűrők Bode diagramja


Tachogenerátor 1/10 feszültségosztó és aluláteresztő szűrő
Amplitúdó (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
Fázis (deg)
0
-30
-60
-90
10^0
10^2
10^4
10^6
Frekvencia (rad/s)


Bode Diagram
Gm = Inf , Pm = 90.6 deg (at 1.47e+007 rad/s)
Amplitúdó (dB)
40
30
20
10
0
-10
-20
Fázis (deg)
0
-30
-60
-90
10^0
10^2
10^4
10^6
10^8
Frekvencia (rad/s)

VI. Függelék – a dsPIC33EP mikrokontrolleren futó program

RÉSZLET

```
/*****************************************************************************************************
 *  DC motor áramcsúcs szabályozás
 *  Mikrokontroller: dsPIC33EP512MU810
 *  Lőrincz András
 *****************************************************************************************************
 *
 *
 *  Lábkiosztás: Explorer16 board alapján
 *
 *  FEL GOMB    S3      RD6
 *  LE  GOMB    S6      RD7
 *  ENTER       S5      RA7
 *  BACK        S4      RD13
 *
 *  Manuális üzemben PWM kimenő jel:     PWM5H(=RC2) lábon
 *  Automata üzemben kimenő jel:         RG8  lábon
 *  IR2184-1 engedélyező jel(3.3V):      RA2  lábon
 *
 *
 *  Szabályozás kapcsolgatási frekvencia: 400 Hz
 *  Mintavételezési frekvencia: 50000 Hz
 *  Periódusonkénti minták száma: 125
 *
 *
 *  Szenzorok bekötése:
 *  - áramszenzor:                          AN8 ->RB8 láb
 *  - tachogenerátor 1/10-es osztás után:   AN0 ->RB0 láb
 *

*~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

 *  Jelenlegi verzió:       4.03
 *  Dátum:                  2011. 10. 28.
 *
 *  Változtatások:          3.00    Átírva dsPIC33EP-re
 *
 *                          3.01    A 32. menüben amikor átváltunk manuálisból automatába, akkor
nem
 *                                  kapcsolt le a manuális üzemmód kimenete
 *
 *                          3.02    - 50 kHz helyett 48 kHz mintavételi frekvencia
 *                                  - AD átalakítás indítását T5 compare triggereli, T5
Interruptja
 *                                    mintavétel indul: ha AD interrupt végzett a számolással
 *                                    átalakítás indul: T5 Interrupt közvetlen elején
 *                                  - current_ad float-ként definiálva a programbeli
omptimalizálás
 *                                    érdekében
 *                          3.03    - a tachogenerátor konstansa 0.1-es lépésekben állítható
 *                                  - hibakeresés, ha nem fut végig AD1_Interrupt
 *                                    ehhez új változók: error, error_number
 *                                  - új almenüpontok az Adatok menüben:
 *                                                                     Hibák száma
 *                                                                     Firmware verzió
 *                          3.04    - tachogenerátor konstansa alapbeállításként 7.5, ehhez
 *                                    kapcsolódó C értéke és omega_max értéke is átállítva
 *                                  - control változó eltávolítva
 *
 *                          3.05    - PI szabályozó bevezetve P helyett, gain változó eltávolítva,
 *                                    helyette Aw
 *                                  - új változók: omega_hiba_n, omega_hiba_n_1, y_n, y_n_1
 *
 *                          4.01    - a PI szabályozó lebegőpontos számok helyett fixpontosakkal
 *                                    dolgozik, ehhez fixpontos aritmetika implementáláa
 *                                  - AD átalakító kimenete fixpontos függvény
 *                                  - előjelhelyes fixpontos szorzó függvény
 *                                  - összes szükséges változóátalakítás, a "_f" utótagos
 *                                    változók a főciklus beli lebegőpontos változók
 *
 *                          4.03    - a kapcsolási frekvencia 250 Hz-re csökkentve
 *                                  - gw és gi 0.01 lépésekben állítható
 *
 *
 *
 *
```

```c
*****************************************************************************************
/

#include<p33EP512MU810.h>
#include<libq.h>                            //fixpontos számok kezeléséhez
#include "dsPIC_functions.h"                //saját készítésű függvények
#include "lcd_functions_truly.h"            //saját készítésű függvények LCD vezérléshez

_FOSCSEL(FNOSC_FRC)
_FOSC(FCKSM_CSECMD & OSCIOFNC_OFF   &   POSCMD_XT)
_FGS(GSS_OFF)
_FWDT(FWDTEN_OFF)

#define UP_PRESS    PORTDbits.RD6
#define DOWN_PRESS  PORTDbits.RD7
#define ENTER       PORTAbits.RA7
#define BACK        PORTDbits.RD13
#define PERIOD      37500                   //PWM modul PTPER regiszterének értéke alapbeállított
400 Hz-hez
#define PER_INT     1199                    //Interrupthoz PR5 regiszter értéke, 50000 Hz
#define CURRENT     0                       //AN0-ás bemeneten van az áramszenzor
#define TACHO       8                       //AN8-as bemeneten van a tachogenerátor
#define FIRMW       403                     //verziószám

/*********************************Függvények prototípusai*************************************/
void InitPWM5(unsigned long periodreg, unsigned int duty);
void StartPWM(void);
void KillPWM(void);
void ChangeFreq(unsigned long frek, unsigned int duty);
void InitT5Interrupt(void);
void InitADC1(void);
_Q16 _Q16multi_sign(_Q16 x, _Q16 y);



/**********************************-Volatile változók*****************************************/

volatile unsigned int tick=0;               //Timer5 által inkrementált változó
volatile unsigned int sd=0;                 //kikapcsoláshoz számoló
volatile _Q16 current_ad=0;                 //áram AD értéke
volatile _Q16 tacho_ad=0;                   //szögsebesség AD értéke
volatile _Q16 ref_frac=0;                   //omega referencia Q15.16 formátumban (0..0.999)
volatile _Q16 hiba_frac=0;                  //mert lehet negatív is a hiba, Q15.16
volatile _Q16 omega_hiba_n=0;               //hiba az n. időpillanatban
volatile _Q16 omega_hiba_n_1=0;             //hiba az n-1. időpillanatban
volatile _Q16 y_n=0;                        //integrátor n. pillanatbeli kimenete
volatile _Q16 y_n_1=0;                      //integrátor n-1. pillanatbeli kimenete
volatile _Q16 current=0;                    //áram fixpontos értéke
volatile _Q16 C=0;                          //fixpontos C konstans, az omega szorzója
volatile _Q16 gw=0;                         //fixpontos gw szorzó
volatile _Q16 gi=0;                         //fixpontos gi szorzó
volatile _Q16 A_hiba=0;                     //Aw=h/Ti*gw
volatile _Q16 c_szorz=0;                    //fixpontos áram szorzó
volatile unsigned int error_number=0;       //hibák számát számolja
volatile unsigned int timer=0;              //kimenti AD interrupt végén a TMR5 értékét
volatile unsigned int timer2=0;             //AD1 interruptba lépésekor TMR5 értéke

volatile _Bool automatic=1;                 //automatában indít
volatile _Bool enable=0;                    //engedélyezés
volatile _Bool error=0;                     //hibaváltozó

/*
.
.
. itt helyezkedik el a FőPROGRAM, terjedelmi okok miatt nem közlöm
.
.
*/

/******************************** Interrupt kezelő függvények
*******************************************/

void _ISR _T5Interrupt(void)            //fő interrupt kezelő rutin
{
    tick++;
```

```
    sd++;
    if(error)                           //ha azelőtt kerül ide, hogy sikerült volna lenullázni a
hobaváltozót, akkor nem futott végig a program
    {
        error_number++;                 //növelje eggyel a hibaszámlálót
        LATAbits.LATA6=1;               //jelezze LED-del is
    }


    if(tick==50000)
    {
        tick=0;
        LATAbits.LATA4^=1;              //a bit értékének váltogatása
    }

    IFS1bits.T5IF=0;                    //flag törlése
}


void _ISR _AD1Interrupt (void)                      //ha végzett a két mintavétellel akkor kap
egy interruptot
{
    error=1;                                        //beállítjuk 1-nek a hibát
    timer2=TMR5;                                    //indításakor mennyit a TMR5 értéke
    current_ad=ADC1BUF0;                            //CH0 -> AN8 -> áramszenzor
    tacho_ad=ADC1BUF1;                              //CH1 -> AN0 -> tachogenerátor
    hiba_frac=ref_frac-tacho_ad;                    // 0 és 0.9999 közötti hibajel, fixpontos
    omega_hiba_n=_Q16multi_sign(hiba_frac,C);       //omega_hiba_n és C szorzata előjelhelyesen
    current=_Q16mac(current_ad,c_szorz,0);          //current=current_ad*c_szorz, ahol c_szorz=
8.25

    if(enable)
    {
        y_n=_Q16multi_sign(omega_hiba_n_1,A_hiba)+y_n_1;    //integrátor n. pillanatbeli kimenete
omega_hiba_n_1*A_hiba + y_n_1
        if(automatic)
        {
            if(tick%125==0)                         //50000:125=400  -> 400 Hz-el bekapcsolgat
            {
                LATGbits.LATG8=1;
            }
            if((_Q16multi_sign(gw,omega_hiba_n)+y_n)<(_Q16mac(current,gi,0)))   //feltétel a
kikapcsoláshoz
            {
                LATGbits.LATG8=0;
                sd=0;                               //ha ő lekapcsol, akkor nem kell lekapcsolnia
            }
            else if(tick%125>123 && sd>4999)            //periódus legutolsó mintavételénél
mindenképp lekapcsol, a vezérlés működése miatt kell, ha teljesül sdre a feltétel
            {                                       //0,1 [s] onként lekapcsol
                LATGbits.LATG8=0;
                sd=0;
            }
        }
        else LATGbits.LATG8=0;          //manuális üzemmódban
    }
    if(tick==49999)
    {
        LATAbits.LATA5^=1;              //Interrupt végigszámolását jelző LED
    }
    /* Értékátadás a köv. periódusnak */
    omega_hiba_n_1=omega_hiba_n;
    y_n_1=y_n;
    timer=TMR5;                         //hibakereséshez
    error=0;                            //ha végigfutott, akkor nincs hiba, hibajelző=0
    IFS0bits.AD1IF = 0;                 // AD1 interruptflag törlése
}

/*
.
.
.SEGÉDFÜGGVÉNYEK itt találhatóak, terjedelmi okok miatt nem közlöm őket
.
.
*/
```

```c
/* Előjelhelyes fixpontos szorzó program */
_Q16 _Q16multi_sign(_Q16 x, _Q16 y)
{
    if(x > 0)                           //pozitiv x
    {
        if(y > 0)                       //pozitiv x és pozitiv y -> pozitiv
            return _Q16mac(x,y,0);
        else if (y < 0)                 //pozitiv x és negatív y -> negatív

            return _Q16neg(_Q16mac(x,_Q16neg(y),0));

        else return 0;                  //ha y=0
    }
    else if (x < 0)                     //negativ x
    {
        if(y > 0)                       //negativ x és pozitiv y -> negativ

            return _Q16neg(_Q16mac(_Q16neg(x),y,0));

        else if(y < 0)                  //negativ x és negativ y -> pozitiv
            return _Q16mac(x,y,0);
        else return 0;                  //ha y=0
    }
    else return 0;                      //ha x=0

}
```