



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

ATOMFIZIKAI TANSZÉK

Alacsonydimenziós dinamómodell időfüggő perturbációval

Témavezető:

Kovács Tamás
egyetemi adjunktus

Szerző:

Fey Dávid
fizika BSc

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. Motiváció	3
2. Bevezetés a kaotikus rendszerekbe	4
2.1. Mi a kaotikus rendszer?	4
2.2. A fázistér	6
2.3. Fixpontok és a mozgás körülöttük	7
2.4. Disszipatív rendszerek, a kaotikus attraktor	8
2.4.1. Az attraktor jelenléte	8
2.4.2. A fázistérfogat változása	8
2.4.3. Bifurkáció	9
2.4.4. Kaotikus nyereghalmaz	11
3. A napdinamó modell	13
3.1. Bevezető a Nap belső mágneses mezejének dinamikájába	13
3.2. LODM levezetése MHD egyenletekből	14
3.3. Numerikus szimulációk statikus paraméterek mellett	16
3.3.1. Az idősor meghatározása	17
3.3.2. A fázistérbeli szerkezet (attraktorok, Poincaré metszetek)	18
3.3.3. Bifurkációs diagramok	20
3.3.4. A két attraktor vonzási tartománya	23
4. Eredmények	26
4.1. Az időben folytonosan változó paraméter	26
4.2. Változó paraméter két attraktor mellett	27
4.2.1. A kaotikus nyereghalmaz szerepe	31
4.3. Változó paraméter bifurkáció környékén	34
4.3.1. Poincaré-metszet	38
4.3.2. A stabil pálya és a trajektóriák távolsága	38

4.3.3. Az instabil pálya és a trajektóriák távolsága	42
4.3.4. Egy gyenge közelítés, a probléma modellezésére	43
5. Összegzés, nyitott kérdések	46
Köszönetnyilvánítás	47
Irodalomjegyzék	48

1. fejezet

Motiváció

A nemlineáris dinamikai rendszerek elméletében a kaotikus viselkedés alapvető fontosságú jelenségkör. Ezzel kapcsolatban, legyen az alapkutatás vagy szerteágazó alkalmazás, megkerülhetetlen ismereteket szereztünk az elmúlt 50 évben. A kialakult fogalmi rendszer alkalmas disszipatív és konzervatív esetekben az alacsonydimenziós determinisztikus káosz modern leírására. A kiforrott módszerek biztos alapokat szolgáltatnak a témakör jól ismert alapvető modelljein túl [1], az összetettebb problémák vizsgálatára (dinamikai csillagászat [2], fúziós modellek [3], óceáni áramlás, klíma- és járványdinamika [4, 5, 6]).

A klímaváltozás vizsgálatának dinamikai rendszer megközelítése (azaz alacsony dimenziós reprezentációja) [7, 8, 9] az utóbbi években rávilágított arra, hogy az eddig használt technikák nem alkalmasak a kaotikus rendszer leírására abban az esetben, ha a rendszer paramétere(i) (pl. szén-dioxid koncentráció) időben számottevően, a belső időskálával összemérhetően, változik(nak), tehát a probléma nem autonóm. Konkrétabban fogalmazva, kimutatható, hogy a gyors paraméterváltozás következtében a rendszer már nem ergodikus többé, azaz az időátlag nem egyezik meg a sokaság átlaggal [10]. Ilyen esetben az eddigi eljárásrend csődöt mond, és újfajta megközelítés szükséges a rendszer dinamikai fejlődésének leírására. [11]

Napjainkban az látszik körvonalazódni, hogy a fenti megközelítés általános érvényű az alacsonydimenziós kaotikus rendszerekben. Mivel érdeklődésem a nemlineáris dinamika iránt már több évre visszanyúlik úgy döntöttünk témavezetőmmel, hogy egy eddig nem vizsgált területen is feltérképezzük az új irány alkalmazhatóságát. Ennek érdekében dolgozatomban a naptevékenység leírására szolgáló alacsonydimenziós dinamómodellt viselkedését tanulmányozom időben változó rendszerparaméterek függvényében. A munka során számtalan olyan jelenséggel találkoztunk, amiről tudásunk szerint még nem született tudományos közlemény. Igyekeztem a dolgozatban az eddigi eredményeket tömören

összefoglalni, és rámutatni, hogy milyen új irányok körvonalazódnak mind a dinamikai rendszerek elméletében, mind pedig a napaktivitás megismerésében determinisztikus, kis szabadsági fokú rendszerek esetén.

2. fejezet

Bevezetés a kaotikus rendszerekbe

2.1. Mi a kaotikus rendszer?

A 20. század második felében kibontakozott új irány az elméleti fizikai kutatások területén, a káoszelmélet. Ez megmutatta, hogy a nemlineáris erőtvörvények hatására létrejövő bonyolult mozgásformák a természetben tipikusnak mondhatók, rendkívül sok helyen előfordulnak. Az ilyen mozgásformák között is vannak jelentős különbségek és kiderült, hogy egy részük, habár rendezetlennak tűnik, megfelelő fogalmi apparátussal jól kezelhető. Az ilyen viselkedést mutató rendszereket nevezték el később kaotikus rendszereknek [12].

A káosz nem egy matematikai fogalom, nincs neki tökéletes definíciója, azért a szakirodalomban sem mindenki ugyanúgy fogalmazza meg. A Tél Tamás által megadott definíció az, hogy [13]:

"A káosz egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedése."

Ennek a meghatározásnak megfelelően a káosz egy olyan mozgás vagy időbeli fejlődés, amely bonyolult és összetett formában jelenik meg. A témakörben vizsgált rendszerek mozgásegyenletekkel rendelkeznek, tehát a megoldások jól definiált matematikai struktúrákhoz kötöttek. A rendszerek egyszerűsége abban rejlik, hogy csupán néhány változó határozza meg az állapotot, és a mozgás néhány közönséges differenciálegyenlettel írható le. Ebből a meghatározásból a következő meglepő tény következik: Egyszerű egyenleteknek, illetve egyenletrendszereknek is lehetnek bonyolult megoldásai. Ilyen például a kettős inga, melynek dinamikáját le lehet írni egyszerű differenciálegyenletekkel, mégis amikor elindítjuk, akkor teljesen véletlenszerűnek tűnik a mozgása.

A káosz felfedezése és széles körű elfogadása azért váratott magára a XX. század második feléig, mert ezek a bonyolult megoldások általában csupán numerikus szimulációkkal kezelhetők. Tisztáznunk kell, mit is jelent a bonyolultság. Ez sem definíció, hanem sok ilyen rendszer vizsgálatából leszűrt tapasztalat:

- Időben szabálytalan, aperiodikus viselkedés, ami nem áll elő tetszőleges számú periodikus mozgás összegeként sem.
- Előrejelezhetetlen, mivel a mozgás rendkívül érzékeny a kezdőfeltételekre, melyeket a mérési hibákból adódóan sosem ismerhetünk meg teljesen pontosan.
- A mozgás jellemzésére a fázistérben bonyolult, de rendezett fraktálszerkezetet lehet találni.

Ezek a jellemzők általában együttesen fordulnak elő, és egy közös vonásuk van: a hosszú távú mozgás időben véletlenszerű, így csak valószínűségi fogalmakkal írható le. Ennek a véletlenszerű viselkedésnek az oka bizonyíthatóan a kevés összetevő erős és nemlineáris kölcsönhatása. Ez meglepő, mivel olyan rendszerekről van szó, amelyeknél egy adott állapot ismeretében teljes pontossággal lehet a jövőt megjósolni. Ez alapján elmondhatjuk, hogy determinisztikus rendszerek véletlenszerű viselkedést is mutathatnak. Fontos hangsúlyozni, hogy egy jelenséget csak akkor tekinthetünk kaotikusnak, ha találunk egy olyan egyszerű modellt, amely a szabálytalan mozgást kellő pontossággal visszaadja.

A káosz tehát érdekes, a hagyományoshoz képest eltérő mozgásforma, amely időben szabálytalan, de mégis jól kezelhető. A kaotikus viselkedésnek a fenti tulajdonságokon kívül van két nem triviális feltétele:

- A mozgását legalább 3 autonóm elsőrendű differenciálegyenlet írja le,
- és azok nemlineárisak.

Ha nincs legalább 3, akkor nem lesz elég bonyolult a rendszer, így mindig előrejelezhető. Ha pedig nem autonómak az egyenletek, akkor az időtől függő tag miatt a fázistéren a trajektóriák metszhetik egymást (erről nemsokára részletesebben). Végül lineáris esetben a mozgás felbontható exponenciális sajátmódusok összegére, ez is ellentmond a definíciónak.

Na de hogyan lehet ábrázolni ezeket az időben bonyolult mozgásformákat? A hagyományos kitérés-idő, vagy sebesség-idő grafikonok nem lesznek alkalmasak erre, hiszen akármeddig követjük a kitérést, a következőkben mindig számíthatunk újabb viselkedésformákra. Így az ábrázolásból valahogy ki kell venni az időt, ezért ábrázoljuk inkább kitérés-sebesség diagramon a mozgást, ez lesz a fázistér.

2.2. A fázistér

Amikor egy dinamikai rendszer pillanatnyi állapotát akarjuk meghatározni, akkor a hely- és sebességkoordinátákra vagyunk kíváncsiak. Ezen koordináták és a dinamikai egyenletek ismeretében a mozgás egyértelműen folytatható. Ha a mozgás egydimenziós, akkor a fázistere kétdimenziós lesz. Ha viszont a mozgás több mint egydimenziós, akkor a fázistér dimenziószáma is emelkedik. A korábban leírt szabályok szerint egy kaotikus mozgást legalább három differenciálegyenlet ír le, eszerint a fázistere legalább háromdimenziós.

A rendszer mozgásállapota egy adott pillanatban a fázistéren egy pont, és ahogy a rendszer mozog, a pont úgy vándorol a fázistéren. A mozgás fázistérbeli pályáját trajektóriának hívjuk. A trajektória nem mutatja az idő múlását, mégis áttekinthető képed ad a rendszer különböző mozgási lehetőségeiről. Fontos, hogy a trajektóriák nem metszhetik egymást, mivel a mozgásegyenlet egyértelmű, egy pont csak egy irányba haladhat. (Ez alól kivételek a fixpontok, de arról majd később)

Korábban említettem, hogy egy kaotikus rendszer fázistere legalább 3 dimenziós, de általában lehet ennél több is. Ezekben a sokdimenziós fázisterekben nehéz leolvasni bármit is, ezért valahogy csökkenteni kell a dimenziószámot. Erre kétféle módszer használható:

1. A trajektóriákat levetítjük bizonyos tengelyek mentén. Más néven bizonyos változókat elhagyunk az ábrázolásnál. Például ha egy test két dimenzióban síkmozgást végez, akkor a teljes fázistér az $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ tengelyekkel rendelkezik. Ha ezt levetítjük y , majd $\dot{y}$ mentén, akkor csak az $x, \dot{x}$ változókat ábrázoljuk egy síkon.
2. A Poincaré-leképezés, amikor a fázisteret leszűkítjük valamilyen feltétel szerint, tipikusan elmetsszük egy síkkal. Például, ha egy test 1D-ben mozog, akkor a teljes fázisteret az $x, \dot{x}$ tengelyek alkotják, ha ezt elmetsszük az $x = 1$ egyenessel, akkor az egy Poincaré-leképezés lesz. Ekkor megkaptunk az $\dot{x}(x = 1)$ ponthalmazt. Ezt a módszert kiegészíthetjük úgy, hogy csak azokat a trajektóriákat vesszük figyelembe amik egy adott irányból metszik a síkot (vagy egyéb felületet). Az előző példában ez úgy nézne ki, hogy csak azokat a trajektóriákat metsszük el az $x = 1$ egyenessel, amik "jobbra" haladnak, más néven $\dot{x} > 0$ feltételt is figyelembe vesszük. Így csak egy részét kapjuk meg az előző ponthalmaznak, de ez is elegendő a dinamika tanulmányozásához.

Fontos különbség a kettő között, hogy az első leképezés trajektóriákat ad vissza, míg a második csak pontokat azokhoz köthető diszkrét pontokat.

2.3. Fixpontok és a mozgás körülöttük

Vegyünk egy kétdimenziós fázistérrel leírható rendszert. Legyen a két változó x_1 és x_2 , és a mozgást leíró egyenletek $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ és $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$. Ha megfelelőek az egyenletek, akkor azt kapjuk, a fázistérben van egy fixpont. Legyen ez a pont (x'_1, x'_2) , mivel fixpont $f_1(x'_1, x'_2) = f_2(x'_1, x'_2) = 0$. Ha megnézzük ennek a pontnak egy kicsi környezetét, akkor némi számolás után a következőt kapjuk:

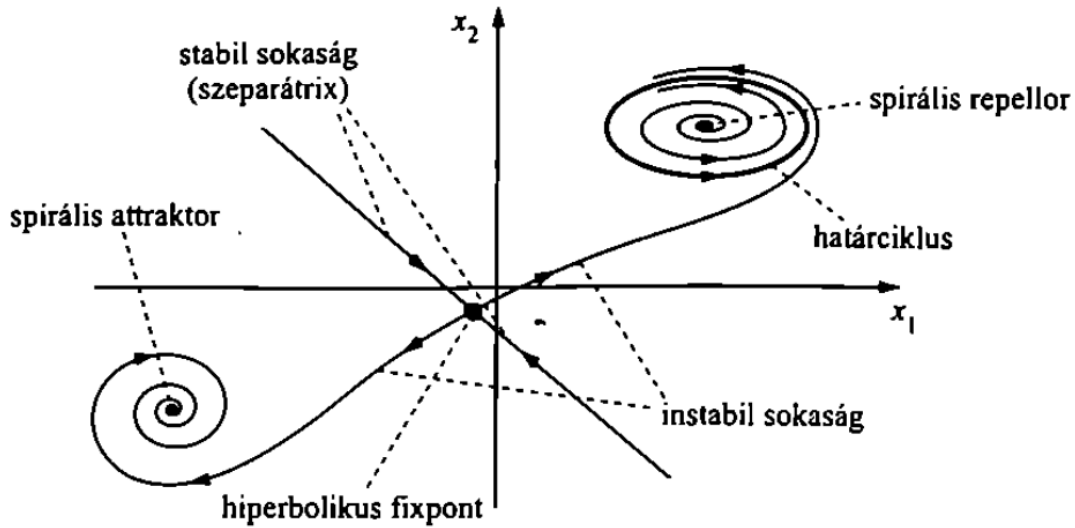
$$\begin{pmatrix} \dot{\Delta x_1} \\ \dot{\Delta x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \text{ ahol } \Delta x_i = x_i - x'_i \text{ és } i = 1, 2 \quad (2.1)$$

A (2.1) egyenlet megoldása

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} (t) = A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + B\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.2)$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ az előbbi mátrix sajátértékei, sajátvektorai. Ebből az derül ki, hogy a mátrix sajátértékeiből, sajátvektoraiból meg lehet határozni a trajektóriák alakját a fixpont környékén. Ha ezek valósak, akkor a fixpont lehet: csomópont attraktor, csomópont repellor, hiperbolikus pont. Ha képzetesek, akkor lehet: elliptikus pont, spirális repellor, spirális attraktor (lásd 2.1 ábra).

Nézzünk meg egy hiperbolikus pontot (2.1 ábra, origóhoz közel), ekkor az egyik valós sajátérték pozitív, a másik negatív. Azt vehetjük észre, hogy van két trajektória, amik bemennek a fixpontba, és ezzel „metszik” egymást, ami első ránézésre ellentmond a fázistér alapvető tulajdonságainak: $A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ és $B\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$. Valójában azért nem metszik egymást, mert az egyik trajektória a fixponttól ellenkező irányba halad, a másik meg véges időn belül nem éri el a fixpontot. Ez a két trajektória lesz rendre az instabil és stabil sokaság. Ha a stabil sokaságra rárakunk egy pontot, akkor az pont a a fixponthoz fog tartani. Viszont minden más trajektória előbb utóbb az instabil sokaság irányába térül el, méghozzá a fixponttól exponenciálisan távolodva. Tehát a hiperbolikus pont környékén az instabil sokaság dominál, ez egy instabil fixpont lesz.



2.1. ábra. A fixpontok fázistérbeli tulajdonságai különböző sajátértékek esetén.
Forrás:[13]

2.4. Disszipatív rendszerek, a kaotikus attraktor

2.4.1. Az attraktor jelenléte

A disszipatív rendszerek jellemző, hogy a kezdőfeltétel hosszú távon nem határozza meg a mozgás jellegét. Másképp megfogalmazva a rendszer „elfelejti a kezdőfeltételeket”. Ilyen rendszerek például a súrlódásos rendszerek, egy súrlódásos inga bizonyos idő után megáll, vagy ha gerjesztve van, akkor a rezgés adott frekvenciával és amplitúdóval állandósul.

Léteznek disszipatív kaotikus rendszerek is, melyekre érvényes a fent említett rövid távú memória, de a megoldásuk mégis megjósolhatatlan. Ez úgy lehetséges, hogy a mozgás csak időben véletlenszerű, a fázistéren nem az. Adott paraméterek esetén bármilyen kezdőfeltétellel indítjuk el a rendszert, a fázistéren a trajektóriák mindig ugyanolyan fraktál-szerkezetű alakzatot rajzolnak ki. Ezt azt az alakzatot nevezzük kaotikus attraktornak. Az, hogy az attraktoron hol van éppen a rendszer, pontosan nem megjósolható viszont az attraktor tökéletesen meghatározható.

2.4.2. A fázistérfogat változása

Disszipatív rendszerekben az attraktor dimenziója kisebb, mint a teljes fázistéré, így a teljes fázistérfogata 0. Tehát, ha egy V fázistérfogatú kockából az összes kezdőfeltételből

elindítjuk a trajektóriákat, akkor a fázistérfogatuk 0-hoz tart. Nézzük meg, hogy hogyan változik a fázistérfogat egy ilyen rendszerben.

Láttuk, hogy egy dinamikai rendszer fázistere a rendszer összes lehetséges állapotából álló többdimenziós tér. Egy fázistérbeli térfogat egy állapotok gyűjteményét képviseli (például egy kis „felhőnyi” pálya különböző kezdeti feltételekből kiindulva). Legyenek egy pont koordinátái $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ azaz x_i . Legyenek a differenciálegyenleteink $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots)$. Vegyünk egy V térfogatú kockát amely elegendően kicsi ahhoz, hogy az f_i sorba fejtett alakjából a másod, vagy annál nagyobb rendű tagok elhanyagolhatók. A fázistérben egy kis térfogat $V(t)$ időbeli változásának sebességét a rendszer vektormezőjének divergenciája határozza meg. Kis számolás után a következőt kapjuk:

$$\dot{V} = V \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

ahol f_i a rendszer mozgásegyenleteit leíró vektormező komponensei. A divergencia, $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, a fázistér lokális tágulási vagy zsugorodási sebességét méri. A fenti összefüggésből az következik, hogy disszipatív rendszerekben $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$, azaz a fázistér térfogata idővel zsugorodik.

Mindezek értelmében disszipatív rendszerekben az energiavesztés vagy csillapítás miatt a pályák egy alacsonyabb dimenziójú sokaságra, például egy attraktorra húzódnak össze. A zsugorodási sebesség azt tükrözi, milyen gyorsan közelednek egymáshoz a pályák. Az állandósult állapotban a fázistér térfogata addig zsugorodik, amíg a rendszer egy attraktorra nem áll be, például egy fixpontra, határciklusra vagy kaotikus attraktorra.

2.4.3. Bifurkáció

Amikor egy dinamikai rendszer differenciálegyenleteit leírjuk, akkor abban előfordul, hogy nem csak változók szerepelnek, hanem egyéb paraméterek is. Például nézzük meg a Lorenz-modellt: $\dot{x} = \rho(y - x) \quad \dot{y} = rx - y - xz \quad \dot{z} = -\beta z + xy$.

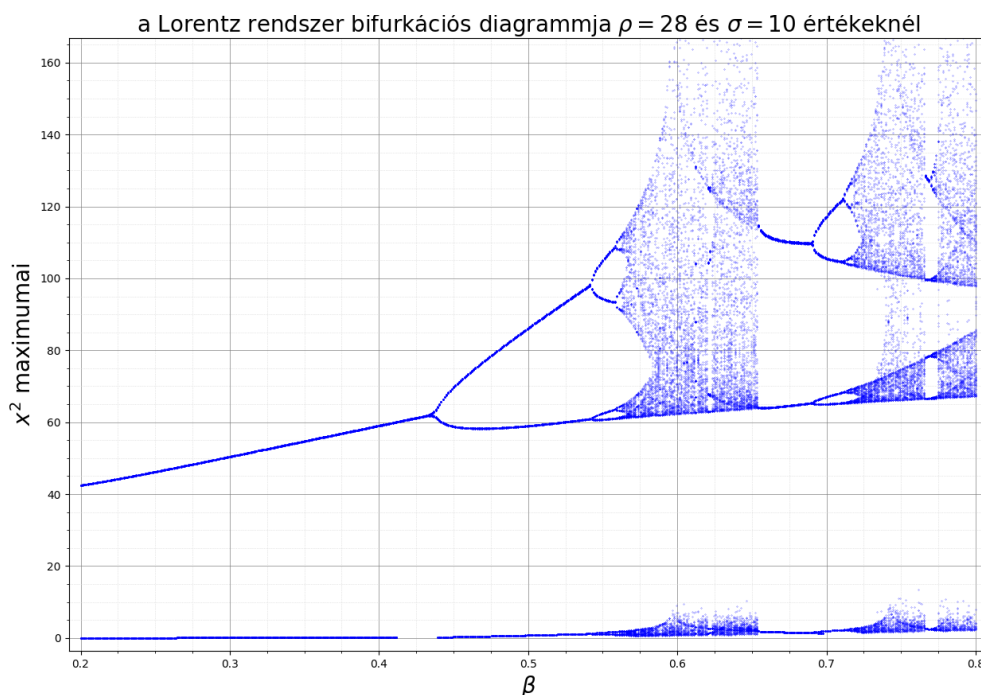
Különböző paraméterek mellett különböző jellemző mozgásokat kapunk: bizonyos értékeknél a trajektóriák egy ciklikus mozgáshoz tartanak, más paramétereknél meg kaotikus attraktorhoz. Induljunk el olyan paraméterekből, amelyek esetén 1-es ciklushoz tartanak a trajektóriák. Ezután nézzük meg más paraméterértékekre a mozgást, azt tapasztaljuk, hogy az előbbi stabil 1-es ciklusú pályának az alakja változik, és egy ponton instabillá válik. Ekkor viszont megjelenik egy másik stabil pálya, ami egy 2-es ciklushoz tartozik. Ha még tovább változtatjuk a paramétert, akkor ez a 2-es ciklus is instabillá változik, és

megjelenik egy stabil 4-es ciklus. Ahogy így változtatjuk a paramétert egyszer csak már elérünk egy kaotikus sávba. Hogyan lehet ezt vizualizálni?

A ciklikus mozgás a fázistérben egy zárt görbe, ilyen értelemben nincs különbség a periodikus pályák ciklusainak számában. Viszont hogyha vesszük ezen pályák Poincaré-metszetét, akkor a periodikus pályák pontok lesznek a leképezésen. Ha 1 pontot kapunk, akkor 1-es ciklusú a pálya, ha 2 pontot, akkor 2-es ciklusú, stb. Tehát a Poincaré-metszeten a pontok száma mondja meg, hogy milyen tulajdonságú a periodikus pálya [13].

Egy másik módszer a dinamika összetettségének szemléltetésére az, hogy a trajektóriának csak az egyik komponensét vizsgáljuk meg, és azt időben ábrázoljuk [14]. Ha megkeressük ezen változóban a maximumokat, akkor az 1-es ciklusnál 1 maximumot kapunk, a kettes ciklusnál két maximumot, és így tovább. Tehát a maximumok száma megegyezik a ciklusok számával. Ezzel jellemezve a mozgás periodicitását. Bizonyos esetekben praktikusabb az adott komponensnek a négyzetét venni, és annak megkeresni a maximumait. Ekkor 2-szer annyi maximumot kapunk, mint az előző esetben.

A fenti algoritmus alapján elkészíthetjük egy adott rendszer ún. bifurkációs diagramját. Ennek az egyik tengelye a változtatott paraméter értéke lesz, a másik pedig egy általunk kiválasztott komponense a trajektóriáknak. A diagramon a stabil pályák komponensének maximumai, vagy a komponens négyzetének maximumai találhatóak. A Lorenz-rendszer bifurkációs diagramja $\beta \in [0.2, 0.8]$, $\rho = 10$, $\sigma = 28$ értékeknél a 2.2 ábrán szerepel.



2.2. ábra. A Lorentz-rendszer bifurkációs diagrammja $\beta \in [0.2, 0.8]$, $\rho = 10$, $\sigma = 28$ értékeknél az x idősor négyzeteinek maximumait ábrázolva. Az ábra „sima” részei adott β paraméter esetére (pl. $0.2 < \beta < 0.55$) periodikus mozgásnak felelnek meg, míg a szórt pontok a kaotikus tartományokat jelenítik meg (pl. $\beta \approx 0.6$).

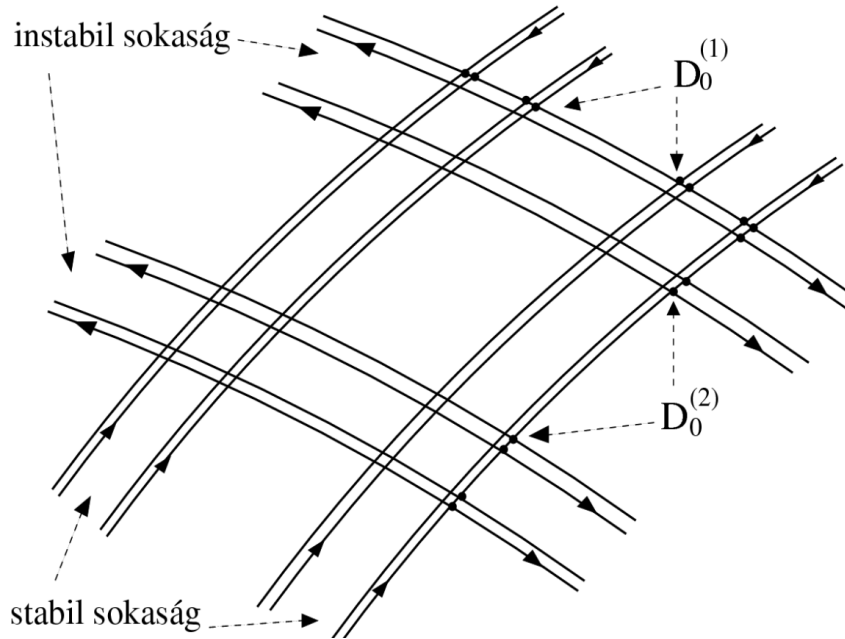
2.4.4. Kaotikus nyereghalmaz

A kaotikus nyereghalmaz a dinamikai rendszerek elméletének egy izgalmas fogalma. Ez egy olyan típusú kaotikus halmazra utal, amely egyszerre nem vonzó és instabil, vagyis a trajektóriák nem állnak meg benne, de ideiglenesen közel maradhatnak hozzá, mielőtt végül eltávolodnának. Szorosan kapcsolódik a tranziensek káosz fogalmához [15], ahol a kaotikus viselkedés véges ideig tart, mielőtt a rendszer más típusú viselkedésbe váltana át.

A kaotikus nyereghalmaz invariáns halmaz a fázistérben, ami azt jelenti, hogy ha egy trajektória eléri, akkor (elméletileg) ott is marad. Az instabilitása miatt azonban a nyereg közelében lévő trajektóriák idővel eltávolodnak tőle. Éppen ezért numerikusan csak egy közelítő alakzat határozható meg. Ellentétben egy attraktorról, amely a közeli trajektóriákat magához vonzza, a kaotikus nyereghalmaz nem vonzza a trajektóriákat. Ehelyett azok csak átmenetileg közelíthetők meg, mielőtt végül eltávolodnak tőle. Általánosan elmondható, hogy a nyereghalmazon zajló dinamika kaotikus, amelyet az érzékeny kezdőfeltétel-függőség, valamint összetett, nem periodikus viselkedés jellemez. A kaotikus nyereghalmaz jelenléte gyakran véges idejű kaotikus viselkedéshez vezet a rendszerben. A trajektóriák

véges ideig kaotikus mozgást mutathatnak, amikor közel kerülnek a nyereghez, mielőtt eltávolodnának tőle, és a fázistér egy másik részére jutnának (például egy attraktorhoz vagy a végtelenbe).

A kaotikus nyereghalmaz a fázistér fixpontjainak vagy instabil periodikus pályáinak stabil és instabil sokaságainak metszéspontjai. A stabil sokaság ideiglenesen a nyereghez vezeti a trajektóriákat, míg az instabil taszítja őket [15], hasonlóan egy instabil fixponthoz a fázistérben.



2.3. ábra. A kaotikus nyereghalmaz kettős fraktál szerkezete kétdimenziós fázistérben.
Forrás: [15].

3. fejezet

A napdinamó modell

Ebben a fejezetben bemutatom a Nap mágneses terét leíró egyszerű dinamikai rendszert [16], melynek segítségével munkám során a dinamikai rendszerek elméletében megismert fogalmakkal és módszerekkel tanulmányoztam a naptevékenységet befolyásoló mágneses dinamikát.

3.1. Bevezető a Nap belső mágneses mezejének dinamikájába

A Nap felszínén található sötét foltok számát már a tizenkilencedik század első felétől szisztematikusan megfigyelik és rögzítik. Jelenleg úgy gondoljuk, hogy a napfoltszám és a Nap belsejében fennálló mágneses dinamika állapota között erős kapcsolat áll fent, így ez a mérőszám egy jó alap a naptevékenység tanulmányozására.

A Nap belsejében a nagy méretű mágneses mezőt egy magnetohidrodinamikai dinamó gerjeszti, amely a plazmamozgások kinetikus energiájának egy részét mágneses energiává alakítja át. Ennek köszönhetően a Nap polaritása nagyjából 11 évente megcserélődik, így egy 22 éves ciklust létrehozva. Minden periódus során a mágneses aktivitás kétszer tetőzik, amikor a tachoklína rétegben (egy vékony réteg a külső konvekciós réteg alatt) jelenlévő fluxusáramlások felhajtóerő hatására feljönnek a felszínre, így napfoltok keletkeznek [17].

A köztudatban általánosan elfogadott, hogy a mágneses tér toroidális komponenséért felelős Ω -effektus a tachoklína rétegben játszódik le, viszont a poloidális irányért felelős α -effektust még sok bizonytalanság kíséri. Ennek a problémakörnek a kezelésére több módszert is használnak, mint például a 2.5D (két térbeli, és egy időbeli koordináta) dinamó modellek, melyeket rendszerint átlagtér közelítéssel (mean field theory) oldanak

meg. Ezekkel a megfigyelt jelenségek széles köre magyarázható, de bizonyos hatásokat elhanyagolnak ennek következtében csak a mező hat a részecskékre, fordítva nem

Egy másik módszerrel 3D magnetohidrodinamikai (MHD) szimulációkat végeznek a konvekciós zónában. Ennek során megoldják az összes MHD egyenletet, így jóval kevesebb közelítést alkalmaznak, viszont rendkívül számolásigényesek, ezért nehezebb használni őket.

A modellezési spektrum másik végén olyan oszcillátor modelleket találhatunk, amik a leegyszerűsített és közelített paraméterezései az eredeti MHD egyenleteknek [18, 16]. Ezekkel az alacsonydimenziós dinamó modellekkel (Low-Order Dynamo Model – LODM) a mágneses ciklus számos tulajdonsága magyarázható. Továbbá ezeket a legkönnyebb alkalmazni, mivel a 2.5D és 3D modellekkel ellentétben sokkal kevesebb a számolási igényük és a fázistér szerkezete is szemléletesen tanulmányozható. A munkám során és is ilyen LODM-et használtam.

Az mivel az LODM-ek szabadsági fokainak száma sokkal alacsonyabb, mint az eredeti rendszernek, sokszor ezt úgy kompenzálják, hogy az egyenletekben szereplő paramétereket változtatják. Ilyen például, amikor a napdinamikai aktivitásnak egy több perióduson keresztül tartó minimumát sztohasztikus szórással magyarázzák. Ennek fényében érdemes feltérképezni, hogy ez a dinamikai rendszer (és az ehhez hasonló alacsonydimenziós dinamikai rendszerek) hogyan viselkednek paraméterváltozás esetén. Ennek az első lépése, hogy megnézzük statikus paraméterek, illetve időben lassan változó paraméterek mellett. A TDK munkám során ezeknek a meghatározása az elsődleges célom.

3.2. LODM levezetése MHD egyenletekből

Ebben a fejezetben Passos és munkatársai által bemutatott módszer alapján mutatom be, miként kapjuk meg a vizsgált alacsonydimenziós oszcillátor modellt az MHD egyenletekből. [18]

Az alapvető egyenletek az MHD indukcióból és a Navier-Stokes egyenletekből jönnek, amiket egy Lorentz-erőért felelős taggal egészítünk ki. Az általános elv szerint találunk egy $\mathbf{U}$ áramlási sebességet, ami képes fennmaradni Ohmikus disszipációval szemben, és ebből határozzuk meg a $\mathbf{B}$ mágneses teret. Olyan modellt kell találni, hogy a belőlük kapott dinamika teljesítse a napciklusnál tapasztalt főbb tulajdonságokat:

- kb. 22 éves periódusidő

- $\pi/2$ fázistolás a toroidális és poloidális komponensek között
- antiszimmetrikus tulajdonságokkal rendelkeznek, ami azért kell hogy az egyenlítő alatti és feletti féltekékre szimmetrikus legyen
- a kapott egyenleteket lehet illeszteni a napfoltokból mért kísérleti adatokra.

Az MHD indukciós egyenlet:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B})$$

Ahol η a mágneses tér diffúziójáért felelős tag, és α a korábban leírt kapcsolat a toroidális és poloidális mágneses tér között.

Ezután feltételezzük, hogy B, U felírható poloidális és toroidális komponensek összegeként.

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla \times (A_p(r, \theta, t) \mathbf{e}_\phi) + B_\phi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{U}(r, \theta) = \mathbf{u}_p(r, \theta) + \tilde{r} \Omega(r, \theta) \mathbf{e}_\phi$$

Ahol $\tilde{r} = r \sin(\theta)$, Ω a nap szögsebessége, $\mathbf{u}_p$ a poloidális áramlás sebessége. Az új egyenleteket behelyettesítve az MHD egyenletbe ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_p}{\partial t} &= \eta (\nabla^2 - \tilde{r}^{-2}) A_p - \tilde{r}^{-1} \mathbf{u}_p \cdot \nabla (\tilde{r} A_p) + \alpha B_\phi, \\ \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \eta (\nabla^2 - \tilde{r}^{-2}) B_\phi - \tilde{r} \mathbf{u}_p \cdot \nabla (\tilde{r}^{-1} B_\phi) + \\ &\quad + \tilde{r} [\nabla \times (A_p \mathbf{e}_\phi)] \cdot \nabla \Omega - \Gamma(B_\phi) B_\phi. \end{aligned}$$

Ebben benne van egy extra tag, ami a mágneses felhajtóerőért felelős.

A kapott egyenleteket egy kombinált *van der Pol-Duffing* oszcillátor egyenletté alakíthatjuk, melynek során ∇ -t egy olyan taggal közelítjük, ami vezető rendben $\frac{1}{l_0}$ -al arányos. Ezeknek megfelelően:

$$\frac{dB_\phi}{dt} = c_1 B_\phi + c_2 A_p - c_3 B_\phi^3, \quad \frac{dA_p}{dt} = c_1 A_p + \alpha B_\phi.$$

Itt $\mathbf{u}_p$ már nincs benne expliciten az egyenletekben, hanem a c_1 paraméter tartalmazza, mint v_p átlagos áramlási sebesség. Ennél a pontnál rakjuk bele a Lorentz-erő visszacsatolását az egyenletekbe, mégpedig $v_p(t) = v_0 + v(t)$ alakban, ahol v_0 a Nap forgásából jövő

átlagos sebesség és $v(t)$ az ehhez képesti eltérés. Így a végső mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned}\frac{dv(t)}{dt} &= aAB - bv(t) \\ \frac{dB_\phi}{dt} &= \left(c_1 - \frac{v_0 + v(t)}{l_0}\right) B_\phi + c_2 A_p - c_3 B_\phi^3 \\ \frac{dA_p}{dt} &= \left(c_1 - \frac{v_0 + v(t)}{l_0}\right) A_p + \alpha B_\phi\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ahol az állandók:

- a : Lorentz-erőért felelős paraméter. Továbbiakban az értéke: $a \in [0; 0.3]$
- b : A részecskékre ható közegellenállásért felelős állandó. A továbbiakban az értéke: $b \in [0; 0.5]$
- v_0 : Az átlagos áramlási sebesség értéke. A továbbiakban az értéke: $v_0 \in [0.1, 0.15]$
- α A toroidálisból mágneses mezőből poloidálist generáló folyamatból kapott állandó. A továbbiakban az értéke: $\alpha = -0.1$
- c_1, c_2, c_3 Az MHD egyenletek egyszerűsítéséből kapott állandók. A továbbiakban az értékeik rendre [16] alapján: $-0.01, 0.95, 0.002$
- l_0 egy a Napra jellemző karakterisztikus távolság. A továbbiakban az értéke: $l_0 = 1$

Az állandók értékét úgy vettem fel, hogy megegyezzenek az eredeti cikkben [16] szereplő értékekkel. A dolgozat jelenlegi formájában és a kutatásom irányvonalával összhangban egyelőre nem tekintettem feladatommak a parciális differenciálegyenlet-rendszerből teljes részletességgel levezetni, és ezáltal a közelítés helyességét ellenőrizni a LODM-modellre. Elfogadtam viszont [16] szerzői által a napfoltok számából kapott adatokra vonatkozó illesztéseket, melyekben a görbe nem tökéletes ugyan, de a hiba mértéke kicsi. Ennek fényében felteszem, hogy a (3.1) egyenletekkel felírt modell releváns fizikai tartalommal bír. A fizikai tartalom érvényességéről [19] ír bővebben.

3.3. Numerikus szimulációk statikus paraméterek mellett

Ebben a fejezetben az általam írt Python kód segítségével reprodukálom [16]-ben megadott alacsonydimenziós dinamómodell mágneses térre vonatkozó fázistér szerkezetét, és

új eredményként tárgyalom, hogy bizonyos paraméterértékek mellett több attraktor is jellemzi a rendszer dinamikai viselkedését.

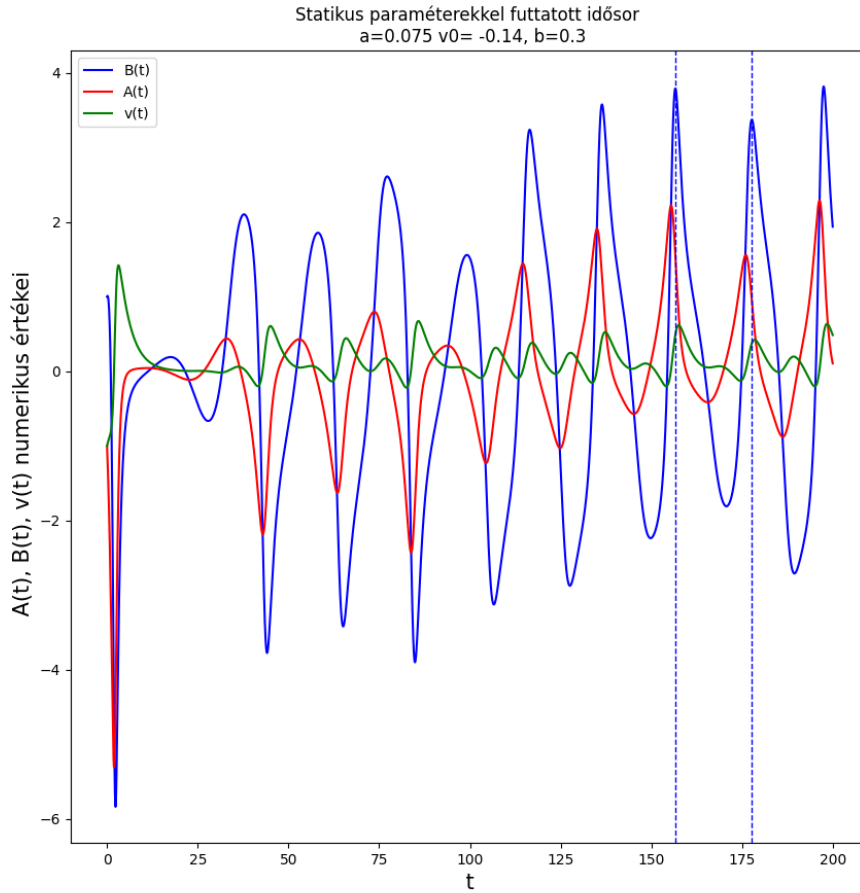
3.3.1. Az idősor meghatározása

Most, hogy meghatároztuk a modellt leíró differenciálegyenleteket, ezek megoldását numerikusan vizsgáljuk. Ezt, ahogy fentebb említettem, Python programnyelvben tettem meg. Mivel a differenciálegyenlet kiszámítása közben nem tudtam minden lépést pontosan követni nem tudom megmondani, hogy a program során kapott $B = 1$ érték a valóságban mekkora, és milyen mágneses térnek felel meg. A célom nem is konkrétan a nap mágneses terének meghatározása, hanem a dinamika leírása. Ugyanez elmondható az A és v értékekre vonatkozóan is. A differenciálegyenlet megoldására a `scipy.integrate.odeint` metódust használtam. Ennek a függvénynek három argumentumot adtam meg:

- Kezdőfeltételek: a kutatásom elején a kezdőfeltétel mindig az $(1,1,1)$ volt, de később áttértem a véletlenszerű kezdőfeltételre.
- A differenciálegyenlet alakja
- A idősor, amire számoljon. A korábbiakban években számoltunk, a programozási környezetben 1 év 1 időegységnek fog megfelelni. Így a periódusidő 22 kell legyen, ezt nemsokára leellenőrizzük.

Az lépésközt $1/20 - 1/100$ között változtattam. Így periódusonként legalább 400 pont van, ami elegendően pontos számolás.

A kapott megoldásokat `matplotlib.pyplot` programcsomaggal ábrázoltam.

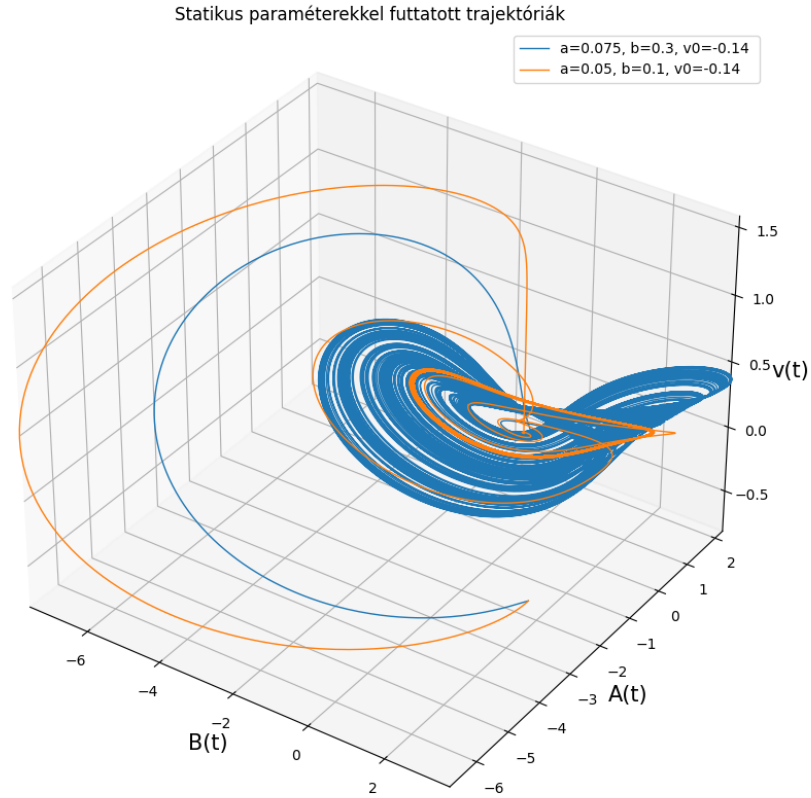


3.1. ábra. Adott a , b , v_0 paraméterekre véletlen kezdőfeltételekből induló megoldások $B(t)$, $A(t)$, $v(t)$, rendre kék, piros és zöld görbék. Nagyjából 120 időegységnyi tranziens szakasz után a trajektória eléri az attraktort.

A 3.1 ábráról leolvasható, hogy a pálya a választott kezdőfeltételből pár periódus alatt már közel kerül az attraktorhoz, és ezeknél a paramétereknél kaotikus a mozgás. A két függőleges vonal két egymást követő maximumot jelöl. A köztük eltelt idő: $\Delta t = 21.18$, ami közel van az általunk elvárt értékhez, a modell ilyen tekintetben megállja a helyét.

3.3.2. A fázistérbeli szerkezet (attraktorok, Poincaré metszetek)

A (3.1) differenciálegyenletekből adódóan a fázistér háromdimenziós, B, A, v tengelyekkel. Nézzünk meg egy kaotikus, és egy periodikus mozgást ebben a koordináta-rendszerben. A paraméterek a következők: kaotikus (kék): $a = 0.075, b = 0.3, v = -0.14$ és periodikus (sárga): $a = 0.05, b = 0.1, v = -0.14$

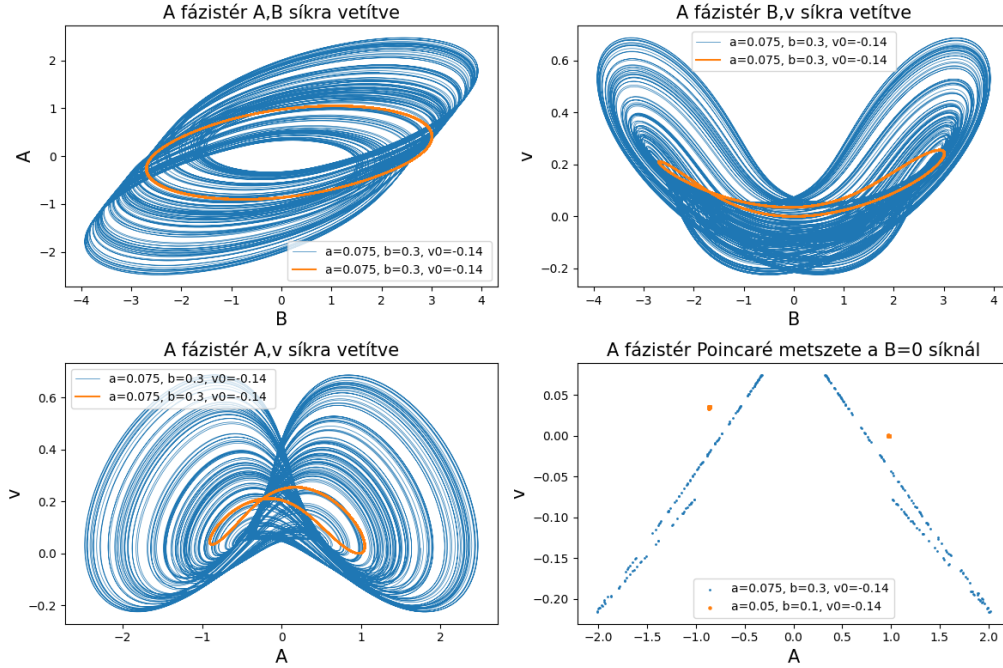


3.2. ábra. A megadott paramétereknek megfelelő kétféles mozgástípus (mágneses mező dinamika). Érdekes észrevenni, hogy a periodikus megoldás előtt a trajektória nagy v értékekről közelíti a $B - A$ síkon az origót, majd gyorsan ráhúzódik az 1-es ciklusú periodikus pályára.

Az ábrán jellegzetesen szálas, fraktál szerkezetű alakzat (kék) a kaotikus attraktor, a zárt görbe (sárga) pedig a periodikus pálya.

Jól megfigyelhető, hogy a periodikus megoldás esetén a kezdőfeltételből nagy íven elindulnak a trajektóriák, majd a $(0, 0, v)$ egyenes mentén bemennek az origó közelébe és onnan spirál alakban rásimulnak az attraktorra. Ez azért van, mert a fázistérben fixpont az origó, $(0, 0, 0)$, és stabil sokaság a $(0, 0, v)$ egyenes. A spirálalakból pedig arra lehet következtetni, hogy az origó környékén a másik két sajátérték nem valós. Ez a mozgásforma tipikusnak mondható bármilyen futtatásnál. Ha nem az attraktor közeléből, (vagy valamelyik stabil sokaságának közeléből) indítjuk a trajektóriát, akkor mindig bemegy az origó közelébe, és csak utána tér rá az attraktorra. Valójában a Grand minima jelenségek mögött is ez áll.

Ezután vetítsük le a trajektóriát egy előre definiált síkra, és nézzük meg az így kapott Poincaré-metszetet. A hosszú távú viselkedés korrekt tárgyalása érdekében levágtam az idősor első feléről a tranziens szakaszt. Ekkor csak az attraktorra és annak Poincaré-metszetére voltam kíváncsi.



3.3. ábra. A 3.2 ábra pályáinak vetületei a háromdimenziós fázistérben, valamint a $B = 0$ síkra vett Poincaré-metszet (jobb alsó panel).

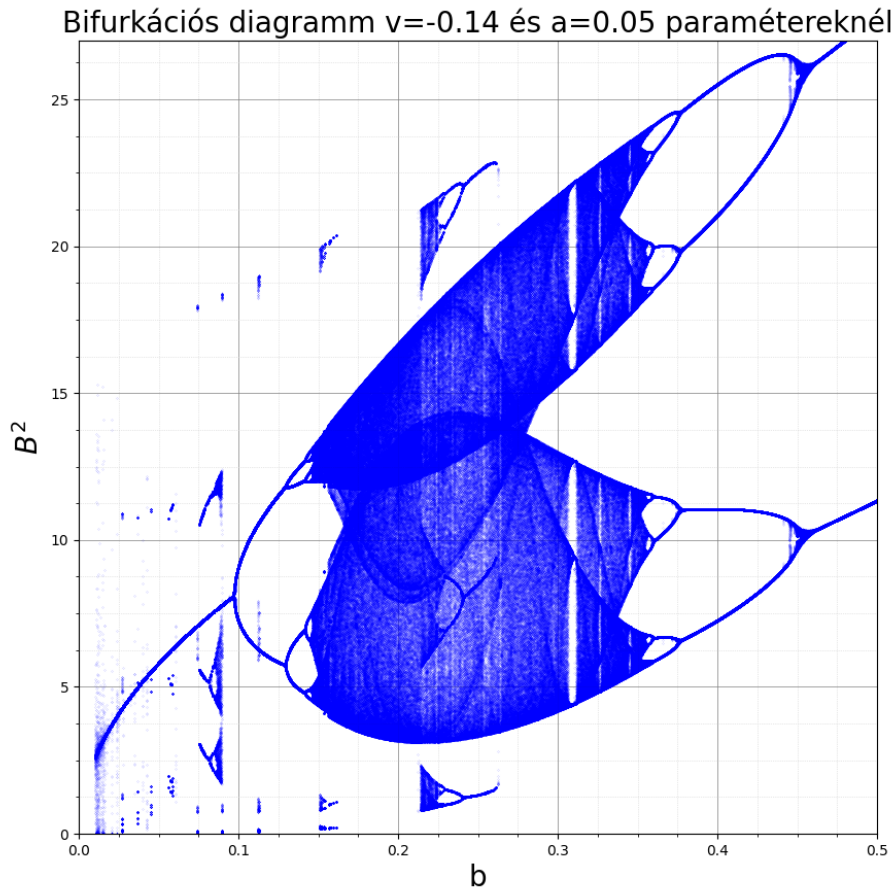
A periodikus pályán megfigyelhető, hogy a mozgás nem szimmetrikus, tehát ha tükröznénk a $B = 0$, vagy $A = 0$ síkra akkor nem kapnánk vissza az eredeti attraktort. Az ilyen pályákat nemsokára a bifurkációs diagramon úgy fogjuk azonosítani, mint amiben már 1 bifurkáció megvolt.

Itt megemlítem, hogy a differenciálegyenlet alakjából következik, hogy ha egy $(B(t), A(t), v(t))$ trajektória megoldás, akkor a $(-B(t), -A(t), v(t))$ is megoldás lesz. Emiatt minden paraméter mellett két attraktor van jelen a fázistérben, amik egymás tükörképei a $B = 0$, vagy $A = 0$ síkra (3.3 ábra).

3.3.3. Bifurkációs diagramok

A dinamika áttekintéséhez a legbeszédesebb ábra a bifurkációs diagram. A következőkben a diagramok elkészítése során a változtatott paraméter az a illetve b lesz. Kezdeti lépésként meghatározom az intervallumot, amiben változtatom a paramétert, tipikusan: $a \in [0, 0.3]$ és $b \in [0, 0.6]$. Ebben az intervallumban felveszek minél több értéket, és mind-

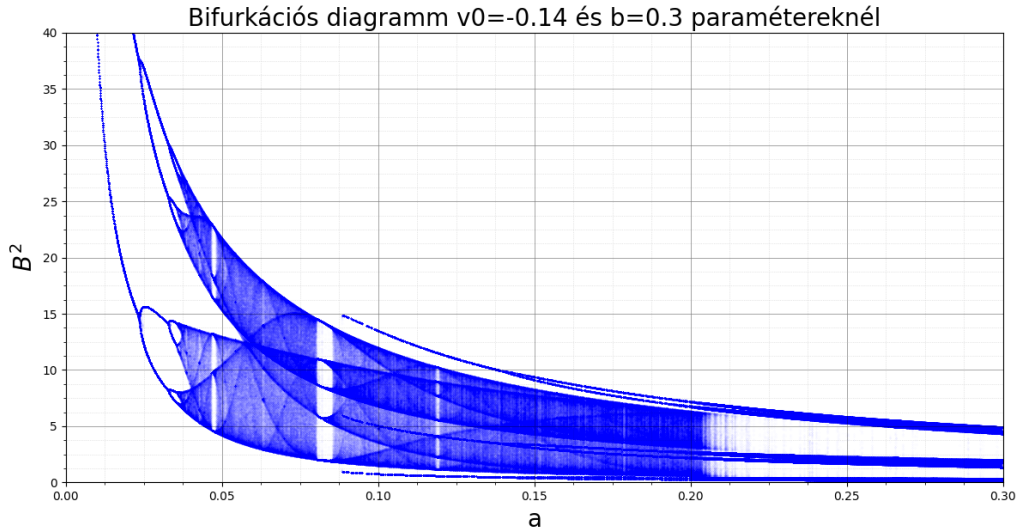
egyik értékre futtatok több véletlenszerű kezdőfeltételből induló trajektóriákat. Utána a trajektóriák első tranziens szakaszát levágom, ez tipikusan $t = 500$ -nál történik, azaz kb. 25 periódus után. Ezután veszem a $B^2(t)$ idősort, és megkeresem a maximumainak az értékeit, a végső ábrán ezeket fogom a paraméter függvényében ábrázolni. Azért emeltem négyzetre B -t, mert ha csak a maximumokat keresném, akkor az előbb említett szimmetrikusság miatt ugyanazon mozgásformához két trajektória tartozik, és emiatt ami az egyikben maximum, a másikban minimumként jelenne meg. Ha négyzetre emelünk, akkor ez a probléma megszűnik. Nézzünk meg két ilyen bifurkációs diagramot.



3.4. ábra. A (3.1) rendszer bifurkációs diagramja változó b paraméter esetén. Kaotikus viselkedés közepes b értékekre $0.15 < b < 0.35$ figyelhető meg.

A 3.4 ábráról le tudjuk olvasni, hogy a b paramétert növelve először szimpla 1-es ciklust látunk ($0 < b < 0.1$), ami aztán perióduskettőző bifurkációk sorozatán szépen átmegy kaotikus mozgásba ($b \approx 0.15$), majd egy másik perióduskettőző bifurkáción keresztül vissza 2-es ciklusba ($b \approx 0.45$). Ha b értékét még tovább növeltük volna, akkor az utolsó két ág

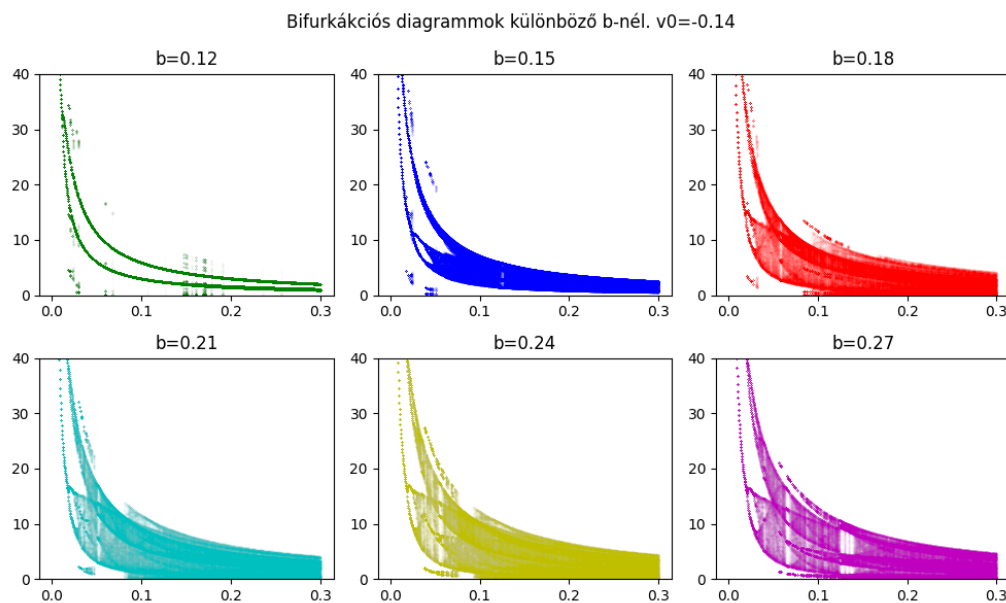
is összeér ($b > 0.5$). Érdekes megfigyelni, hogy a fő bifurkációs ág mellett néhol felbukkannak kisebb 3-as ciklusok, amik maguk is átmennek egy perióduskettőző bifurkáción, majd hirtelen megszűnnek. Ezek egy teljesen másik attraktorhoz tartoznak, ilyenkor bizonyos kezdőfeltételből az egyik attraktorra, más kezdőfeltételek esetén a másik attraktorra húzódnak rá a trajektóriák, és utána mindvégig ott is maradnak.



3.5. ábra. Az előző 3.4 ábrához hasonló bifurkációs diagram. Itt azonban az a paraméter függvényében van ábrázolva B^2 hosszú távú időfejlődése.

A 3.5 ábrán látható esetben az a paramétert változtattam és itt is elmondható, hogy a bifurkáció két maradék szára össze fog érni ($a=0$ -ra). Érdekes megfigyelni, hogy az $a = 0.08$ körüli periodikus ablak után megjelenik két új ág, ami szintén egy 3-as ciklus, és ez is teljesen különböző attraktor a főágban lévőthöz. Ez a 3-as ciklus $a = 0.21$ után már domináns lesz, az eredeti attraktor eltűnik, továbbá ha belenagyítunk, látható, hogy ez a hármas ciklus is végigmegy perióduskettőző bifurkációkon és ugyanúgy megjelennek periodikus ablakok, így ez is felveszi a kaotikus attraktorok tulajdonságait.

Mivel eddig a két paraméter változását két külön ábrán követtük nyomon, érdemes lehet valahogy ezeket egyszerre ábrázolni. Erre a legjobb módszer, amit találtam a következő, 3.6 ábra. Mindegyik bifurkációs diagramnak az egyik tengelyén a szerepel mint változtatott paraméter, a másik tengelyén pedig az eddig használt B^2 maximumok.

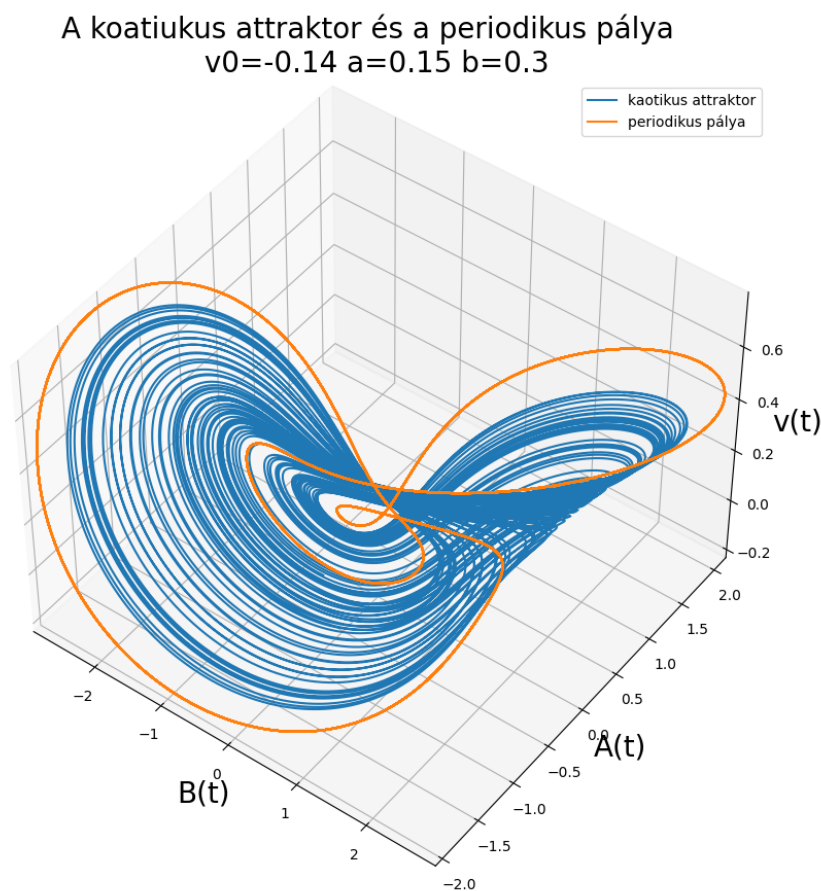


3.6. ábra. $B^2 - a$ bifurkációs diagramok szemléltetése különböző b értékei esetében.

Az ábrán érdemes megfigyelni, hogy a fő ág melletti 3-as ciklusok mennyire változatosak tudnak lenni. A $b = 0.27$ -es ábrában van egy ablak $a = 0.13$ környékén. Ahogyan b -t növeljük úgy nő meg ennek az ablaknak a mérete, és végül eljutunk a 3.5-ös ábrába ($b = 0.3$), ahol már nem is ablakként jelenik meg, hanem egy határként ($a \approx 0.2$). A hosszú távú dinamika ilyen vizsgálata rámutat, hogy a mágneses erővonalak időbeli változását tanulmányozva el kell fogadjuk, hogy adott fizikai paraméterekre a kezdőfeltételekre érzékeny megvalósulást kapunk. Azaz, több attraktor esetén a fázisteret ezeknek megfelelően több különböző részhalmazzal lehet jellemezni attól függően, hogy melyik tartományból, melyik attraktor érhető el.

3.3.4. A két attraktor vonzási tartománya

Vizsgáljuk meg kicsit részletesebben a problémát, amikor két attraktor van jelen. Ehhez kiválasztjuk az $a = 0.15, b = 0.3$ paramétereket (lásd a 3.5 ábra szerkezetét). Nézzük meg, hogy néz ki a két attraktor a háromdimenziós fázistérben.

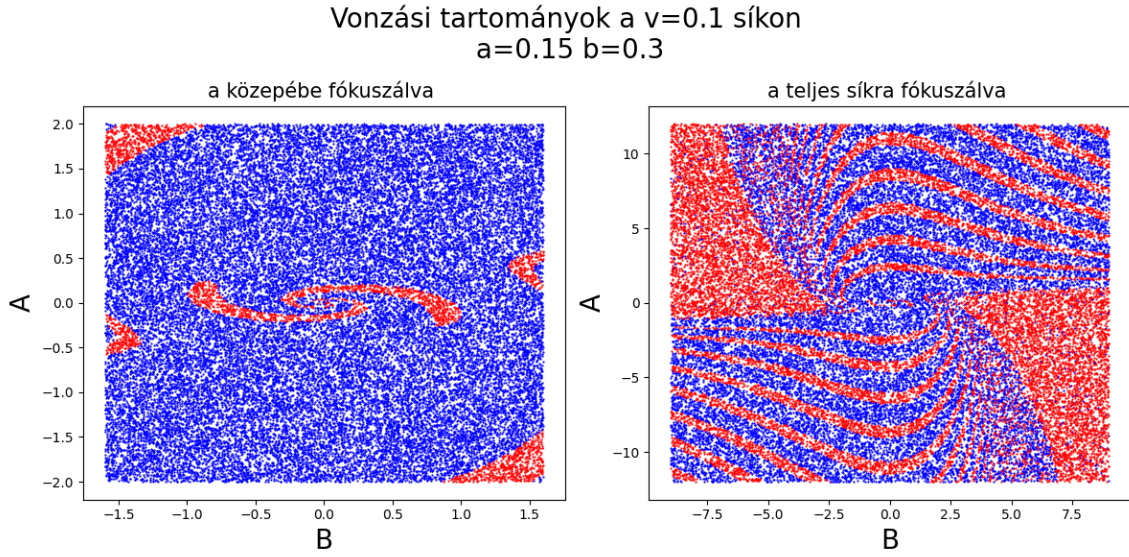


3.7. ábra. Két különböző attraktor jelenléte adott paraméter esetén a (3.1) rendszer háromdimenziós fázisterében.

A 3.7 ábrán a feltüntetett paraméter értékek mellett két különböző színnel jelöltem a két attraktort. Első ránézésre nagyon hasonló az alakjuk, olyan mintha a periodikus pálya (narancs) rajta lenne a kaotikus attraktoron (kék). Viszont van egy jól észrevehető nem elhanyagolható méretű rés a kettő között. Ebben a résbe beágyazva várjuk a két vonzási tartomány határát is. Arra is kíváncsiak lehetünk, hogy ha véletlenszerű kezdőfeltétellel elindítunk egy trajektóriát, akkor mekkora eséllyel választja az egyik vagy másik mozgástípust. Fontos azonban megjegyezni, hogy ez függhet attól, miként választjuk meg a véletlenszerű kezdőfeltételt.

Ennek a vizsgálatára lerögzítettem a kezdőfeltételeket a $v = 0.1$ adott értékre, ahol 0.1 egy általam választott paraméter. A $B - A$ síkon ezzel a feltétellel futtatok sok trajektóriát, és megnézem, hogy melyik attraktorba fejlődnek. Amelyik kezdőfeltételből a periodikusba tartanak a pályák, azt pirossal, a többit kézzel színezem ki. Az így kapott

vonzási tartományok $v = 0.1$ érték mellett a 3.8 ábrán láthatók.



3.8. ábra. Kezdőfeltételtől függő hosszú távú viselkedés. A $B - A$ sík piros tartományai a periodikus pályához, míg a kék részek a kaotikus attraktorhoz tartanak.

A 3.5 bifurkációs diagramról leolvasható, hogy $a > 0.21$ esetén már a periodikus ciklus lesz domináns, $a < 0.1$ -nél pedig a kaotikus attraktor. Ebből arra lehet következtetni, hogy a növelésével a fenti ábrán a piros rész területe növekszik a $B - A$ síkon, 0.21-nél pedig majdnem teljesen lefedi azt. Ennek fordítottja elmondható a csökkentésével is.

4. fejezet

Eredmények

4.1. Az időben folytonosan változó paraméter

Ebben a fejezetben ott fogunk eltérni a korábban alkalmazott metódusoktól, hogy a paraméter időben változik, ezért szigorú értelemben nem lesznek autonómok a (3.1) LODM differenciálegyenletek. Mivel a paraméter csak lassan, folytonosan változik, ezért még mindig releváns lesz a (B, A, v) fázistér. A célom tanulmányozni, hogy a változó paraméter trajektóriái mennyire tudják lekövetni az adott pillanathoz tartozó attraktort.

A paraméter változtatására nézzük meg a legegyszerűbb esetet, amikor lineárisan változik a paraméter. Legyen a p a változó paraméter (a későbbiekben az a , vagy b rendszerparaméter). Változzon t_1 és t_2 között, p_1 -ről p_2 -re. $t = 0$ -tól t_1 -ig és t_1 után pedig legyen állandó.

$$p(t) = \begin{cases} p_1 & \text{ha } t < t_1 \\ p_1 + (p_2 - p_1) \frac{t-t_1}{t_2-t_1} & \text{ha } t_1 < t < t_2 \\ p_2 & \text{ha } t > t_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

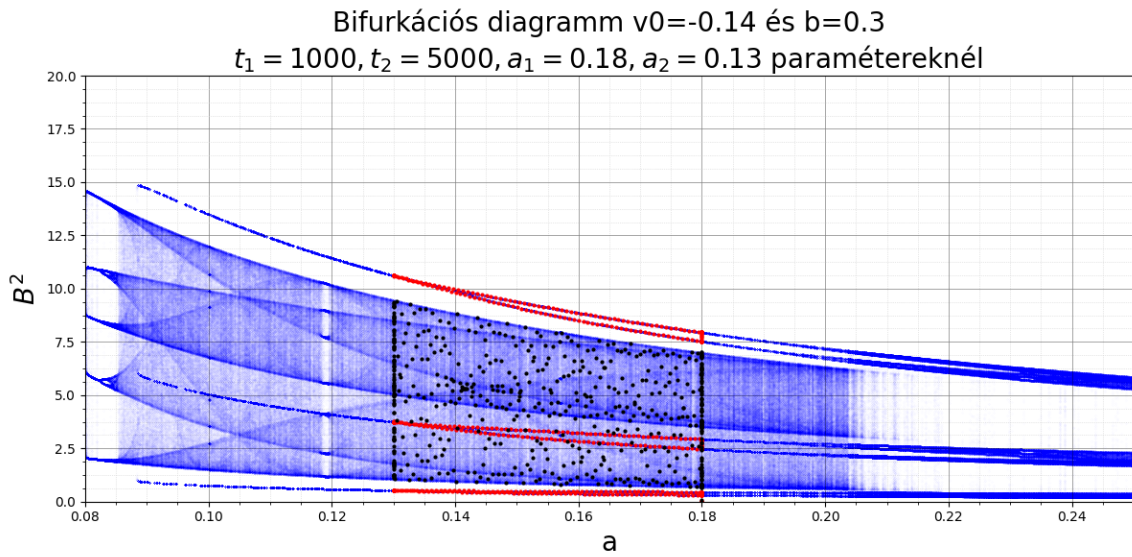
A két konstans rész közül az elsőre azért van szükség, hogy a kezdőfeltételből a trajektória rásimuljon az attraktorra, a másodikra pedig azért, hogy megnézzük a paraméterváltoztatás hatására a rendszer ugyanúgy viselkedik-e, mintha egy véletlenszerű pontból indítottuk volna.

Hogyan tudjuk nyomon követni, hogy hol jár a trajektória a fázistérben, és hogyan viszonyul az attraktorokhoz? Először is mintavételezni kell a trajektóriát, ehhez $B^2(t)$ idősor maximumait fogom megkeresni, így kapok diszkrét $B^2(t_i)$ és t_i értékeket. Ezeket úgy tudjuk az attraktorokhoz hasonlítani, hogy ábrázoljuk a bifurkációs diagramon a $p(t_i, B^2(t_i))$ pontokat. Eszerint p_1 és p_2 értékénél sok adatpontot fogunk felvenni, p többi

értékére pedig maximum 1-et.

4.2. Változó paraméter két attraktor mellett

Induljunk ki a 3.5-ös ábrán látható mozgásokból, legyen a változó paraméterünk az a . Legyenek továbbá $t_1 = 1000$, $t_2 = 5000$, $t_{\max} = 6000$, $a_1 = 0.18$, $a_2 = 0.13$. A fent leírt módszer szerint a bifurkációs diagram két különböző kezdőfeltételből indított trajektóriára a 4.1 ábrán látható.

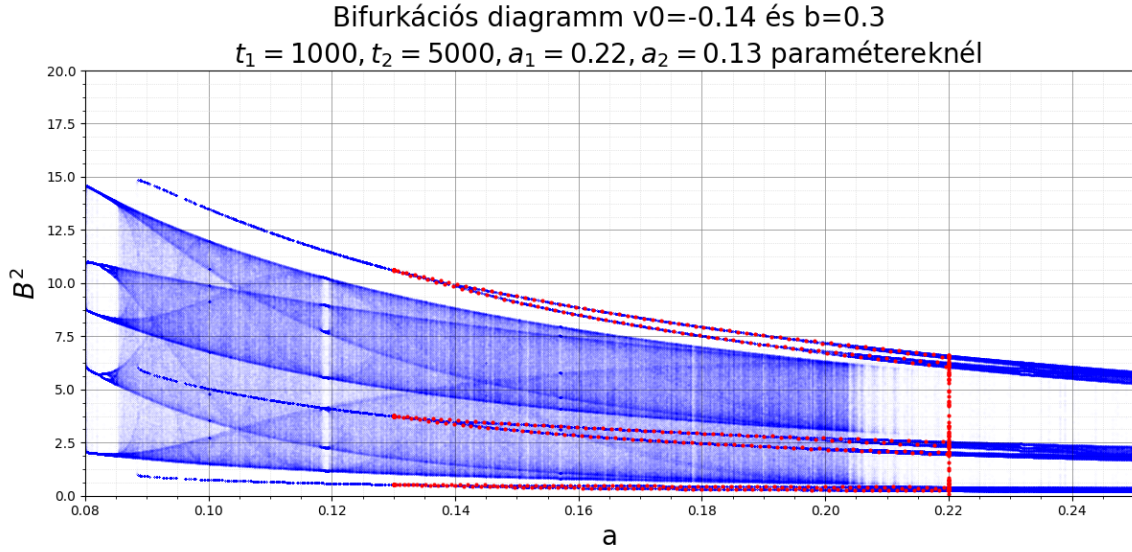


4.1. ábra. Az a paraméter jobbról balra csökken t_1 és t_2 időpontok között. A kezdeti tranziens szakasz alatt a pályák „megtalálják” saját attraktorukat (piros - periodikus pálya, fekete - kaotikus), majd a paraméter csúszása során mindvégig rajta is maradnak.

Azt tapasztaljuk – a várakozásnak megfelelően, hogy amelyik attraktorra ráment a trajektória a konstans paraméternél ($a_1 = 0.18$), utána végig azon maradt.

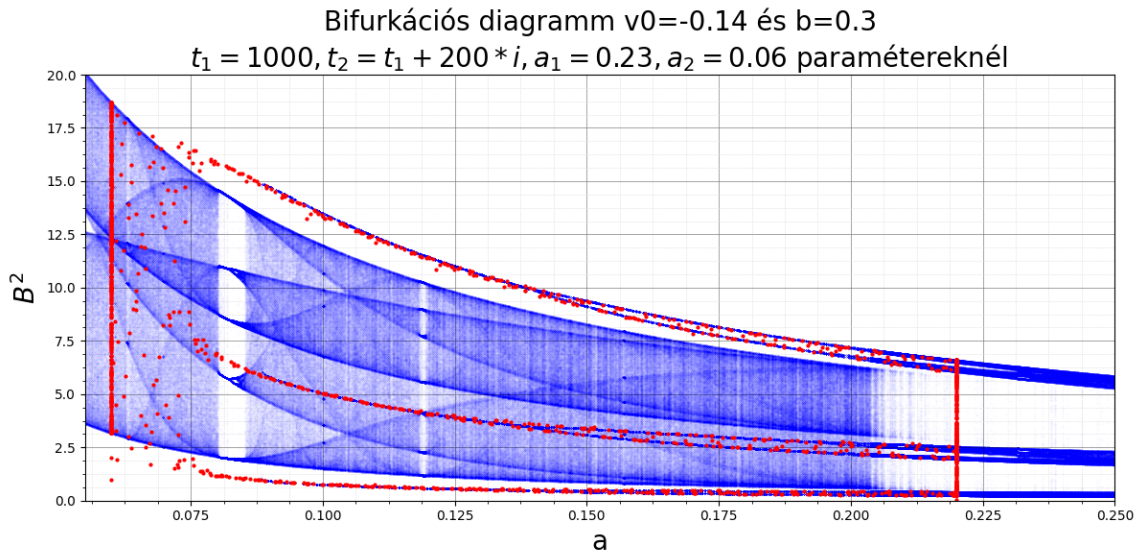
A következőkben módosítsunk egy kicsit, legyen $a_1 = 0.22$, azaz kissé még jobbra indulunk, mint az előző esetben. Ekkor a trajektória ugyanúgy végig marad a saját attraktorán, viszont a kezdő paraméter miatt a kaotikus attraktorra semmilyen (vagy csak elhanyagolhatóan kevés) kezdőfeltételből nem talál rá. Így viszont mindig a periodikus pályán fog mozogni

Ennek az a nagyon fontos következménye, hogy bizonyos esetekben a változó paraméter során a trajektóriák eloszlása drasztikusan változik, és nem követi az állandó paraméterek esetén látott invarianciát (lásd ?? fejezet).



4.2. ábra. Amennyiben olyan paraméterértékről ($a = 0.22$) indítjuk a változást, amelyhez csak egy attraktor (periodikus pálya) tartozik, a mozgás ezen a halmazon játszódik le, és nem érintkezik az egyébként $a \approx 0.2$ környékén megjelenő kaotikus attraktorról.

Ezután nézzük meg, hogy mi történik, hogyha az a paraméterben végigmegyünk a periodikus pályán. Legyen a végső érték $a_2 = 0.06$, és a nagyobb diverzitás végett most egyszerre 10 trajektóriát indítottam, mindegyikre külön $t_2 = t_1 + 200 * i$ értéket megadva, ezzel a paraméter változás ütemét módosítva. Azaz jóval gyorsabban érjük el a kívánt végső értéket, $a_2 = 0.06$ (4.3 ábra).

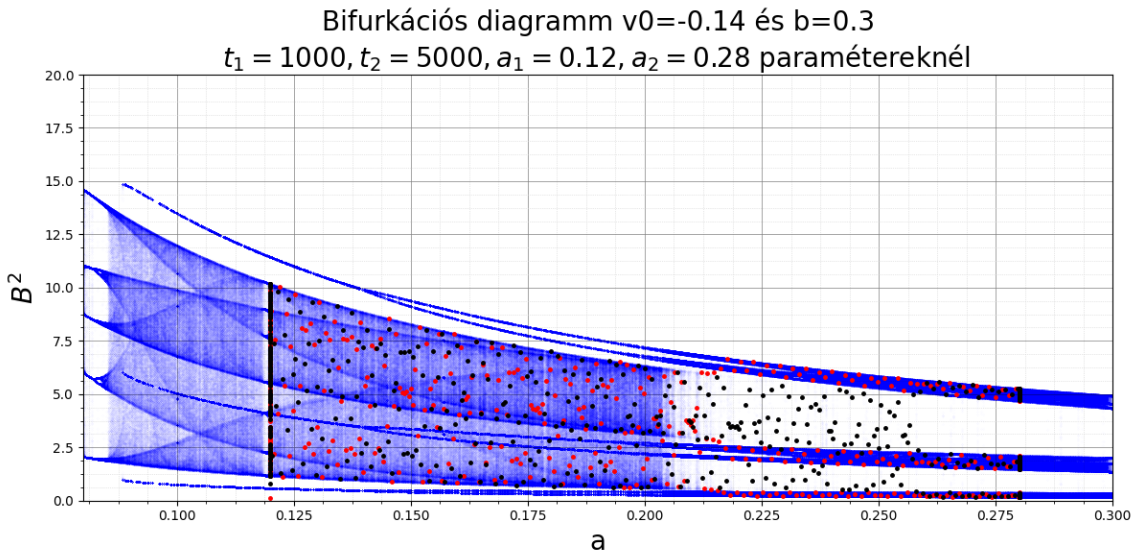


4.3. ábra. Egy 10 elemű sokaság érdekes tulajdonságot fed fel a fázistérben. Az a paraméter csökkenésének következtében a trajektóriák követik a periodikus pályának megfelelő attraktort. Sőt miután az megszűnik ($a \approx 0.87$), akkor is folytatódik a periodikus mozgás egy bizonyos ideig ($a \approx 0.075$) miután a sokaság elemei ráhúzódnak az abban a paraméter tartományban jelen lévő kaotikus attraktorra.

Azt tapasztaljuk, hogy a trajektóriák követik a periodikus pályát még akkor is, ha az a bifurkációs diagramon már nem domináns, vagy teljesen eltűnt ($a < 0.09$). Ezzel a trajektóriák mintha egy „fantom” pályát követnének. Erről a pályáról viszont nagyjából $a = 0.79$ -nél letérnek, és megtalálják a kaotikus attraktort, ami ekkorra már csak az egyetlen attraktora a rendszernek.

Ennél az esetnél már nem csak az eloszlás változik az állandó paraméterekhez képest, hanem egy olyan instabilnak mondható pályán maradnak rajta a trajektóriák, amivel állandó paraméterek mellett nem találkoztunk. Itt még előfordulhatna, hogy az a pálya stabil, csak nagyon kicsi a vonzási tartománya, ezért nehéz beletalálni. Viszont ha $a_2 = 0.83$, akkor azt tapasztaljuk, hogy a trajektóriák csak addig maradnak rajta a fantom pályán, amíg a paraméter változik. Amint megáll a paraméter, a trajektóriák is átmennek az állandó paramétereknél kapott attraktorra. Ebből következik, hogy a trajektóriák valóban egy instabil pályán maradnak rajta. Ezzel a fantom jelenséggel később is fogunk találkozni.

Még egy esetet nem néztünk meg, mégpedig amikor a növelésével (balról jobbra haladunk a bifurkációs diagramon) az egyszerre jelenlévő két attraktorból átmegyünk a megmaradt egyre. Legyen $a_1 = 0.12$, $a_2 = 0.28$, $t_1 = 1000$, $t_2 = 5000$.



4.4. ábra. A kaotikus attraktorról a periodikus pályára is megfigyelhető átmenet a paraméterváltozás következtében. Az ábrán különböző színnel (piros, fekete) jelölt pályák láthatóan különböző idő elteltével találhatók rá a 3-as ciklust mutató periodikus pályát jelentő sávokra, miután megszűnik a kaotikus attraktor $a \approx 0.205$ környékén.

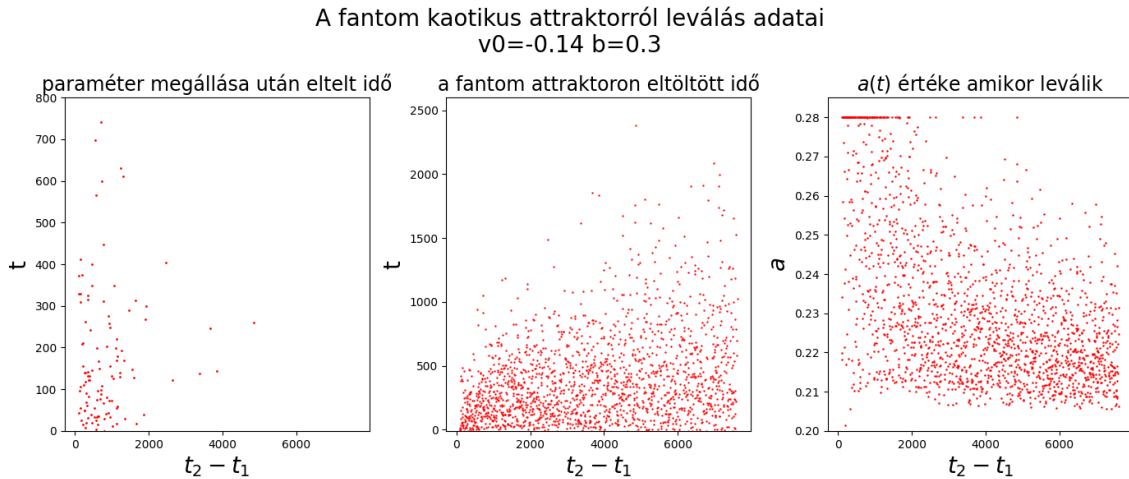
Itt megint hasonló jelenséget látunk, mint a 4.3 ábrán. A trajektóriák mintha egy fantom attraktort követnének, jelen esetben ez kaotikus. Különbség viszont az, hogy az

előzővel ellentétben most nagyon változatos, hogy mikor térnek át a fantom attraktorról a valós periodikus pályára, $a > 0.205$.

A 4.3 ábrán látható események számszerűsítésének céljából vizsgáltam a következő mennyiségeket:

- Ha a trajektória a fantom attraktoron végigment az $a = a_2$ értékig, akkor utána mennyi idő kellett neki, hogy áttérjen a valós attraktorra.
- Mennyi ideig volt rajta a fantom attraktoron? Itt a fantom attraktor határát $a = 0.21$ -nél vettem fel.
- Mekkora volt a értéke, amikor a trajektória a fantom attraktorról átment a rendes attraktorra.

A leválás pillanatának megtalálásához illesztettem egy görbét a bifurkációs diagramon az eredeti attraktor felső sávja alá. Amikor a trajektória $B^2(a(t))$ -e nagyobb lesz, mint ez az illesztett függvény, annál a paraméterértéknél veszem úgy, hogy a fantom attraktorról áttért a rendesre. Ezután több trajektóriát futtattam különböző t_2 időkre, azaz különböző gyorsaságú paraméter változási ütemmel. Azokat a trajektóriákat, amelyek rögtön átmentek a periodikus pályára, kivettem a vizsgálatból. A kapott eredményeket a 4.5 ábra mutatja.

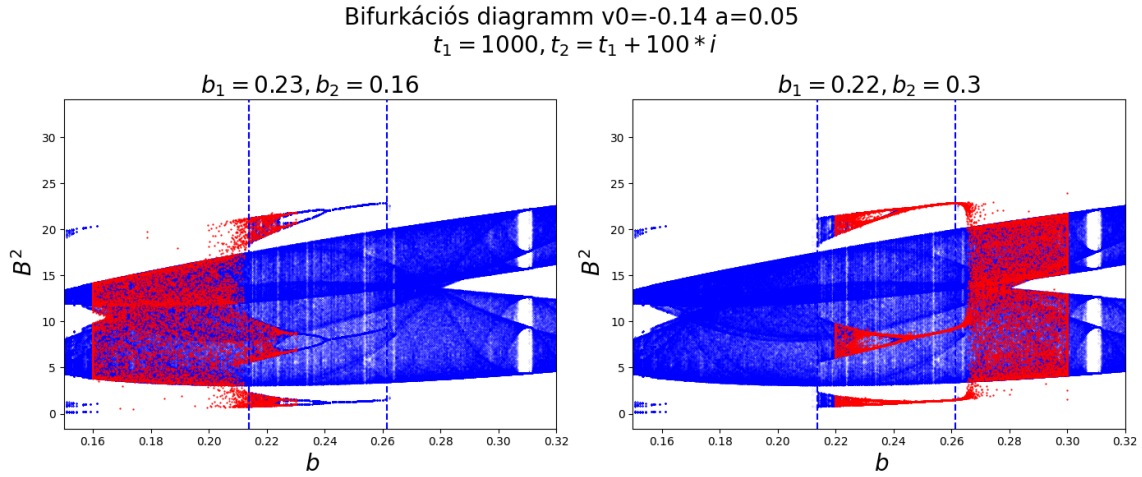


4.5. ábra. Növekvő a paraméter esetén az attraktorról való leválások időpontjainak statisztikája.

Ez alapján azt mondhatjuk el, hogy ha a gyorsan változik, akkor a trajektória tovább fejlődik a fantom attraktoron, viszont összesen kevesebb időt fog eltölteni rajta. Ezenkívül nincs egyértelmű mintázat az adatokban. Ebből az következik, hogy a leválást nem az

adott paraméterénél érzékelt dinamikának valamilyen különleges tulajdonsága okozza, hanem csak egyszerűen valószínűségi fogalmakkal írható le.

Ezután nézzük meg azt az esetet, amikor a b paramétert változtatom, 4.6 ábra. Lényegében ugyanazt csináljuk, mint a korábbi esetekben. Két ábrát készítettem, mindkettőnél 80 trajektóriát indítottam $t_1 = 1000, t_2 = t_1 + 100 * i$. A függőleges vonalakat a statikus paramétereknél az attraktor határához húztam be.



4.6. ábra. Bifurkáció változó paraméterrel, $v_0 = 0.14, a = 0.05$, a bal oldali ábrán: $b_1 = 0.23, b_2 = 0.16$, a jobb oldali ábrán: $b_1 = 0.22, b_2 = 0.3$

Itt azt tapasztaljuk, hogy a fantom attraktorról sokkal hamarabb leválnak a trajektóriák, a periodikus pályáról majdnem rögtön, a kaotikus részről kicsit később de nem sokkal.

Az imént bemutatott néhány példán keresztül azt tapasztaltuk, hogy az időben folytonosan változó paramétereknél a trajektóriák követik azt az eredeti attraktort, amiről indultak. Előfordul, hogy az attraktor statikus paramétereknél eltűnik, viszont a trajektóriák jelentős ideig rajta maradnak az ekkor már fantom attraktoron. Ez jelenség vélhetően szoros összefüggésben van a kaotikus nyereghalmazzal, amit a következő alfejezetben fogok vizsgálni.

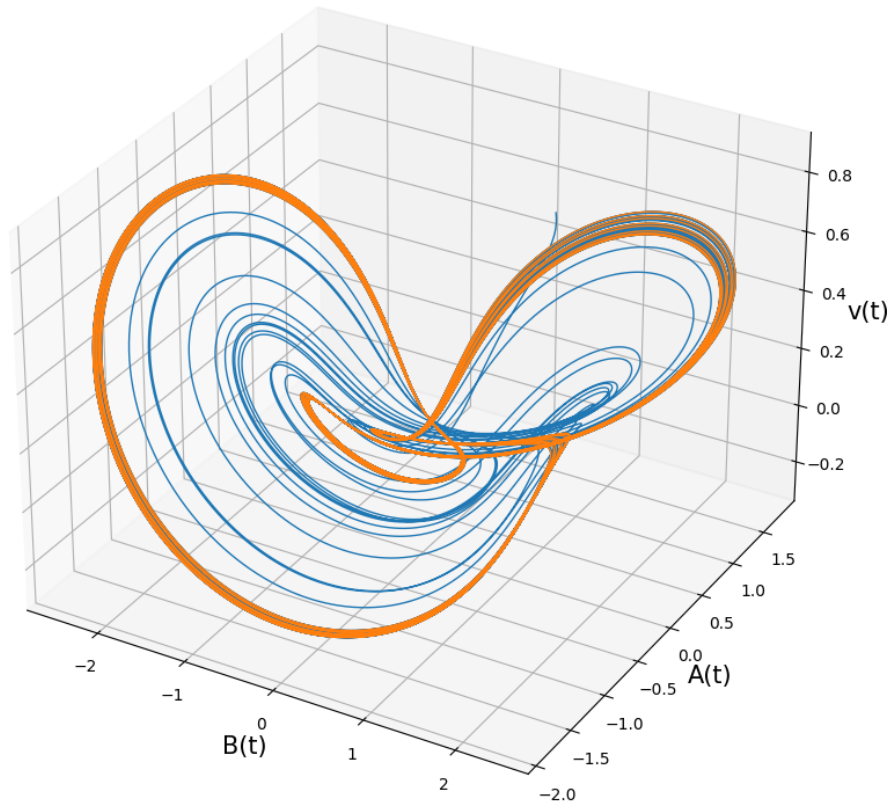
4.2.1. A kaotikus nyereghalmaz szerepe

A 2.4.4 fejezetben leírtak alapján a kaotikus nyereghalmaz a fázistér olyan invariáns halmaza, amely a stabil és instabil sokaságok metszéspontja, amennyiben egy trajektória rajta van, akkor rajta is marad. Ez viszont csak az elméletben lehetséges, annak a valószínűsége, hogy véletlenszerű kezdőfeltétellel rátaláljunk a nyereghalmazra 0, viszont tetszőlegesen meg lehet közelíteni (Hasonlóan az instabil sokaságokhoz). Amennyiben egy

trajektóriát véletlenszerűen indítunk el, akkor az a nyereghalmazt megközelíti, és véges ideig bolyong rajta, mígnem eltávolodik, és rátalál az attraktorra. Így elmondható, hogy a nyereghalmazon bolyongás egy köztes állapot a tetszőleges kezdőfeltétel, és az attraktor között. Az elmélet szerint ([15]) a nyereghalmaz egyik jellegzetes tulajdonsága, hogy a rajta (illetve a környezetében) eltöltött idő exponenciális eloszlást mutat.

A nyereghalmaz szerepe az előző fejezetben említett jelenségben ott jön elő, hogy amikor a 3.5 bifurkációs diagramon a kaotikus attraktor az $a \approx 0.205$ értéknél eltűnik, akkor valójában átalakul egy kaotikus nyereghalmazzá. Ezt jól szemlélteti az alábbi ábra.

Statikus paraméterekkel futtatott trajektóriák
 $a=0.25$, $b=0.3$, $v_0=-0.14$

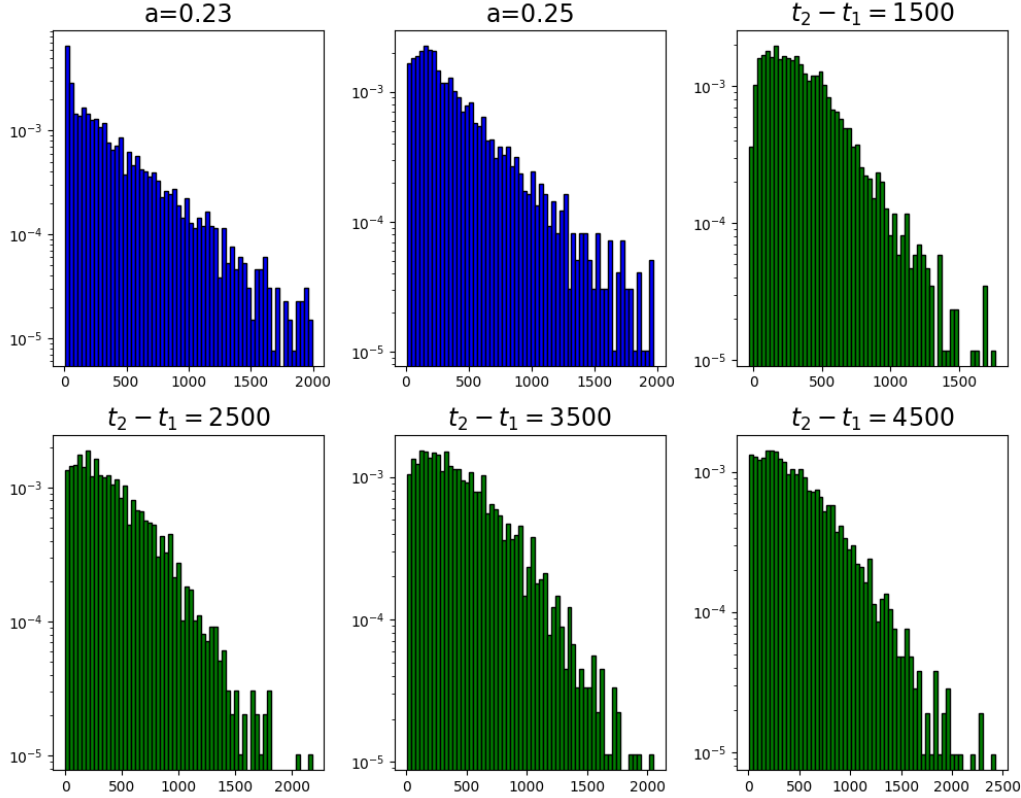


4.7. ábra. Állandó paraméternél futtatott trajektória, véletlenszerű kezdőfeltételből, $a = 0.25$, $b = 0.3$, $v_0 = -0.14$ paramétereknél. Jól látható, hogy a tranziens szakasz (kék) először a nyereghalmazt járja körül, majd csak ezután éri el az attraktort (sárga).

A nyereghalmaz nagyon hasonlít a 3.7. ábrán látható kaotikus attraktorhoz, így feltételezhető, hogy a két alakzat között folytonos átmenet tapasztalható az a paraméter változtatásával.

Ezek alapján el lehet mondani a fantom attraktor jelenségének egyik lehetséges magyarázatát. Kicsi a értékek esetén a trajektória a kaotikus attraktorra húzódik rá, majd a paraméter változás során végig közel marad az attraktorhoz. Amikor az átalakul nye-

reghalmazzá, akkor azt trajektória már lényegesen megközelítette, így a korábban leírtak szerint véges ideig a nyereghalmazon bolyong. Így a fantom attraktor és a tranziens káosz között párhuzamot vonhatunk. Ennek ellenére nem tökéletesen ugyanaz a két jelenség. Ezt a fantom attraktoron, illetve állandó paramétereknél a nyereghalmazon eltöltött idők eloszlásával tudjuk vizsgálni.



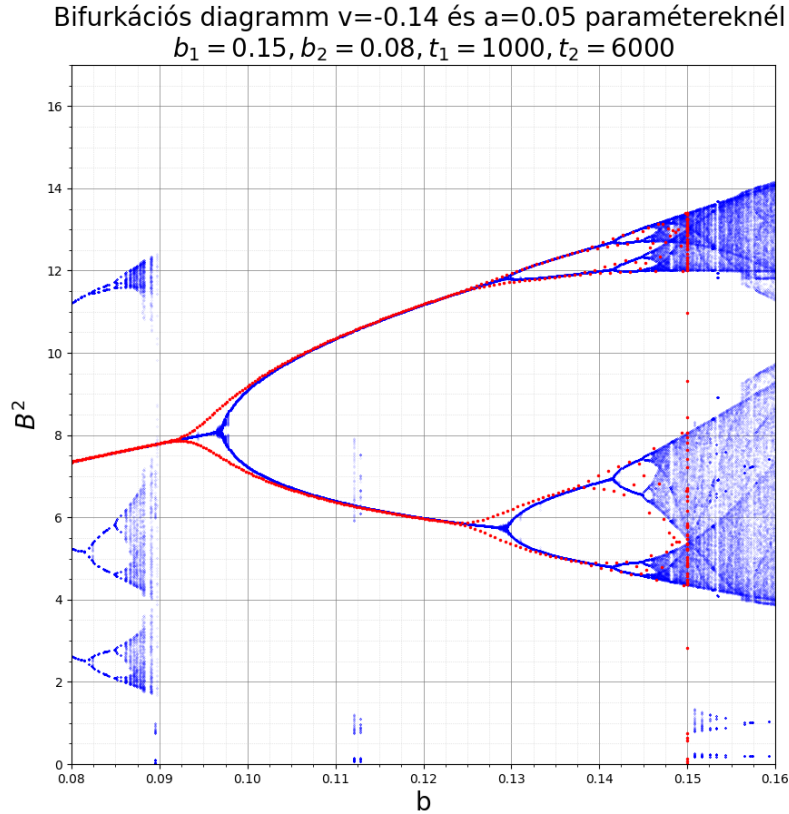
4.8. ábra. Az ábrán kék hisztogrammal ábrázoltam az állandó paraméternél mért nyereghalmazon töltött időket, zölddel a változó paraméternél tapasztalt idők. A hisztogramok mindegyike logaritmikus.

A változó paramétereknél $a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.28$.

Az ábráról leolvashatjuk, hogy az állandó paraméterek esetén exponenciális eloszlást tapasztalunk (ami ugye a logaritmikus hisztogramon lineáris), a változó paraméterek esetén ezt nem kapjuk vissza tökéletesen, egy kisebb görbülete van az eloszlásnak. Ennek legfőbb oka, hogy a változó paramétereknél a nyereghalmaz is folyamatosan változik, ezért az eddig alkalmazott matematikai modellek nem írják le tökéletesen. A részletes matematikai modell megalkotása a jövőbeli feladatok közé tartozik, jelen dolgozat keretei közé nem fér be egy ilyen elmélet megalkotása. Viszont jól látszik, hogy a kapott időtartamok nagyon hasonló mintákat mutatnak, nagyságrendre megegyeznek. Ezzel, és a fázistérben mutatott hasonló szerkezettel megmutattam, hogy a fantom attraktor jelensége mögött valóban a kaotikus nyereghalmaz okozza.

4.3. Változó paraméter bifurkáció környékén

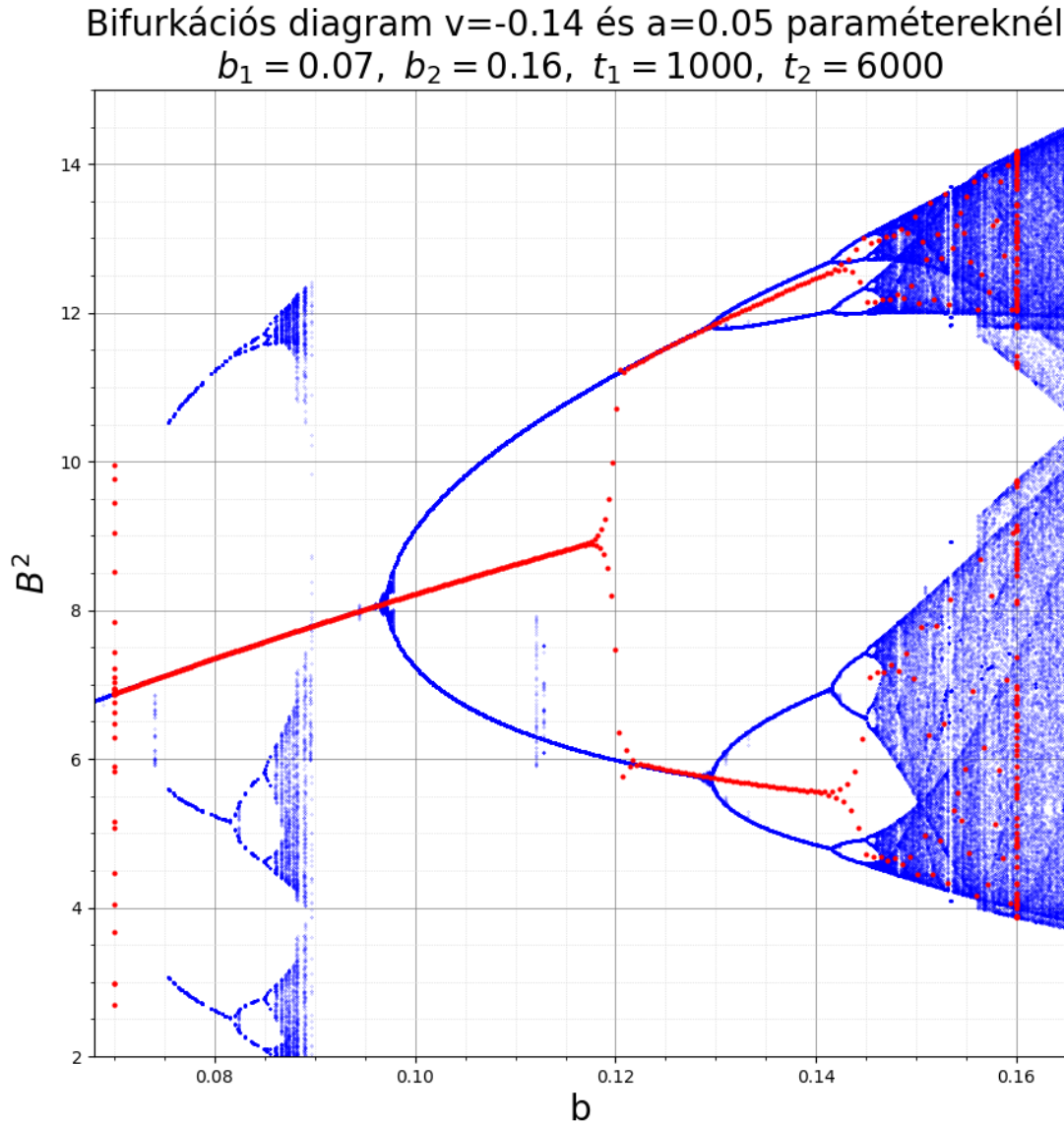
Ebben a szekcióban arra fogok fókuszálni, hogy mi történik, ha a változó paraméterrel átmegyünk egy bifurkáción. Először a bifurkációs villán visszafelé, azaz a magasabb ciklus számtól az alacsonyabb felé megyek. A módszerem ugyanaz lesz, mint az előző fejezetben.



4.9. ábra. Változó paraméter bifurkációs pont körül A b paraméter jobbról balra csökken, aminek következtében a trajektória a bifurkációs pont környékén nem tudja tökéletesen követni a stabil pályákat.

A 4.9 ábra alapján megfigyelhetjük, hogy a trajektória nem tudja pontosan lekövetni a statikus paramétereknél megjelenő kékekkel ábrázolt attraktort (periodikus pályát), a bifurkáció pontjában „levágja” a görbét. Amennyiben a paramétert lassabban változtattuk volna, akkor jobban tudta volna követni, de tökéletesen akkor sem. Erre a mozgásformára onnan is lehetett volna követni, hogy a bifurkáció pillanatában az attraktor(ok) rendkívül gyorsan változnak a változó paraméter (ebben az esetben b) függvényében. Ezt a gyors változást a trajektória nem tudja tökéletesen lekövetni, kell neki valamennyi idő, amíg újra rásimul az attraktorra.

A következő esetben nézzük meg amikor a bifurkáción a másik irányban megyünk végig:



4.10. ábra. Változó paraméter bifurkációs pont körül A b paraméter balról jobbra nő, aminek következtében a trajektória rajta marad az instabil pályán.

A 4.10 ábrán olyan jelenséget láthatunk, ami az intuíciónak és korábbi ismereteinknek ellentmond. Mialatt átmegyünk a bifurkáción, a trajektóriák teljesen figyelmen kívül hagyják a stabil pályát (2-es ciklus), és rajta maradnak a 2.4.3 szakaszban tárgyalt instabil pályán. Ahogyan az instabil pályán haladnak, egy bizonyos ponton onnan mégis csak leválnak, és az instabilitásnak megfelelően elkezdenek exponenciális ütemben távolodni.

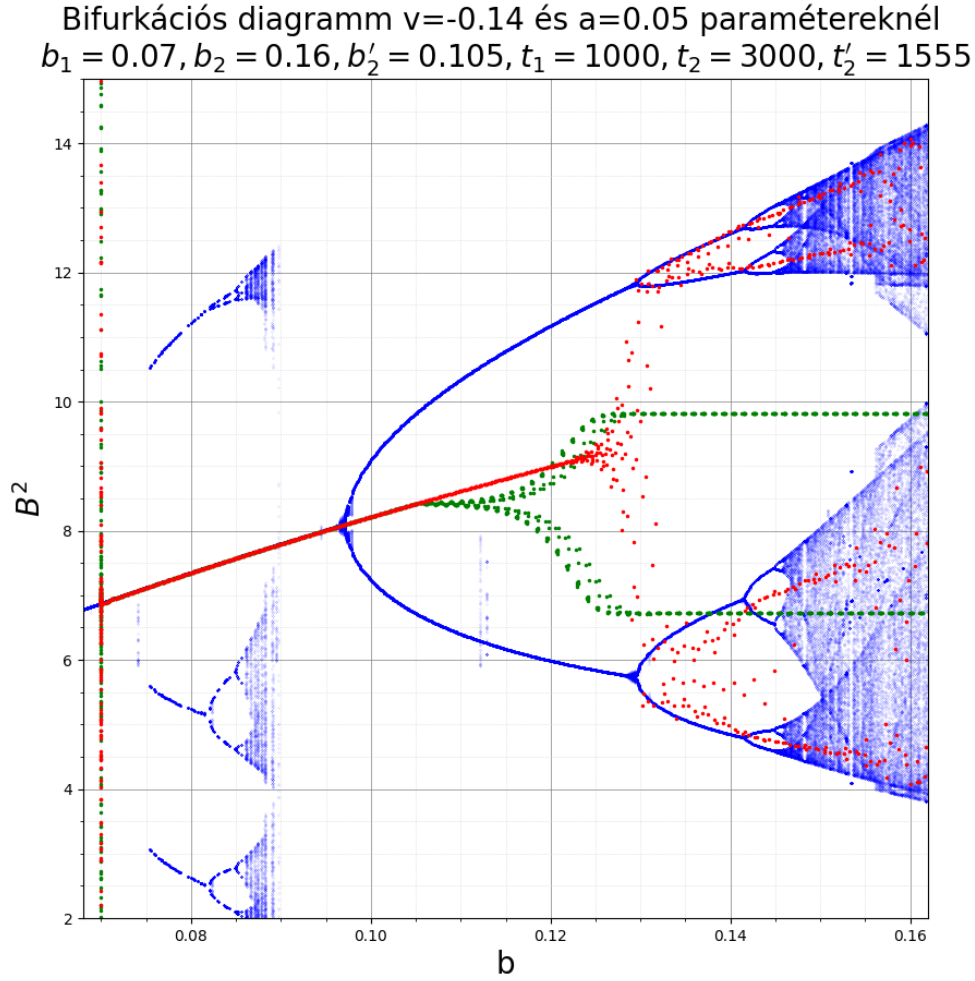
Ezt az esetet megismételttem különböző t_1 , t_2 , b_1 , b_2 , és a paraméterekre is. Azt tapasztaltam, hogy ez a mozgásforma teljesen általános viselkedés, a trajektóriák mindig rajta maradnak az instabil pályán egy bizonyos ideig. Továbbá nem csak a 1-2 ciklus

közi bifurkációra, hanem az összes többire is igaz lesz. Emellett azonos paraméterek, de különböző kezdőfeltételek mellett nagyon hasonló eredményeket kaptam, a leválás majd nem ugyanott történt. Viszont, amint másik paramétereket vettem, akkor különböző b paraméter értéknél történt meg a leválás. Ebből arra lehet következtetni, hogy a leválást nem pusztán a pillanatszerű dinamika okozza, hanem a trajektória időbeli fejlődésének következménye.

A kutatás közben felmerült, hogy a kapott eredmény kerekítési hiba. Ennek pont az ellenkezője igazolódott be, mégpedig minél kisebb toleranciát alkalmaztam, annál tovább maradt rajta az instabil pályán. Továbbá megvizsgáltam, hogy mi történik, ha az adatsorra zajt rakok. Ekkor a leválás sokkal hamarabb bekövetkezett, ebből az következik, hogy a fixpont valóban instabil, és különleges feltételeket igényel, hogy a fixpont rajta maradjon a trajektória.

A leválás okának és körülményeinek részletes tanulmányozása ebben a TDK-ban nem kerül sor, viszont egy későbbi kutatási munka keretein belül érdemes volna tanulmányozni.

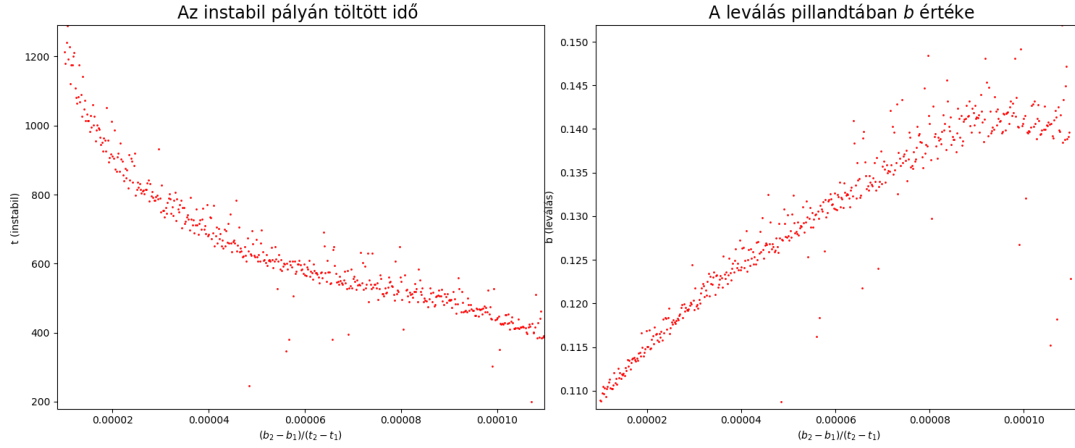
A paraméter folytonos változtatása, és az instabil pálya követése meglehetősen szoros kapcsolatban állnak, a jelenséget nem csak az instabilitás gyengesége okozza. Ennek szemléltetésére megnéztem, mi történik hogyha a paraméter változását még akkor megállítjuk, amikor a trajektória az instabil pályán van. Ehhez a következő metódust alkalmaztam: Vegyünk egy változó paraméterű trajektóriát, amit az eddigiek során alkalmazott módszer szerint futtattam: $b_1 = 0.07$, $b_2 = 0.16$, $t_1 = 1000$, $t_2 = 3000$. Emellett vegyünk egy másik trajektóriát, ami ugyanúgy indul, mint az előbbi, viszont t'_2 pillanatban a b' paraméter megáll. Az ábrázolás során ezeket nem $B'^2(b'(t))$ szerint ábrázolom, mert akkor a paraméter megállása után csak egy függőleges vonalat kapnánk, hanem $B'^2(b(t))$ szerint. Ekkor jól összevethető a két mozgásforma:



4.11. ábra. Változó paraméterek az instabil sokaságon. A pirossal ábrázolt trajektóriáknál végig változott a paraméter, a zöldnél csak $b = 0.105$ -ig. Mindkét esetben 6-6 különböző kezdőfeltételből indítottam trajektóriákat.

A 4.11 ábrán megfigyelhető, hogy amennyiben a változó paramétert még az instabil pályán megállítjuk, a trajektóriák azonnal elkezdnek távolodni. Ez a távolodás az instabil pályáknak megfelelően exponenciális ütemben történik, amely lassan indul.

Ezek után azt néztem meg, hogy pontosan mennyi ideig marad rajta a trajektória az instabil pályán, és a leválás pillanatában mekkora lesz b értéke. Ehhez futtattam sok trajektóriát, és megnéztem, hogy mennyi idő telt el a bifurkáció pillanatától ($b = 0.097$), a leválásig. Az adatokat a 4.12. ábrán ábrázoltam. A leválás pillanatát úgy definiáltam, hogy megkerestem, hogy mikor lesz két egymás utáni B^2 maximum különbsége nagyobb, mint 0.05.



4.12. ábra. Az instabil pályán töltött idő, és b értéke a leválás pillanatában. A vízszintes tengelyen $\frac{db}{dt}$ található, a rövid átváltás után azt kapjuk, hogy $t_2 - t_1$ az $[1000, 10000]$ intervallumon megy végig. Minden trajektóriára $b_1 = 0.06$, $b_2 = 0.17$.

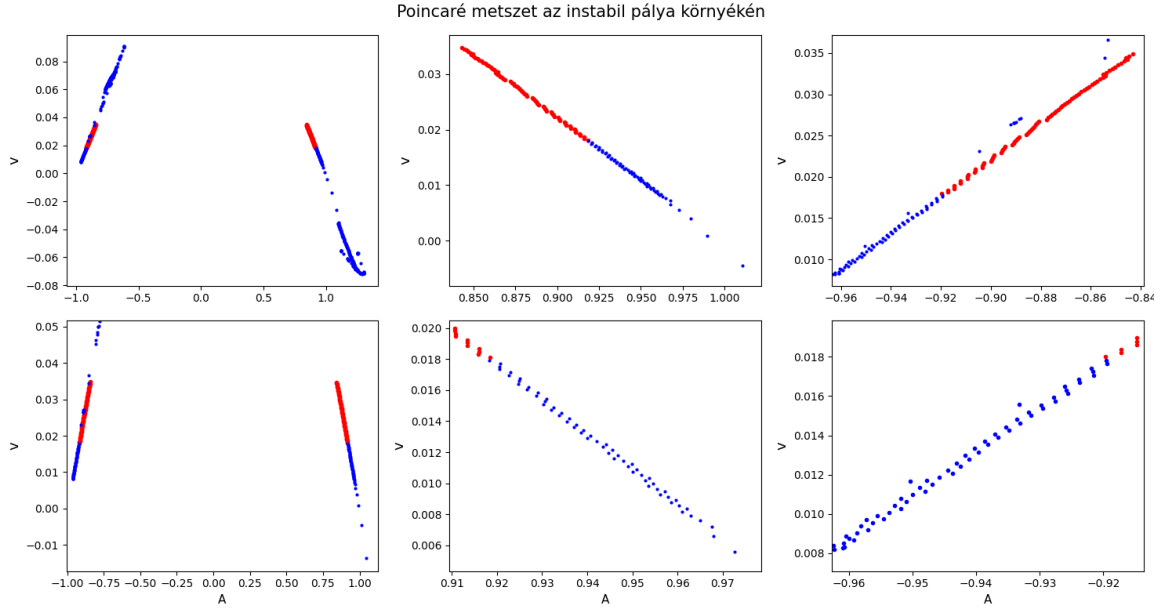
Az ábrákról egyértelmű kapcsolatot nem tudtam leolvasni, a mért értékek között nem volt hatványfüggvény, sem exponenciális kapcsolat. Az viszont egyértelműen látszik, hogy ha a paraméter lassan változik, akkor időben tovább marad az instabil pályán a trajektória, viszont kisebb paraméterig jut el, azaz a bifurkációs diagramon rövidebb távolságot tesz meg.

4.3.1. Poincaré-metszet

A fázistérbeli szerkezet megértéséhez megvizsgáltam a Poincaré metszetet az instabil pálya környékén, tehát a trajektóriát elmetszettem a $B = 0$ síkkal. Az eredmények a 4.13. ábrán láthatóak. Az adatokból az első tranziens szakaszt levágtam, a bifurkáció előtti pontokat pirossal jelöltem, a bifurkáció utániakat késsel. A bifurkáció előtt, illetve az instabil pályán a kapott metszet szimmetrikus a $v = 0$ egyenesre, a leváláskor azonban szimmetriatörés jelenik meg. Az ábrán megfigyelhető, hogy a leválás előtt a pontok egy egyenest követnek, amiből az következik, hogy a fázistérben a trajektóriák jó közelítéssel egy 2 Dimenziós felületen mozognak. Továbbá feltűnő, hogy amikor a trajektóriák az instabil pályán vannak, akkor két-hármasával csoportba rendeződnek, a csoportok pedig forognak. Ennek a csoportosulásnak a megértése vezethet a teljes jelenség indokainak feltáráshoz.

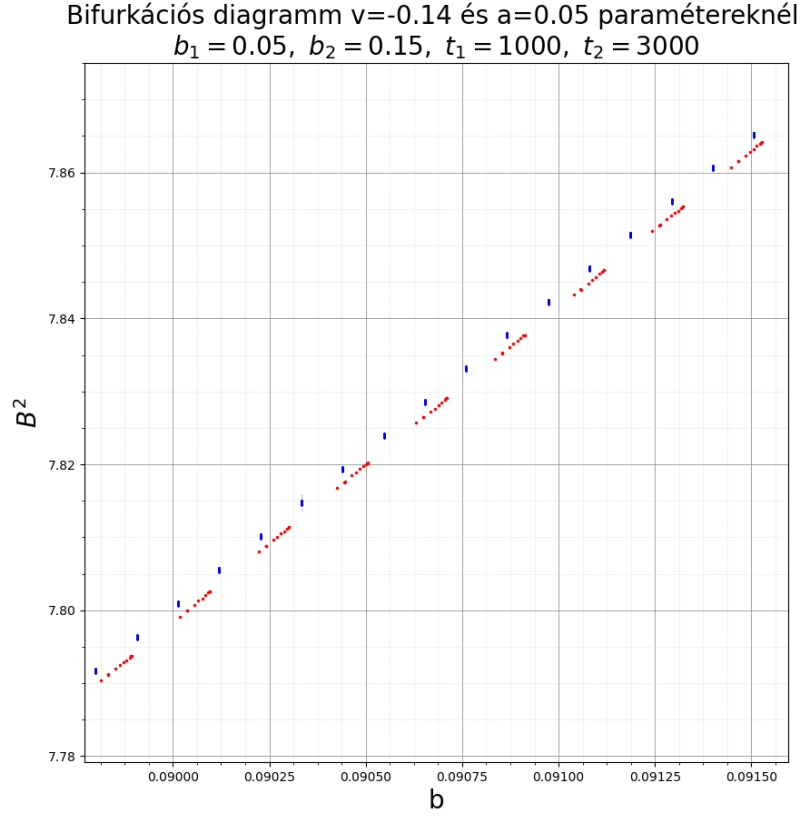
4.3.2. A stabil pálya és a trajektóriák távolsága

Az eddigiek során bemutatott jelenség megértéséhez először meg kell vizsgálni, mit jelent, amikor egy változó paraméterű trajektória követ egy pályát (ami szintűgy változik



4.13. ábra. A trajektória Poincaré metszete $t_1 = 1000$, $t_2 = 6000$ $b_1 = 0.07$, $b_2 = 0.15$ értékeknél. Minden ábrán ugyanaz a metszet látható, különböző helyekre belenagyítva.

a paraméter függvényében). Ezt a legegyszerűbb esetben nézem meg, mégpedig amikor a trajektóriák a stabil 1-es ciklust követik, ami a 3.4 ábrán a $b \in [0, 0.1]$ intervallumnak felel meg.



4.14. ábra. Változó paraméterű trajektóriák pozíciója a bifurkációs diagramhoz képest, közelre ránagyítva. A piros pontok a trajektóriák maximumai, a kék pontok a bifurkációs diagram elemei. A kettő között egy mérhető távolságot láthatunk.
 $v_0 = 0.14$, $a = 0.05$, $b_1 = 0.15$, $b_2 = 0.08$, $t_1 = 1000$, $t_2 = 6000$

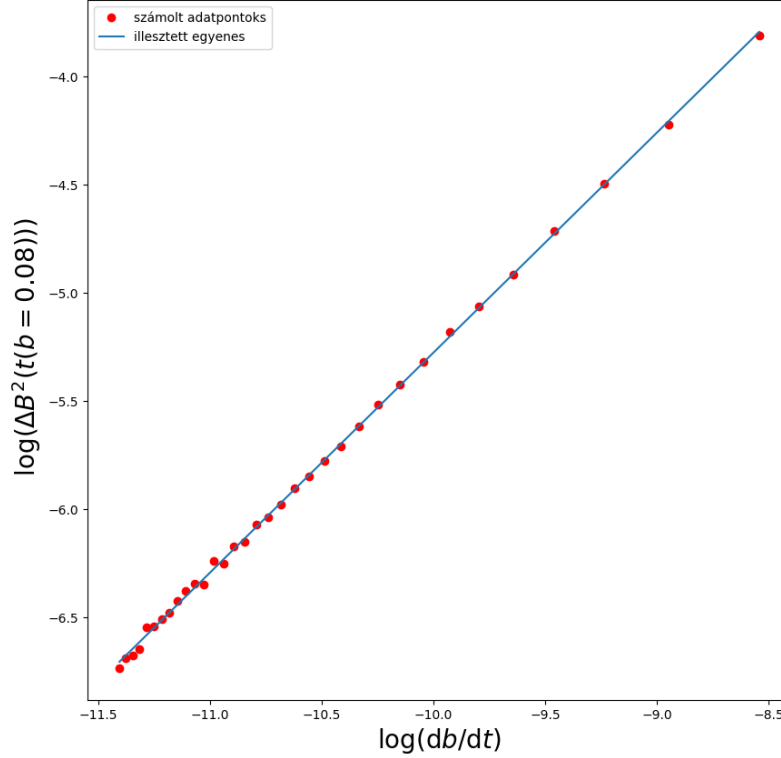
Amint a 4.14 ábrán látjuk a trajektóriák nem tudják tökéletesen követni az állandó paraméterekhez tartozó stabil pályákat, lesz köztük egy jól definiálható távolság.

A célom, hogy megnézzem, milyen távolságra vannak a trajektóriák a trajektóriák a pillanatnyi attraktortól, és ez milyen kapcsolatban van a paraméter változásának sebességével.

Ehhez a Python `scipy.interpolate` könyvtár `sprev` és `splev` metódusaival függvényt illesztettem a bifurkációs diagramon található stabil pályákra a $b \in [0.05, 0.09]$ intervallumon, így kaptam egy $f(b)$ görbét. Ezután különböző változó b paraméterű trajektóriákat futtattam ugyanezen az intervallumon. A trajektóriák $B^2(t), b(t)$ maximumait megkerestem, majd az $f(b(t_i)) - B^2(t_i) = \Delta B^2$, vagyis a távolság értékeket eltároltam. A t_i azt az időpontot jelöli, ahol a maximumpontok között először lesz $b > 0.08$. Ezt sok különböző trajektóriára megtettem, mindegyiknél $b_1 = 0.05$, $b_2 = 0.09$, $t_1 = 1000$, viszont $t_2 \in [1100, 5000]$ intervallumból választottam meg, minden trajektóriára más ér-

téssel. Ekkor a paraméter változásának sebességét a következőképpen határoztam meg: $db/dt = (b_2 - b_1)/(t_2 - t_1)$. A db/dt és ΔB^2 között polinomiális kapcsolatot feltételeztem, ezért log-log diagramon ábrázoltam őket, és egyenest illesztettem rájuk:

A trajektóriák és a stabil pályák közti különbség db/dt függvényében.
 $v_0 = -0.14, b_1 = 0.051, b_2 = 0.09$



4.15. ábra. ΔB^2 és db/dt közötti összefüggés log-log diagramon ábrázolva. Az illesztett egyenes meredeksége: 1.01661

Az egyenes meredeksége nagyon közel van az 1-hez, így db/dt és ΔB^2 között egyenes arányosság van.

Ezt elméleti úton is meg lehet magyarázni:

A mozgó paraméternek köszönhetően nem csak a trajektória mozog a fázistérben, hanem a stabil pálya is. A stabil pályának a sebessége bifurkációs diagramon: $f'(b) \frac{db}{dt}$

A trajektória sebességét pedig a mozgásegyenletekből határozzuk meg. A 2.4.3 szakaszban tárgyalt módszerek alapján a mozgásegyenleteket sorba lehet fejteni, és a lineáris tag fog dominálni. Így a trajektória sebessége arányos lesz a fixponttól vett távolságtól: $\lambda \Delta B$. Rövid számolás útján belátható, hogy a bifurkációs diagramon használt ΔB^2 értékre ugyanígy egyenes arányosság lesz érvényes. Ezek alapján akkor áll be egyensúly, ha

a stabil pálya, és a trajektória sebessége megegyezik, tehát:

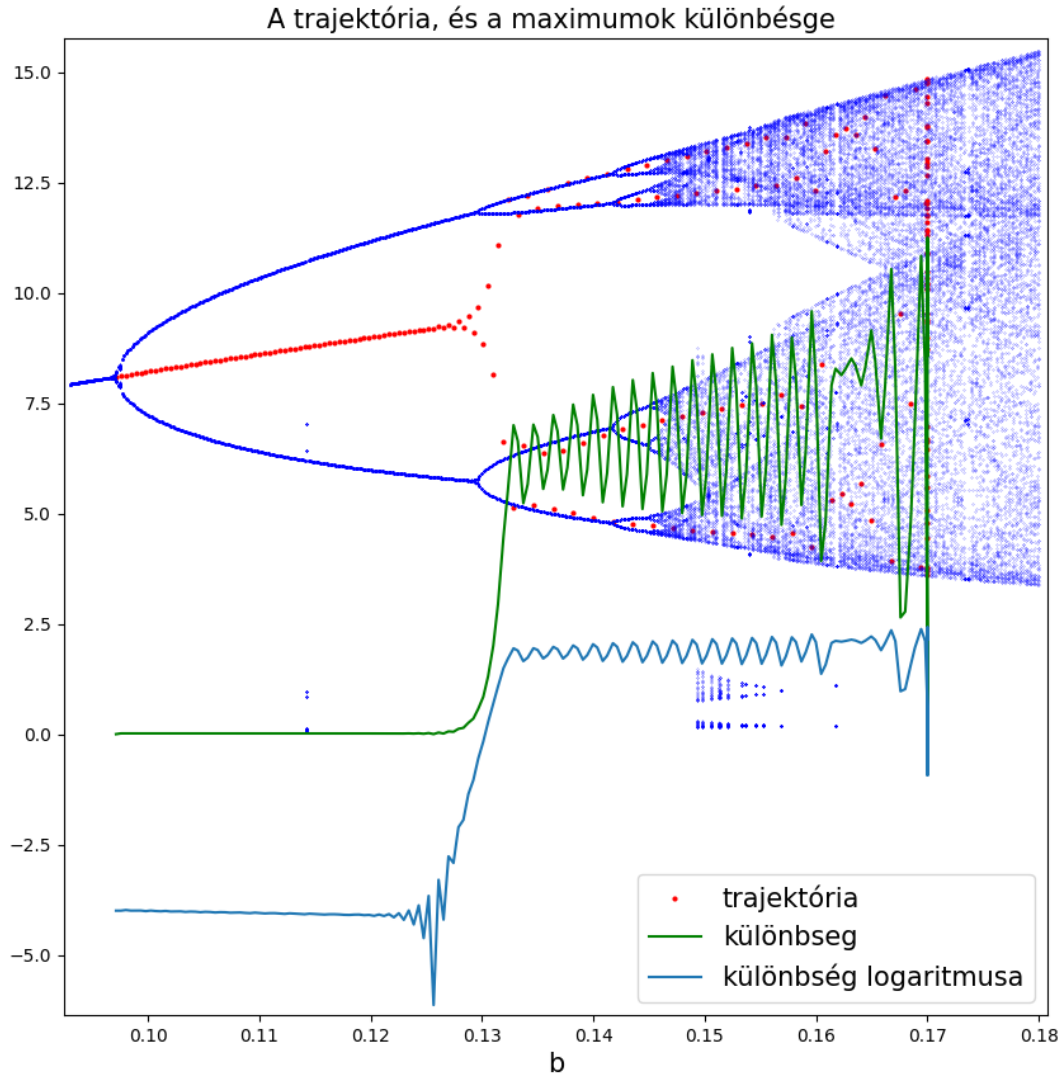
$$f'(b) \frac{db}{dt} = \lambda \Delta B^2$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\lambda}{f'(b)} \Delta B^2$$

Ezzel a korábban említett db/dt és ΔB^2 közötti egyenes arányosságot beláttuk. Persze a bizonyítás csak akkor állja meg helyét, ha $f'(b)$ változási sebessége elhanyagolható a dinamika egyéb elemeinek változásához képest, így például nem alkalmazható a bifurkációs pont környékén (mint ahogy azt korábban láthattuk: 4.9).

4.3.3. Az instabil pálya és a trajektóriák távolsága

Az imént láttuk, hogy a stabil pálya követése könnyen modellezhető. Az instabil pályánál viszont egy jelentős problémába merült fel, mégpedig, hogy az instabil fixpont helyét egy folytonos differenciálegyenlettel rendelkező disszipatív rendszerben nem egyszerű meghatározni. Ebben a dolgozatban erre nem kerül sor, a jövőben viszont ez egy kulcs lépés lenne a probléma pontos modellezéséhez. Ennek tudatában egy másik közelítő módszert alkalmazok a trajektória, és az instabil fixpont távolságának meghatározásához. Korábban már ismertettem, hogy a bifurkációs diagramon a trajektóriák egy diszkrét leképezése látható. Ezt kihasználva megnézem, hogy mekkora lesz két egymást követő maximum távolsága. Ahogyan azt a 4.10 ábrán is lehet látni, a maximumok felválva le-fel ugrálnak a fixpont körül, így a távolságuk közelítőleg a fixpont, és trajektória távolságának duplája. Ennek tanulmányozására a 4.16. ábrán ábrázoltam a bifurkációs diagramot, egy trajektóriát, a trajektóriának az előbb említett távolságait, illetve ezen távolságok logaritmusát. Látszik, hogy a dinamika első szakaszában a különbségek egy 0 közeli konstans értéket vesznek fel, ebben a szakaszban tudja a trajektória szorosan követni a fixpontot. Továbbá az is igazolódott, hogy a leváláskor a maximumok valóban exponenciális ütemben távolodnak, hiszen a logaritmusnál egy egyenes látunk. Azonban az jelenségnek egy fontos jellemzőjét véljük felfedezni az exponenciális szakasz kezdetén, mégpedig, hogy a logaritmus elkezd oszcillálni, majd egy jelentős minimum után indul meg a leválás jelensége. Ez a jelentős minimum a 4.13. ábrán annak a pontnak felel meg, amikor a szimmetriatörés megjelenik, az egyik oldal "visszafordul". Az ábrán elkészítettem különböző paraméterekre is, és nagyon hasonló karakterisztikát kaptam.



4.16. ábra. A trajektória paramétereit: $t_1 = 1000$, $t_2 = 4500$, $b_1 = 0.061$, $b_1 = 0.17$. A

4.3.4. Egy gyenge közelítés, a probléma modellezésére

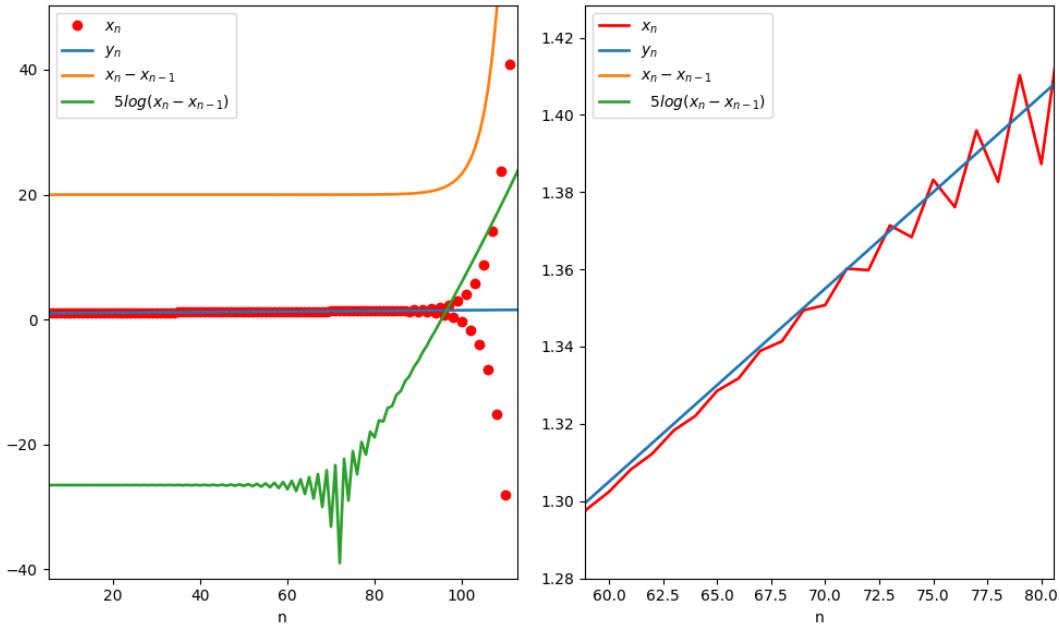
A instabil pálya követésének modellezésére két korábban látott tulajdonságot fogok kihasználni. A Poincaré-metszeten azt láttuk, hogy mind a fixpont, mind a trajektóriák egy egyenesen mozogtak (4.13), és a diszkrét leképezés során az instabil fixpont körül a trajektória a leválás során minden iterációban a fixpont ellenkező oldalára állt át, ahogy azt a 4.3.3 szekcióban lehetett látni. Ezek alapján a problémát lehet ábrázolni egy egyenesre levetítve, ahol a trajektóriát egy diszkrét leképezéssel mozgathatjuk. Legyen a trajektória helye ezen az egyenesen x_n , a fixponté pedig y_n . Statikus paraméternél a y_n nem változik, tehát a leképezés a 4.2 egyenletben látható, ahol λ egy egynél nagyobb pozitív szám, mivel, a fixpont instabil. Ez kielégíti az $x_n - y_n$ érték iterációnkénti előjelváltását.

$$x_{n+1} = y_n + \lambda(y_n - x_n) \quad (4.2)$$

Amennyiben a rendszerparaméter változik, a fixpont helye is változni fog. A 4.16 ábra szerint ez jó közelítéssel egy egyenes. Ezek alapján y_n -hez minden iterációban konstans értéket kell hozzáadni, $y_{n+1} = y_n + c$. Mivel λ a bifurkációs pont közelében 1 körül van, továbbá a b rendszerparaméter növelésével nőni fog, feltételezzük a legegyszerűbb modellt, hogy lineárisan nő b -vel. Az 4.1 egyenlet szerint b egyenesen arányos az idővel, tehát feltételezhetjük hogy λ is egyenesen arányos lesz az idővel, azaz az iterációs számmal. $\lambda_{n+1} = \lambda_n + d$. Ezek alapján a végső modell:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + \lambda_n(y_n - x_n) \\ y_{n+1} &= y_n + c \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n + d \end{aligned} \quad (4.3)$$

A kezdőfeltételek, hogy $\lambda_0 = 1$, $x_0 = y_0 + \epsilon$, ahol ϵ egy kicsi szám, mivel a bifurkációs pontnál a trajektória és a fix pont közel vannak. Rövid kísérletezés után meghatároztam a modellben szereplő paraméterek értékei, és az eredményemet a 4.17 ábrán ábrázoltam. Az eredményeket összehasonlítva a 4.16. ábrával, nagyon hasonló szerkezetet kapunk, a



4.17. ábra. A modell paramétereit: $c = 0.005$, $d = 0.003$, $\epsilon = -0.0025$.

A kapott x_n pontoknak megnéztem a különbségét, és a különbségek logaritmusát, a kapott függvényekhez a jobb láthatóság érdekében rendre hozzáadtam 20-at, és megszoroztam 5-tel.

különbség csupán annyi, hogy ebbe a modellbe nincs beépítve a kettes ciklus, emiatt az exponenciális növekedés nem áll le, viszont minket sokkal inkább az érdekelt, hogy mi történik az instabil pályánál, és miért következik be a leválás. Ezt a modell alapján meg lehet mondani, mivel itt tudjuk a fixpont helyét. A fenti ábra jobb oldali ablakán az

látszódik, hogy mi történik $n = 72$ -nél, azaz a különbség logaritmusának minimumában. Azt olvashatjuk le, hogy Ezelőtt a pont előtt a x_n kisebb volt, mint y_n , viszont a pont után már elkezd oszcillálni körülötte. Azt gondolom, hogy az eredeti problémánál is valami hasonló okozza a leválást.

Az itt említett modell meglehetősen durva közelítéseket használt, és semmi esetre sem állítom, hogy ezzel az eredeti problémát jól tudná szimulálni. Ennek ellenére egy jó szemléletet ad arra, hogy milyen mechanizmusok állhatnak az instabil pálya követése mögött, illetve hogy a trajektória hogyan helyezkedhet el az instabil fixponthoz képest.

5. fejezet

Összegzés, nyitott kérdések

A tanulmányom célja megvizsgálni, hogy a disszipatív kaotikus rendszerek leírására alkalmazott technikák miként módosulnak, amint a rendszerparamétereket elkezdjük folytonosan változtatni. Ennek fényében elemeztem egy, a naptevékenység leírására szolgáló alacsonydimenziós dinamómodellt, amely különböző paraméterek mellett rendkívül változatos dinamikát mutat.

A modell tanulmányozása során először megvizsgáltam a dinamikát statikus paraméterek mellett. Meghatároztam a trajektóriák fázistérbeli viselkedését, a kaotikus attraktorokat, bifurkációs diagramokat, valamint a természetes eloszlást. Ezután áttértem a változó paraméterek esetére, és rávilágítottam a „fantom” attraktorok, és a bifurkáció után a trajektóriák rajta maradnak egy instabil pályán. A „fantom” attraktorok jelenlétét párhuzamba hoztam a kaotikus nyereghalmazokkal, az instabil pálya követését pedig részletesen tanulmányoztam, meghatároztam a rajta eltöltött időt, és felvettem a leválás egyik lehetséges okát.

Összességében sikeresen rávilágítanom arra, miszerint a változó paraméterek mellett tapasztalt jelenségek megértéséhez a korábbi módszerek nem bizonyulnak elégségesnek, ezért indokolt egy új fogalmi rendszer és eszköztár kialakítása.

A munkáim során számos nyitott kérdés merült fel bennem, amelyek kiváló alapanyagot adnak a jövőbeli kutatási munkák folytatásához. Ezek közül felsorolnám a legfontosabbakat:

- Milyen matematikai modellel lehetne leírni az instabil pályán mozgó trajektóriát? Hol helyezkednek el a stabil és instabil sokaságok, illetve hogyan követik ezeket a trajektóriák? Hol van az instabil fixpont a trajektóriákhoz képest?

- Milyen matematikai modellel lehetne részletesen leírni a nyereghalmazon mozgást változó paraméterek esetén? Mikor fordulhat elő, hogy egy attraktor nyereghalmazzá alakul át egy rendszerparaméter változásával.
- A sokaságkép, illetve eloszlások kvantitatív jellemzése, a nem-autonóm dinamikai rendszerek jellemzésére kialakított módszertan bővítése.
- Milyen dinamikai rendszerekben teljesülnek azok a jelenségek, amikre a tanulmányomban rámutattam (fantom attraktorok, instabil pályák követése), és milyen általános feltételeket szabhatunk meg ezekhez? Vajon ez a viselkedés csak erre a rendszerre specifikus, vagy az alacsonydimenziós dinamikai modellek általános karakterisztikáit határoztuk meg?
- A napdinamó tanulmányozása során kapott eredményeket vessük össze más szimulációs modellekkel, mint például a 3D MHD modellek. Vajon ott is tapasztalunk hasonló jelenségeket? Milyen mértékben térnek el a kapott eredmények?

Köszönetnyilvánítás

Szeretném kifejezni mély hálámat témavezetőmnek, Kovács Tamásnak, amiért több mint másfél éve segíti tanulmányaimat és mérhetetlenül sok időt és energiát fordított rám. Ezalatt nem csak szakmai tanácsokkal látott el, de emberileg is példát mutatott, élvezetes volt a közös munka. Nélküle ez a tanulmány nem valósulhatott volna meg. Továbbá szeretném megköszönni az Egyetemi Kutatói Ösztöndíj Program-nak valamint a MOL -

Új Európa Alapítványnak amiért a kutatási munkámat anyagilag támogatták.

Irodalom

- [1] E. N. Lorenz. „Irregularity: a fundamental property of the atmosphere”. *Tellus Series A* 36 (1984. jan.), 98. old. DOI: 10.3402/tellusa.v36i2.11473.
- [2] Eduárd Illés, Dániel Jánosi és Tamás Kovács. „Orbital dynamics in galactic potentials under mass transfer”. *arXiv e-prints*, arXiv:2405.16367 (2024. máj.), arXiv:2405.16367. DOI: 10.48550/arXiv.2405.16367. arXiv: 2405.16367 [astro-ph.GA].
- [3] Jánosi, Dániel and Horváth, Anikó and Édes, Lili and Kovács, Tamás. „Magnetic structures in the explicitly time-dependent nontwist map”. *CHAOS* (2024).
- [4] Tamás Bódai, György Károlyi és Tamás Tél. „Fractal snapshot components in chaos induced by strong noise”. *Physical Review E* 83.4, 046201 (2011. ápr.), 46201. old. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.046201.
- [5] Stefano Pierini, Michael Ghil és Mickael D. Chekroun. „Exploring the Pullback Attractors of a Low-Order Quasigeostrophic Ocean Model: The Deterministic Case”. *Journal of Climate* 29.11 (2016. jún.), 4185–4202. old. DOI: 10.1175/JCLI-D-15-0848.1.
- [6] T. Kovács. „How can contemporary climate research help understand epidemic dynamics? Ensemble approach and snapshot attractors”. *Journal of The Royal Society Interface* 17.173 (2020), 20200648. old. DOI: 10.1098/rsif.2020.0648. eprint: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsif.2020.0648>. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsif.2020.0648>.
- [7] Michael Ghil, Mickaël D. Chekroun és Eric Simonnet. „Climate dynamics and fluid mechanics: Natural variability and related uncertainties”. *Physica D Nonlinear Phenomena* 237.14-17 (2008. aug.), 2111–2126. old. DOI: 10.1016/j.physd.2008.03.036. arXiv: 1006.2864 [math.DS].

- [8] Tamás Bódai és Tamás Tél. „Annual variability in a conceptual climate model: Snapshot attractors, hysteresis in extreme events, and climate sensitivity”. *Chaos* 22.2, 023110 (2012. jún.), 23110. old. DOI: 10.1063/1.3697984.
- [9] T. Tél és tsai. „The Theory of Parallel Climate Realizations”. *Journal of Statistical Physics* (2019. dec.). DOI: 10.1007/s10955-019-02445-7.
- [10] Gábor Drótos, Tamás Bódai és Tamás Tél. „Quantifying nonergodicity in nonautonomous dissipative dynamical systems: An application to climate change”. *Physical Review E* 94.2, 022214 (2016. aug.), 22214. old. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.022214.
- [11] Dániel János és Tamás Tél. „Chaos in Hamiltonian systems subjected to parameter drift”. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 29.12 (2019), 121105. old. DOI: 10.1063/1.5139717. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.5139717>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5139717>.
- [12] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Second. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. DOI: 10.1017/CB09780511803260.
- [13] M. Gruiz és T. Tél. *Chaotic dynamics*. First. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. DOI: 10.1017/CB09780511803277.
- [14] George Datseris és Ulrich Parlitz. *Nonlinear Dynamics; A Concise Introduction Interlaced with Code*. Springer, 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-91032-7.
- [15] Y.-C. Lai és T. Tél. *Transient Chaos – Complex Dynamics on Finite Time Scales*. Springer, 2011.
- [16] Ilídio Lopes és tsai. „Oscillator Models of the Solar Cycle. Towards the Development of Inversion Methods”. *Space Science Review* 186.1-4 (2014. dec.), 535–559. old. DOI: 10.1007/s11214-014-0066-2. arXiv: 1407.4918 [astro-ph.SR].
- [17] Dermott Mullan. *Physics of the Sun*. CRC Press, Taylor és Francis Group, 2009. DOI: 10.1201/b15843.
- [18] Dário Passos, Paul Charbonneau és Patrice Beaudoin. „An Exploration of Non-kinematic Effects in Flux Transport Dynamos”. *Solar Physics* 279.1 (2012. júl.), 1–22. old. DOI: 10.1007/s11207-012-9971-2.
- [19] A. L. Wilmot-Smith és tsai. „A Time Delay Model for Solar and Stellar Dynamos”. *The Astrophysical Journal* 652.1 (2006. nov.), 696–708. old. DOI: 10.1086/508013.