

OTDK dolgozat

**A fázistér szerkezetének vizsgálata ITER
típusú tokamak-leképezésben időfüggő
rendszerparaméter esetén**

Horváth Anikó
ELTE Fizikus MSc.
Első év

Témavezetők:
Kovács Tamás
Jánosi Dániel



ELTE

Kivonat

Dolgozatomban a kaotikus rendszerek időfejlődésével foglalkozom, időben változó paraméter mellett. A problémát a tokamakokban futó mágneses erővonalak egy egyszerűsített leképezésén keresztül mutatom be, amik a plazmában lévő töltött részecskék pályáját adják meg első közelítésben. Bemutatom, hogy az ergodikus mágneses limiter rendszerre kapcsolása esetén, ha elég nagy a limiter- és plazmaáram aránya, akkor a mágneses erővonalak kaotikus viselkedését tapasztaljuk. Vizsgálom időfüggő áramarány esetén az ún. snapshot tóruszok felbomlását, továbbá a káoszhoz mérőszámokat is rendelek, az ún. általánosított Ljapunov-exponenst és a tórusz felbomlásának kezdetét. Egy szigetlanc és egy snapshot tórusz időfejlődését vizsgálva diszkutálom a káoszelméletben ismert ragacsos zónák időfüggő megfelelőjének lehetséges megjelenését az időfejlődés során. Különböző rátájú paraméterváltozások vizsgálatával megállapítom, hogy a felbomlási pont és a változás rátája között hatványfüggvény kapcsolat figyelhető meg.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Káoszelméleti háttér	3
2.1. Nem kaotikus Hamiltoni rendszerek fázistere	3
2.2. Hamiltoni rendszerek perturbációja, a káosz kialakulása	5
2.3. Ljapunov-exponens	6
2.4. Ragacsos zónák	8
2.5. Időben változó paraméterű rendszerek vizsgálata	8
3. Plazmafizikai háttér	9
3.1. Mágneses erővonalak tokamakokban	9
3.2. A tokamak geometriát modellező leképezés	11
4. Eredmények	13
4.1. Stacionárius Poincaré-metszet	13
4.2. Snapshot tóruszok felbomlása	15
4.3. Különböző rátájú paraméterváltozások vizsgálata	23
5. Összefoglalás	25
6. Hivatkozások	27
A. Függelék	29

1. Bevezetés

Sokféle természeti jelenség vizsgálatánál és leírásánál játszik lényeges szerepet a rendszer kaotikus viselkedése, a bolygómozgástól kezdve a folyadékok nagy sebességű áramlásán keresztül az időjárásig [1]. Lényeges a káosz vizsgálata plazmafizikában is, ahol a tokamakok, sztellarátorok a jövő zöld energiatermelésének lehetőségét hordozzák magukban. A plazma összetartásával kapcsolatos kutatásokra nagy szükség van, hiszen a fúziós energia-előállítás elérésének előfeltétele az összetartási idő növelése [2]. Annak ellenére, hogy a káosz jelenléte hosszú távú előrejelezhetetlenséggel jár együtt, tokamakokban kívülről szabályozott kaotikus jelenségekkel lehetséges meghosszabbítani a plazma összetartását [3], ún. ergodikus mágneses limiterек segítségével, amik a berendezésben kárt tevő plazma-fal kölcsönhatások kontrollálására is használhatók.

Napjainkban egyre több figyelmet kap az olyan kaotikus rendszerek vizsgálata is, ahol a fázisteret nem csak különböző paraméter értékek mellett térképezik fel - például bifurkációs diagrammal - hanem a trajektóriák mellett a rendszer valamely paramétere időben változik [4, 5]. Ezzel lehet modellezni többek között a klímaváltozást, hiszen a légkörben fellelhető szén-dioxid évek óta növekedő mennyiség [6, 7]. Ehhez viszont szükséges bizonyos, korábban már sokszor használt káoszelméleti fogalmakat általánosítani, átértelmezni úgy, hogy értelmet nyerjenek az időben folyamatosan változó rendszerben is.

A következőkben egy olyan leképezéssel foglalkozok, amivel a tokamakban futó mágneses erővonalak modellezhetők, ezzel betekintést nyerve a töltött részecskék mozgásába a plazmában [8]. Egy ergodikus limitert is a rendszerre kapcsolva a limiter- és plazmaáram arányának megfelelő paramétert fogom az időben változtatni, ezzel vizsgálva a kváziperiodicitás megszűnését és a káosz megjelenését a rendszer bizonyos tartományain. Az ún. snapshot tóruszok időbeli felbomlásához mérőszámokat is rendelek, a közeli trajektóriák eltávolodási rátáját jellemző Ljapunov-exponenst, és a (több tóruszból álló) szigetláncok felbomlását jellemző időpontot. Megfigyelem azt is, hogy különböző paraméterváltozási ráták mellett hogyan változik egy adott szigetlánc felbomlása, és ezek alapján vizsgálom a változási ráta és a felbomlási pont egymáshoz való viszonyát is.

A dolgozatban vizsgált jelenségek részletezése előtt először áttekintem a megértéshez szükséges káoszelméleti és plazmafizikai fogalmakat, majd a vizsgálati módszereket kifejtve bemutatom az eredményeket. Végül röviden összegzem a tapasztalatokat.

2. Káoszelméleti háttér

A természetben sokféle folyamat mutat kaotikus viselkedést, olyannyira, hogy a káosz sokkal tipikusabb viselkedés, mint a periodicitás. Fizikai értelemben az a folyamat kaotikus, ami determinisztikus, de nem ismétli önmagát, érzékeny a kezdőfeltételekre, és a fázistérben fraktálszerkezetet mutat. Ilyen folyamatok trajektóriái kitöltik a fázistér elérhető tartományát, azaz ergodikusak [1]. A dolgozatban vizsgált problémában konzervatív rendszerek káoszával foglalkozom, amihez először bemutatom a kaotikus rendszerek fázistérének jellemző felépítését.

2.1. Nem kaotikus Hamiltoni rendszerek fázistere

Széles körben találkozhatunk konzervatív rendszerekkel, melyek dinamikája leírható Hamilton-függvénnyel, mint a klasszikus súrlódásmentes mechanikai rendszerek, vagy a

plazmák mágneses erővonalai [9, 10]. Ilyen rendszerekben a mozgás f db általános hely- és f db impulzus koordinátával írható le, ahol f a rendszer szabadsági fokainak száma, és a mozgásegyenletei elsőrendű differenciálegyenletek [11]. A mozgás leírásához elegendő ismerni annak Hamilton-függvényét és a kezdőfeltételeket, innen a differenciálegyenleteket megoldva megkapjuk az általános koordináták és impulzusok időfüggését. Mivel $dH/dt = \partial H/\partial t$, ha a Hamilton-függvény expliciten nem függ az időtől, akkor időben állandó marad, ez az energiamegmaradás törvénye. A konzervatív rendszerek további jellemzője, hogy a disszipatív hatások hiányában a fázistérfogat-összehúzóráta 0, vagyis érvényes a Liouville-tétel [10].

Míg disszipatív rendszerben idővel minden kezdőfeltétel ráhúzódik egy attraktorra, addig konzervatív rendszerekben bizonyos kezdőfeltételekhez periodikus, másokhoz kváziperiodikus mozgás tartozik. Utóbbiakhoz a fázistérben invariáns görbék (vagy pont-halmazok) tartoznak, amiket tóruszoknak nevezünk. Az elnevezés eredete, hogy a kváziperiodikus mozgásokat tekinthetjük f különböző frekvenciával felírható periodikus mozgásnak, melyek közül egyik sem valamely másik frekvencia többszöröse, vagy ilyen többszörösök lineárkombinációja, hiszen az visszaadná a tisztán periodikus esetet ($f \geq 2$) [9]. Ezek a periodicitásuk miatt jellemezhetők egy-egy szögváltozóval, tehát a fázistérbeli hely f db szöggel adható meg, azaz a kváziperiodikus mozgás egy f dimenziós tóruszal topológiailag egyenértékű felületen történik.

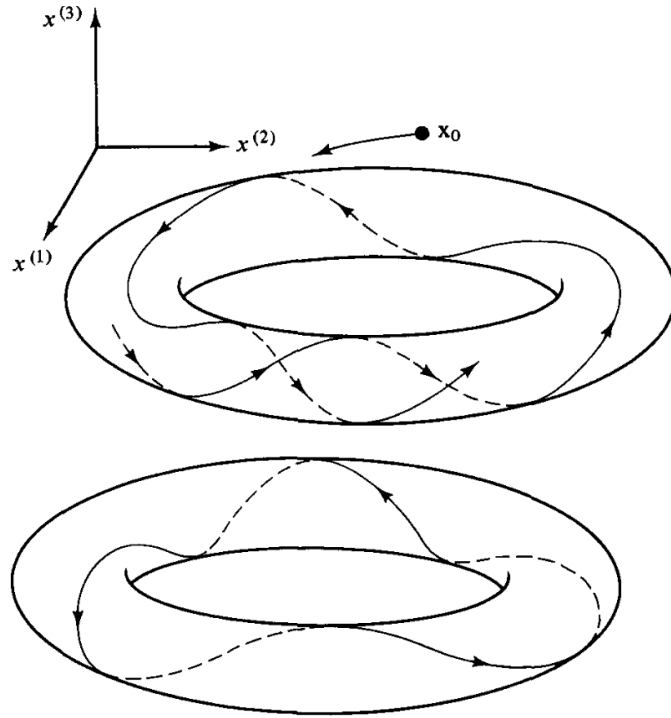
Vizsgáljunk egy kváziperiodikus mozgást 4 dimenziós, konzervatív fázistérben, $f = 2$ mellett. Az energiamegmaradást kihasználva az egyik változó kiküszöbölhető, és a fázistér 3 dimenzióra redukálható. Így a trajektória egy 3-dimenziós tórusz felületén, annak kistengelye és nagytengelye körül körbefordulva fog haladni, ahogy az az 1. ábrán látható. Legyen a kistengely körüli körbefordulás frekvenciája ω_1 , a nagytengely körüli pedig ω_2 . Ekkor definiálhadjuk a trajektóriára a csavarási számot, ami ennek a két frekvenciának a hányadosa:

$$\nu = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Ez azt mondja meg, hogy egy, a nagytengely körüli teljes kör alatt hányszor fordult körbe a kistengely körül a trajektória. Ha $\nu = p/q$; $p, q \in \mathbb{N}^+$ csavarási szám racionális, akkor a trajektória önmagába záródik, periodikus mozgásról van szó, míg irracionális csavarási szám esetén nem tapasztalunk visszatérést, a trajektória a tórusz bármely pontját megközelíti, és a mozgás kváziperiodikus [1].

Van, amikor nem célravezető a 3-dimenziós fázistér közvetlen vizsgálata, ilyenkor egy leképezéssel lehet tovább redukálni a fázistér dimenzióját, ilyen például a stroboszkopikus leképezés vagy a Poincaré-metszet. A leképezés fogalma az absztrakt definíció szerint egy függvény, melynek értelmezési tartománya és képe is egy-egy (absztrakt) halmaz, a kettő természetesen lehet átfedő, és meg is egyezhetnek. Beszélhetünk folytonos leképezésekről, például egy autó sebességének időfüggése, és diszkrét leképezésekről, ugyanennek az autónak a sebességét két percenként leolvassva. Az utóbbi módszert - egy bizonyos mennyiség azonos időközönkénti mintavételezését - nevezzük stroboszkopikus leképezésnek. Egy másik lehetőség folytonos rendszer diszkrét leképezésére az ún. Poincaré-metszet, ehhez vesszük a fázistérnek egy adott felülettel való metszését. A metszeten egy adott pont képét a pontot tartalmazó trajektóriának a felületet időben egymást követő metszései adják meg, azaz a leképezést a trajektória következő visszatérése határozza meg, ahogy a 2. ábrán is látható.

Diszkrét leképezésen egy racionális tóruszhoz n db diszkrét pont tartozik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a mozgás n -szeres periodikus ciklus, és n leképezési lépés után visszajut



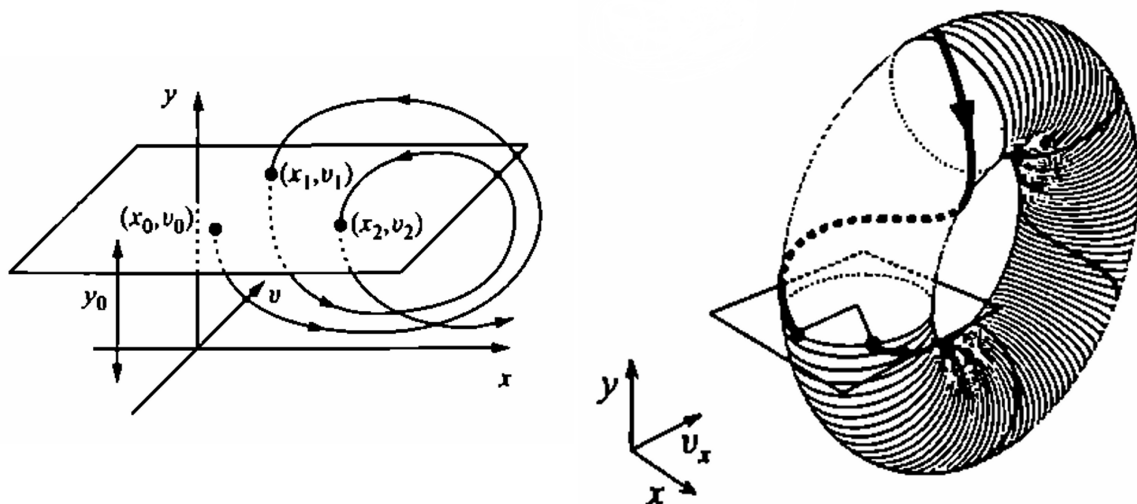
1. ábra. Trajektóriák a tóruszon. A felső ábra egy olyan kezdőfeltételt mutat, amihez kváziperiodikus mozgás tartozik, míg az alsó ábrán periodikus mozgás látható, a trajektória önmagába záródik. Forrás: [9]

az eredeti pontba a trajektória. Ekkor a pontok számát a $\nu = p/q$ -t relatív prím alakban felírva q fogja meghatározni, p pedig a körüljárást adja meg. Irracionális tóruszoknál a leképezésen nem lesz ilyen visszatérés a kezdeti ponthoz, ezért egyetlen kezdőfeltétel kirajzolja a tórusz teljes folytonos görbáját, ahogy azt a 2. ábra mutatja. Az alapján, hogy milyen gyorsan töltődik ki a tórusz felülete, lehet értelmezni „kevésbé” irracionális számokat, amikor a csavarási szám jól közelíthető racionális számmal, lánctört alakban. Ekkor közelítő visszatérést figyelhetünk meg, leképezésen ezért csak lassan rajzolódik ki a fázistérben a tóruszhoz tartozó folytonos vonal. [1]

2.2. Hamiltoni rendszerek perturbációja, a káosz kialakulása

Ha egy kezdetben konzervatív, nemkaotikus rendszert kis perturbáció ér, akkor annak a hatását legjobban a racionális tóruszok fogják érezni, hiszen az egzakt visszatérés megszűnik, a perturbáció hatása felhalmozódik. Az egyre erősödő eltérés következtében ezek a tóruszok fel fognak bomlani, de az itt megjelenő káosz még csak mikroszkopikus, hiszen mindkét oldalról körbevehetik irracionális tóruszfelületek is, ahol a perturbáló hatás kiátlagolódik, így azok még túlélnek azt [1].

A felbomlás után az eredeti tórusz helyén fixpontok maradnak, a Poincaré–Birkhoff-tétel értelmében elliptikus és hiperbolikus fixpontok felváltva. A hiperbolikus fixpontok stabil és instabil sokaságai metszik egymást ún. homoklinikus pontokban, míg a különböző hiperbolikus fixpontok sokaságai heteroklinikus metszéseket adnak, ahogy az a 3. ábrán is látható [11]. Ezek jelenléte mutatja, hogy ebben a vékony sávban kaotikus mozgás alakul ki [1]. Amikor káosz és a periodikus, kváziperiodikus mozgás egyszerre van jelen, azt osztott fázistérnek nevezzük.



2. ábra. Két dimenziós Poincaré-metszet készítése. Bal oldal: egy trajektória egymást követő metszései a fázistér adott felületével. Jobb oldal: egy irracionális csavarási számú tórusz és a képe Poincaré-metszeten. Forrás: [1]

Az elliptikus fixpontok körül kisebb tóruszok alakulnak ki, amik szigetláncot alkotnak, és a mozgás rajtuk szintén kváziperiodikus. Viszont a perturbáció jelenléte miatt nem mindenhol alakulhatnak ki tóruszok, közöttük ismét kaotikus sávokat lehet látni. Ezekben ismét szigetláncok keletkeznek a korábbival önhasonló módon, így ún. kövér fraktálszerkezet alakul ki a fázistérben [1].

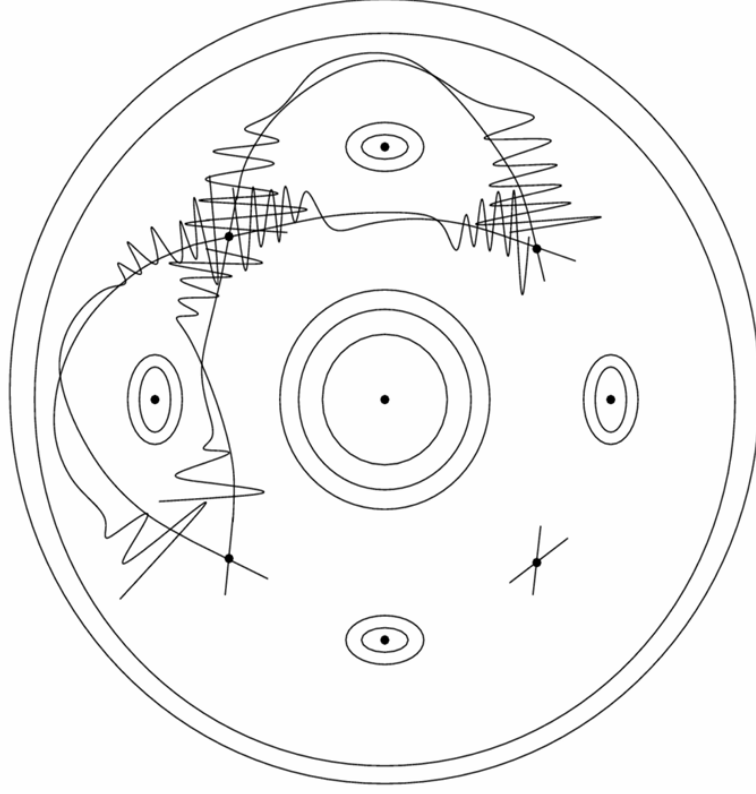
Azt, hogy a perturbáció további növelésével mely irracionális tóruszok bomlanak fel vagy maradnak kváziperiodikusak, azt az ún. KAM-tétel segítségével lehet meghatározni, és az adott perturbáció mellett fel nem bomló tóruszokat KAM-tóruszoknak nevezzük [11]. A tétel csak nagyon kis perturbációk esetében érvényes, míg a valóságban sokkal nagyobb hatások is jelen vannak. Ahogy a perturbáció erőssége nő, egyre több tórusz felbomlik, az ezekből keletkező kaotikus tartományok egyre jobban összeolvadnak, az elliptikus szigetek aránya pedig egyre inkább csökkenni fog. Ha a kaotikus tartományok már a fázistér egy jelentős területét kitöltik, akkor makroszkopikus káoszról beszélünk, ezt numerikus szimulálással lehet vizsgálni.

Mivel a rendszer konzervatív, ezért az energia megmarad, továbbá teljesül az ergodicitás is, miszerint a fázistérbeli átlag megegyezik az időbeli átlaggal [12]. Ennek a következménye az, hogy minden kezdőfeltétel elegendően hosszú idő után bejárja a fázistér számára elérhető részét, és az is, hogy kellően nagy minta vizsgálata betekintést nyújt a hosszútávú viselkedésbe.

2.3. Ljapunov-exponens

Az eddigiekben az osztott fázistér nemkaotikus részéről, és a káosz kialakulásáról beszéltem részletesebben, a következőkben a kaotikus tartományok vizsgálatáról is szeretnék szót ejteni. A kaotikus sáv definiálható a rajta lévő végtelen sok instabil periodikus pálya, és azoknak a homokilinkus és heteroklinikus metszései az összességüként [1, 9]. A káosz tulajdonságaihoz, mint a szabálytalanság vagy kezdőfeltételekre való érzékenység, egyes mérőszámokat is lehet társítani, az utóbbihoz tartozik a Ljapunov-exponens.

A kaotikus sávban sűrűn helyezkednek el a fixpontokból és cikluspontokból álló hiperbolikus pályák [1]. Egy hiperbolikus fixpont kis környezetében linearizálható a rendszer,



3. ábra. A perutrbáció hatására felbomlott tórusz környezete. Láthatóak az elliptikus fixpontok körül kialakuló tóruszok, valamint ezen fixpontok stabil és instabil sokaságai, melyek sokszorosan metszik egymást. Forrás: [11]

és definiálható az ún. stabilitási mátrix ennek a sajátirányai mentén exponenciális közeledést vagy távolodást tapasztalunk a fixponthoz képest. Általános trajektóriára már rövid idő után is ezek közül az utóbbi lesz a dominánsabb, ez a közeli kezőfeltételek eltávolodását eredményezi.

Nézzünk egy $\mathbf{x}_0$ fázistérbeli vektort mint kezdőfeltételt, és egy diszkrét $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ leképezést (mint például a rendszernek egy Poincaré-metszete). Ha a leképezésnek $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ a Jacobi (azaz stabilitási)-mátrixa, $\mathbf{x}_n$ a vektor képe n leképezési lépés után, és az $\mathbf{x}_0$ -tól infinitezimálisan kis eltérésű kezdőfeltétel $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$, akkor a kis eltérés időfejlődése a következőképp írható:

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \cdot \delta\mathbf{x}_n = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\mathbf{J}(\mathbf{x}_{n-1}) \cdot \delta\mathbf{x}_{n-1} = \dots = \mathbf{J}^{n+1}(\mathbf{x}_0) \cdot \delta\mathbf{x}_0,$$

ahol az utolsó egyenlőséggel egy jelölést vezettem be a szorzatra:

$$\mathbf{J}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_{n-1})\mathbf{J}(\mathbf{x}_{n-2}) \dots \mathbf{J}(\mathbf{x}_0).$$

Itt azt használtam ki, hogy nagyon kis eltérés esetében a leképezésnek jó közelítése az adott helyen érvényes stabilitási mátrix. A $|\delta\mathbf{x}_n|/|\delta\mathbf{x}_0|$ arány fogja megadni, hogy a kis perturbáció az időfejlődés során nőni vagy csökkenni fog. A mérőszámot a $\delta\mathbf{x}_0$ vektor helyett célszerű egy irányvektorral jellemezni, ezért $\mathbf{u}_0 = \delta\mathbf{x}_0/|\delta\mathbf{x}_0|$ bevezetésével a lokális Ljapunov-exponens a következőképp definiálható:

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|\delta\mathbf{x}_n|}{|\delta\mathbf{x}_0|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{J}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0|,$$

ami az exponenciális közeledés vagy távolodás rátáját adja meg, és d dimenzióban legfeljebb d különböző Ljapunov-exponens tartozik minden kezdőfeltételhez. Ez a definíció kiterjeszthető folytonos időre is, elsőrendű közönséges differenciálegyenletrendszerek esetében, ott n szerepét az idő fogja betölteni, $\delta \mathbf{x}_n$ helyét az időfüggő $\delta \mathbf{x}(t)$ veszi át. [9]

Az így definiált mérőszámok láthatóan lokális mennyiségek, viszont lehet definiálni egy ún. átlagos Ljapunov-exponenst is, ezeknek a térbeli átlagolásával. Konzervatív rendszerek kaotikus tartományán egyenletes a természetes eloszlás, ezért az átlagérték megegyezik a lokális mennyiséggel.

2.4. Ragacsos zónák

Ragacsosnak nevezzük az (állandó paraméterű) fázistér azon tartományát, ahova ha bekerül egy kaotikus trajektória, akkor azt csak hosszú idő múltán hagyja el, a trajektória „beleragad”. A jelenséget először 1971-ben észlelték, stabil dinamikájú szigetek (koncentrikus tóruszokból álló tartományok) peremén [13]. Ebben a ragacsos zónában a dinamika nagy skálán nem kaotikus, és kialakulása szoros kapcsolatban áll a legkülső KAM-tórusz felbomlásával. Ekkor a még fel nem bomlott tórusz mindkét oldalán megjelent a káosz, és a KAM-tórusz felbomlása után a helyén maradó fraktálszerkezetben lévő kis hézagok miatt ha egy trajektória bejut a volt tórusz belső tartományára, akkor onnan csak hosszú idő után jut vissza a kaotikus tartomány többi részébe. A felbomást okozó perturbáció növelésével a hézagok mérete is növekszik, ezért a beragadás ideje csökkenni fog. [14]

2.5. Időben változó paraméterű rendszerek vizsgálata

Már korábban is vizsgáltak fizikusok olyan, például mechanikai rendszereket, amelyben a rendszert leíró valamely μ paraméter lassan, adiabatikus módon változik. Ekkor a korlátos mozgást jellemző T idő alatt elhanyagolhatóan kicsi μ változása. Ilyen problémák megoldásakor érdemes megkeresni az ún. adiabatikus invariánst, azt a mennyiséget, ami μ változása mellett konstans marad [10]. A adiabatikus invariáns módszere a fizika több területén is alkalmazható, a molekulák dinamikájától kezdve az időjárás előrejelzéséig [15]. Ha μ a korábbiakban említettnél gyorsabban változik, azaz a rendszer belső időskálájához képest is szignifikáns annak változása, akkor a használt közelítések érvényüket veszítik, és az adiabatikus invariáns módszerével nem lehet megközelíteni a kérdéskört. Ilyen problémákkal is széleskörben találkozunk, például már egy egyszerű kívülről lökdösött harmonikus oszcillátor időfejlődése is lehet nemadiabatikus.

Gyorsan változó paraméter esetén az állandó paraméterű fázistérben megjelenő hiperbolikus-elliptikus fixpontok helyzete megváltozhat az időfejlődés során. Ahogy elmozdulnak a fázistérben belőlük ún. snapshot hiperbolikus-elliptikus pontok lesznek, a fázistér elemei időfüggővé válnak. Ilyenkor a tóruszok, kaotikus tartományok is változtatják az alakjukat, ezért snapshot tóruszoknak és snapshot kaotikus tartományoknak nevezzük őket [5].

Mivel a hiperbolikus pontok maguk is mozognak, ezért az ezekhez nagyon közeli kezdőfeltételek közelmáradoja nem garantálható, maga a hiperbolikus pont eltávolodhat a kiindulási helyétől annyira, hogy a lineáris közelítés már nem lesz elegendő. Mivel ez a kiindulási alap a Ljapunov-exponens számításánál, ezért szükséges ennek a fogalomnak a változó paraméter melletti általánosítása.

Ehhez két közeli pont helyett sok, egymáshoz közeli pontpárnak az átlagos viselkedését érdemes vizsgálni, ami az ergodicitás megszűnése miatt lesz kézenfekvő. Ugyanis

az egyedi trajektóriák hosszú idejű átlaga már nem értelmezhető, azonban egy sokaság feletti átlag igen. Továbbra is fennál, hogy a fázistér osztott, így nem mindegy, hogy kaotikus tartományról vagy tóruszokról választjuk a pontpárokat, sőt, az időfüggés miatt egymástól távoli tóruszok időbeli fejlődése is lényegesen eltérhet, ezért a vizsgált ponthalmaznak egy jól definiált sokaságról kell származnia [5].

A korábbi Ljapunov-exponens definíciótól eltérően, a közeli pontpárok távolságának logaritmusának nem időbeli, hanem térbeli, a sokaságon értelmezett átlagát követjük időben, ez az ún. sokaságtárolt páronkénti távolság (ensemble averaged pairwise distance, EAPD) [5, 16]:

$$\rho_n = \langle \ln r_n \rangle,$$

ahol r_n egy pontpár távolsága diszkrét időben n lépés után. Ez egy görbét ad az idő függvényében, aminek minden pontjában az érintő értelmez egy pillanatnyi Ljapunov-exponenst, tehát $\lambda_n = \dot{\rho}_n$, ahol a derivált diszkrét időben van kiértékelve. Akkor beszélhetünk kaotikus viselkedésről, ha hosszabb távon valósul meg a pontpárok (átlagos) exponenciális eltávolodása. Ebben az esetben λ egyszerűen a ρ görbére illesztett egyenes meredeksége.

Ha a rendszer paramétere időben változik, akkor a ragacsos zónák viselkedése a korábbiakban tárgyaltaknál is összetettebb, mivel maga a snapshot kaotikus tartomány is mutathat nemkaotikus viselkedést egyes régiókban. Ezekben az ún. időfüggő nemkaotikus tartományokban a trajektóriák vagy gyorsan kaotikussá válnak, vagy sokáig maradhatnak nem kaotikusak is. Utóbbiak, az ún. időfüggő nem-hiperbolikus tartományok lehetnek az elmélet szerint a ragacsos zónák általánosításai paraméterváltozás mellett [17]. Ilyen tartományok megjelenését nemrég egy galaxismodellben is megfigyelték [18].

3. Plazmafizikai háttér

Napjainkban népszerű kutatási irány a plazmafizika, mert a jövő zöld energiatermelése szempontjából sokan fektetik a reményeiket a magfúzióba. Ilyen lehetséges fúziós berendezések a sztellarátorok és a tokamakok, melyekben nagyon magas hőmérsékletű az anyag, ami plazmaállapotba kerül, és bizonyos hőmérséklet mellett ($T \sim 10^8$ K) energetikailag kedvezőbb a könnyű atommagok fúziója. Ez a folyamat energia leadásával jár, nem termel szén-dioxidot, és a szükséges alapanyagok szinte korlátlanul rendelkezésünkre állnak. [2]

Az ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) egy nemzetközi együttműködésű magfúziós kísérlet, amely Franciaországban található. Jelenleg építés alatt áll, és az elkészülte után az eddigi legnagyobb tokamak lesz a világon. A jelenlegi tervek alapján 2036-ra működésbe lép a berendezés, és három évre rá megkezdődhetnek a fúziós kísérletek is [19]. Bizonyos feltételezések szerint a kísérletben szerzett tapasztalatok segítségével már megvalósítható lesz egy energiatermelési célú fúziós reaktor építése is.

3.1. Mágneses erővonalak tokamakokban

A tokamakok tórusz alakú fúziós berendezések, melyekben a plazma adott térfogatba zárását annak elektromos árama valósítja meg. A tökéletesen összetartott plazma leírásához az egyensúlyi magnetohidrodinamika (MHD) eszköztára használható. Eszerint az összetartó plazmában egyensúlyi állapotban a mágneses erővonalak olyan zárt felületeken futnak, amiken konstans a nyomás, a poloidális mágneses fluxus és az áramsűrűség [20].

Ezeket mágneses felületeknek nevezik, amelyek egymásba ágyazott tóruszfelületek, így a rendszernek toroidális szimmetriája van, és ennek köszönhetően a mágneses erővonalakra vonatkozó egyenletek Hamiltoni dinamikát írnak le [3].

A plazmában lévő töltött részecskék a mágneses erővonalak mentén csavarvonal-szerű mozgást végeznek, jellemzően kis, ún. Larmor-sugárral és Larmor-frekvenciával [21]. Ennek a sugárnak a nagysága elhanyagolhatóan kicsi a tokamak berendezéseinek méretskálájához képest, és a frekvencia is kellően nagy ahhoz, hogy jó közelítéssel azt lehet mondani, hogy a részecskék követik a mágneses erővonalakat. [17]. A továbbiakban ezt a közelítést fogom használni. A tokamakokban egy adott pozíció megadásához Decartes-koordináták helyett toroidális koordináta-rendszert szokás használni, melyben a koordináták a toroidális szög (ϕ), poloidális szög (θ), és a kistengely középpontjától való távolság (r). A geometriai leíráshoz fontos fogalom még a sugárány (aspect ratio), a tórusz nagytengelyének és a plazma sugarának az aránya. Az ITER-típusú tokamakok sugárányának nagy számítás.

A plazma biztonsági tényezőjét is fontos megadni, ami azt mondja meg, hogy adott tóruszfelületen az erővonal toroidális elfordulásához mekkora poloidális szögelfordulás tartozik:

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\theta},$$

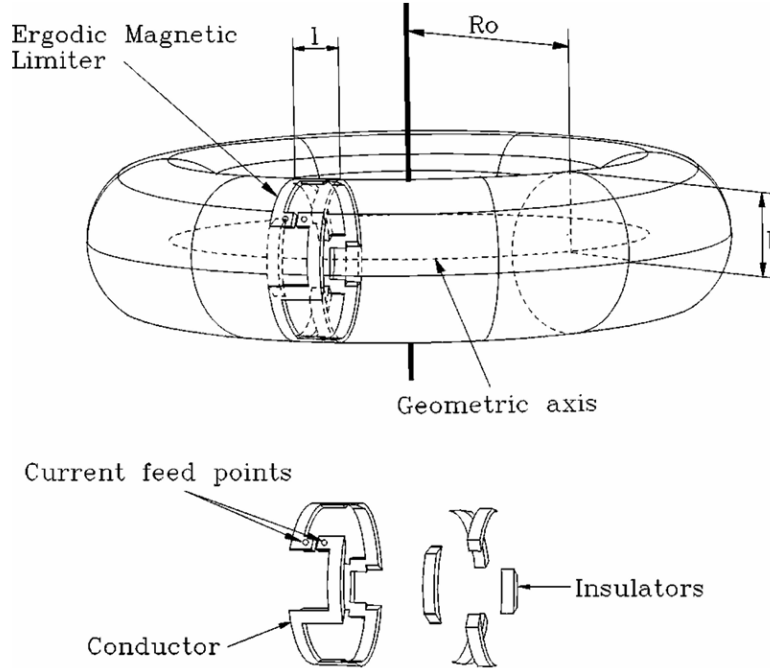
ami r -függő lesz, és alakját a plazmaáram eloszlása határozza meg [22]. Az elnevezése onnan származik, hogy $q \geq 1$ szükséges a hosszabb távú összetartáshoz [3]. Észre lehet venni a definíciókat összehasonlítva, hogy a tokamak biztonsági tényezője pont a ν csavarási szám reciproka.

Az egymásba ágyazott tóruszfelületek ideális elrendezése már a plazmában lévő kis elváltozások hatására (vagy külső behatásra) sem marad meg teljesen. A felületek mágneses szigetek láncolatává szakadnak szét, amelyek felületét követve lehetővé válik egy radiális irányú hőáramlás [23]. Ez diszrupcióhoz, azaz a plazma mágneses összetartásának hirtelen elvesztéséhez vezethet [24]. Azért sem kedvező egy diszrupciós esemény, mert a közben elfutó elektronok a plazma falával ütközve azt megolvaszthatják, vagy az anyagból atomokat kilökve csökkentik a plazmaanyag tisztaságát. Diszrupciónak a teljes mértékű kizárása nem lehetséges, viszont az esélyeiknek és a következményeik súlyosságának a csökkentése többféle módszerrel is elérhető. Ahogy azt a későbbiekben diszkutálom, a mágneses mező perturbálásával elérhető, hogy a tokamak berendezésének anyagában kárt tevő hirtelen, magas fluxusú energia löketek nagysága csökkenjen a plazma összetartását megtartva [25].

Míg az egyensúlyi plazma leírható az MHD eszközeivel, addig azok a berendezések, amik megtörik a szimmetriát, már olyan mágneses teret keltenek, amit az egyensúlyi állapot perturbációjaként kell figyelembe venni - ilyenek például a rezonáns helikális tekercsek, vagy az ergodikus mágneses limiterrek [3]. Az előbbi megvalósítását technikai részletek nehezítik, szemben az ergodikus mágneses limiterekkel. Ezek kisebb felületét fedik le a plazmakamrának, és rácsszerűen a kamrára tekert áramhurkokból állnak, ahogy az a 4. ábrán is látható.

Kísérleti tapasztalatok alapján ilyen limiterrek alkalmazásával a plazma határán kaotikus viselkedésű erővonalak jelennek meg, és ezzel csökkenthető a plazma és a tokamak fala közötti interakció, hiszen a részecskék az erővonalak ergodicitása miatt nem egy kis területre fókuszálva csapódnak be plazma instabilitások során. Továbbá növelhető a plazma összetartása, és potenciálisan a diszruptív instabilitások megelőzésében is részt vehetnek [3]. Viszont a kaotikus erővonalak vastag rétege maga is diszrupciókat hozhat

létre, ezért fontos a mágneses erővonalak kaotikus viselkedésének részletes ismerete, és annak irányítása, amikor lehetséges.



4. ábra. Ergodikus mágneses limiter a tokamak körül. Forrás: [26]

3.2. A tokamak geometriát modellező leképezés

A tokamakban futó mágneses erővonalak viselkedését Poincaré-metszettel lehet két dimenzióra redukálni a konfigurációs térben. A rendszer toroidális szimmetriáját kihasználva rögzítünk egy toroidális szöget, és ezen poloidális metszetet készítve bejelöljük azokat a pontokat, ahol az (adott irányból érkező) mágneses erővonalak metszik a síkot. Ez egy diszkrét leképezéssel fogja megadni a következő metszést. A mágneses összetartás miatt a keletkező leképezés területtartó lesz, így a rendszer technikai szempontból kezelhető úgy, mint a Hamilton-egyenletből származó konzervatív rendszerek [17].

A tokamakokban a mágneses erővonalak viselkedésének vizsgálatára többféle leképezési modell létezik [27, 28]. A vizsgált problémában a plazmaszéli, kaotikus effektusok lényegi szerepet játszanak, ezért olyan leképezést érdemes választani, ami ilyen szempontból egyezést mutat a kísérleti tapasztalatokkal, és figyelembe veszi az ergodikus mágneses limiter hatását is. 2000-ben Ullmann és Caldas dolgozott ki egy olyan leképezést, ami megfelel ennek az elvárásnak [28]. Ez két leképezés kompozíciójaként áll elő: az első a mágneses erővonalak fejlődését írja le egyensúlyi állapotban, a második ennek a perturbációjaként veszi figyelembe a mágneses limiter hatását.

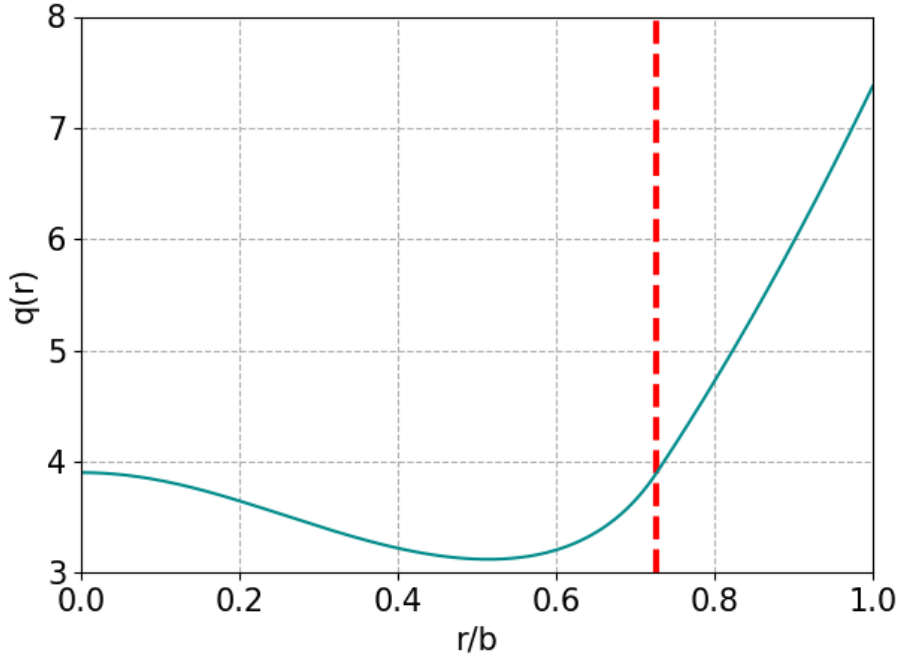
A plazmafizikában nagy sugárárányú tokamakok geometriáját hengerrel közelítik bizonyos helyzetekben. Ez a kiegyenesített kép elhanyagolja a toroidális geometria hatását az erővonalakra, amit a leképezés egy korrekció formájában vesz figyelembe. Ha θ_n és r_n a kezdeti metszési pont poloidális és radiális koordinátái n lépés után, akkor az egyensúlyi leképezés:

$$\begin{aligned} r_{n+1}^{\text{eq}} &= \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n}, \\ \theta_{n+1}^{\text{eq}} &= \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_n^{\text{eq}})} + a_1 \cos \theta_n, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol $q(r)$ a biztonsági tényező profil, és $a_1 = -0.04$ a toroidális korrekció erőssége. Az a_1 paraméter egy végtelen sor első tagjának együtthatója, ami jó közelítést adja a toroidális effektusoknak, ez korrekcióként adódik a leképezéshez [28]. Látható, hogy az egyensúlyi leképezést nagyban befolyásolja, hogy milyen $q(r)$ függvényt választunk. A következőkben olyan biztonsági tényező-profillal foglalkozunk, ami tipikus példája a kísérletekben is előfordulónak [8]:

$$q(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - \Theta(a - r) (1 + \beta' \frac{r^2}{a^2}) (1 - \frac{r^2}{a^2})^2}, \quad (2)$$

ahol a paraméterek $q_a = 3.9$, ami a függvényérték a plazma határánál, a a plazma sugara, ami kicsivel kisebb a tokamak kistengelyének sugaránál, és $\beta' = 1$ [8], $\Theta(x)$ pedig a Heaviside-függvény. Az így kapott $q(r)$ függvény az 5. ábrán látható. A biztonsági tényezőnek $r \approx 0.515b$ közelében van minimuma, a plazma határán kívül ($r > 0.727b$) pedig másodfokú függvény szerint nő, és $r = 1$ a tokamak külső fala.



5. ábra. A biztonsági tényező sugárfüggése (b egységekben). Az ábrán piros, szaggatott vonal jelöli a plazma határát.

A limiter a következőképp módosítja az egyensúlyi leképezést:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_{n+1}^{\text{eq}} - C \left(\frac{r_{n+1}^{\text{eq}}}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_{n+1}^{\text{eq}}), \\ r_{n+1}^{\text{eq}} &= r_{n+1} + \frac{mCb}{m-1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_{n+1}^{\text{eq}}), \end{aligned} \quad (3)$$

ahol b a tokamak kistengelyének sugara, m a poloidális módusszám, ami a mágneses limiter jellemzője (a továbbiakban $m = 3$ -at fogok használni), és C egy dimenziótlan konstans. Láthatóan a sugárra vonatkozó egyenletben csak impliciten szerepel r_{n+1} , ennek csak numerikus megoldása adható meg, például a Newton-módszer segítségével.

A C konstansból kiemelhető az $\varepsilon = I_l/I_p$ limiter áram és plazmaáram aránya, mint perturbáció [8], és így:

$$C = \frac{2mla^2}{R_0q_ab^2} \varepsilon.$$

A (3) egyenlet dimenziótlan alakban írható, ha a sugarat b egységekben mérjük. Ezzel a tokamak nagytengelyének sugara $R_0 = 30/11$, a plazmasugár $a = 8/11$, a limiter vastagság $l = 8/11$. Így a perturbációfüggő konstans $C \approx 0.2167 \varepsilon$.

A felhasznált paraméterek a [8] cikket követik. Ahogy ott is szerepel, a viszonylag nagy sugárarány (R_0/a) miatt azt lehet mondani, hogy a tórusz poloidális görbülete nem rendelkezik nagy befolyással, ezért jó közelítéssel át lehet írni a poloidális síkot merőleges koordináta-rendszerre:

$$\begin{aligned} x &= \theta, \\ y &= 1 - r/b, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol x -et a $[0, 2\pi]$ intervallumon veszem, az $y = 1$ egyenes jelenti a plazma középpontját, és $y = 0$ a tokamak fala.

4. Eredmények

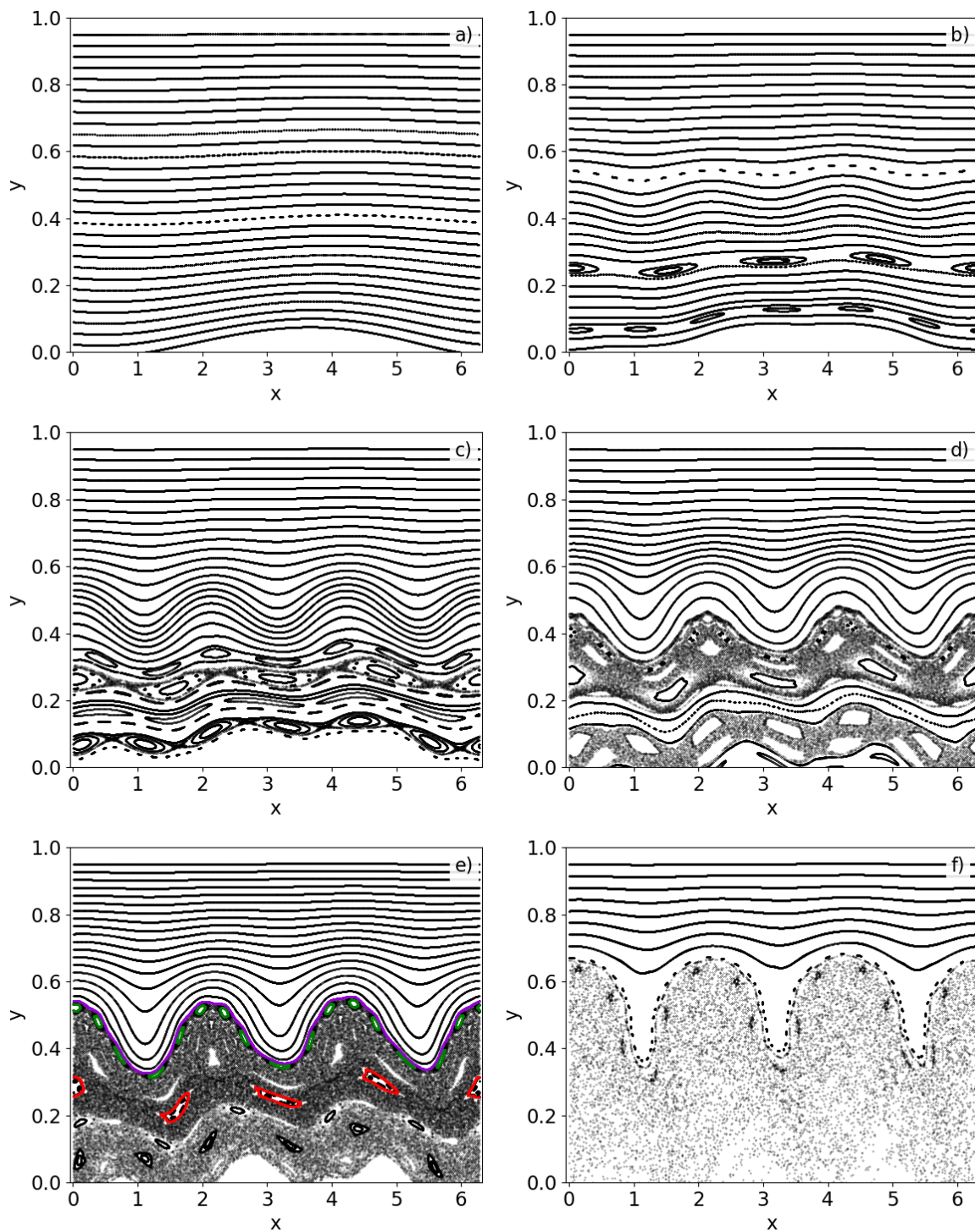
Ebben a szakaszban a leképezés viselkedését fogom részletesen vizsgálni, először időfüggetlen paraméterű esetben ($\varepsilon = \text{const.}$), hogy megfigyeljük a szigetláncok, kaotikus tartományok megjelenését különböző paraméter értékekre. Ezután a fázistér kiválasztott elemeit fogom nyomon követni a rendszerparaméter, a plazmaáram és limiter-áram arányának (ε) növelése során. Ennek kísérleti megvalósulása lehet például a plazmaáram belső folyamatok miatti lecsökkenése.

4.1. Stacionárius Poincaré-metszet

Az (1) és (3) egyenletek kompozíciója adja a vizsgált leképezést, amit 6 különböző ε paraméter mellett ábrázoltam, minden kezdőfeltételt 5000-szer léptetve, a (4) egyenletek által megadott derékszögű koordinátázásban (6. ábra).

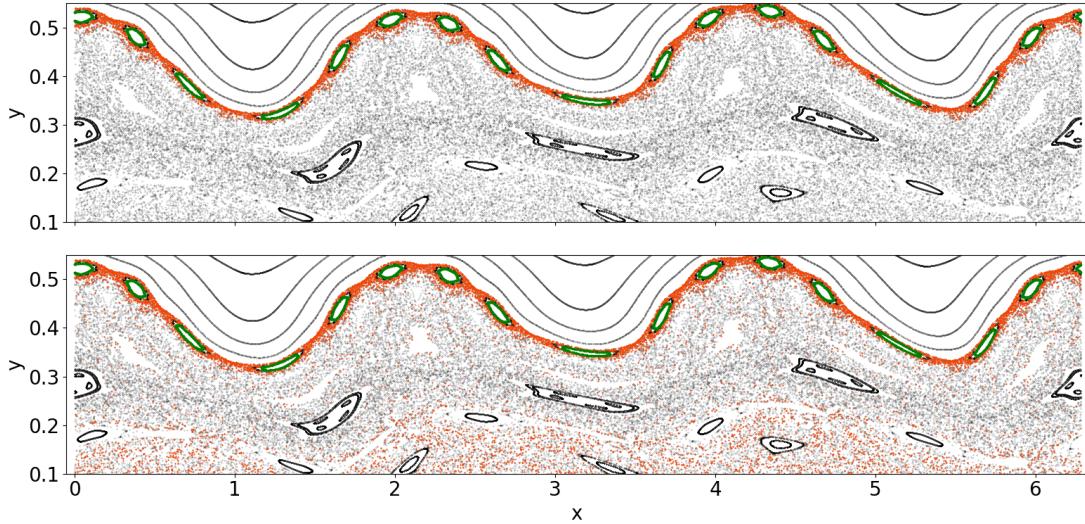
Az $\varepsilon = 0$ esetben az (a) panelen látható közel vízszintes görbék tóruszoknak felelnek meg (polárkoordinátákban $0 = 2\pi$, azaz ott ténylegesen láthatnánk a görbék záródását), és ahogy vártuk, koncentrikus tóruszfelületeken futnak a mágneses erővonalak, amik csak a fal közelében torzulnak jelentősebben a $q(r)$ függvény változása miatt. Kis ε esetén először csak a több tóruszból álló szigetláncok megjelenését látjuk (b panel), majd a paraméter növelésével kaotikus sávok is megjelennek, ahogy az a (c) panelen is látható. Ekkor a káosz még csak kis területre terjed ki, a domináns viselkedés továbbra is a periodikus, kváziperiodikus mozgás. A (d) ábrán már néhány, de nem az összes kaotikus tartomány összeolvadása is megfigyelhető, $y = 0.2$ közelében látszik több nagy tórusz, ami elválasztó réteggént funkcionál a kaotikus sávok közt.

A szigetláncok felbomlásának vizsgálatához az $\varepsilon = 0.35$ -höz tartozó konfigurációs teret választottam kiindulásnak (e panel). Itt már láthatóan több korábbi szigetlánc felbomlott, de egy egyértelmű határ látható a belső összetartó, és a kaotikus tartományokat



6. ábra. A mágneses erővonalak Poincaré-metszetei, különböző áram arányok mellett: (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0.05$, (c) $\varepsilon = 0.15$, (d) $\varepsilon = 0.25$, (e) $\varepsilon = 0.35$ és (f) $\varepsilon = 0.7$. A piros szigetlánc kirajzolásának kezdőfeltétele $(0.05, 0.26)$, a zöld szigetlánc kezdőfeltétele $(0.4095, 0.487)$, és a lila tórususz kezdőfeltétele $(0.1, 0.5406)$.

tartalmazó külső réteg között. A továbbiakban az ábrán is jelölt szigetláncok fejlődését vizsgálom: az egyik a kaotikus sávon belüli 4-es piros szigetlánc, a másik a 16-os zöld szigetlánc, ez az összetartó réteg határához közel helyezkedik el, ezért érdekes megfigyelni ennek a hosszútávú fejlődését.



7. ábra. A zöld szigetlánc közeléből indított részecske által bejárt terület $n = 7000$ (felső ábra) és $n = 15000$ (alsó ábra) lépés után, narancssárga színnel. A kirajzolás kezdőfeltétele $(0.3, 0.51)$ volt.

Még azt is megjegyzem erről a szigetláncról, hogy az ezt közvetlen körülvevő kaotikus sáv egy részleges határvonalat képez: a szigetlánc közeléből csak sok iteráció alatt jutnak ki a részecskék a teljes kaotikus tartományba, ahogy az a 7. ábrán is látható. Az (f) panelen látszik, hogy ε további növelésével még több tórusz bomlott már fel, és a konfigurációs tér túlnyomó részét a káosz jellemzi. (A kaotikus sáv a Newton-módszer nem konvergencia miatt világosabb az (e) panelen láthatónál.)

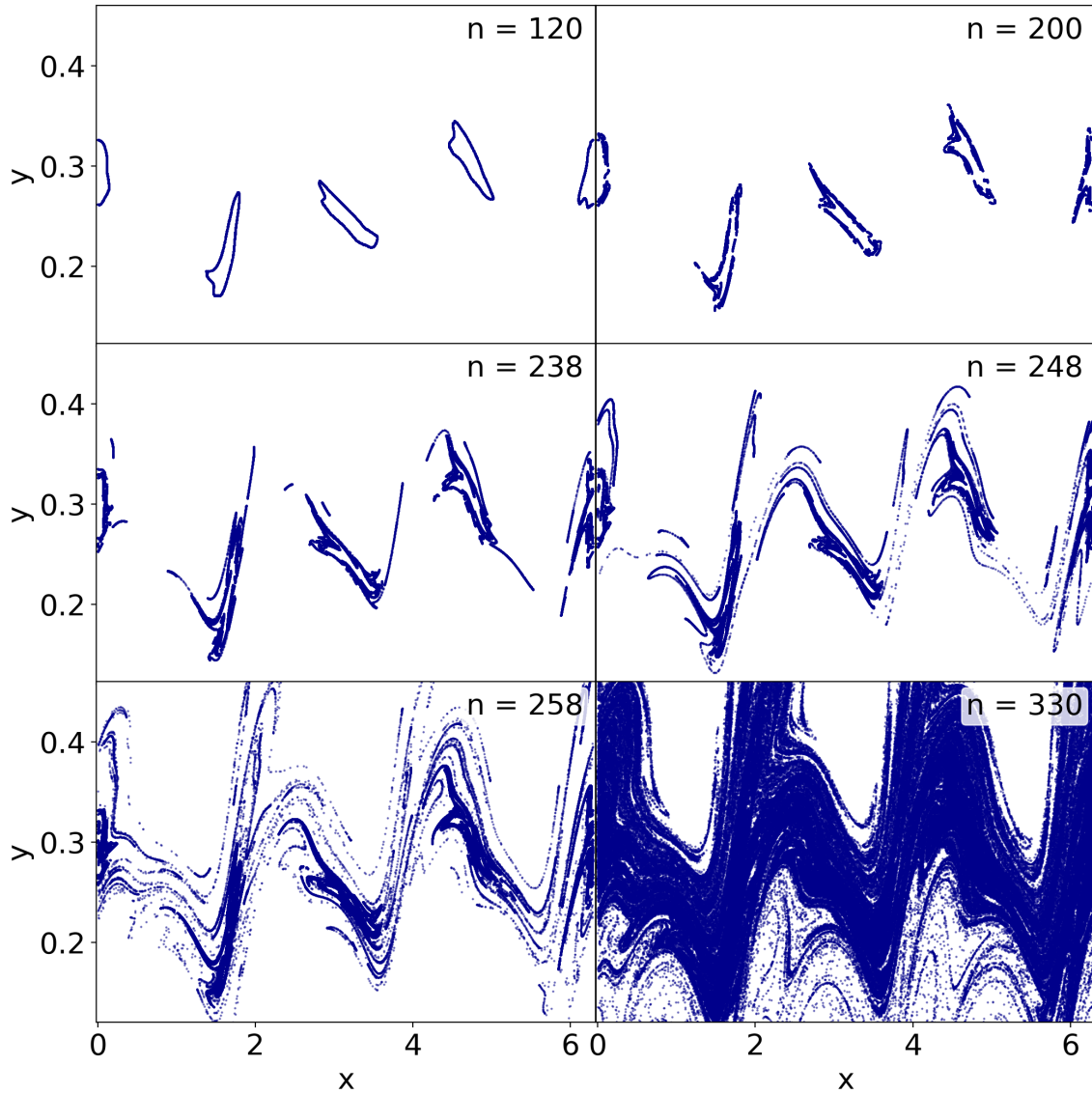
4.2. Snapshot tóruszok felbomlása

A következőkben azt vizsgálom, hogyan alakul a tóruszokon lévő részecskék mozgása, ha a rendszerparaméter változni kezd. Ehhez azt lineárisan fogom változtatni, $\delta\varepsilon = 0.0005$ rátával:

$$\varepsilon_n = 0.35 + n\delta\varepsilon, \quad (5)$$

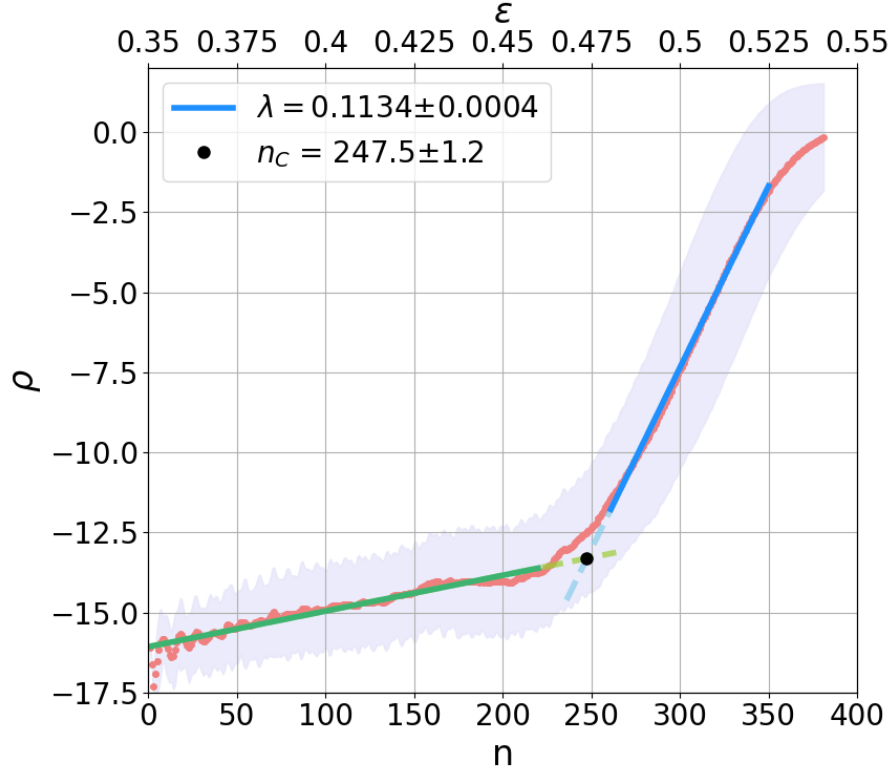
ahol n a lépések száma. A kezdőfeltételeket egy pont $\varepsilon = 0.35$ melletti sokszoros egymás utáni leképezésével határoztam meg, ami kirajzolta a szigetláncokat, majd ezeket a pontokat fejlesztettem az időben, változó paraméter mellett. Az időfejlődés során a Newton-módszer gyökkereső algoritmusának néhány kezdőfeltétel esetén egy ponton túl már nem konvergált, ezeket a kezdőfeltételeket nem lehetett tovább időfejleszteni, ezért ezeket nem használtam a számolásokban, és a megfelelő helyeken diszkutálni is fogom a számukat. A 4-es szigetlánc esetében ez csupán néhány tíz kezdőfeltételt érintett, ami elhanyagolható a fejlődést szimuláló 500 000 kezdőfeltételhez képest.

A vizsgált tóruszokból így snapshot tóruszok lesznek, amelyek az időfejlődésük során változtatják az alakjukat. A snapshot tóruszok időfejlődésébe legkönnyebben bizonyos időpontokban való kirajzolással nyerhetünk betekintést. A 4-es szigetláncra ez a 8. ábrán látható, 6 különböző diszkrét időpontban (n). Ezek szerint a szigetlánc idővel torzulni kezd, de még elkülönültek a szigetek, majd ahogy megnyúlnak a snapshot tóruszok lassan elkezdnek egymásba keveredni ($n = 248$), és végül már a teljes sávot bejárják a trajektóriák. Ezt a folyamatot nevezzük tóruszfelbomlásnak. Az általánosított Ljapunov-exponens számolásához minden kezdőfeltételhez egy kis perturbációt adtam



8. ábra. A piros színnel jelölt 4-es szigetlanc fejlődése és felbomlása.

(10^{-7} az x , 10^{-8} az y koordinátához), ezzel egy „árnyék-szigetlancot” létrehozva az eredeti mellett, és az így kapott, eredeti szigetlánchoz infinitezimálisan közeli pontokra is végigkövettem az időfejlődést. A közeli pontpárok átlagos eltávolodásának logaritmusa a lépésszám függvényében a 9. ábrán látható. Kis n értékekre fluktuációkat lehet látni, és kissé nő az átlagos távolság, ami egy lassan változó szakasz után $n \approx 250$ közelében meredeken lineárisává válik. Ebben a szakaszban hosszú ideig exponenciális a pontpárok eltávolodása, ekkor válik kaotikussá az erővonalak mentén mozgó részecskék dinamikája. A Ljapunov-exponens meghatározásához erre a szakaszra egyenest illesztettem, melynek a meredeksége $\lambda = 0.1134 \pm 0.0004$ adja a Ljapunov-exponenst. A folyamat végén vízszintes felé kanyarodnak az adatpontok, ilyenkor a kezdetben közeli pontok átlagos távolsága már e -nagyságrendű, azaz makroszkopikusan is eltávolodtak egymástól. Az ábrán a távolságok logaritmusának szórását az átlagérték körüli sávként feltüntettem, ami a 4-es szigetlanc fejlődése során a kezdeti növekedés után közel állandónak adódott a teljes folyamatra.



9. ábra. A 4-es szigetlánc EAPD görbéje az időlépések számának függvényében a szórásával együtt, és a Ljapunov-exponens számolása. A sötétebb színű, illesztett egyenesek az illesztési tartományon vannak behúzva, míg a halványan szaggatott vonal a meghosszabbításuk, és metszésük a felbomlási pont. Az alsó tengelyen az idő, a felső tengelyen a rendszerparaméter látható.

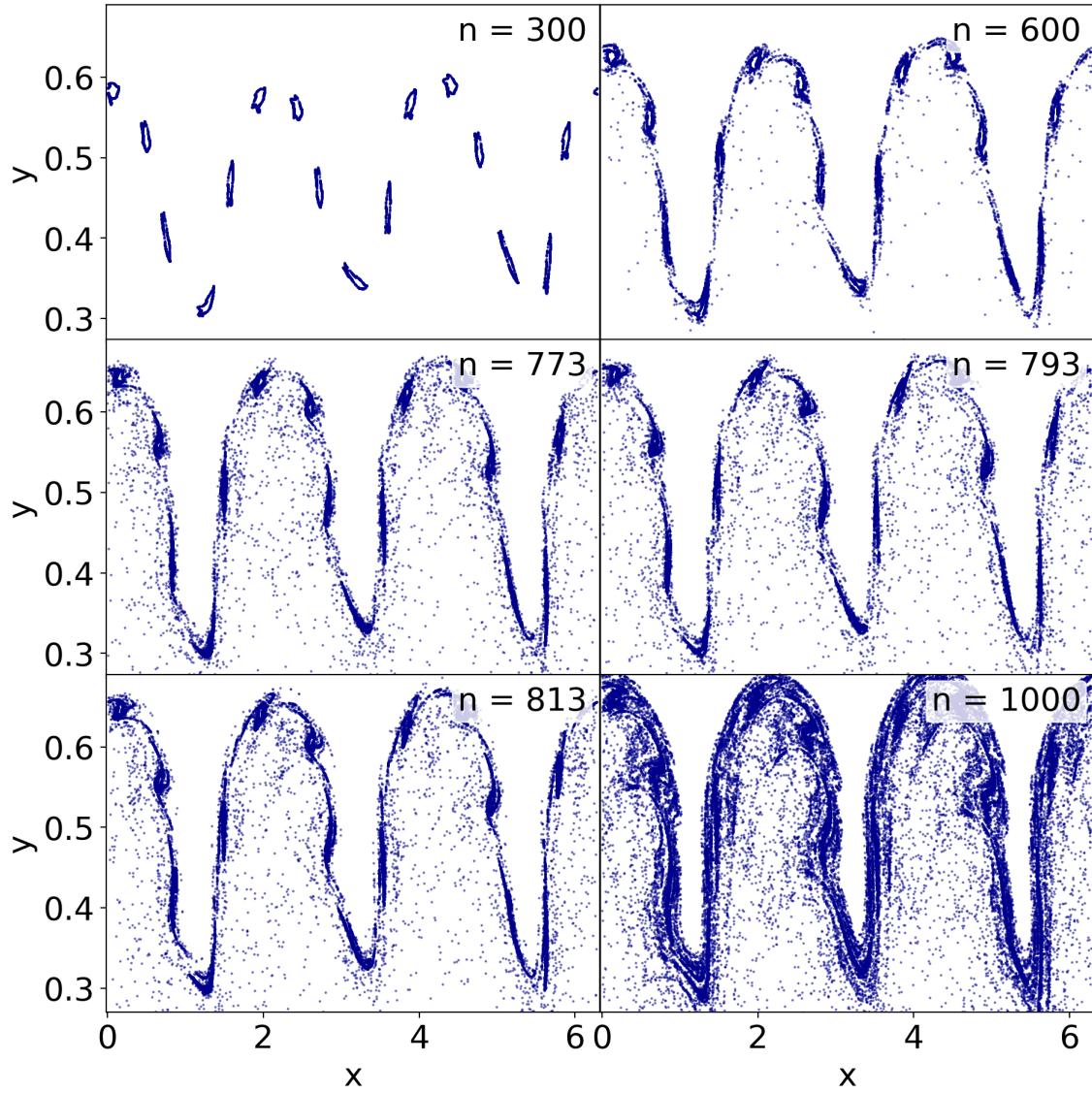
Az előszakaszra is illesztettem egyenest, ez közvetlen fizikai jelentést nem tartalmaz, csak az átlagosan lassan növekvő tendenciát extrapolálom itt. Ezzel rendelhető a snapshot tóruszok láncához egy felbomlási időpont, az előszakaszra és az exponenciális távolodási szakaszra illesztett egyenesek metszéspontjában, ami azt az időpillanatot jelzi, amikor a tórusz felbomlása megkezdődik. Ha az egyenesek egyenlete $f(x) = m_1x + b_1$ (felső egyenes) és $g(x) = m_2x + b_2$ (alsó egyenes), akkor a metszéspont

$$n_C = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2},$$

eszerint a felbomlás helye $n_C = 247.5 \pm 1.2 \approx 248$, ahol a hibát az illesztések hibájából, Gauss-hibaterjedéssel számoltam [29]:

$$\Delta n_C = \sqrt{\left(-\frac{\Delta b_1}{m_1 - m_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_2}{m_1 - m_2}\right)^2 + \left(\frac{(b_2 - b_1)\Delta m_1}{(m_1 - m_2)^2}\right)^2 + \left(-\frac{(b_2 - b_1)\Delta m_2}{(m_1 - m_2)^2}\right)^2}.$$

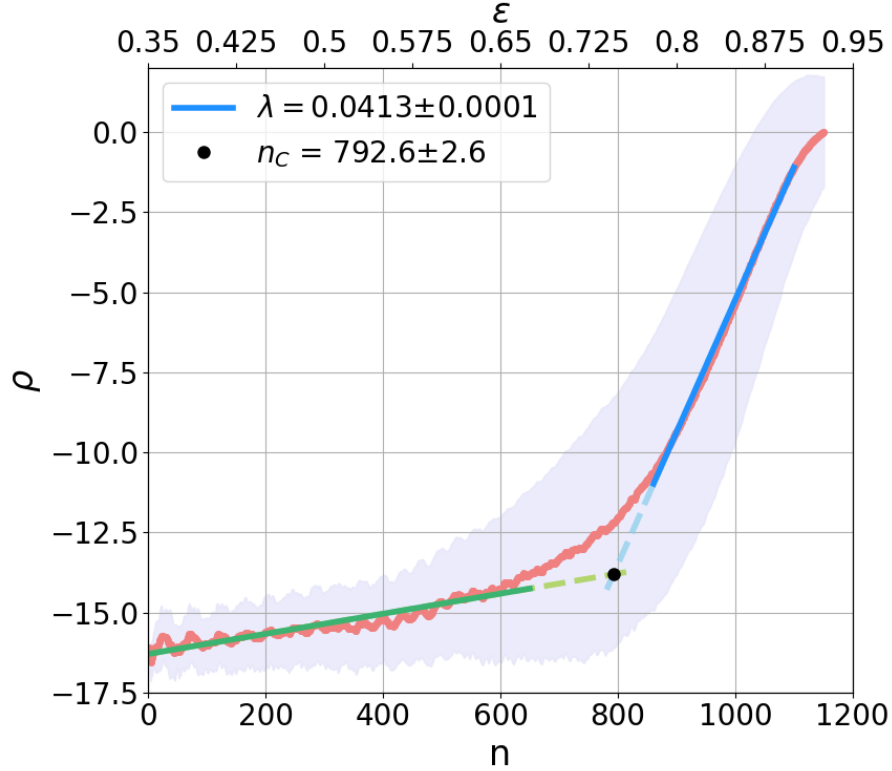
A tóruszok felbomlása nem pillanatszerűen történik, inkább folyamatos jelenség, ezért a konkrét felbomlási pont kis bizonytalanságot hordoz magában, amit az illesztésből számolt hiba is reflektál. Ezért sem egymás utáni pillanatokot merevítettem ki a 8. ábrán, ahol az illesztésekből számított felbomlási pont előtt még csak megnyúlás, utána pedig már a szigetek egyre intenzívebb egymásba folyása is látható.



10. ábra. A zöld színnel jelölt 16-os szigetlánc időfejlődése és felbomlása.

Az előző szakaszban ismertetett elemzési lépéseket elvégeztem a zöld színű szigetláncra is. A 16-os lánc felbomlását 400 000 kezdőfeltételből szimuláltam. Ezek a snapshot tóruszok sokkal később bomlottak fel, mint a 4-es lánc tóruszai, és ebben az esetben már jelentős volt azoknak a kezdőfeltételeknek a száma is, amikre egy pont után a Newton-módszer nem konvergens, így a használható kezdőfeltételek száma 58 600-ra csökkent, de ahogy azt látni fogjuk, ennyi adat is elég statisztikát ad a szigetlánc hosszú idejű vizsgálatára, és a teljes szigetlánc viselkedéséről ad információt.

A 10. ábrán látható a szigetlánc 6 időpillanatban. Sokáig csak kissé torzulnak a szigetek, majd amikor elkezdenek felbomlani, akkor is a pályák jelentős hányada hosszú távon a szigetlánc közelében marad. Még $n = 1000$ -nél is látványos ez a jelenség, ami alapján azt lehet feltételezni, hogy a felbomlás után a ragacsos zóna időfüggő általánosítottja marad a szigetek helyén. A 8. ábrával összehasonlítva ez a ragacsosság fennmarad akkor is, amikor már hosszú távon exponenciális a pontpárok eltávolodása. Az is megfigyelhető, hogy a felbomlás során a szigetlánc függőlegesen is megnyúlik, viszont továbbra is

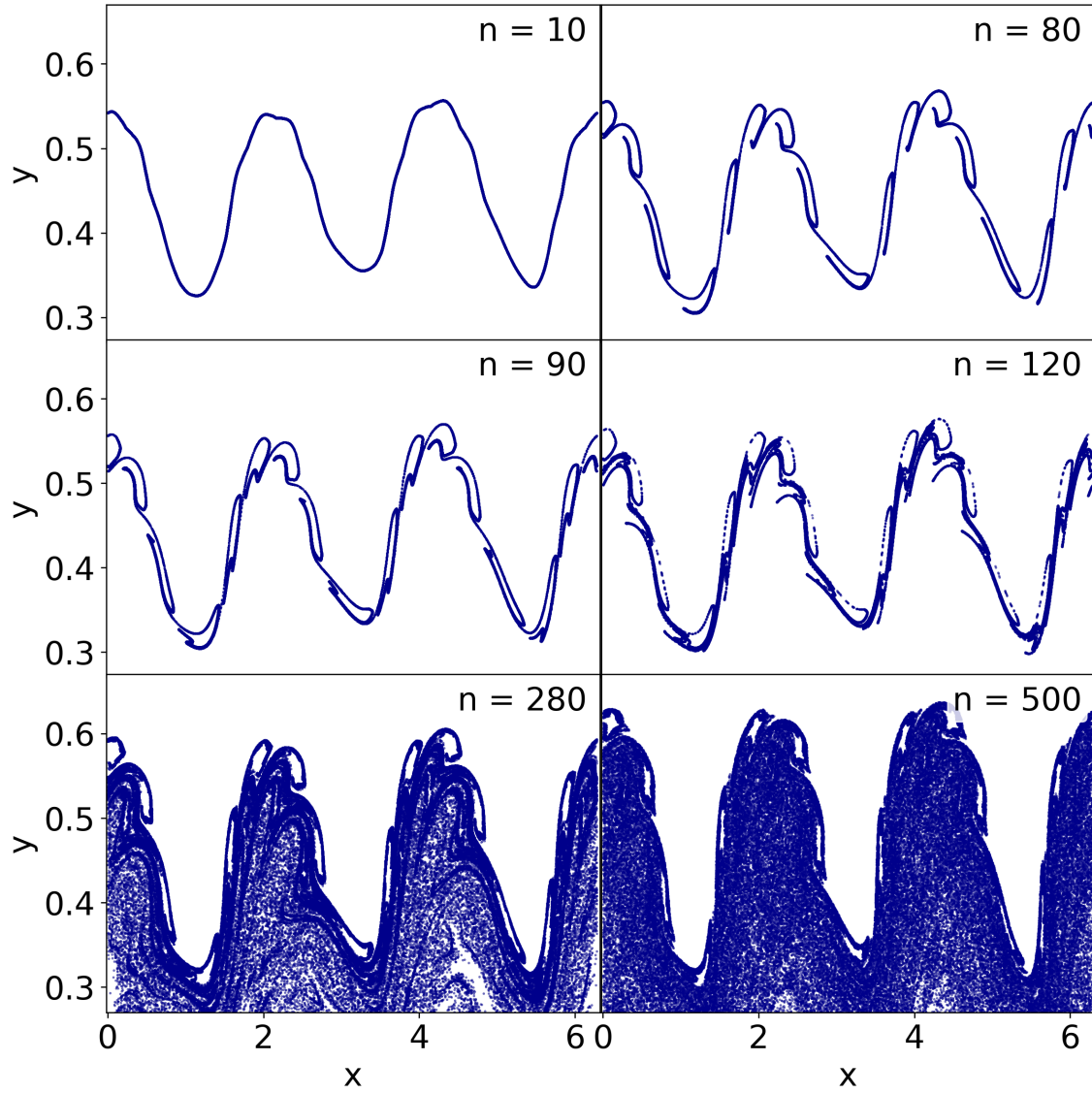


11. ábra. A 16-os szigetlánc EAPD görbéje az időlépések számának függvényében a szórásával együtt, és a Ljapunov-exponens számolása. A sötétebb színű, illesztett egyenesek az illesztési tartományon vannak behúzva, míg a halványan szaggatott vonal a meghosszabbításuk, és metszésük a felbomlási pont. Az alsó tengelyen az idő, a felső tengelyen a rendszerparaméter látható.

van egy határvonal, ami felett nincsenek kaotikus erővonalak, így elválasztva marad az (egyre kisebb) összetartó térrész a kaotikustól.

Az EAPD görbén ebben az esetben is az előszakaszban lassan növekvő tendenciát tapasztalunk, és a 11. ábrán hosszútávon egyenes szakaszra illesztett görbéből a számított Ljapunov-exponens $\lambda = 0.0413 \pm 0.0001$. Ennek a szigetláncnak lassabb a felbomlási rátája, mint a 4-esnek, és a felbomlás menetének részletesebb jellemzésére szolgál a függelék 18. ábrája. A metszésből számolt felbomlási pont $n_C = 792.6 \pm 2.6$, ezt a 10. ábrával összehasonlítva azt látjuk, hogy már a felbomlási pont előtt sem csak a tóruszok mentén haladnak trajektóriák ($n = 600$), és a felbomlás után is csak lassan változik a konfigurációs térben látható kép, ennek ellenére itt is látszik a szigetek megnyúlása a felbomlási pontnál ($n_C = 793$). Ahogy a 11. ábrán is látható, a szórás a felbomlás előtt is egyre növekedni kezd, ahogy a szigetlánc torzul, majd a felbomlási folyamat végére csökken. Ez jelentheti azt, hogy a szórás megnövekedte előjelzi a felbomlást, de a későbbiekben indoklást adok arra is, hogy a ragacsosság jelenlétével állhat kapcsolatban.

Mivel a 16-os lánc sokáig túléli a paraméter növekedését (csak $\varepsilon = 0.74$ közelében kezdődik a felbomlása), érdemes megvizsgálni egy felette lévő, de hozzá közeli, egybefüggő tórusz időfejlődését is (a 6. ábra lila tórusza). Az 6. ábra (e) paneljén a 16-os láchoz közeli tóruszok az (f) panelen már nem fellelhetők, ezért érdekes kérdés, hogy változó paraméter esetén is felbomlik-e egy ilyen tórusz. Az időfejlődést 250 000 kezdőfeltétel-

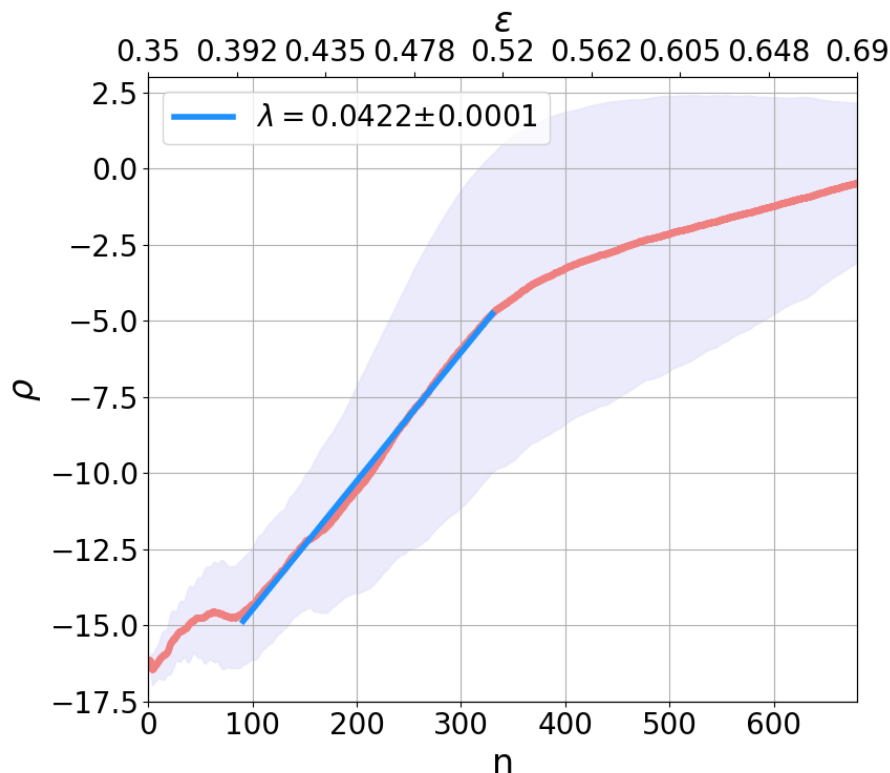


12. ábra. Az első (a 6. ábrán lilával jelölt) egybefüggő snapshot tórusz időfejlődése és felbomlása.

el szimuláltam, ebből 148 000-re adott végig konvergens megoldást a Newton-módszer, ezeket használom a továbbiakban. Ahogy az a 12. ábrán is látható, amit tapasztalunk hasonlít a 16-os lánc felbomlásához olyan szempontból, hogy hosszú idő után is sok részecske a szigetlánc pereménél marad ($n = 500$), bekerül ebbe a nemkaotikus tartományba. A folyamat elején viszont látszódik az is, hogy a snapshot tórusz megnyúlása során ráhúzódik a 16-os szigetlánc peremére, mielőtt még felbomlana ($n = 90$). A 13. ábrán látható a snapshot tórusz EAPD görbéje, eszerint kezdetben hirtelen megnő a pontpárok távolsága, ahogy végbe megy ez a ráhúzóadás, és a megnyúlással a szórás is növekedni kezd, majd utána hosszú távon exponenciálissá válik az eltávolodás, és az erre illesztett Ljapunov-exponens $\lambda = 0.0422 \pm 0.0001$ csak kicsivel nagyobb a 16-os láncénál.

Amikor az átlagos távolság a pontpárok közt $\approx e^{-4}$, a görbe meredeksége jelentősen csökkenni kezd. Ennek az lehet az oka, hogy a kezdeti szétszóródás mellett szignifikáns az időfüggő ragacsos zónában lévő részecskék száma is, melyek nemkaotikus volta miatt az

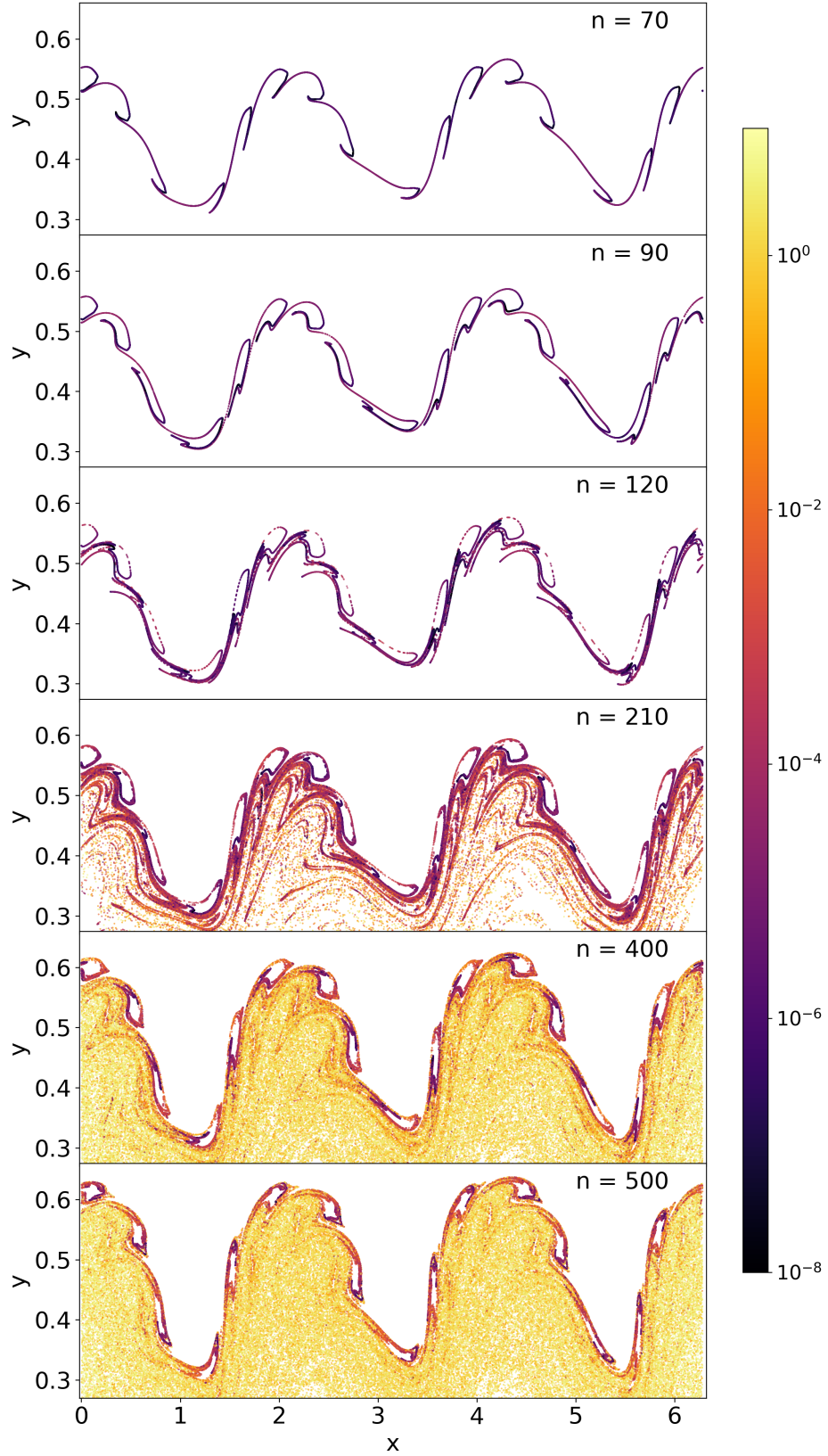
eltávolodás már nem exponenciális ütemű, csak akkor válik azzá, ha kikerülnek a kaotikus tartományba. Ez a kikerülés lassan, folyamatosan történik, ezért látszik $n = 500$ mellett is a 16-os szigetlanc alakja. A 13. ábra $n > 350$ szakaszán látható lelassult növekedés megerősíti azt, hogy a szigetlanc közelében tényleg nem kaotikus a mozgás, mivel az ábra a különböző részecskék lényegében eltérő viselkedésének az átlagát mutatja. Ezt alátámasztja az is, hogy a szórás az exponenciális távolodás szakaszában egyre inkább nő, és csak akkor kezd el csökkenni, amikor a már kaotikus pontpárok távolsága maximálisához közeli. A nagy szórás utal a különböző viselkedések egyidejű jelenlétére, csökkenése pedig a kaotikusság dominánsá válására.



13. ábra. A 6. ábrán a zöld szigetlanc feletti legalsó tórusz EAPD görbéje az időlépések számának függvényében a szórásával együtt, és a Ljapunov-exponens számolása. Az egyenest az illesztési tartományon jelöltem. Az alsó tengelyen az idő, a felső tengelyen a rendszerparaméter látható.

Az eddigi elemzések megerősítése érdekében készítettem egy ábrát a szigetlanc felbomlásának néhány időpontjáról, a pontpárok távolságát is jelölve (14. ábra). A színezés az adott pontnak az árnyék-tóruszon lévő pontpárjától való távolsága szerint történt logaritmikus skálán: a legsötétebb lila jelöli a kezdeti kis perturbációt, a világos narancssárga pedig azt, hogy a pontpár a kaotikus tartomány elérhető intervallumát teljes mértékben bejárhatja, a pontok egymástól maximálisan eltávolodtak.

Látható, hogy kezdetben ($n = 120$ -ig) csak kis mértékű eltávolodás figyelhető meg, majd, ahogy a részecskék egyre inkább eltávolodnak a kezdeti sávtól, a pontpárok távolsága is nő ($n = 210$), a kaotikus viselkedésre utaló exponenciális eltávolodás elkezdődik. Viszont egy tartományon a pontpárok közel maradnak egymáshoz - ez a térrész a függelék 17. ábrája szerint is a 16-os szigetlanc pereme mentén helyezkedik el. Ezek alapján

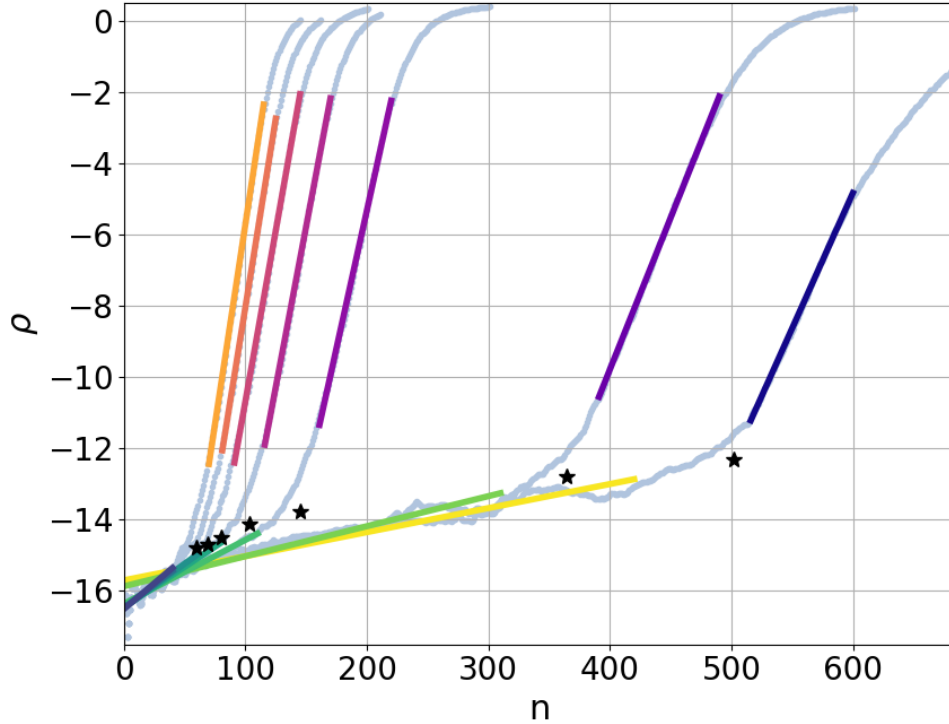


14. ábra. A snapshot tórusz időfejlődése és felbomlása. A színezést a pontok árnyékszigetláncban lévő párjától való távolsága határozza meg. A 16-os szigetlánc pereménél jól kivehető a pontpárok hosszú távú közel maradása.

vizuálisan is be lehet azonosítani a korábban feltételezett időfüggő nem-hiperbolikus tartomány helyét, ami az $n = 500$ időpontban is látható marad, alatta pedig a kaotikus tartományban látható, hogy ekkor már a pontpárok nagy aránya teljesen eltávolodott egymástól. Ezeknek a következtetéseknek és az időfüggő nem-hiperbolikus tartományok viselkedésének részletes megértéséhez további kutatás szükséges.

4.3. Különböző rátájú paraméterváltozások vizsgálata

A 4-es szigetslánc felbomlását a korábbiakban is hosszan végig tudtam követni, ezért ennek a fejlődését vizsgálom ε növekedési rátáját változtatva is. Minden esetben 100 000 kezdőfeltételből indultam ki, és az összes időfejlődés végére több, mint 75 000 konvergens megoldást kaptam, ezek elegendő statisztikát adtak az analízishez. Az ezekből számolt EAPD görbék a 15. ábrán láthatóak, a különböző $\delta\varepsilon$ ráták 0.0002 és 0.003 közötti értékeket vettek fel. Minél kisebb a ráta, annál inkább jobbra tolódott az ábrán a meredek szakasz, és annál nagyobb a felbomlási ponthoz tartozó időpont is. A továbbiakban ezekhez az adatokhoz az előző fejezet eredményét is hozzáveszem az elemzés során.



15. ábra. A 4-es szigetslánc EAPD görbéi különböző $\delta\varepsilon$ ráták mellett. Az ábrán jelöltem az előszakaszra és az exponenciális távolodásra illesztett egyeneseket, és csillagokkal jelöltem a felbomlási pontokat. Balról jobbra az egyre csökkenő $\delta\varepsilon$ -hoz tartozó szigetsláncfelbomlások láthatók.

Ezeket túl elvégeztem néhány további $\delta\varepsilon$ értékre is az elemzést, hogy több adatpontra legyen lehetőség a későbbiekben illeszteni. Így összességében a különböző $\delta\varepsilon$ értékek a $[0.00012, 0.01]$ intervallumba estek. Az összes illesztést nem ábrázoltam, hogy a 15. ábra átláthatósága megmaradjon.

Az egyes folyamatok felbomlási pontjához tartozó paramétert $\varepsilon_C = \varepsilon_{n_c}$ -vel jelölöm, és ezt, valamint az n_C felbomlási pontot és a λ Ljapunov-exponenst ábrázoltam

a változási ráta függvényében, log-log skálán (16. ábra). Ezekre egyenes illeszthető, az illesztési paramétereket az 1. táblázat tartalmazza. Ami a logaritmikus ábrán egyenes, az a két mennyiség között hatványfüggvény kapcsolatot jelent, lineáris ábrán ez a következő függvénynek felel meg:

$$f(\delta\varepsilon) = e^b \cdot \delta\varepsilon^a$$

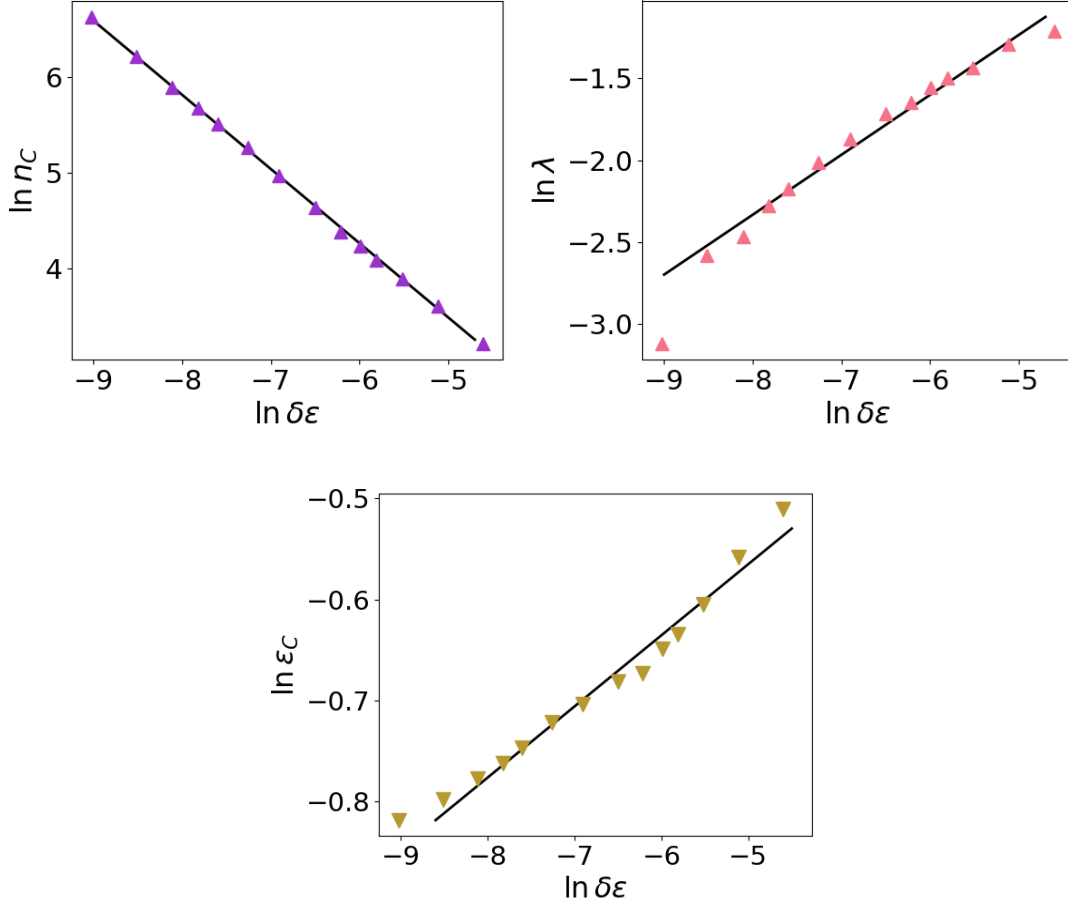
A táblázat és az ábra szerint n_C esetében illeszkedik az egyenes a legjobban (az a hatványkitevő illesztési hibája kicsi), tehát n_C a ráta hatványfüggvényével csökken. A csökkenés érthető, hiszen ha $\delta\varepsilon \rightarrow 0$, akkor egyre később következik be a felbomlás, és egy bizonyos $\delta\varepsilon$ -nál kisebb rátára már nem is értelmezett, mert nem bomlik fel a tórusz, így az egyenesek se illeszthetők n_C meghatározásához. Viszont tetszőlegesen megközelíteni sem lehet a 0-t, hiszen ahogy a 16. ábrán is látható, kis $\delta\varepsilon$ értékre már csak rövidebb szakaszon ad egyenest az EAPD görbe. Gyors ε változás esetében nagyon rövid idő alatt bekövetkezik a felbomlás.

A Ljapunov-exponens és ε_C illesztése az 1. táblázat szerint már kevésbé pontos. A ráta függvényében λ növekszik, minél gyorsabb a felbomlás dinamikája, annál meredekebb az egyenes szakasz is (ennél az illesztésnél a legkisebb $\delta\varepsilon$ -hoz tartozó λ értéket elhagytam, ami egyértelműen nem követte a trendet). Ez a 16. ábrán is látható, és az egyre sűrűbben elhelyezkedő EAPD görbék meredeksége csak kissé nő, ahogy egyre közelednek a függőlegeshez. Ami érdekes, hogy a felbomláshoz tartozó ε_C paraméterérték is enyhén ($a \approx 0.06$, ez egy nagyságrenddel kisebb az előző illesztéshez képest) növekszik a ráta növelésével. Ez úgy értelmezhető, hogy nagyon lassú változás esetén a snapshot tórusz mindig az adott paraméterhez tartozó stacionárius fázisteret követné, viszont ε időbeli folyamatos, gyors változása mellett nem tudja pillanatszerűen lekövetni a stacionárius fázisteret, a felbomlása ahhoz képest időben elcsúszik. A növekvő tendencia alapján ez a lemaradás annál nagyobb, minél gyorsabb a paraméter változása.

Első ránézésre ez a hatványfüggvény viselkedés igen meglepőnek tűnhet. Érdekes lenne megvizsgálni, hogy más típusú, konzervatív kaotikus rendszerekben is lehet-e hasonló konstrukcióval értelmezni egy felbomlási pontot, és hogy az hogyan változna a ráta változtatásával. Az általánosított Lyapunov-exponens már korábban is használt mennyiség a paraméterváltozások konzervatív kaotikus rendszerek témakörében [5], így annak a vizsgálata a ráta változásának függvényében egyszerűbben átvihető módszer. Egy ilyen típusú összehasonlítás segíthet annak az eldöntésében, hogy ez a leképezésre vonatkozó szabályosság vagy ennél univerzálisabb, elméleti megfontolásokkal alátámasztható összefüggés, de ez a kérdés túlmutat a dolgozatom keretein.

1. táblázat. A 16. ábrán látható illesztett egyenesek paraméterei: a a meredekségük és b a tengelymetszetük és e^b a hatványfüggvény szorzótényezője.

	a	b	e^b
$n_C(\delta\varepsilon)$	$-0,7755 \pm 0.0050$	-0.387 ± 0.035	0.679 ± 0.015
$\lambda(\delta\varepsilon)$	$0.367 \pm 0,014$	0.595 ± 0.099	1.81 ± 0.30
$\varepsilon_C(\delta\varepsilon)$	0.0703 ± 0.0034	-0.213 ± 0.023	0.808 ± 0.087



16. ábra. A felbomlási pontok, Ljapunov-exponensek és felbomlás kezdetéhez tartozó paraméterértékek a paraméterváltozás rátájának függvényében logaritmikus skálákon, és az adatokra illesztett egyenesek.

5. Összefoglalás

A munkám során egy, a tokamakban futó mágneses erővonalak időfejlődését modellező leképezéssel foglalkoztam, ha a rendszerre kapcsolt ergodikus mágneses limiter áramának és a plazmaáramnak az aránya (ε) időben változik. Ehhez megírtam az adatok szimulálásához szükséges kódot, majd elvégeztem a kapott eredmények analizálását. Először az állandó paraméterű esetben azt tapasztaltam, hogy nagyobb ε mellett nagyobb a kaotikus sáv vastagsága is, és a korábban látott stabil szigetek nagy ε -ra már nem jelentek meg a konfigurációs térben. A paraméter időbeli növekedésének hatására a kváziperiodikus mozgáshoz tartozó tóruszok idővel felbomlottak. Egy korábban is már használt módszerrel [5, 16] az EAPD függvényből számoltam a felbomlás Lyapunov-exponensét, és a felbomlás kezdetének meghatározásához egy újfajta megközelítéssel az előszakaszra is illesztettem egyenest. Ezzel megállapítottam, hogy a két egyenes metszéséből számolt felbomlási pont jó egyezést mutat a snapshot tóruszok vizuális felbomlásával.

Egy hosszú ideig fel nem bomló szigetlánc vizsgálatával olyan tartományt találtam, ahol a környezetének kaotikus viselkedése mellett is „csapdázódnak” a trajektóriák, és nem exponenciális az összes pontpár távolodása. Ezek alapján lehet azt mondani, hogy a szigetlánc peremén lévő tartomány a ragacsos zónának megfeleltethető, időfüggő halmaz,

ún. snapshot nem-hiperbolikus tartomány.

Különböző paraméterváltozási rátákat vizsgálva ugyanarra a szigetláncra megmutattam, hogy hatványfüggvény kapcsolat van a metszéssel számított felbomlási pont és a változási ráta között. Diszkutáltam azt is, hogy a növekvő rátával a felbomlási ponthoz tartozó ε paraméter érték, illetve a Ljapunov-exponens is hatványfüggvény szerint növekedett. Ezek empirikus eredmények, aminek a megjelenését (vagy annak hiányát) érdemes lehet vizsgálni más típusú konzervatív kaotikus rendszerekben is, ami előrevetethet az elméleti magyarázat kidolgozásában.

Az itt bemutatott eredményekből született cikk publikációra került a Chaos folyóiratban [30].

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a témavezetőimnek, Jánosi Dánielnek és Kovács Tamásnak a segítségüket és támogatásukat a dolgozat elkészítése során. További köszönetet szeretnék mondani Édes Lilinek, a segítségéért és hasznos tanácsaiért.

6. Hivatkozások

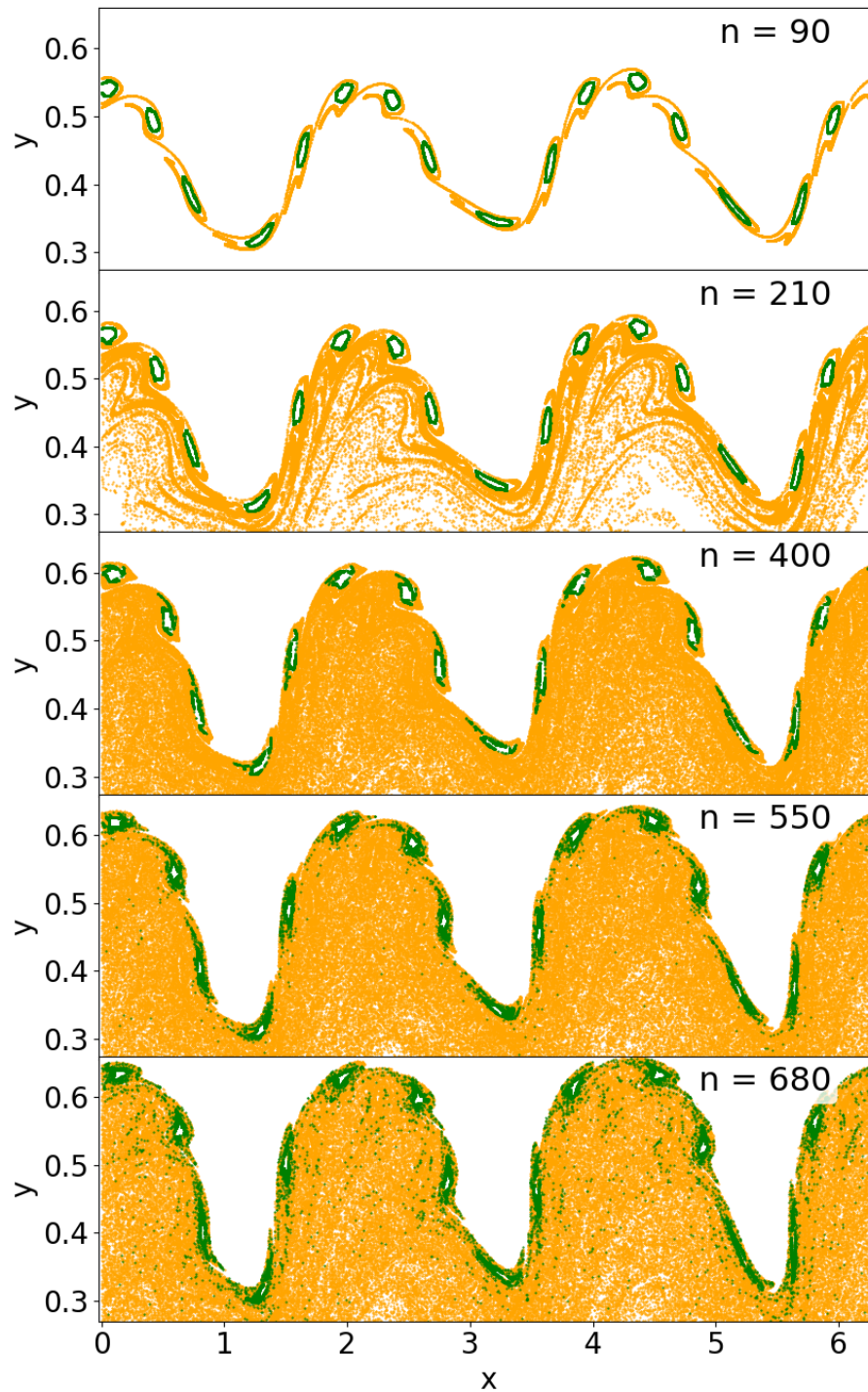
- [1] Tél Tamás-Gruiz Márton. *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- [2] Zoletnik Sándor. Szabályozott magfúzió mágneses összetartással 1. - Az alapok. *Fizikai Szemle*, 2005/3.
- [3] I.L. Caldas et. al. Control of chaotic magnetic fields in tokamaks. *Brazilian Journal of Physics*, 32:980–1004, 2002.
- [4] F.J. Romeiras et. al. Multifractal properties of snapshot attractors of random maps. *Physical Review A*, 41(2):784, 1990.
- [5] D. János and T. Tél. Chaos in Hamiltonian systems subjected to parameter drift. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(12), 2019.
- [6] J.C. Sommerer and E. Ott. Particles floating on a moving fluid: A dynamically comprehensible physical fractal. *Science*, 259(5093):335–339, 1993.
- [7] T. Tél et. al. The theory of parallel climate realizations: A new framework of ensemble methods in a changing climate: An overview. *Journal of Statistical Physics*, 179:1496–1530, 2020.
- [8] J.S.E. Portela et. al. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17:1589–1598, 05 2007.
- [9] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [10] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mechanics (Course of Theoretical Physics, Volume 1)*. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [11] Kovács Tamás. *Kaotikus jelenségek égi mechanikai rendszerekben*. PhD thesis, Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizika Doktori Iskola, 2009.
- [12] Ryogo Kubo. *Statistical Mechanics. An Advanced Course with Problems and Solutions*. North-Holland Physics Publishing, 1988.
- [13] G. Contopoulos. Orbits in highly perturbed dynamical systems. 111. nonperiodic orbits. *Astronomical Journal*, 76:147–150, 1971.
- [14] G. Contopoulos and M. Harsoula. Stickiness effects in conservative systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(07):2005–2043, 2010.
- [15] C.J. Cotter and S. Reich. Adiabatic invariance and applications: From molecular dynamics to numerical weather prediction. *BIT Numerical Mathematics*, 44:439–455, 2004.
- [16] D. János and T. Tél. Chaos in conservative discrete-time systems subjected to parameter drift. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31(3), 2021.
- [17] D. János and T. Tél. Overview of the advances in understanding chaos in low-dimensional dynamical systems subjected to parameter drift: Parallel dynamical evolutions and "climate change" in simple systems. *Physics Reports*, 1092:1–64, 2024.
- [18] E. Illés et. al. Orbital dynamics in galactic potentials under mass transfer. *Astronomy and Astrophysics*, accepted, 2024.
- [19] <https://www.iter.org/few-lines>. Accessed: 2024. 10. 29.
- [20] Francis F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer, New York, 2016.
- [21] Dunai Dániel. *Fúziós plazma turbulenciájának és tranziens eseményeinek vizsgálata*

- nyalábemissziós spektroszkópiával*. PhD thesis, Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizika Doktori Iskola, 2010.
- [22] G.A. Oda and I.L. Caldas. Dimerized island chains in tokamaks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(1):15–23, 1995.
 - [23] F.L. Waelbroeck. Theory and observations of magnetic islands. *Nuclear Fusion*, 49(10):104025, sep 2009.
 - [24] V. Riccardo and JET EFDA contributors. Disruptions and disruption mitigation. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 45(12A):A269, nov 2003.
 - [25] T.E. Evans et. al. Suppression of large edge localized modes with edge resonant magnetic fields in high confinement diii-d plasmas. *Nuclear Fusion*, 45(7):595, jun 2005.
 - [26] Elton C. da Silva et. al. Field line diffusion and loss in a tokamak with an ergodic magnetic limiter. *Physics of Plasmas*, 8(6):2855–2865, 2001.
 - [27] T.J. Martin and J.B. Taylor. Ergodic behaviour in a magnetic limiter. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 26(1B):321, 1984.
 - [28] K. Ullmann and I.L. Caldas. A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(13):2129–2140, 2000.
 - [29] John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. University Science Books, 1997.
 - [30] D. János et. al. Magnetic structures in the explicitly time-dependent nontwist map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(12), 2024.

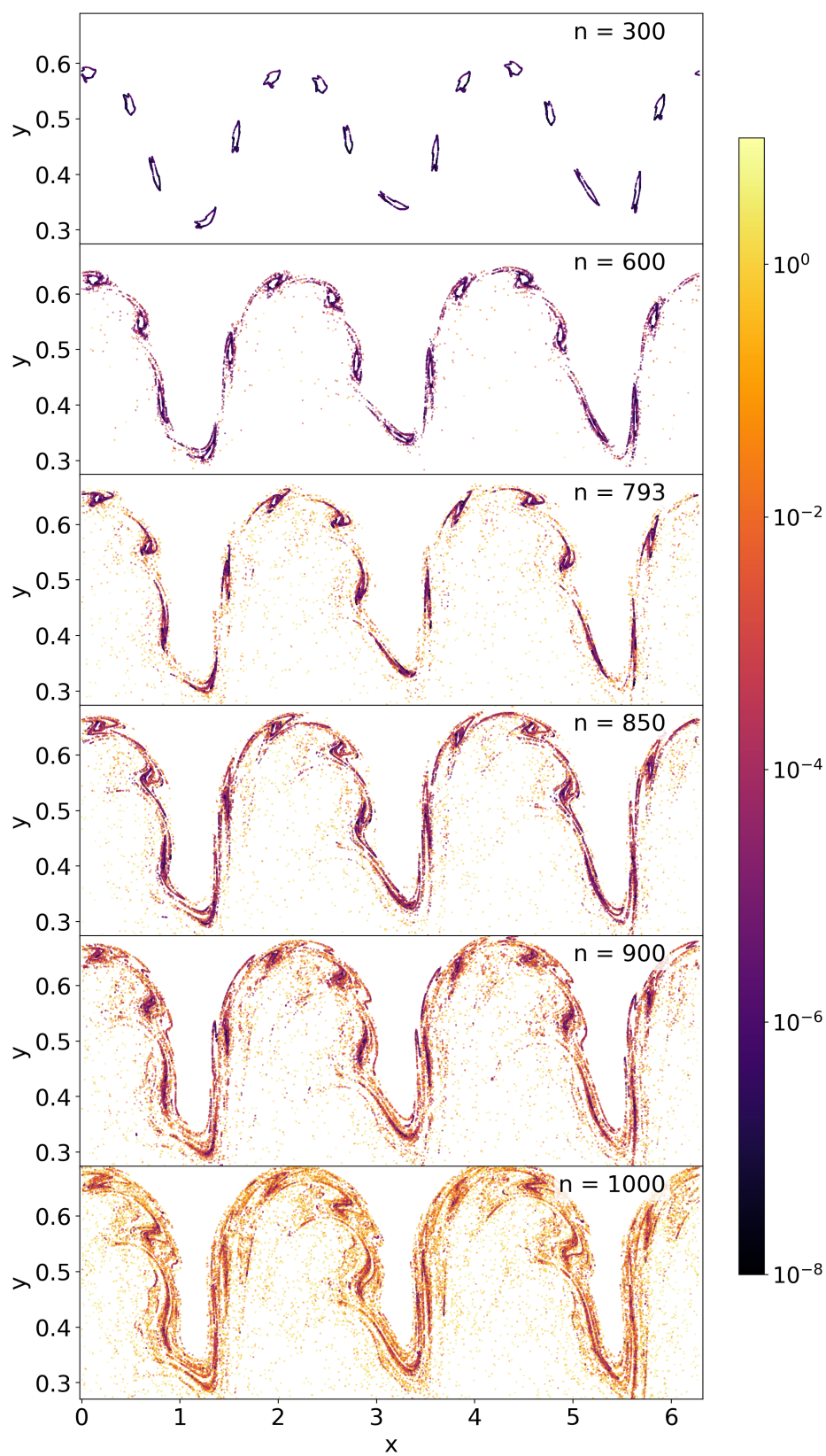
A. Függelék

Ebben a szakaszban a korábbi állításaim megerősítése céljából néhány további ábrát is a dolgozathoz mellékelek. A 17. ábrán a snapshot tórusz felbomlási ábrájára közvetlenül rárajzoltam a zöld szigetlánc képét az adott időpillanatban. Ahogy várható volt, $n = 90$ és $n = 400$ között a szigetláncra való ráhúzóds az idő előrehaladtával egyre közelebbivé válik, és $n = 680$ -nál már a zöld szigetek vizuális felbomlása is elindult. Az, hogy a korai szakaszban mennyire közeli a ráhúzóds függ attól is, hogy mennyire pontosan a legkülsőnek lett megválasztva a kezdeti, koncentrikus szigetláncokból a zöld színnel jelölt, és az ábrázolási paraméterektől is. Ezért lehet az is látható, hogy a határvonal mentén nem simult még össze teljesen a kétféle sokaság $n = 210$ -nél.

Hogy ezen felbomlás mivoltja közelebből megismerhetővé váljon, ábrázoltam a 16-os szigetlánc felbomlását aszerint színezve, hogy az adott pont milyen távol van az árnyék-szigetláncra lévő párjától (18. ábra). Kezdetben minden pont közel marad a párjához, majd eltávolodást csak a szigetek nyúványaiban, vagy a láncot elhagyó, kaotikus dinamikájú pontok esetében lehet látni ($n = 600$ és $n = 793$). A deformálódott szigetek $n = 850$ esetében is jól kivehető alakúak, a jobban elnyúltak mentén kissé nagyobb a pontpárok távolsága is, és csak $n = 1000$ -nél vesznek el teljesen a szigetek egy sáv mentén. Ez mutatja meg a ragacsos zónák időfüggő megfelelőjének megfigyelési nehézségeit: nemcsak deformálódik a tartomány az időfejlődés során, hanem teljes egészében el is tűnhet. Fontos lehet a jövőben annak a meghatározása is, hogy ez az eltűnés pillanatszerű, vagy valamilyen értelemben folytosan végbe menő jelenség.



17. ábra. A 16-os szigetlánc (zöld) és a snapshot tórusz (narancs) felbomlása egyszerre ábrázolva. Látható a ráhúzódnás a 16-os láncra, és később ($n = 680$) a 16-os lánc felbomlásának kezdete is.



18. ábra. A 16-os szigetlánc időfejlődése és felbomlása. A színezést a pontok árnyék-szigetláncban lévő párjától való távolsága határozza meg.