

A ϑ -tag befolyásának vizsgálata lokális effektív hatásokon keresztül

Gurzó József
ELTE Fizika BSc
III. éves hallgató

Témavezető: Fejős Gergely
ELTE TTK Fizikai– és Csillagászati Intézet, Atomfizikai tanszék



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

1. Bevezetés

A kvantumszíndinamikában (Quantum Chromodynamics – QCD) több lineárisan független, mértékinvariáns alapállapot található, melyeket egy valós ϑ paraméterrel lehet jellemezni. A megfelelő keltő operátorok segítségével mindegyik alapállapotból létrehozhatóak adott fizikai tulajdonságokkal rendelkező többreszezske állapotok, melyek lineáris burka ún. szuperszelekciós szektorokat (ϑ -val paraméterezhető altereket) alkot a Hilbert-térben. Megjegyzendő, hogy ezek az alterek nem ábrázolják unitér ekvivalens módon a kanonikus kommutációs relációkat, így minden fizikai mennyiséghez tartozó operátor, két különböző szuperszelekciós szektor közötti mátrixeleme nulla, vagyis "blokk-diagonálisan" ábrázolódik. Megmutatható, hogy amennyiben a világunkat jellemzi egy ϑ paraméter, a QCD Lagrange-függvényéhez egy ϑ -val arányos teljes divergencia adódik. Ismeretes, hogy egy ilyen ún. topologikus tag a mozgásegyenleteket nem befolyásolja, azonban egyéb fizikai mennyiségek (pl: energia sajátértékek) függhetnek tőle. Ha a világunkban $\vartheta \neq 0$, úgy sérülne a CP szimmetria, kísérletileg azonban $|\vartheta| < 10^{-10}$, mely a neutron elektromos dipólmomentumának méréséből adódik. Többek között ez vezetett az axion nevű hipotetikus részecske elméletéhez, de erről ebben a dolgozatban nem lesz szó.

A kutatásom során a ϑ tag hatását vizsgáltam egy QCD-re hasonlító játékmódelben [1]. Egy kvantumos egyrészezske-rendszert vizsgállok a kvantumtérelméletben használt funkcionális módszerekkel, azonban a QCD-vel ellentétben ez a rendszer numerikusan egzaktul megoldható. Ennek jelentősége tehát, hogy egy QCD-re hasonlító rendszer esetén vizsgálni lehet a funkcionális módszereken alapuló, nem perturbatív közelítések pontosságát, tekintve, hogy az egzakt eredmények (például az alapállapot energiája ϑ -függése) mátrix-diagonalizációval megkaphatóak.

Az [1]-ben bemutatott eredmények alapján a szóban forgó rendszerben (ld. következő fejezet) a ϑ paraméternek létezik egy olyan kritikus értéke, ahol az alapállapot elfajul (ún. levelcrossing következik be). Ehhez a ponthoz közelítve a cikkben használt közelítéssel (Lokális potenciál közelítés – LPA) számolt eredmény egyre romlik, és az elfajuláson túl numerikusan instabillá válik. A kutatás során részletesen vizsgáljuk az LPA viselkedését, magyarázatot keresve a felmerült szimulációs problémákra. Ezek után egy általánosabb közelítést dolgozunk ki, amitől a levelcrossing által előidézett problémák javulását várjuk.

A dolgozatban $m = \hbar = k_B = 1$ egységeket használunk.

2. A vizsgált rendszer bemutatása

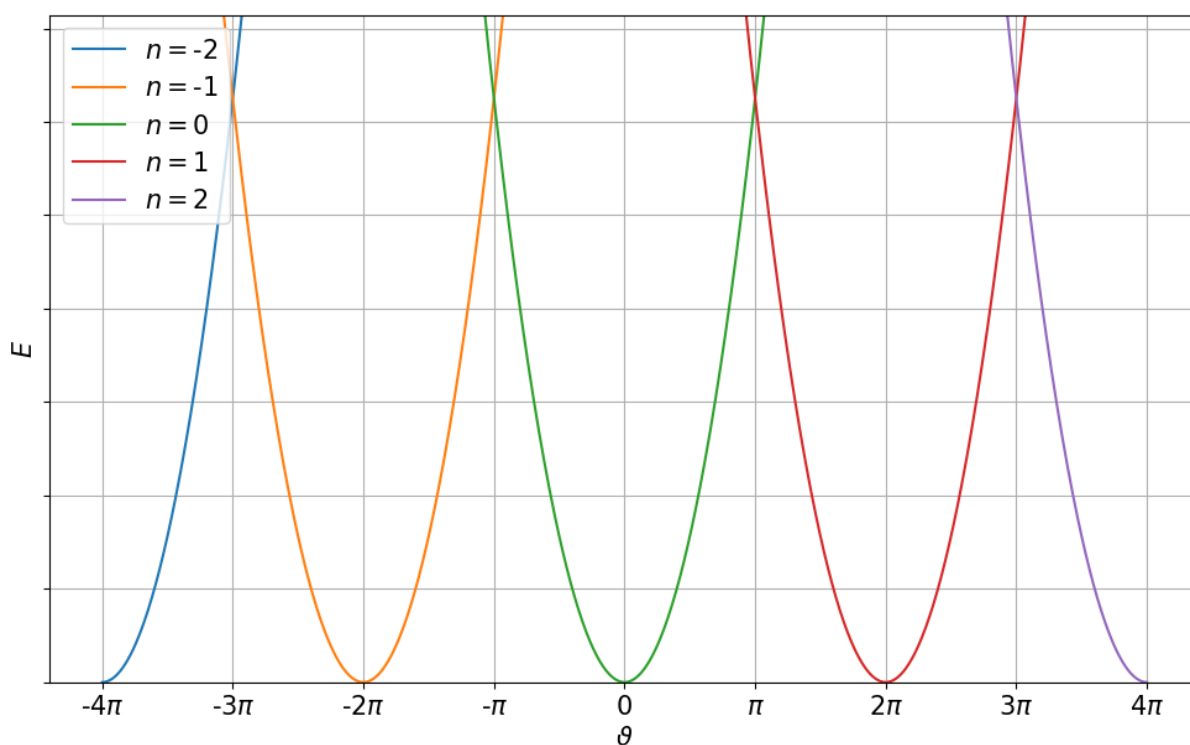
A szóban forgó rendszer egy körre helyezett részecske, a következő Hamilton-operátorral.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_\varphi - \frac{\vartheta}{2\pi} \right)^2. \quad (1)$$

Az energia-sajátértékei könnyen meghatározhatóak:

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(n - \frac{\vartheta}{2\pi} \right)^2. \quad (2)$$

Jól látható, hogy az alapállapot különböző ϑ értékek esetén különböző kvantumszámú (n) állapotot jelent.



1. ábra. A különböző n kvantumszámokhoz tartozó energiaágak ϑ -függése.

Figyeljük meg, hogy amennyiben $\vartheta = (2k + 1)\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, az alapállapot elfajul (degenerált lesz). Felmerül a kérdés, hogy vajon tárgyalható-e funkcionális módszerekkel az ábrán látható levelcrossing viselkedés. Előrebocsátjuk, hogy minden valószínűség szerint ez tehető felelőssé a korábban említett numerikus instabilitásokért.

Ha ezt a rendszert egy $T = 1/\beta$ hőmérsékletű hőtartállyal összekapcsoljuk, akkor a rendszer állapotösszege a következő lesz.

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\beta}{2m} \left(n - \frac{\vartheta}{2\pi} \right)^2 \right] \quad (3)$$

Ugyanerre az eredményre funkcionálintegrálok segítségével is eljuthatunk, azonban a topologikus tag jelenléte miatt a funkcionálintegrálon kívül még egy végtelen összegzés is meg fog jelenni.

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} \right] = \int dx \langle \mathbf{x} | e^{-\beta \hat{H}} | \mathbf{x} \rangle = \\ &= \int_{\mathbf{x}(\beta)=\mathbf{x}(0)} \mathcal{D}p \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^\beta [H(x, p) - ip\dot{x}] d\tau \right) = \\ &= \int_{\mathbf{x}(\beta)=\mathbf{x}(0)} \mathcal{D}x \exp \left(- \int_0^\beta L_E(x, \dot{x}) d\tau \right) = \\ &= \sum_{w=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi(\beta)=\varphi(0)+2\pi w} \mathcal{D}\varphi \exp \left(\int_0^\beta \left[\frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 - i \frac{\vartheta}{2\pi} \dot{\varphi} \right] d\tau \right) . \end{aligned} \quad (4)$$

A $\mathcal{D}p$ funkcionálintegrál elvégzése után megjelenő L_E függvényt nevezzük euklideszi Lagrange-függvénynek. A $2\pi w$ csavarodást leválasztjuk egy helyettesítéssel,

$$y(\tau) = \varphi(\tau) - 2\pi w f(\tau) ; \quad f(0) = 0 , \quad f(\beta) = 1 . \quad (5)$$

A választott f függvénytől független eredményt kapunk, ezért érdemes minél egyszerűbbnek választani: $f(\tau) = \tau/\beta$, amivel

$$Z = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \int_{y(\beta)=y(0)} \mathcal{D}y \exp \left(- \int_0^\beta \left[\frac{1}{2} m \dot{y}^2(\tau) \right] d\tau - \frac{2\pi^2 m w^2}{\beta} - i\vartheta w \right) . \quad (6)$$

A végtelen összeg megjelenése elsősorban a kör (amin a részecske mozogni tud) topológiájának köszönhető, hiszen a $\varphi + 2\pi$ pozíció ekvivalens a φ pozícióval, így az olyan pályák, melyek kezdő és végpontja azonos, w darab teljes körbefordulást is megengednek. Tehát olyan pályákra integrálunk, ahol a teljes szögelfordulás $2\pi w$, $w \in \mathbb{Z}$. A megmaradt funkcionálintegrálról megmutatható, hogy (3)-mal egyező eredményt ad [1].

A funkcionális módszerek alkalmazhatóságának érdekében a topológia relaxálása szükséges. Ez alatt azt kell érteni, hogy megengedjük, hogy a részecske ne csak a körön, hanem egy síkon mozogjon egy megfelelően általánosított Hamilton-operátor által vezérelt módon [1]. Kézenfekvő általánosítása (1)-nek (ha ϑ -t dimenziótlannak szeretnénk megtartani),

$$\hat{H} = \frac{1}{2mr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\vartheta}{2\pi} r^2 \right)^2 + V(r) . \quad (7)$$

A kutatás során a

$$V(r) = \frac{g}{4}(r^2 - 1)^2, \quad (8)$$

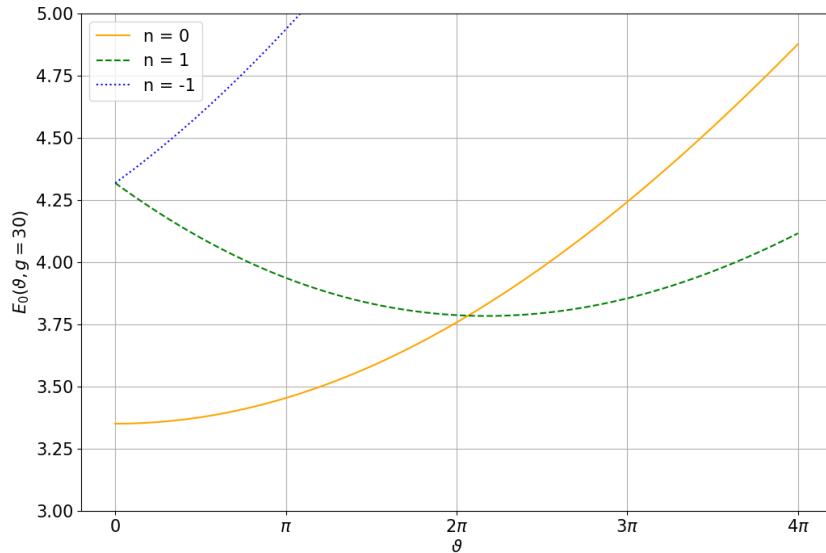
potenciált választjuk [1]. Intuitívan érthető, hogy g növelésével egyre "magasabb" gát veszi körbe az $r = 1$ kört, és $g \rightarrow \infty$ esetben a részecske rá lesz kényszerítve az eredeti körre. Ez lényegét tekintve majdnem igaz, annyi kiegészítés szükséges, hogy a $g \rightarrow \infty$ esetben egy nemtriviális aszimptotikus g -függése lesz az energiasajátértékeknek [1]. Ezzel a kiegészítéssel a Hamilton-operátor a következő alakot ölti.

$$\hat{H} = \frac{1}{2mr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\vartheta}{2\pi} r^2 \right)^2 + \frac{g}{4}(r^2 - 1)^2 - \sqrt{\frac{g}{2m}}. \quad (9)$$

A továbbiakban ezt az irreleváns konstans tagot elhagyjuk, és csak a véges g értékek esetével fogunk foglalkozni. A relaxált topológiájú rendszer már könnyen kezelhető funkcionális módszerekkel, azonban ezelőtt szükséges volna meghatározni (7) alapállapot energiáját numerikusan, mátrix-diagonalizációval. Ehhez először célszerű észrevenni, hogy $[\hat{H}, \hat{p}_\varphi] = \hat{0}$, ezért érdemes $\hat{p}_\varphi$ sajátvektorai között keressük $\hat{H}$ sajátvektorait. Nyilván $\hat{p}_\varphi$ sajátértékei egész számok, ezért $\hat{H}$ sajátértékegyenletére függvény reprezentációban a következőt kapjuk [1].

$$\left[\frac{1}{2mr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} \left(n - \frac{\vartheta}{2\pi} r^2 \right)^2 + \frac{g}{4}(r^2 - 1)^2 \right] \psi_{n,l}(r) = E_{n,l}(\vartheta, g) \psi_{n,l}(r). \quad (10)$$

Különböző $n \in \mathbb{Z}$ értékek esetén megvizsgálható, hogy ϑ függvényében hogyan változik a legalacsonyabb energiaszint. Ezen értékek közül a legkisebb lesz az alapállapot energia.



2. ábra. Különböző n -ekhez tartozó legkisebb energiaszint értékének ϑ -függése.

Mint látható, ebben a rendszerben is bekövetkezik az alapállapot elfajulása bizonyos ϑ értékeknél és a levelcrossing.

3. Az FRG módszerről

A kvantummezőelmélet egy lehetséges megközelítése pályaintegrálokra alapul, melyek egzakt kiszámítása csak a legegyszerűbb esetekben lehetséges. Gyengén csatolt elméletekben a csatolási állandó szerinti sorfejtésből egy perturbációs-sorként kaphatóak meg az n -pont korrelációs függvények közelítő értékei, azonban ha a gyenge csatolás feltétele nem teljesül (például QCD-ben), akkor más módszert kell alkalmazni.

Az alábbiakban röviden felidézzük a funkcionális renormálási csoport (Functional Renormalization Group – FRG) módszert. Először bevezetjük a forrástagtól függő állapotösszeg funkcionált.

$$Z[\mathbf{h}] = \int \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left(- \int_0^\beta L_E(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)) + \mathbf{h}(\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau \right) . \quad (11)$$

Értelemszerűen ez $\mathbf{h}(\tau) \equiv 0$ esetben adja meg az állapotösszeget. Bevezethető $W[\mathbf{h}] = -\ln Z[\mathbf{h}]$, amit funkcionálisan Legendre-transzformálva kapjuk az ún. kvantum effektív hatásfunkcionált.

$$\begin{aligned} \Gamma[\bar{\mathbf{x}}] &= W[\mathbf{h}] - \int_\tau \mathbf{h}(\tau) \bar{\mathbf{x}}(\tau) , \\ \bar{\mathbf{x}}(\tau) &= \frac{\delta W[\mathbf{h}]}{\delta \mathbf{h}(\tau)} . \end{aligned} \quad (12)$$

Amennyiben igaz, hogy $\bar{\mathbf{x}}$ és $\mathbf{h}$ között egyértelmű a megfeleltetés, úgy a logika megfordítható és tekinthető $\Gamma[\bar{\mathbf{x}}]$ adottnak, amiből előállítható $Z[\mathbf{h}]$. Γ -t funkcionálderiválva látható, hogy

$$\mathbf{h}(\tau) = - \frac{\delta \Gamma[\bar{\mathbf{x}}]}{\delta \bar{\mathbf{x}}(\tau)} , \quad (13)$$

ami azt jelenti, hogy olyan $\bar{\mathbf{x}}_{\text{phys.}}(\tau)$ esetén, amire

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\mathbf{x}}_{\text{phys.}}]}{\delta \bar{\mathbf{x}}(\tau)} \equiv 0 , \quad (14)$$

arra teljesül, hogy

$$\Gamma[\bar{\mathbf{x}}_{\text{phys.}}] = -\ln Z , \quad (15)$$

tehát lényegében megkaptuk az állapotösszeget, amiből számos, termodinamikailag releváns fizikai mennyiséget meghatározhatunk.

A funkcionális renormálási csoport módszer (FRG) lényege, hogy az egyre kisebb skálájú fluktuációk járulékait fokozatosan vehetjük figyelembe. Bevezetjük a " k " skálaszeparációs paramétert és az R_k regulátort. Melyekkel a fentebb definiált $Z[\mathbf{h}]$ és $\Gamma[\bar{\mathbf{x}}]$ funkcionálokat "skálafüggővé" tesszük.

$$\begin{aligned} Z_k[\mathbf{h}] &= \int \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left(- \int_{\tau} L_E(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)) + \mathbf{h}(\tau)\mathbf{x}(\tau) - \frac{1}{2} \int_{\tau, \tau'} \mathbf{x}(\tau) R_k(\tau, \tau') \mathbf{x}(\tau') \right) , \\ \Gamma_k[\bar{\mathbf{x}}] &= - \ln Z_k[\mathbf{h}] - \int_{\tau} \mathbf{h}(\tau) \bar{\mathbf{x}}(\tau) - \frac{1}{2} \int_{\tau, \tau'} \bar{\mathbf{x}}(\tau) R_k(\tau, \tau') \bar{\mathbf{x}}(\tau') . \end{aligned} \quad (16)$$

A skálafüggő extra tagok egy levágást valósítanak meg Fourier-térben, bizonyos értelemben tekinthetők frekvenciafüggő tömegtagoknak.

A skála paramétert "elég nagy", $k = \Lambda$ -ról (UV skáláról) kezdjük csökkenteni. Az elméleti számolások során $\Lambda \rightarrow \infty$, így UV skálán "minden fluktuáció befagy". Ennek következménye, hogy Γ_{Λ} a rendszer klasszikus euklideszi hatásfunkcionálja,

$$\Gamma_{\Lambda}[\bar{\mathbf{x}}] = \int_0^{\beta} L_E(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau)) d\tau . \quad (17)$$

Utóbbi egyenlőség egy végtelen nagyságú additív konstans erejéig igaz, ami a nagy frekvenciájú módusok divergens járulékából származik (továbbiakban UV divergencia). Kvantummechanikai szempontból viszont a $k = 0$ skála releváns, vagyis amikor minden fluktuációt figyelembe vettünk. A kettő skálát egy evolúciós jellegű funkcionális differenciálegyenlet köti össze, ami Wetterich-egyenlet néven ismert [2],

$$\partial_k \Gamma_k[\bar{\mathbf{x}}] = \frac{1}{2} \int_{\tau, \tau'} \left[\text{Tr} \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k[\bar{\mathbf{x}}]}{\delta \bar{\mathbf{x}}(\tau) \delta \bar{\mathbf{x}}(\tau')} + R_k(\tau, \tau') \right)^{-1} \right] \partial_k R_k(\tau', \tau) \right] . \quad (18)$$

Utóbbi teljesen ekvivalens a funkcionálintegrál alapú megközelítéssel, ám a végtelen dimenziós integrál kiszámítását egy funkcionális differenciálegyenlet megoldására vezeti vissza. A Wetterich-egyenlet megoldásának közelítésére egy ansatzot kell feltenni, hiszen előbbi egzaktul nem megoldható. Az ansatz-ot a Wetterich-egyenletbe visszahelyettesítve, parciális differenciálegyenlet(ek) kapható(ak), melyeket flow-egyenletnek hív a szakirodalom. Ezen flow-egyenletek megoldása, a kvantum effektív hatás egy nemperturbatív közelítését szolgáltatja. A kapott közelítés pontossága elméletileg két dologtól függ, melyek

- Az ansatz konkrét alakja.
- A használt regulátor.

Az [1]-es cikkhez hasonlóan, kutatásom során a Litim féle optimalizált regulátort használtam [4], ami Fourier térben

$$\tilde{R}_k(\omega, \omega') = 2\pi m(k^2 - \omega^2)\Theta(k^2 - \omega^2)\delta(\omega + \omega') . \quad (19)$$

Az ansatz behelyettesítése során általában egy bizonyos függvényosztályra (másképpen mondva háttérre) korlátozva érdemes vizsgálni a Wetterich-egyenletet. Ennek alapvető befolyása van arra, hogy milyen tagokat generál le a Wetterich-egyenlet. Ha kizárólag olyan tagok generálódnak le, amiket a használt ansatz is tartalmaz, akkor utóbbit zártnak nevezhetjük a használt függvényosztályra nézve.

Gyakran használt az ún. lokális potenciál közelítés (továbbiakban LPA), ami a következő ansatzot jelenti.

$$\Gamma_k[\bar{\mathbf{x}}] = \int_0^\beta \left[\frac{1}{2} m \dot{\bar{\mathbf{x}}}^2 + V_k(\bar{\mathbf{x}}) \right] d\tau . \quad (20)$$

Ez az ansatz zárt a stacionárius pályák függvényosztályára. Megmutatható (15) segítségével, hogy $T \rightarrow 0^+$, azaz $\beta \rightarrow \infty$ esetben V_0 globális minimuma adódik becslésnek a rendszer alapállapot energiájára (feltéve persze, hogy V_0 -nak van globális minimuma). Az általunk vizsgált rendszer alapállapot energiájának ϑ függését így fogjuk meghatározni LPA közelítésben.

4. A rendszer vizsgálata LPA közelítésben

Az (7) képlet alapján kapjuk, hogy

$$\Gamma_{\Lambda}[r, \varphi] = \int d\tau \left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - i\frac{\vartheta}{2\pi}r^2\dot{\varphi} + \frac{g}{4}(r^2 - 1)^2 \right], \quad (21)$$

ahol r és φ síkbeli polárkoordináták. Ennek egy intuitív általánosítása képpen az LPA közelítésben a skálafüggő kvantum effektív hatásra a következő ansatzot használjuk.

$$\Gamma_k[r, \varphi] = \int d\tau \left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - i\frac{\vartheta}{2\pi}r^2\dot{\varphi} + V_k(r^2) \right]. \quad (22)$$

Ezt a Wetterich-egyenletbe be kell helyettesíteni ($T \rightarrow 0^+$, vagyis $\beta \rightarrow \infty$ határesetre) és az

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \text{const.}, \\ \varphi(\tau) &= \text{const.}, \end{aligned} \quad (23)$$

függvényosztályon érdemes kiértékelni azt. Ebből a flow-egyenlet V_k -ra a következő [1]:

$$\begin{aligned} \partial_k V_k &= \frac{2k}{\vartheta} \frac{k^2 + 2V'_k + 2r^2 V''_k}{\sqrt{(k^2 + 2V'_k + 2r^2 V''_k)^2 - (2r^2 V''_k)^2}} \phi(k, \vartheta), \\ \phi(k, \vartheta) &= \arctan \left(\frac{k\vartheta}{\pi \sqrt{(k^2 + 2V'_k + 2r^2 V''_k)^2 - (2r^2 V''_k)^2}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Kezdőfeltételt az UV skálán tudunk adni,

$$V_{\Lambda}(x) = \frac{g}{4}(x - 1)^2. \quad (25)$$

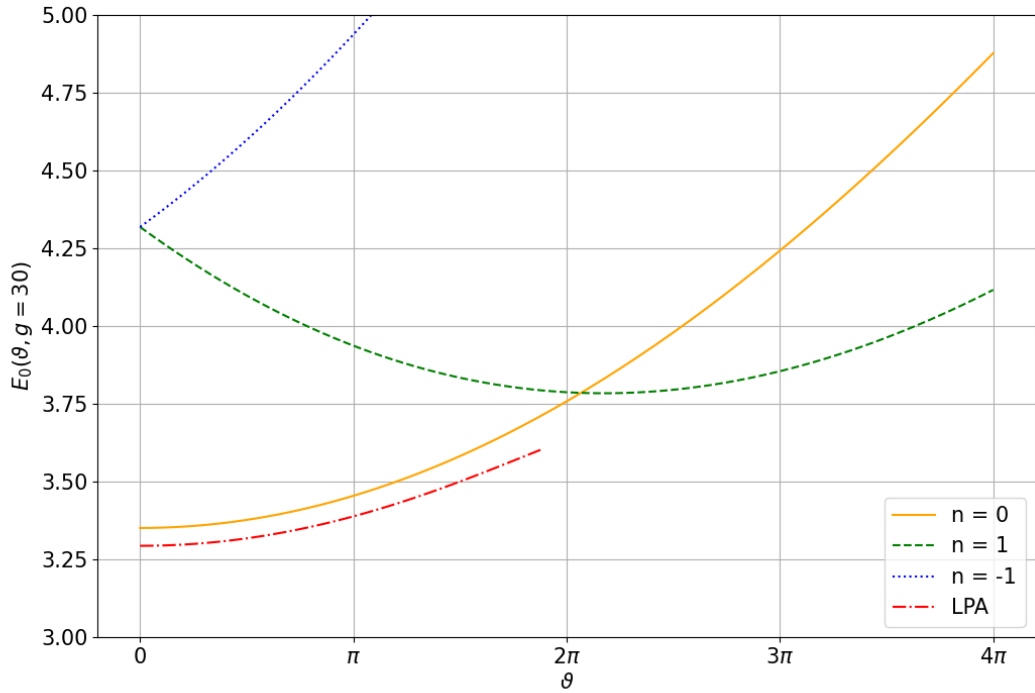
Vegyük észre, hogy az UV divergenciával analitikusan el tudunk bántani. Fejtsük sorba $\partial_k V_k$ -t $1/k$ szerint, majd kézzel vonjuk ki azokat a tagokat, amik UV skálán egy k szerinti integrálba járulékot tudnának adni (azaz k^{-2} -nél magasabb rendű tagokat). Ez a sorfejtés általában egzaktul nem elvégezhető és ilyen esetekben az LPA szimuláció eredménye egy konstans eltolásnyi bizonytalanságot tartalmaz, azonban fontos kihangsúlyozni, hogy ez jelen esetben nem áll fenn. A numerikusan megoldandó parciális differenciálegyenlet tehát a következő.

$$\begin{aligned} \partial_k V_k &= \frac{2k}{\vartheta} \frac{k^2 + 2V'_k + 2r^2 V''_k}{\sqrt{(k^2 + 2V'_k + 2r^2 V''_k)^2 - (2r^2 V''_k)^2}} \phi(k, \vartheta) - \frac{2}{\pi}, \\ \phi(k, \vartheta) &= \arctan \left(\frac{k\vartheta}{\pi \sqrt{(k^2 + 2V'_k + 2r^2 V''_k)^2 - (2r^2 V''_k)^2}} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

A kapott differenciálegyenlet megoldásához egy rácsra helyeztem a rendszert: $\{x_1, \dots, x_N\}$. Ezen pontokban inicializáltam a (25) UV-skálás kezdőfeltételnek megfelelően egy $\{V_\Lambda^{(1)}, \dots, V_\Lambda^{(N)}\}$ tömböt ($V_\Lambda^{(i)} = V_\Lambda(x_i)$), amely tömb elemeit a (26) flow-egyenlet szerint fejlesztettem le $k = \Lambda$ -ról $k = 0$ -ra a GNU Scientific Library (GSL) Runge–Kutta 45 módszerével, C++-ban. Az előbbi numerikus eljárás adaptív lépéshosszal halad lefele a skálásparációs paraméterben. Ennek meghatározásához az abszolút és relatív toleranciák megadása szükséges, melyek lényege, hogy a léptetés után kapott eredmény hibája,

$$|\Delta V| \leq \text{atol} + |V| \cdot \text{rtol}.$$

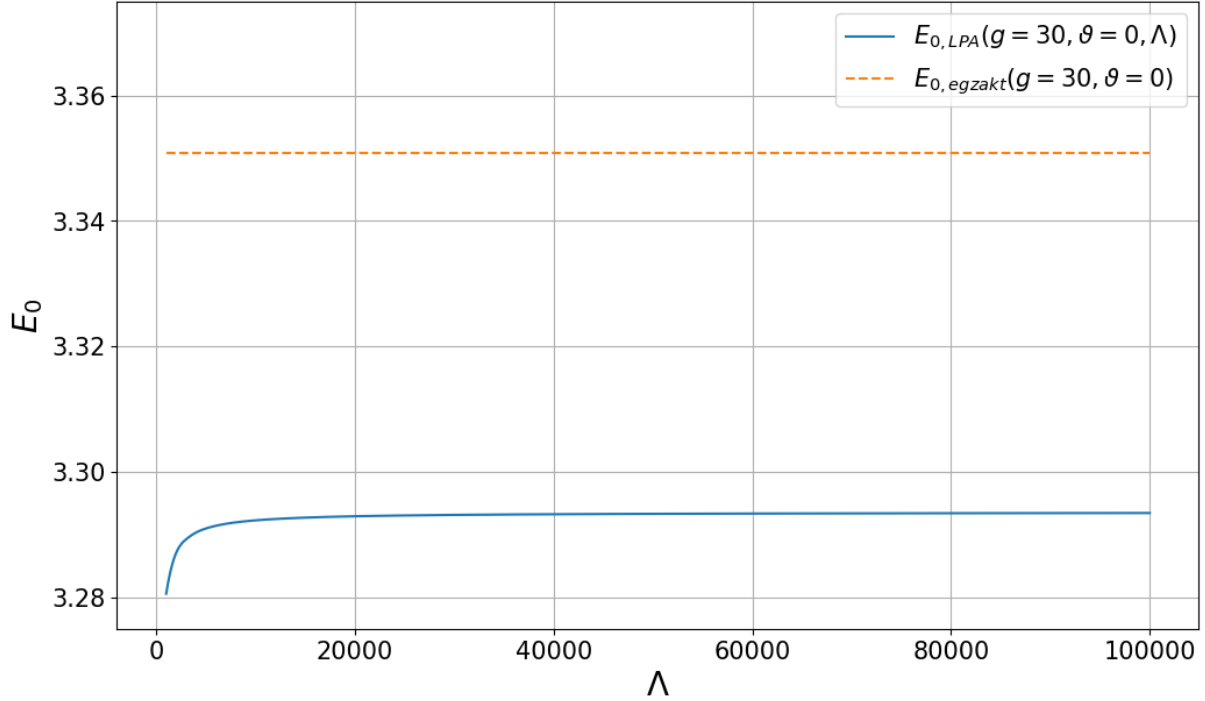
A szimulációs eredmények $\text{atol}=10^{-10}$ és $\text{rtol}=0$ mellett születtek. A felvett rácspontok $N = 1000$ darab egyenletesen választott pont a 0, 10 végpontok között. Az esetek többségében $\Lambda = 3000$, kivéve, ahol Λ változtatásának hatását vizsgáljuk. A flow-egyenletben látható r^2 szerinti első és második deriváltat numerikusan számoltam ki 4, illetve 5 pontból, figyelve arra, hogy a rács szélénél módosulnak a képletek [6]. Végül a (15) képletet alkalmazva az LPA-ból a következő alapállapotú energia görbét kapjuk.



3. ábra. Az alapállapotú energia ϑ -függése, az LPA közelítés és az egzakt eredmények összehasonlítása.

A görbén látható, hogy az alapállapot elfajulásához közelítve egyre romlik az LPA közelítés, ennél nagyobb ϑ esetén pedig a szimuláció numerikusan instabillá válik. Fontos megjegyzés, hogy az irodalomban megtalálható eredmény [1], és a 3. ábra között egy konstans eltolás látható. Ennek oka, hogy a [1]-ben $\vartheta = 0$ -ban hozzá van igazítva az LPA görbe az egzakthoz, egy konstanssal el van tolva, ami azonban helytelen, tekintve, hogy jelen esetben az UV divergencia analitikusan kiküszöbölhető volt.

Felmerülhet esetleg, hogy a már $\vartheta = 0$ -nál is látható eltérésért esetleg Λ véges volta felelős és ezt növelve, a megfelelő értékhez konvergálna a szimulált érték.



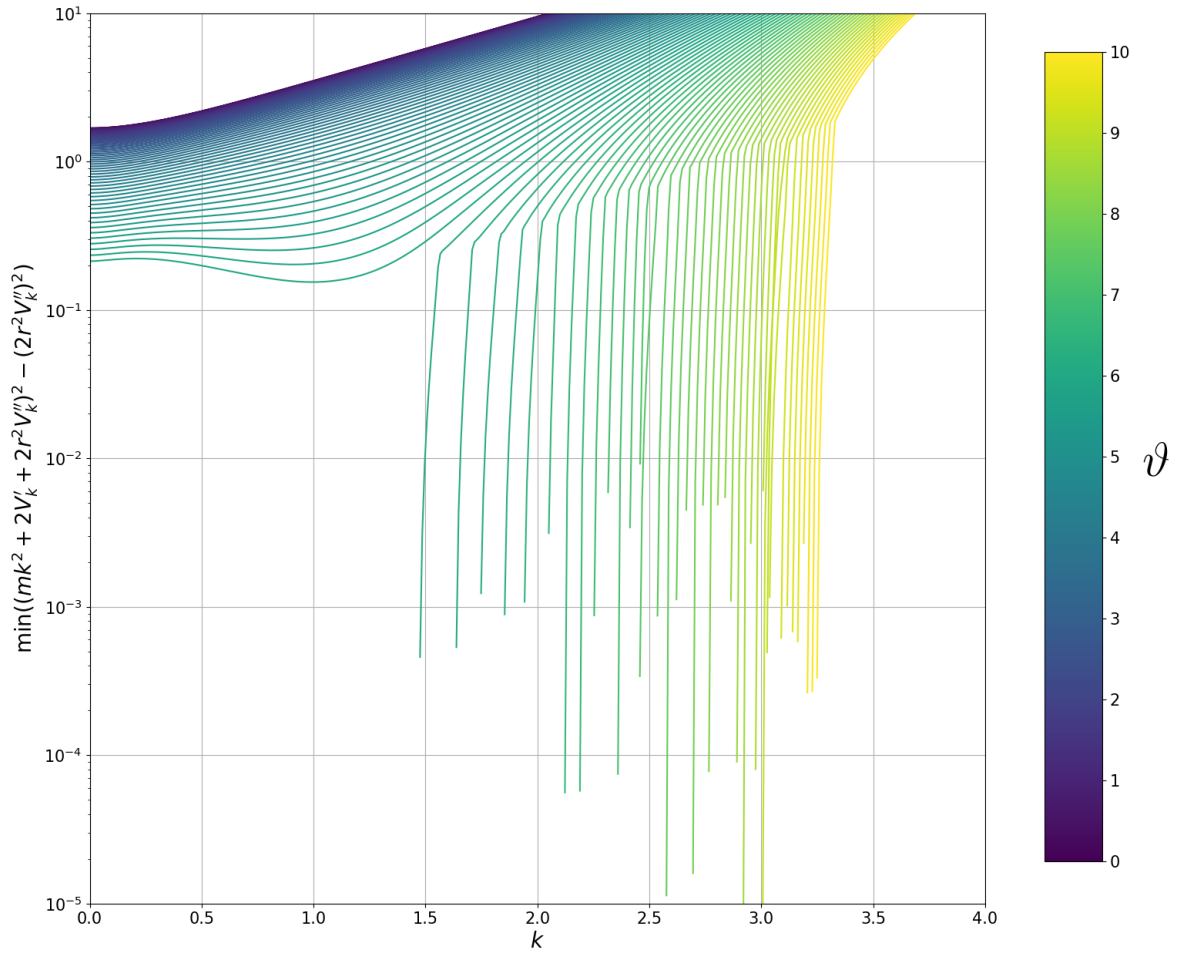
4. ábra. Az egzakt és az LPA-val becsült alapállapot energiája közötti eltérés $\vartheta = 0$, $g = 30$ esetén, Λ függvényében.

Amint az az ábráról jól látható, az előbbi feltevés helytelen. Az LPA-val számolt érték konvergálni látszik, ahogy $\Lambda \rightarrow \infty$. Az ábráról leolvasható, hogy a határérték és az egzakt eredmény eltérése kevesebb, mint 2%, ami kiváló egyezés, de nem azonos egyenlőség, mint ahogy azt [1] mutatja.

A ϑ paraméter növelésével azt találjuk, hogy a szimuláció numerikusan instabillá válik bizonyos ϑ érték felett, ami azt jelenti, hogy minden valószínűség szerint az LPA közelítés nem alkalmas a vizsgált rendszer effektív leírására. Ha megnézzük a flow-egyenletet, akkor a numerikus instabilitásnak igazából csak egy oka lehet, neveztesen, ha a

$$\Delta_k(r^2) = (k^2 + 2V'_k + 2r^2V''_k)^2 - (2r^2V'''_k)^2, \quad (27)$$

mennyiség túl közel kerül 0-hoz a flow során. Az, hogy ez milyen ϑ esetén következik be, természetesen Λ -tól is függ. Az általánosság igénye nélkül a következő ábrán megnézzük a $\min \{\Delta_k(r^2) | r^2 \in \{\text{szimulált rácsponatok}\}\}$ mennyiség k -beli futását különböző ϑ értékek esetén, $\Lambda = 3000$ -nél.



5. ábra. $\min \{\Delta_k\}$ mennyiség k -beli futása, különböző ϑ értékek esetén, $\Lambda = 3000$ -nél.

Azon görbék, melyek elérnek $k = 0$ -ig, olyan ϑ -khoz tartoznak, amik esetén a szimuláció numerikusan stabil. Ahol a görbe nem jut el $k = 0$ -ig, ott a szimuláció lerobbanását látjuk. Az ilyen görbék végénél az ábrázolt mennyiség extrém zuhanása látható, ami természetesen numerikus instabilitást okoz. Az ábra tehát igazolja az instabilitás okára tett felvetést.

5. LPA–n túli közelítések

Amennyiben általánosítani akarunk az LPA–n, szükséges a függvényosztályt (hátteret) is tágítani. Mivel a rendszernek van egy $SO(2)$ szimmetriája, ezért ésszerű olyan választással élni, ami bizonyos értelemben illeszkedik ehhez, például az egyenletes körmozgások függvényosztálya,

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \text{const.} , \\ \dot{\varphi}(\tau) &= \text{const.} . \end{aligned} \quad (28)$$

A következőkben két LPA–n túli közelítést vizsgálunk meg, mindkét esetben ezen a függvényosztályon dolgozunk. Az első közelítés nem zárt, míg a második zárt, erre nézve.

5.1. $\vartheta_k(r^2)$ közelítés

A következő ansatzot használjuk:

$$\Gamma_k[r, \varphi] = \int d\tau \left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - i\frac{\vartheta_k(r^2)}{2\pi}r^2\dot{\varphi} + V_k(r^2) \right] . \quad (29)$$

Ezt helyettesítjük be (18)–ba, azaz a Wetterich–egyenletbe, amit az előbb említett függvényosztályon értékelünk ki. Nem nyilvánvaló, hogy ez a számolás analitikusan elvégezhető, aminek oka a Wetterich–egyenletben látható funkcionális inverz. Meglepő módon ez jelen esetben egzaktul kiszámítható, amiből végül két csatolt flow–egyenletet kapunk (egy ϑ_k –ra, egyet pedig V_k –ra). Ezen egyenletek pontos alakját esztétikai okok miatt most nem írjuk le, azonban a következő fejezetben bemutatott közelítésből adódó flow–egyenlet megfelelő közelítésével reprodukálhatóak, amire később visszatérünk.

A flow–egyenletekből következik, hogy $\partial_k \vartheta_k(r^2) \sim \vartheta'_k(r^2)$, ami a $\vartheta_\Lambda(r^2) = \vartheta$ kezdőfeltétel miatt azt jelenti, hogy ϑ_k –nak nincs flowja ($\vartheta_k(r^2) = \vartheta$). Ez tehát azt jelenti, hogy a topologikus ϑ paraméter nem változik a fluktuációk kiintegrálásával, így a tárgyalt rendszer esetén ez a közelítés ekvivalens az LPA–val.

5.2. $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ közelítés

Ebben a közelítésben lényegében a lehető legáltalánosabb lokális ansatzot írjuk fel, ami analitikusan kezelhető (vagyis egzaktul levezethető flow-egyenletet ad),

$$\Gamma_k[\rho, \nu] = \int d\tau \left[m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho} + \mathcal{L}_k(\rho, \nu) \right] , \quad (30)$$

ahol

$$\begin{aligned} \rho &= r^2 = x^2 + y^2 , \\ \nu &= r^2 \dot{\varphi} = x\dot{y} - y\dot{x} . \end{aligned} \quad (31)$$

Értelemszerűen most $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ lesz az, aminek a flow-ját ki szeretnénk számolni, a következő kezdőfeltétellel.

$$\mathcal{L}_\Lambda(\rho, \nu) = m \frac{\nu^2}{2\rho} - i \frac{\vartheta}{2\pi} \nu + \frac{g}{4} (\rho - 1)^2 . \quad (32)$$

A flow-egyenlet pedig,

$$\partial_k \mathcal{L}_k = \frac{4mk}{\pi} \left[ak + \frac{b - ac}{\sqrt{c}} \arctan \left(\frac{k}{\sqrt{c}} \right) \right] - \frac{2}{\pi} , \quad (33)$$

ahol

$$\begin{aligned} g &= \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} - m , \\ p &= \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} , \\ C_\alpha &= \left(m + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \Omega^2 + 4 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \right) + 2mk^2 , \\ C_\beta &= 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} , \\ C_\gamma &= 4\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + \left(m + 3\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \Omega^2 , \\ a &= \frac{g}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2} , \\ b &= \frac{4\Omega p + C_\alpha}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2} , \\ c &= \frac{(C_\alpha + 4\Omega p)^2 - (C_\gamma + 8\Omega p)^2}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2} . \end{aligned} \quad (34)$$

Ennek részletes levezetése az A. Függelékben található.

Az előző közelítés nyilván egy határesetre a mostaninak, csak el kell végezni az

$$\mathcal{L}_k(\rho, \nu) = m \frac{\nu^2}{2\rho} - i \frac{\vartheta_k(\rho)}{2\pi} \nu + V_k(\rho) , \quad (35)$$

helyettesítést az előző egyenletekben. (35)-ből azonnal következik, hogy $\partial_k \mathcal{L}_k$ lineárisan függ ν -tól, míg az egyenlet másik oldala ennél sokkal bonyolultabb ν -függést mutat. A k -beli futás során tehát a flow-egyenlet olyan tagokat generálna le, amiket nem tartalmazott a fenti ansatz, ami pontosan azt jelenti, hogy a $\vartheta_k(r^2)$ közelítés nem zárt az egyenletes körmozgások függvényosztályán. A kozisztenciát szem előtt tartva, a flow-egyenlet jobb-oldalát csak ν -ben elsőrendig vesszük figyelembe (a magasabb rendű tagokat elhagyjuk) és az egyenlet két oldalán lévő kifejtési együtthatókat tesszük egyenlővé (így megkapva V_k és ϑ_k flow-ját).

Hasonló típusú közelítések kaphatóak akkor is, ha $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ -t sorbafejtjük ν szerint N -ed rendig, majd a flow-egyenlet jobb-oldalát ismét sorbafejtjük N -ed rendig. Ez bizonyos szempontból egy ígéretes alternatívája lehet a flow-egyenlet (ρ, ν) rácson történő megoldásának, hiszen ezzel elkerülnénk azt, hogy numerikusan kelljen vegyes parciális deriváltakat számolni (a ν szerinti deriváltak analitikusan elvégezhetőek lennének).

A dolgozat beadásának pillanatáig ehhez a közelítési módszerhez nem készült szimuláció, azonban erős formai hasonlóság fedezhető fel az LPA flow-egyenlete és (33) között. A fenti c mennyiség (ld.: (33)) analóg, az LPA lerobbanását okozó, Δ_k -val. Ez tehát azt jelenti, hogy bár struktúráisan egy sokkal bonyolultabb egyenletet kaptunk, az eredeti LPA közelítésben fellépő numerikus instabilitást az általánosított ansatz nem feltétlenül fogja tudni megoldani. Az arctan függvény argumentumában található kifejezés, az LPA-ban látottakkal analóg módon képes lehet divergálni egy kritikus skálán, ami továbbra is instabilitáshoz vezethetne. Amennyiben ilyesmi valóban bekövetkezne, az azt sejtetné, hogy az adott ϑ értéknél nem lokális ansatz-ot kellene használni az effektív leíráshoz, hiszen a lehető legáltalánosabb analitikusan kezelhető lokális ansatzot tételeztük fel.

5.3. Az $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ közelítés szimulációs kilátásai

Szimulációs szempontból fontos megfigyelés, hogy $\rho = 0$ esetén, $\nu \neq 0$ végtelen szögsebességet jelentene, ami feltehetően numerikus instabilitásokhoz vezetne. A flow-egyenlet levezetése során kényelmesebb volt a (ρ, ν) paraméterezést használni, de a kiértékelés szempontjából kellemesebb volna, ha át tudnánk térni $(\rho, \Omega = \nu/\rho)$ -ra. Az ehhez tartozó flow-egyenlet már könnyen kiszámítható (33)-ból, azonban a következő megfigyelés miatt ezt nem tesszük meg. Vegyük észre, hogy $\mathcal{L}_\Lambda^*(\rho, -\nu) = \mathcal{L}_\Lambda(\rho, \nu)$ és szerencsére ezt a szimmetriát nem sérti a flow-egyenlet, vagyis

$$\mathcal{L}_k^*(\rho, -\nu) = \mathcal{L}_k(\rho, \nu) . \quad (36)$$

Célszerű tehát áttérni egy $\lambda_k(\rho, \Omega_C)$ függvényre, amire teljesül, hogy

$$\lambda_k(\rho, i\Omega) = \mathcal{L}_k(\rho, \rho\Omega) , \quad (37)$$

hiszen ezzel elkerüljük az első megfigyelésnél említett problémát $\rho = 0$ -nál, és a második megfigyelés miatt egy olyan λ_k függvényt kapunk, amire

$$\rho \in \mathbb{R}_0^+, \Omega_C \in \mathbb{R} \implies \lambda_k(\rho, \Omega_C) \in \mathbb{R} . \quad (38)$$

Utóbbi előnye az, hogy egy kétváltozós komplex függvény flow-ja helyett egy kétváltozós valós függvény flow-ját kell szimulálni, és ezt utólag analitikusan elfolytatni $\Omega_C = i\Omega$ értékekre, amivel rendkívül sokat egyszerűsítünk a szimuláción. A λ_k -hoz tartozó flow-egyenlet a következő:

$$\partial_k \lambda_k = \frac{4mk}{\pi} \left[a_\lambda k + \frac{b_\lambda - a_\lambda c_\lambda}{\sqrt{c_\lambda}} \arctan \left(\frac{k}{\sqrt{c_\lambda}} \right) \right] - \frac{2}{\pi} , \quad (39)$$

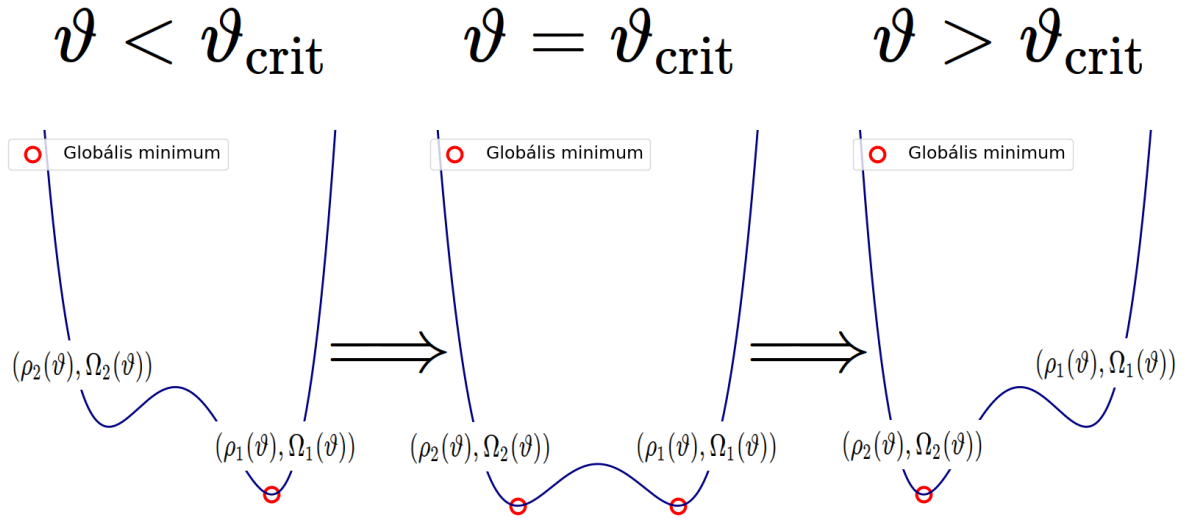
ahol

$$\begin{aligned} \lambda_\Lambda(\rho, \Omega_C) &= -\frac{1}{2}m\rho\Omega_C^2 - \frac{\vartheta}{2\pi}\rho\Omega_C + \frac{g}{4}(\rho-1)^2 , \\ g_\lambda &= - \left(m\rho + \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Omega_C^2} \right) , \\ p_\lambda &= - \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Omega_C} + \Omega_C \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Omega_C^2} - \rho \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \rho \partial \Omega_C} \right) , \\ C_{\alpha,\lambda} &= 2m\rho k^2 - m\rho\Omega_C^2 + 4\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \lambda_k}{\partial \rho} \right) + 4\Omega_C \frac{\partial \lambda_k}{\partial \Omega_C} + 5\Omega_C^2 \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Omega_C^2} - 8\rho\Omega_C \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \rho \partial \Omega_C} , \\ C_{\beta,\lambda} &= 2 \frac{\partial \lambda_k}{\partial \Omega_C} , \\ C_{\gamma,\lambda} &= 8\Omega_C \frac{\partial \lambda_k}{\partial \Omega_C} + 7\Omega_C^2 \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Omega_C^2} - m\rho\Omega_C^2 - 8\rho\Omega_C \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \rho \partial \Omega_C} + 4\rho^2 \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \rho^2} , \\ a_\lambda &= \frac{\rho g_\lambda}{2g_\lambda(C_{\alpha,\lambda} + C_{\gamma,\lambda}) - 8g_\lambda\Omega_C(C_{\beta,\lambda} - p_\lambda) + 4(C_{\beta,\lambda} + 2p_\lambda)^2} , \\ b_\lambda &= \frac{4\rho\Omega_C p_\lambda + \rho C_{\alpha,\lambda}}{2g_\lambda(C_{\alpha,\lambda} + C_{\gamma,\lambda}) - 8g_\lambda\Omega_C(C_{\beta,\lambda} - p_\lambda) + 4(C_{\beta,\lambda} + 2p_\lambda)^2} , \\ c_\lambda &= \frac{(C_{\alpha,\lambda} + 4\Omega_C p_\lambda)^2 - (C_{\gamma,\lambda} + 8\Omega_C p_\lambda)^2}{2g_\lambda(C_{\alpha,\lambda} + C_{\gamma,\lambda}) - 8g_\lambda\Omega_C(C_{\beta,\lambda} - p_\lambda) + 4(C_{\beta,\lambda} + 2p_\lambda)^2} . \end{aligned} \quad (40)$$

Jelen közelítésben az LPA-tól kissé eltérő módon határozzuk meg az alapállapot energiát, nevezetesen $\text{Re}(\lambda_{k=0}(\rho, i\Omega))$ globális minimumát kell megkeressük, $\text{Im}(\lambda_{k=0}(\rho, i\Omega)) = 0$ kényszer mellett. Ennek oka, hogy valós alapállapot energiát szeretnénk kapni. Fontos látni, hogy a közelítés megengedi (az LPA-val ellentétben), hogy az alapállapot egy nem stacionárius állapot legyen.

A következő gondolatok, arra vonatkozó felvetések, hogy a tárgyalt közelítés hogyan bírkozhatna meg a levelcrossing problémával.

Ideális esetben $\text{Re}(\lambda_{k=0}(\rho, i\Omega))$ -nek több (remélhetőleg végtelen sok) lokális minimuma kell legyen (az előbbi kényszer mellett), amelyek közül az egyik a globális minimum. A globális minimum helye és értéke ϑ -t változtatva folytonosan változik, egészen a degenerációig, ekkor azt várjuk, hogy nem lesz egy jól definiált helye a globális minimumnak, mivel egy másik lokális minimum eléri ugyanazt az értéket, mint az eddigi globális minimum. A ϑ paramétert tovább növelve ez az újonnan megjelenő (eddig csak lokális) minimum veszi át a globális minimum szerepét, ami azzal járna, hogy a globális minimum értéke folytonosan változna, de a globális minimum helyének egy ugrása lenne.



6. ábra. Az ugrási folyamat vizualizációja.

Ha meggondoljuk, akkor lényegében azt várjuk, hogy $\text{Re}(\lambda_0(\rho, i\Omega))$ lokális minimumai (a kényszer mellett) lekövetik az energiaágak ϑ függését és az alapállapot energiája ezek közül a globális minimum lesz, összhangban azzal, ahogy az energiaágak közül is a legkisebb az alapállapot energiája.

A szimmetria irányából megközelítve pedig azt vehetjük észre, hogy az egyes energiaágakat a perdülethez rendelt kvantumszám jellemzi, ami a perdület megmaradásának, tehát a forgásszimmetriának köszönhető. Az $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ közelítés háttérében szintén a forgásszimmetria játsza a főszerepet, hiszen pontosan ez az oka annak, hogy a stacionáriusnál általánosabb, egyenletes körmozgások függvényosztályán tudtuk kiértékelni a Wetterich–egyenletet (ld. A. Függelék). Tehát ezért tudtuk az ansatz–ban figyelembe venni a perdület (ν) járulékait, vagyis ez az oka annak, hogy feltehetünk nem stacionárius alapállapotot.

Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a tárgyalt közelítés valóban képes lesz lekövetni a levelcrossing–okat, de mindenképpen bizakodásra adhat okot.

6. Összefoglalás

A dolgozatban egy egység sugarú körre helyezett részecskét vizsgáltunk, aminek viselkedését az (1) képletben látható Hamilton–operátor határoz meg. A rendszer euklideszi Lagrange–függvénye tartalmaz egy topologikus tagot (idő szerinti deriváltat), amely arányos a rendszert jellemző ϑ paraméterrel. A funkcionális módszerek alkalmazhatóságának érdekében a rendszer topológiáját relaxáltuk. Az így kapott rendszer kétdimenziós, a (7) képletben látható forgásszimmetrikus Hamilton–operátor által irányított és az euklideszi Lagrange–függvénye nem tartalmaz többé topologikus tagot, de a (8)–ban bevezetett negyedrendű potenciál g paraméterével végtelenhez tartva, visszakapható az eredeti rendszer. A dolgozat további részeiben a relaxált topológiájú rendszert vizsgáltuk.

A Hamilton–operátort numerikusan diagonalizálva meghatároztuk a különböző perdület sajátértékekhez tartozó legkisebb energiaszint ϑ –függését. Ezen energiaágak bizonyos ϑ értékeknél metszik egymást (levelcrossing), így a ϑ paraméter függvényében más–más perdület sajátértékhez tartozik az alapállapot. A numerikus diagonalizálásból kapott eredmények lehetőséget adtak a funkcionális renormálási csoport módszeren (FRG) alapuló nem perturbatív közelítések pontosságának vizsgálatára. Ezt az alapállapot energiája ϑ függésének reprodukálhatóságán keresztül ellenőriztük.

A gyakran használt lokális potenciál közelítés (LPA) az első levelcrossing eléréséig nagyságrendileg 4%–os pontossággal követi az alapállapot energiája egzakt ϑ –függését, azonban a levelcrossingot követően az LPA flow–egyenletének szimulációja numerikusan instabillá válik. Megvizsgáltuk a numerikus instabilitásért felelős Δ mennyiség minimumának k beli futását, különböző ϑ értékek esetén. A levelcrossingon túli esetekben az utóbbi nem folytonos viselkedését ("zuhanását") tapasztaltuk.

A rendszer forgásszimmetriája lehetővé teszi, hogy a Wetterich–egyenletet a stacionáriusnál általánosabb függvényosztályon (háttéren) értékeljük ki, az egyenletes körmozgások függvényosztályán. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a különböző perdület sajátértékekhez tartozó energiaágak létrejötte is a forgásszimmetria eredménye.

Az előbb említett függvényosztályon két LPA-n túli, lokális ansatzon alapuló közelítést dolgoztunk ki:

- $\vartheta_k(r^2)$ közelítés, ansatz: (29),
- $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ közelítés, ansatz: (30).

A $\vartheta_k(r^2)$ közelítésről beláttuk, hogy $\vartheta_\Lambda(r^2) = \text{const.}$ kezdőfeltétel esetén ekvivalens az LPA-val, ezért általánosabb közelítés szükséges a rendszer levelcrossingon túli leírásához. Az $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ közelítésben a legáltalánosabb analitikusan kezelhető lokális ansatzot tettük fel, így ennek határesetek a $\vartheta_k(r^2)$ közelítés és az LPA is. Mivel az $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ közelítés igen általánosan veszi figyelembe a részecske perdületét, ezért megalapozott feltevés, hogy a perdülethez szorosan kapcsolódó levelcrossing viselkedést is le fogja tudni írni. Amennyiben ez a feltevés helytelen és az utóbbi közelítés nem lesz alkalmas a rendszer effektív leírására, úgy arra a következtetésre jutunk, hogy a rendszer effektív leírásához nem lokális közelítés szükséges. Ennek eldöntéséhez el kell végezni az $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ közelítés flow-egyenletének szimulációját, ami jövőbeli kutatás tárgyát képezi.

Köszönetnyilvánítás

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-6 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



Hivatkozások

- [1] K. Fukushima, T. Shimazaki, Y. Tanizaki, Journal of High Energy Physics 04 (2022) 040
- [2] C. Wetterich, Phys. Lett. B301, 90 (1993).
- [3] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A9, 2411 (1994).
- [4] D. F. Litim, Phys. Rev. D64, 105007 (2001).
- [5] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. 363, 223 (2002).
- [6] <https://web.media.mit.edu/~crtaylor/calculator.html>

A. Függelék: Az $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ flow-egyenlete

A vizsgált rendszerről tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Gamma_\Lambda[\mathbf{x}] &= \int d\tau \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - i\frac{\vartheta}{2\pi}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{g}{4}(x^2 + y^2 - 1)^2 \right] = \\ &= \int d\tau \left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - i\frac{\vartheta}{2\pi}r^2\dot{\varphi} + \frac{g}{4}(r^2 - 1)^2 \right].\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

A következő ansatzot fogjuk használni a skálafüggő effektív hatásra.

$$\Gamma_k[\mathbf{x}] = \int d\tau \left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{L}_k(r^2, r^2\dot{\varphi}) \right]. \quad (\text{A2})$$

Az egyszerűség kedvéért bevezetünk új jelöléseket és ezekkel fejezzük ki a skálafüggő effektív hatást.

$$\begin{aligned}\rho &= r^2 = x^2 + y^2, \\ \nu &= r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - y\dot{x}, \\ \Gamma_k[\mathbf{x}] &= \int d\tau \left[m\frac{\dot{\rho}^2}{8\rho} + \mathcal{L}_k(\rho, \nu) \right].\end{aligned}\quad (\text{A3})$$

Az UV skálán

$$\mathcal{L}_\Lambda(\rho, \nu) = m\frac{\nu^2}{2\rho} - i\frac{\vartheta}{2\pi}\nu + \frac{g}{4}(\rho - 1)^2. \quad (\text{A4})$$

A levezetés másik fontos eleme, hogy a Wetterich-egyenletet az "egyenletes körmozgás" pályáinak ($\rho(\tau) = \text{const.}$, $\nu(\tau) = \text{const.}$) függvényosztályán értékeljük ki. Ezek olyan nem stacionárius pályák, melyek a rendszer forgásszimmetriája miatt még analitikusan könnyen kezelhetők.

Mindemellett pedig a Litim-féle optimalizált regulátort fogjuk használni, amely Fourier-térben a következőképpen néz ki.

$$\tilde{R}_k(\omega, \omega') = 2\pi m(k^2 - \omega^2)\Theta(k^2 - \omega^2)\delta(\omega + \omega'). \quad (\text{A5})$$

A.1. Funkcionálderiválás

Az átláthatóság kedvéért tovább nem írjuk ki a függvények argumentumait.

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_k &= \int d\tau \left[m \frac{\dot{\rho}}{4\rho} \delta\dot{\rho} - m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} \delta\nu \right] = \\
&= \int d\tau \left[-m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{\rho}}{4\rho} \right) \delta\rho - m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} \delta\nu \right] = \\
&= \int d\tau \left[m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} \delta\rho - m \frac{\ddot{\rho}}{4\rho} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} \delta\rho + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} \delta\nu \right] .
\end{aligned} \tag{A6}$$

Fejezzük ki $\delta\rho$ -t és $\delta\nu$ -t δx -el és δy -al.

$$\begin{aligned}
\delta\rho &= 2x\delta x + 2y\delta y , \\
\delta\nu &= \delta x\dot{y} + x\delta\dot{y} - \delta y\dot{x} - y\delta\dot{x} .
\end{aligned} \tag{A7}$$

Ezzel a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_k &= \int d\tau \left[m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} 2x\delta x - m \frac{\ddot{\rho}}{4\rho} 2x\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} 2x\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} (\dot{y}\delta x - y\delta\dot{x}) \right] + \\
&+ \int d\tau \left[m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} 2y\delta y - m \frac{\ddot{\rho}}{4\rho} 2y\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} 2y\delta y - \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} (\dot{x}\delta y - x\delta\dot{y}) \right] = \\
&= \int d\tau \left[m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} 2x - m \frac{\ddot{\rho}}{4\rho} 2x + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} 2x + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} \dot{y} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} y \right) \right] \delta x + \\
&+ \int d\tau \left[m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} 2y - m \frac{\ddot{\rho}}{4\rho} 2y + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} 2y - \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} \dot{x} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} x \right) \right] \delta y ,
\end{aligned} \tag{A8}$$

amiből az első funkcionálderiváltak,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma_k}{\delta x} &= m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} 2x - m \frac{\ddot{\rho}}{4\rho} 2x + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} 2x + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} \dot{y} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} y \right) , \\
\frac{\delta\Gamma_k}{\delta y} &= m \frac{\dot{\rho}^2}{8\rho^2} 2y - m \frac{\ddot{\rho}}{4\rho} 2y + \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\rho} 2y - \frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} \dot{x} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_k}{\partial\nu} x \right) .
\end{aligned} \tag{A9}$$

A következőkben meg kell határoznunk a második funkcionálderiváltakat, amihez egyszerűsítő jelöléseket vezetünk be, hogy a négy funkcionálderiváltat egyszerre tudjuk meghatározni.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= m \frac{\dot{\rho}^2}{4\rho^2} - m \frac{\ddot{\rho}}{2\rho} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} , \\ \alpha_2 &= 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} , \\ \alpha_3 &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \dot{\rho} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \dot{\nu} , \\ \underline{J} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .\end{aligned}\tag{A10}$$

Innentől kezdve mindent vektorosan fejezünk ki, amihez hasznos lesz a következőket megjegyezni.

$$\begin{aligned}\delta \rho &= 2\mathbf{x}\delta\mathbf{x} , \\ \delta \nu &= \dot{\mathbf{x}}\underline{J}\delta\mathbf{x} - \mathbf{x}\underline{J}\delta\dot{\mathbf{x}} , \\ \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \mathbf{x}} &= \alpha_1 \mathbf{x} - \alpha_2 \underline{J}\dot{\mathbf{x}} - \alpha_3 \underline{J}\mathbf{x} .\end{aligned}\tag{A11}$$

Ezeket felhasználva,

$$\begin{aligned}\delta \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \mathbf{x}(\tau)} &= \delta \int d\tau' \delta(\tau - \tau') \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \mathbf{x}(\tau')} = \delta \int d\tau' \delta(\tau - \tau') (\alpha_1 \mathbf{x} - \alpha_2 \underline{J}\dot{\mathbf{x}} - \alpha_3 \underline{J}\mathbf{x}) = \\ &= \int d\tau' \delta(\tau - \tau') \left[\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \ddot{\rho}} \delta \ddot{\rho} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{\rho}} \delta \dot{\rho} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \nu} \delta \nu \right) \mathbf{x} + \alpha_1 \delta \mathbf{x} \right] + \\ &- \int d\tau' \delta(\tau - \tau') \left[\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \nu} \delta \nu \right) \underline{J}\dot{\mathbf{x}} + \alpha_2 \underline{J}\delta\dot{\mathbf{x}} \right] + \\ &- \int d\tau' \delta(\tau - \tau') \left[\left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial \dot{\rho}} \delta \dot{\rho} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \nu} \delta \nu + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \dot{\nu}} \delta \dot{\nu} \right) \underline{J}\mathbf{x} + \alpha_3 \underline{J}\delta\mathbf{x} \right] .\end{aligned}\tag{A12}$$

A további számolás előtt érdemes megállapítani, hogy a vizsgált függvényosztályra szorítkozva mely tagok nem adnak járulékot. Ezeket mind elhagyva,

$$\begin{aligned}
\delta \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \mathbf{x}(\tau)} &= \int d\tau' \delta(\tau - \tau') \left[\left(-\frac{m}{2\rho} \delta \ddot{\rho} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} \delta \rho + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \delta \nu \right) \mathbf{x} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \delta \mathbf{x} \right] + \\
&- \int d\tau' \delta(\tau - \tau') \left[\left(2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \delta \rho + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \delta \nu \right) \underline{J} \dot{\mathbf{x}} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} \underline{J} \delta \dot{\mathbf{x}} \right] + \\
&- \int d\tau' \delta(\tau - \tau') \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \delta \dot{\rho} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \delta \dot{\nu} \right) \underline{J} \mathbf{x} \right] = \\
&= \int d\tau' \left[-\frac{m}{2\rho} \frac{d^2}{d\tau'^2} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x}) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J} \mathbf{x}) + \right. \\
&+ 2\delta(\tau - \tau') \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \right) \mathbf{x} \left. \delta \rho + \right. \\
&+ \int d\tau' \left[2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \delta(\tau - \tau') \mathbf{x} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J} \mathbf{x}) \right] \delta \nu + \\
&+ \int d\tau' \left[2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \underline{J} \delta(\tau - \tau') + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} \underline{J} \delta'(\tau - \tau') \right] \delta \mathbf{x} , \tag{A13}
\end{aligned}$$

ahol bevezettük az $\Omega = \nu/\rho$ szögsebességet. A számolt három integrál közül a másodikat tovább alakítjuk,

$$\begin{aligned}
&\int d\tau' \left[2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \delta(\tau - \tau') \mathbf{x} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J} \mathbf{x}) \right] \delta \nu = \\
&= \int d\tau' \left[2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \delta(\tau - \tau') \mathbf{x} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J} \mathbf{x}) \right] (\dot{\mathbf{x}} \underline{J} \delta \mathbf{x} - \mathbf{x} \underline{J} \delta \dot{\mathbf{x}}) = \\
&= \int d\tau' \left[2\Omega \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \delta(\tau - \tau') \mathbf{x} \circ \mathbf{x} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \Omega \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J} \mathbf{x}) \circ \mathbf{x} \right] \delta \mathbf{x} \\
&- \int d\tau' \left[2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x} \circ (\underline{J} \mathbf{x})) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \frac{d}{d\tau'} \left(\frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J} \mathbf{x}) \circ (\underline{J} \mathbf{x}) \right) \right] \delta \mathbf{x} . \tag{A14}
\end{aligned}$$

A második funkcionálderivált-mátrix így a következő:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \mathbf{x}(\tau) \delta \mathbf{x}(\tau')} &= -\frac{m}{\rho} \frac{d^2}{d\tau'^2} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x}) \circ \mathbf{x} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{\underline{J}} \mathbf{x}) \circ \mathbf{x} + \\
&\quad + 4\delta(\tau - \tau') \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \right) \mathbf{x} \circ \mathbf{x} + \\
&\quad + 2\Omega \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \delta(\tau - \tau') \mathbf{x} \circ \mathbf{x} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \Omega \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{\underline{J}} \mathbf{x}) \circ \mathbf{x} \\
&\quad - 2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x} \circ (\underline{\underline{J}} \mathbf{x})) \\
&\quad - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \frac{d}{d\tau'} \left(\frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{\underline{J}} \mathbf{x}) \circ (\underline{\underline{J}} \mathbf{x}) \right) \\
&\quad + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \underline{\underline{I}} \delta(\tau - \tau') + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} \underline{\underline{J}} \delta'(\tau - \tau') \\
&= -\frac{m}{\rho} \frac{d^2}{d\tau'^2} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x}) \circ \mathbf{x} + \left(2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \Omega \right) \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{\underline{J}} \mathbf{x}) \circ \mathbf{x} + \\
&\quad + 2\delta(\tau - \tau') \left(2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + 3\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \mathbf{x} \circ \mathbf{x} \\
&\quad - 2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x} \circ (\underline{\underline{J}} \mathbf{x})) \\
&\quad - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \frac{d}{d\tau'} \left(\frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{\underline{J}} \mathbf{x}) \circ (\underline{\underline{J}} \mathbf{x}) \right) \\
&\quad + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \underline{\underline{I}} \delta(\tau - \tau') + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} \underline{\underline{J}} \delta'(\tau - \tau') . \tag{A15}
\end{aligned}$$

Célszerű a kapott eredményt Fourier-transzformálni. Az egyszerűség kedvéért ezt az egyes tagokra külön-külön végezzük el.

$$\begin{aligned} & \int d\tau \int d\tau' e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega'\tau'} \frac{d^2}{d\tau'^2} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x}) \circ \mathbf{x} = \\ & = -(\Omega^2 + \omega'^2) \rho \int d\tau \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} - 2\Omega\omega' \rho \int d\tau i \frac{\mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau}, \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

$$\begin{aligned} & \int d\tau \int d\tau' e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega'\tau'} \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J}\mathbf{x}) \circ \mathbf{x} = \\ & = -\Omega\rho \int d\tau \frac{(\underline{J}\mathbf{x}) \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} + \omega'\rho \left(\int d\tau i \frac{\mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} \right)^T, \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

$$\int d\tau \int d\tau' e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega'\tau'} \frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})) = \omega'\rho \int d\tau i \frac{\mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau}, \quad (\text{A18})$$

$$\begin{aligned} & \int d\tau \int d\tau' e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega'\tau'} \frac{d}{d\tau'} \left(\frac{d}{d\tau'} (\delta(\tau - \tau') \underline{J}\mathbf{x}) \circ (\underline{J}\mathbf{x}) \right) = \\ & = -\omega'^2 \rho \int d\tau \frac{(\underline{J}\mathbf{x}) \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} + \Omega\omega'\rho \left(\int d\tau i \frac{\mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} \right)^T. \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

A hasonló tagokat összegyűjtve,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_{\underline{k}}^{(2)} &= \left(m(\Omega^2 + \omega'^2) + 4\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + 6\rho\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + 2\rho\Omega^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \int d\tau \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} + \\ &+ 2\omega' \left(m\Omega - \rho \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \right) \int d\tau i \frac{\mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} + \\ &+ 2\rho\omega' \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \left(\int d\tau i \frac{\mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} \right)^T \\ &- \rho \left((\Omega^2 - \omega'^2) \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \right) \int d\tau \frac{(\underline{J}\mathbf{x}) \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} e^{-i(\omega+\omega')\tau} + \\ &+ 4\pi \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \underline{I} \delta(\omega + \omega') + 4\pi\omega' \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} i \underline{J} \delta(\omega + \omega'). \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

Figyelembe vehetnénk a körmozgás kezdőfázisát is, azonban forgásszimmetria miatt ennek végül ki kell esnie, a számolást ezzel feleslegesen bonyolítanánk. A vizsgált időfüggés így,

$$\mathbf{x}(\tau) = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} \cos \Omega \tau \\ \sin \Omega \tau \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva, a következőkben külön kiszámítjuk a Fourier-transzformációk során megjelent integrálokat.

$$\begin{aligned} & \int e^{-i(\omega+\omega')\tau} \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}}{\rho} d\tau = \int e^{-i(\omega+\omega')\tau} \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega \tau & \cos \Omega \tau \sin \Omega \tau \\ \cos \Omega \tau \sin \Omega \tau & \sin^2 \Omega \tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \int e^{-i(\omega+\omega')\tau} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\Omega \tau & \sin 2\Omega \tau \\ \sin 2\Omega \tau & 1 - \cos 2\Omega \tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-i(\omega+\omega')\tau} \underline{I} + \frac{1}{2} e^{-i(\omega+\omega'-2\Omega)\tau} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-i(\omega+\omega'+2\Omega)\tau} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \pi \delta(\omega + \omega') \underline{I} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega' - 2\Omega) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega' + 2\Omega) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int e^{-i(\omega+\omega')\tau} i \frac{\mathbf{x} \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} d\tau = - \int e^{-i(\omega+\omega')\tau} i \begin{pmatrix} \cos \Omega \tau \sin \Omega \tau & -\cos^2 \Omega \tau \\ \sin^2 \Omega \tau & -\cos \Omega \tau \sin \Omega \tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= - \int i e^{-i(\omega+\omega')\tau} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin 2\Omega \tau & -1 - \cos 2\Omega \tau \\ 1 - \cos 2\Omega \tau & -\sin 2\Omega \tau \end{pmatrix} d\tau = \\ &= - \frac{1}{2} \int e^{-i(\omega+\omega')\tau} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-i(\omega+\omega'-2\Omega)\tau} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-i(\omega+\omega'+2\Omega)\tau} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} d\tau = \\ &= - \pi \delta(\omega + \omega') \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega' - 2\Omega) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega' + 2\Omega) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int e^{i(\omega+\omega')\tau} \frac{(\underline{J}\mathbf{x}) \circ (\underline{J}\mathbf{x})}{\rho} d\tau = \\ &= \pi \delta(\omega + \omega') \underline{I} - \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega' - 2\Omega) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} - \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega' + 2\Omega) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A21}) \end{aligned}$$

Ezzel meghatároztuk $\tilde{\Gamma}_{\equiv k}^{(2)}$ -t ($\Gamma_{\equiv k}^{(2)}$ Fourier-transzformáltját), több tag összegeként, melyek összeadása nélkül is jól látható, hogy

$$\tilde{\Gamma}_{\equiv k}^{(2)} = \delta(\omega + \omega') \begin{pmatrix} \alpha' & -i\beta \\ i\beta & \alpha' \end{pmatrix} + \delta(\omega + \omega' - 2\Omega)\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + \delta(\omega + \omega' + 2\Omega)\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A22})$$

Meg kell említenünk azt is, hogy pontosan ugyanilyen alakú marad a kifejezés a regulátor hozzáadása után is. Fejezzük ki az előbb bevezetett mennyiségeket (α' , β , γ_1 és γ_2).

$$\begin{aligned} \alpha' &= \pi \left[(\Omega^2 + \omega'^2) \left(m + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \right) + 4\rho\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} \right], \\ \beta &= 2\pi\omega' \left[\rho \left(2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) - m\Omega + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} \right], \\ \gamma_1 &= \frac{\pi}{2} \left[m(\Omega^2 + \omega'^2) + 4\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + 8\rho\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \rho(3\Omega^2 - \omega'^2) \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} - 2\omega'\Omega \left(m - \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \right], \\ \gamma_2 &= \frac{\pi}{2} \left[m(\Omega^2 + \omega'^2) + 4\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + 8\rho\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \rho(3\Omega^2 - \omega'^2) \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} + 2\omega'\Omega \left(m - \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

A kapott képletek konzisztensek az LPA ansatzon számolhatókkal.

A.2. Funkcionális invertálás

Mielőtt az invertálásnak nekiállnánk, ne felejtsük el, hogy a regulátort nem vettük még figyelembe.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k I &= \delta(\omega + \omega') \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} + \delta(\omega + \omega' - 2\Omega) \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + \delta(\omega + \omega' + 2\Omega) \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} , \\ \alpha &= \pi \left[(\Omega^2 + \omega'^2) \left(m + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \right) + 4 \rho \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + 2m(k^2 - \omega'^2) \Theta(k^2 - \omega'^2) \right] , \\ \beta &= 2\pi \omega' \left[\rho \left(2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) - m\Omega + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} \right] , \\ \gamma_1 &= \frac{\pi}{2} \left[m(\Omega^2 + \omega'^2) + 4\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + 8\rho \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \rho(3\Omega^2 - \omega'^2) \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} - 2\omega' \Omega \left(m - \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \right] , \\ \gamma_2 &= \frac{\pi}{2} \left[m(\Omega^2 + \omega'^2) + 4\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + 8\rho \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} + \rho(3\Omega^2 - \omega'^2) \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} + 2\omega' \Omega \left(m - \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

Ahogy korábban említettük, az előbbi kifejezés funkcionális inverze analitikusan kiszámítható. Az inverz meghatározásának folyamatát a következőkben részletesen tárgyaljuk. Tartsuk észben azonban, hogy a Fourier-transzformált inverze nem egyezik meg az inverz Fourier-transzformáltjával. Nekünk e kettő közül az utóbbira lesz szükségünk, aminek meghatározását az előbbi kiszámítására vezetünk vissza.

Adott a következő alakú kifejezés:

$$\underline{\underline{f}}(\omega, \omega') = \underline{\underline{A}} \delta(\omega + \omega') + \underline{\underline{B}} \delta(\omega + \omega' - 2\Omega) + \underline{\underline{C}} \delta(\omega + \omega' + 2\Omega) . \quad (\text{A25})$$

Tegyük fel, hogy ennek funkcionális inverze is ilyen alakú, vagyis

$$\underline{\underline{f}}^{-1}(\omega', \omega'') = \underline{\underline{A}}' \delta(\omega' + \omega'') + \underline{\underline{B}}' \delta(\omega' + \omega'' - 2\Omega) + \underline{\underline{C}}' \delta(\omega' + \omega'' + 2\Omega) , \quad (\text{A26})$$

ami azt jelenti, hogy

$$\delta(\omega - \omega'') \underline{\underline{I}} = \int d\omega' \underline{\underline{f}}(\omega, \omega') \underline{\underline{f}}^{-1}(\omega', \omega'') . \quad (\text{A27})$$

Helyettesítsünk be az előző képletbe:

$$\begin{aligned}
& \delta(\omega - \omega'') \underline{\underline{I}} = \\
& = \int d\omega' (\underline{\underline{A}} \delta(\omega + \omega') + \underline{\underline{B}} \delta(\omega + \omega' - 2\Omega) + \underline{\underline{C}} \delta(\omega + \omega' + 2\Omega)) \\
& \quad (\underline{\underline{A'}} \delta(\omega' + \omega'') + \underline{\underline{B'}} \delta(\omega' + \omega'' - 2\Omega) + \underline{\underline{C'}} \delta(\omega' + \omega'' + 2\Omega)) = \\
& = (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A'}} + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B'}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{C'}}) \delta(\omega - \omega'') + \\
& + (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B'}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{A'}}) \delta(\omega - \omega'' + 2\Omega) + (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C'}} + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A'}}) \delta(\omega - \omega'' - 2\Omega) + \\
& + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C'}} \delta(\omega - \omega' - 4\Omega) + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B'}} \delta(\omega - \omega' + 4\Omega) .
\end{aligned} \tag{A28}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{I}} &= \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A'}} + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B'}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{C'}} , \\
\underline{\underline{0}} &= \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B'}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{A'}} , \\
\underline{\underline{0}} &= \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C'}} + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A'}} , \\
\underline{\underline{0}} &= \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C'}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B'}} .
\end{aligned} \tag{A29}$$

Ha sikerül olyan $\underline{\underline{A'}}$, $\underline{\underline{B'}}$ és $\underline{\underline{C'}}$ mátrixokat találnunk, melyekkel ezek az egyenletek teljesülnek, akkor megkaptuk a funkcionális inverzet. Természetesen ezen a ponton nem tudhatjuk, hogy fogunk-e megfelelő mátrixokat találni, hiszen az inverzre vonatkozó alak egy felvetés volt.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{B}} &= \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C'}} = \underline{\underline{0}} \implies \underline{\underline{C'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 , \\
\underline{\underline{C}} &= \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\underline{C}} \underline{\underline{B'}} = \underline{\underline{0}} \implies \underline{\underline{B'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 ,
\end{aligned} \tag{A30}$$

amiből

$$\underline{\underline{B}} \underline{\underline{B'}} = 2\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 , \quad \underline{\underline{C}} \underline{\underline{C'}} = 2\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 . \tag{A31}$$

Tekintsük a másodikat és harmadikat, az (A29)–es egyenletek közül.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{0}} &= \gamma_1 (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B'}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{A'}}) + \gamma_2 (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C'}} + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A'}}) = \\
&= \underline{\underline{A}} (\gamma_1 \underline{\underline{B'}} + \gamma_2 \underline{\underline{C'}}) + (\gamma_1 \underline{\underline{C}} + \gamma_2 \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{A'}} = \\
&= \underline{\underline{A}} (\gamma_1 \underline{\underline{B'}} + \gamma_2 \underline{\underline{C'}}) + 2\gamma_1 \gamma_2 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{A'}} \\
&\implies \underline{\underline{A'}} = -\frac{1}{2\gamma_1 \gamma_2} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{A}} (\gamma_1 \underline{\underline{B'}} + \gamma_2 \underline{\underline{C'}}) ,
\end{aligned} \tag{A32}$$

amit behelyettesítve (A29) második egyenletébe, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{A} \underline{B}' + \underline{C} \underline{A}' = \underline{A} \underline{B}' - \frac{1}{2\gamma_1\gamma_2} \underline{C} \underline{K} \underline{A} (\gamma_1 \underline{B}' + \gamma_2 \underline{C}') \\ \Rightarrow \frac{1}{2\gamma_1} \underline{C} \underline{K} \underline{A} \underline{C}' &= \left(\underline{I} - \frac{1}{2\gamma_2} \underline{C} \underline{K} \right) \underline{A} \underline{B}' \\ \frac{\gamma_2}{2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \underline{A} \underline{C}' &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \underline{A} \underline{B}' . \end{aligned} \quad (\text{A33})$$

Megmutatható, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix} , \quad (\text{A34})$$

amiből következik, hogy

$$\gamma_2 \underline{A} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 = \gamma_1 \underline{A} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 \iff \underline{0} = \underline{0} . \quad (\text{A35})$$

Ez azt jelenti, hogy az (A29) második és harmadik egyenletei tetszőleges $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ esetén teljesülnek ($\underline{A}'$ alakján kívül nem adnak extra megkötést). Fejezzük ki $\underline{A}'$ -t $\mathbf{v}_1$ -el és $\mathbf{v}_2$ -vel:

$$\underline{A}' = -\underline{K} \underline{A} \left(\frac{1}{2\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 \right) . \quad (\text{A36})$$

Az eddigieket behelyettesítve az (A29) első egyenletébe,

$$\begin{aligned} \underline{I} &= -\underline{A} \underline{K} \underline{A} \left(\frac{1}{2\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 \right) + 2\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 + 2\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 = \\ &= -(\alpha^2 - \beta^2) \left(\frac{1}{2\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 \right) + 2\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 + 2\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 = \\ &= \left(2\gamma_1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 + \left(2\gamma_2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma_1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 , \end{aligned} \quad (\text{A37})$$

amiből könnyen kapható, hogy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} &= 2 \left(2\gamma_1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma_2} \right) \mathbf{v}_2^\dagger , \\ \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} &= 2 \left(2\gamma_2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma_1} \right) \mathbf{v}_1^\dagger . \end{aligned} \quad (\text{A38})$$

Ebből pedig már minden kérdéses mátrix meghatározható:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{B'}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_2 = -\frac{\gamma_2}{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma_1\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \\
\underline{\underline{C'}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \circ \mathbf{v}_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma_1\gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \\
\underline{\underline{A'}} &= -\frac{1}{2} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{A}} \left(\frac{1}{\gamma_2} \underline{\underline{B'}} + \frac{1}{\gamma_1} \underline{\underline{C'}} \right) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma_1\gamma_2} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{K}} = \\
&= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma_1\gamma_2} \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ -i\beta & \alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A39}$$

Derítsük fel a kapcsolatot a funkcionális inverz Fourier-transzformáltja és a Fourier-transzformált funkcionális inverze között. Legyen $\underline{\underline{M}}(\tau, \tau')$ inverze $\underline{\underline{J}}(\tau', \tau'')$.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{I}}\delta(\tau - \tau'') &= \int_{\tau'} \underline{\underline{M}}(\tau, \tau') \underline{\underline{J}}(\tau', \tau'') = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\tau'} \int_{\omega} \int_{\omega'} \int_{\omega''} \int_{\omega'''} e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega'\tau'} e^{-i\omega''\tau'} e^{-i\omega'''\tau''} \underline{\underline{m}}(\omega, \omega') \underline{\underline{j}}(\omega'', \omega''') = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\omega} \int_{\omega'} \int_{\omega''} e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega''\tau''} \underline{\underline{m}}(\omega, \omega') \underline{\underline{j}}(-\omega', \omega''), \\
\underline{\underline{I}}\delta(\tau - \tau'') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\omega} \int_{\omega''} 2\pi \underline{\underline{I}}\delta(\omega + \omega'') e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega''\tau''}, \\
\Rightarrow \underline{\underline{I}}\delta(\omega + \omega'') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\omega'} \underline{\underline{m}}(\omega, \omega') \underline{\underline{j}}(-\omega', \omega'') \iff \\
\underline{\underline{I}}\delta(\omega - \omega'') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\omega'} \underline{\underline{m}}(\omega, \omega') \underline{\underline{j}}(-\omega', -\omega'').
\end{aligned} \tag{A40}$$

Ebből arra a következtetésre jutottunk, hogy

$$\widetilde{\underline{\underline{M}}}^{-1}(\omega, \omega'') = 4\pi^2 \widetilde{\underline{\underline{M}}}^{-1}(-\omega, -\omega''). \tag{A41}$$

A.3. A flow-egyenlet

Tekintsük a Wetterich-egyenletet:

$$\partial_k \Gamma_k [\bar{\mathbf{x}}] = \frac{1}{2} \int_{\tau, \tau'} \left[\text{Tr} \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k [\bar{\mathbf{x}}]}{\delta \bar{\mathbf{x}}(\tau) \delta \bar{\mathbf{x}}(\tau')} + \underline{\underline{I}} R_k(\tau, \tau') \right)^{-1} \right] \partial_k R_k(\tau', \tau) \right] . \quad (\text{A42})$$

Az egyenlet baloldala könnyen megkapható (továbbra is az egyenletes körmozgások függvényosztályára szorítkozva),

$$\partial_k \Gamma_k [\bar{\mathbf{x}}] = 2\pi \delta(0) \partial_k \mathcal{L}_k(\rho, \nu) . \quad (\text{A43})$$

Az egyenlet jobboldalát kissé átalakítjuk. Az integrál alatt látható "trace"-t $T(\tau, \tau')$ -nek nevezve:

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k [\bar{\mathbf{x}}] &= \frac{1}{2} \int_{\tau, \tau'} T(\tau, \tau') \partial_k R_k(\tau', \tau) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^4} \int_{\omega, \omega', \omega'', \omega'''} \int_{\tau, \tau'} e^{-i(\omega + \omega''')\tau} e^{-i(\omega' + \omega'')\tau'} \tilde{T}(\omega, \omega') \partial_k \tilde{R}_k(\omega'', \omega''') = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\omega, \omega'} \tilde{T}(\omega, \omega') \partial_k \tilde{R}_k(-\omega', -\omega) = \\ &= \frac{mk}{2\pi} \int_{\omega, \omega'} \tilde{T}(\omega, \omega') \Theta(k^2 - \omega^2) \delta(\omega + \omega') = \\ &= \frac{mk}{2\pi} \int_{-k}^k \tilde{T}(\omega, -\omega) d\omega . \end{aligned} \quad (\text{A44})$$

Az előző fejezetben kiszámoltak alapján $\tilde{T}(\omega, -\omega)$ már könnyen megkapható:

$$\tilde{T}(\omega, -\omega) = 4\pi^2 \text{Tr} \left[\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \underline{\underline{I}} \tilde{R}_k \right)^{-1} \right] (-\omega, \omega) = \frac{8\pi^2 \alpha}{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma_1 \gamma_2} \Big|_{\omega' = \omega} \delta(0) . \quad (\text{A45})$$

A Wetterich-egyenlet két oldalát egymással egyenlővé téve,

$$\partial_k \mathcal{L}_k = 4mk \int_0^k \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma_1 \gamma_2} d\omega . \quad (\text{A46})$$

Az integrál elvégzése céljából vissza kell térnünk a képletekhez, amiket α -ra, β -ra, γ_1 -re és γ_2 -re levezettünk.

Bevezetjük a következő mennyiségeket:

$$\begin{aligned}
g &= \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} - m , \\
p &= \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho \partial \nu} , \\
C_\alpha &= \left(m + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \Omega^2 + 4 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \rho} \right) + 2mk^2 , \\
C_\beta &= 2 \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \nu} , \\
C_\gamma &= 4\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \rho^2} + \left(m + 3\rho \frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial \nu^2} \right) \Omega^2 .
\end{aligned} \tag{A47}$$

Ezeket használva, a $-k < \omega < k$ intervallumon

$$\begin{aligned}
\alpha &= \pi (g\omega^2 + 4\Omega p + C_\alpha) , \\
\beta &= 2\pi\omega (g\Omega + 2p + C_\beta) , \\
\gamma_{1,2} &= \frac{\pi}{2} (-g\omega^2 + 8\Omega p + C_\gamma \pm 2g\Omega\omega) ,
\end{aligned} \tag{A48}$$

amiből az integrandus

$$\begin{aligned}
&\frac{4mk\alpha}{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma_1\gamma_2} = \\
&= \frac{4mk}{\pi} \frac{\frac{g\omega^2 + 4\Omega p + C_\alpha}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2}}{\omega^2 + \frac{(C_\alpha + 4\Omega p)^2 - (C_\gamma + 8\Omega p)^2}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2}} .
\end{aligned} \tag{A49}$$

Ilyen alakú függvények integrálja könnyen meghatározható, amit elvégezve a következőt kapjuk:

$$\partial_k \mathcal{L}_k = \frac{4mk}{\pi} \left[ak + \frac{b - ac}{\sqrt{c}} \arctan \left(\frac{k}{\sqrt{c}} \right) \right] , \tag{A50}$$

ahol

$$\begin{aligned}
a &= \frac{g}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2} , \\
b &= \frac{4\Omega p + C_\alpha}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2} , \\
c &= \frac{(C_\alpha + 4\Omega p)^2 - (C_\gamma + 8\Omega p)^2}{2g(C_\alpha + C_\gamma) - 8g\Omega(C_\beta - p) - 4(C_\beta + 2p)^2} .
\end{aligned} \tag{A51}$$

A.4. UV divergencia kezelése

A flow-egyenletet kiértékeljük $\mathcal{L}_k(\rho, \nu) = \mathcal{L}_\Lambda(\rho, \nu)$ -ben, majd az így kapott kifejezést $1/k$ szerint másodrendig sorbafejtjük,

$$\partial_k \mathcal{L}_k = \frac{2}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (\text{A52})$$

Az így kapott UV divergenciát azonban csak a flow-egyenlet explicit k -függése okozza, $\mathcal{L}_k(\rho, \nu)$ aszimptotikus k -függését az előző számolás nem veszi figyelembe. Utóbbi analitikus meghatározása a dolgozat keretein túlmutató probléma. Az UV-divergenciát az (A52)-ben meghatározott alakúnak fogjuk tekinteni, amit a flow-egyenletből levonva,

$$\partial_k \mathcal{L}_k = \frac{4mk}{\pi} \left[ak + \frac{b - ac}{\sqrt{c}} \arctan\left(\frac{k}{\sqrt{c}}\right) \right] - \frac{2}{\pi}. \quad (\text{A53})$$