

Iterált fotonösszegzés hurokban

tudományos diákköri dolgozat

Mendei Barna*

témavezetők:

Koniorczyk Mátyás[†] és Homa Gábor[‡]

2024 november



ELTE | TTK

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

*Fizikus MSc hallgató, ELTE TTK, mendeibarna@gmail.com

[†]PhD, tudományos munkatárs, Wigner FKK SZFI, Kvantumoptikai és Kvantuminformatikai Osztály,
koniorczyk.matyas@wigner.hun-ren.hu

[‡]PhD, tudományos munkatárs, Wigner FKK SZFI, Kvantumoptikai és Kvantuminformatikai Osztály,
homa.gabor@wigner.hun-ren.hu

Kivonat

Napjainkban egyre nagyobb hangsúlyt kapnak a kvantumoptikai és kvantum-informatikai kutatások. Az ezekben előforduló elrendezések egyik fontos eszköze a megadott számú fotont kibocsátó n -foton források. Kutatásomban kvantumoptikai számítások segítségével vizsgáltam meg egy periodikus egyfoton forrásból, nyaláb-osztóból, tükrökből, és egy valós detektorból álló eszköz n -foton forrásként való használhatóságát. Az elrendezés egy visszacsatoló hurkot tartalmaz, melyben Hong–Ou–Mandel-interferencia segítségével érünk el iterált fotonösszegzést és végül a kívánt n -fotonos Fock-állapotot. Az ilyen állapotok erősen nemklasszikus tulajdonságúak, az előállításukra javasolt sémák az általam vizsgálnál rendszerint bonyolultabbak. Dolgozatomban bemutatom, hogy egy ilyen lineáris eszközökből felépített egyszerű szerkezettel akár 4 fotonos fotonszám sajátállapotok is előállíthatók elfogadható hűséggel (*fidelity*vel) és valószínűséggel.

1. Bevezetés

Napjainkban egyre nagyobb hangsúlyt kapnak a kvantumoptikai és kvantuminformaticai kutatások. Az ezek által vizsgált fizikai rendszerekben fontos szerepet játszanak a kvantum-összefonódás következtében létrejövő nem klasszikus korrelációk, melyek vizsgálatáért, különösen is a Bell-egyenlőtlenség megsértéséért 2022-ben J. F. Clauser, A. Aspect, és A. Zeilinger kiérdemelték a fizikai Nobel-díjat. A kvantumoptikai elrendezések a kvantumtechnológia alapvető eszközei, amelyek kiemelkedő jelentőséggel bírnak, ld. pl. az Európai Unió vonatkozó kezdeményezéseit [1, 2].

Ma már lehetséges egyszerű kvantumrendszerek megfigyelése például egy-egy foton individuális vizsgálata által is, annak ellenére, hogy korábban ezt elképzelhetetlennek tartotta a terület kutatóinak jelentős hányada. Mivel a kvantumoptikai kísérletek alapvető eszközei az egyfoton-detektorok és a fotonpár-források, ezért fontos, hogy mélyebben megismerjük a néhány foton interferenciája esetén fellépő kvantumos jelenségek elméleti hátterét minél általánosabb és technológiailag hasznosabbnak ígérkező kísérleti konstrukciók esetében is [3, 4].

Kiemelt fontossággal bírnak az egyfoton-kísérletek a kvantuminformatica gyorsan fejlődő területén, hiszen a fotonok polarizációja jól használható qubitként [5]. A kvantumtitkosítás terén is jelentős szerepe van az egyes fotonok interferenciájának [6, 7], ami tovább erősíti a fotonok kvantumos viselkedése megértésének fontosságát.

A fotonok interferenciájának egyik alapvető kvantumjelensége a Hong–Ou–Mandel-interferencia [8]. Ez számos, fotonikus állapotok generálására alkalmas, illetve kvantuminformaticai elrendezés alapja. Amikor két foton egyszerre érkezik egy szimmetrikus nyalábosztó egy-egy bemeneti csatornájára, akkor azok egy fotonpárként távoznak az egyik kimeneti csatornán. A jelenséget részletesen bemutatja Drago és Brańczyk egy nemrégiben publikált cikke is [9].

Elvileg egy detektor és egy nyalábosztó segítségével lehetséges a kétfotonos Fock-állapotok előállítása. Ha a nyalábosztó bemeneteire egyszerre érkezik egy-egy foton és az egyik kimeneti csatornán elhelyezett detektor nem érzékelt fotont, akkor a másik módus a kívánt kétfotonos állapotban van, ami egy erősen nem klasszikus állapot. Ez a folyamat tekinthető úgy is, hogy egy fotonhoz hozzáadtunk egy újat.

A kvantumállapotok előállításához használt fotonösszegzés irodalma igen kiterjedt [10–15]. A nyalábosztóval való fotonösszegzés a detektorok tökéletlenségéből adódóan kevert állapotokat generálnak, ami miatt nem terjedt el ez a módszer. Ehelyett ezt gyakran nemlineáris optikai elemekkel valósítják meg a gyakorlatban [10–12, 15]. Ennek ellenére a detektorok minőségének javulása és a Hong–Ou–Mandel-interferencia alapvető jelensége miatt nagy jelentősége lehet a nyalábosztóval való fotonösszegzésnek is.

A fotonok Fock-állapotainak generálása elméletileg [16, 17] és kísérletileg [17–26] is részletesen tárgyalt témakör. Dolgozatomban egy kevésbé tökéletes, de a szokásos megoldásoknál jóval egyszerűbb interferometriai szerkezetet mutatok be.

Nemrégiben sokat fejlődött a periodikus egyfotonforrások technológiája [27–33], melyek egy-egy fotonimpulzust bocsájtanak ki adott időközönként. Kutatómunkám során egy hurkos kvantumoptikai elrendezést vizsgáltam meg, ami egy nyalábosztót tartalmaz. Ennek bemenetére egy periodikus egyfotonforrás lövell fotonokat és egy detektor segítségével feltételes fotonösszegzést végzünk el a Hong–Ou–Mandel-interferencia jelenségére alapozva. A szerkezet elméletileg ekvivalens több nyalábosztó és egyfotonforrás használatával. Hasonló módon nemlineáris optikai elemekkel is megvalósítható a fotonösszegzés, de egyetlen nyalábosztó és egy detektor alkalmazása igen egyszerű megoldást kínál.

Dolgozatom a következőképpen épül fel: a 2. fejezetben a felhasznált eszköztárat ismertetem. Először röviden összefoglalom az elektromágneses tér kvantálásának alapjait. Ezután a későbbiekben felhasznált speciális fotonállapotokat és a fázistér-reprezentációt mutatom be. Ezt a nyalábosztók kvantumoptikai leírása követi. A fejezet a Hong–Ou–Mandel-interferencia tárgyalásával zárul. A 3. fejezetben az eredményeimet összegzem: a 3.1. alfejezetben az általam vizsgált hurkos elrendezés szerkezetét vázoló fel, a 3.2. alfejezet az elemi fotonösszegzéssel, a 3.3. pedig ennek a többszöri alkalmazásával történő iterált fotonösszegzéssel kapcsolatos eredményeimet foglalja össze, végül a 3.4. alfejezetben a módszer hatékonyságát rontó hibaforrások hatását tárgyalom. A 4. fejezetben végül összefoglalom eredményeimet és vázoló a kutatás lehetséges folytatásának irányait.

2. Eszközök, módszerek

Először röviden áttekintjük a kutatáshoz felhasznált előismereteket és a közvetlen tudományos előzményeket.

2.1. Az elektromágneses tér kvantálása

A kvantumoptika alapvető gondolatainak és formalizmusának bevezetéséhez először tekintjük át a klasszikus elektrodinamika alapjait, melyek mintájára alapozzuk meg a kvantált leírást.

2.1.1. Klasszikus elektrodinamika

Az elektromágneses tér alapvető egyenletei a Maxwell-egyenletek

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \rho \\ \nabla \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1}$$

Itt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ az elektromos térerősség-, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ pedig a mágneses indukció vektora, $\rho(\mathbf{r}, t)$ az elektromos töltéssűrűség, és $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ az áramsűrűség. Az ε és μ mennyiségek rendre a közegre jellemző jellemző elektromos permittivitás-, illetve mágneses permeabilitás, melyeket a vákuumra jellemző állandó és a közeg relatív mennyiségeivel fejezhetünk ki:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0.\tag{2}$$

Ezek szorzata adja meg a fény közegbeli terjedési sebessége négyzetének reciprokát, azaz

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{c^2}.\tag{3}$$

Tekintsük most a vákuumot közegünknek

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad \mu = \mu_0,\tag{4}$$

illetve a töltés-, és áramsűrűségek legyenek zérusok

$$\rho = 0 \quad \mathbf{j} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Ekkor a Maxwell-egyenletek a következő alakra egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6)$$

A $\mathbf{B}$ és $\mathbf{E}$ vektormezők leírására bevezethetjük az elektromágneses skalár-, illetve vektorpotenciált ($\Phi(\mathbf{r}, t)$ és $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$) az alábbi definíciókkal

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \end{aligned} \quad (7)$$

Ismert, hogy egy $F(\mathbf{r}, t)$ skalármező segítségével átttranszformálhatjuk ezeket a potenciálokat úgy, hogy az nem változtatja meg az elektromos-, és mágneses mezőket. Ehhez az

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla F, \\ \Phi &\longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

transzformációt kell végrehajtanunk. Ez a mértékinvariancia. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy speciális megkötéseket tegyünk a potenciálokat illetően. A relativisztikus kvantumelméletben például előszeretettel alkalmazott a

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Lorentz mérték. Munkám során a nemrelativisztikus elméletben elterjedt Coulomb mértéket fogom használni, mely a

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \quad (10)$$

feltételt írja elő. Ezt elérhetjük egy olyan F skalármezővel, melyre teljesül, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Phi. \quad (11)$$

Ekkor a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{E}$ vektormezők egyszerűen

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (12)$$

alakban írhatók fel, tehát elég csak az $\mathbf{A}$ vektorpotenciált megadnunk, hogy leírjuk az elektromágneses tér komponenseit.

A (6) Maxwell-egyenletek közül a legalsóba behelyettesítve a (12) kifejezéseket, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \\ \underbrace{\nabla (\nabla \mathbf{A})}_0 - \Delta \mathbf{A} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned}\tag{13}$$

ami egy hullámeqyenlet az $\mathbf{A}$ vektorpotenciálra.

Megoldását felírhatjuk

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \alpha(t) \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \alpha^*(t) \mathbf{f}^*(\mathbf{r})\tag{14}$$

alakban, ahol az időfüggő függvény

$$\alpha(t) = \underbrace{\alpha(0)}_{\in \mathbb{C}} e^{-i\omega t},\tag{15}$$

$\mathbf{f}(\mathbf{r})$ pedig a hullám térbeli alakját leíró módusfüggvény, melyre teljesül az

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 d^3r = 1\tag{16}$$

azonosság. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben monokromatikus megoldást vizsgálunk, ahol az ω frekvencia rögzített, de a gondolatmenet általában bármilyen ω értékre érvényes. A (14) alakban megjelenő $*$ jelölés a komplex konjugáltat jelöli. Ezt behelyettesítve a (13) hullámeqyenletbe kapjuk, hogy

$$\alpha(t) \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \alpha^*(t) \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{f}^*(\mathbf{r}) = 0.\tag{17}$$

Ha az

$$\alpha(t) \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{f}(\mathbf{r})\tag{18}$$

kifejezés nem tisztán képzetes, akkor ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}\alpha(t) \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= 0 \\ (\Delta + k^2) \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{19}$$

ahol bevezettük a

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\tag{20}$$

jelölést a $\mathbf{k}$ hullámszámvektor abszolútérték négyzetére. Itt alkalmaztuk továbbá az

$$\omega = c \cdot |\mathbf{k}|\tag{21}$$

diszperziós relációt is. Eredményül azt kaptuk, hogy az $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ módusfüggvény kielégíti a (19) Helmholtz-egyenletet.

Ismert az elektromágneses mező energiáját megadó

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 + c^2 |\mathbf{B}|^2 d^3r \quad (22)$$

kifejezés. Vezessük be a

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

mennyiséget, ami a vákuumban értelmezett eltolási áram ellentettje. Bizonyítható, hogy ez az $\mathbf{A}$ vektorpotenciálhoz tartozó kanonikus mennyiség, azaz ezek időfejlődését a

$$\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{\Pi}} \quad (24)$$

kanonikus egyenletek írják le. Ezek segítségével az energia

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathbf{\Pi}|^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 |\nabla \times \mathbf{A}|^2 d^3r \quad (25)$$

alakban írható fel. Felhasználva a

$$(\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})] + \mathbf{A} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] \quad (26)$$

azonosságot és a (19) Helmholtz-egyenletet azt kapjuk, hogy

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathbf{\Pi}|^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{c^2 k^2}_{\omega^2} |\mathbf{A}|^2 d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathbf{\Pi}|^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \omega^2 |\mathbf{A}|^2 d^3r. \quad (27)$$

Felhasználva (12) és (23) egyenleteket

$$\mathbf{\Pi} = -\varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (28)$$

behelyettesítést elvégezve az energia kifejezése

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 + \omega^2 |\mathbf{A}|^2 d^3r \quad (29)$$

alakra egyszerűsödik. A vektorpotenciál (14) alakját alkalmazva kapjuk, hogy

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} 4\omega^2 \underbrace{|\alpha(t)|^2}_{|\alpha|^2 := |\alpha(0)|^2} |\mathbf{f}(\mathbf{r})|^2 d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 4\omega^2 |\alpha|^2. \quad (30)$$

Vezessük be a következő valós mennyiségeket

$$\begin{aligned} q &= \alpha + \alpha^*, \\ p &= -i\omega\varepsilon_0(\alpha - \alpha^*). \end{aligned} \quad (31)$$

Az energia ezekkel is kifejezhető, mint

$$H = \frac{|p|^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 |q|^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (32)$$

ahol a következő megfeleltetés érvényes: $m \leftrightarrow \varepsilon_0$. Ez teljesen analóg a harmonikus oszcillátor energiájával (Hamilton-függvényével).

2.1.2. A tér kvantálása

Az előző pontban leírt analógia alapján bevezethetjük az elektromágneses tér Hamilton-operátort, mint

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega^2\hat{q}^2, \quad (33)$$

ahol $\hat{q}$ és $\hat{p}$ operátorok a bozonikus keltő-, illetve eltüntető operátorokból ($\hat{a}$ és $\hat{a}^\dagger$) előállított, kanonikusan konjugált ún. kvadratúra operátorok:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{p} &= \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon_0\omega}{2}} \left(\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

(A kvantumoptikában néha ezek $\sqrt{2}/2$ -szeresét használják.) Ezek a fényt leíró harmonikus oszcillátor koordináta-, illetve impulzus operátorai. Fontos azonban megjegyezni, hogy ezek nem jelölnek valódi koordinátát, vagy impulzust. Az eltüntető operátor a klasszikus eset α komplex együtthatójának kvantumos megfelelője, melyet az

$$\alpha \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \hat{a} \quad (35)$$

átalakítással definiálhatunk. A (34) kifejezések invertálásával megkaphatjuk az eltüntető-, és a keltő operátorokat mint a kanonikus koordináta-, és impulzus operátorok lineárkombinációja

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{\varepsilon_0\omega} \hat{p} \right) \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} - \frac{i}{\varepsilon_0\omega} \hat{p} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Bizonyítható, hogy a $\hat{q}$ és $\hat{p}$ operátorok kommutátora

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (37)$$

amiből következik, hogy az eltüntető-, és keltő operátoroké

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (38)$$

Behelyettesítve $\hat{q}$ és $\hat{p}$ operátorok (34) definícióját a Hamilton-operátor (33) alakjába és felhasználva a (38) relációt kapjuk, hogy

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (39)$$

Ezen megfeleltetés segítségével felírhatjuk az elektromágneses vektorpotenciál $\hat{\mathbf{A}}$ operátort, mint

$$\hat{\mathbf{A}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \hat{a} + \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \mathbf{f}^*(\mathbf{r}) \hat{a}^\dagger. \quad (40)$$

Az elektromos-, illetve mágneses mezők operátorai ebből a klasszikus mennyiségekhez hasonlóan kaphatók meg

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{A}} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \hat{a} - i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}} \mathbf{f}^*(\mathbf{r}) \hat{a}^\dagger, \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \mathbf{k} \times \mathbf{f}(\mathbf{r})\hat{a} - i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \mathbf{k} \times \mathbf{f}^*(\mathbf{r})\hat{a}^\dagger. \quad (42)$$

Megjegyezzük, hogy (41) kifejezésnél felhasználtuk a keltő-, és eltüntető operátorokra vonatkozó Heisenberg-képbeli Schrödinger-egyenletet

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{a} &= [\hat{a}; \hat{H}] = \hbar\omega [\hat{a}; \hat{a}^\dagger \hat{a}] = \hbar\omega \hat{a} \implies \frac{\partial}{\partial t} \hat{a} = -i\omega \hat{a}, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}^\dagger &= [\hat{a}^\dagger; \hat{H}] = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger; \hat{a}^\dagger \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a}^\dagger \implies \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}^\dagger = i\omega \hat{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (43)$$

2.1.3. Több módus

Eddig azt az esetet vizsgáltuk, amikor csak egyetlen elektromágneses módus volt jelen egyetlen k hullámszám-, és ω frekvenciaértékkel. Ha több sugárzási módust is megengedünk a rendszerünkben, akkor a kvantált képből több keltő-, illetve eltüntető operátort kell használnunk. Minden $\mathbf{k}$ hullámszámvektorhoz és ε polarizációhoz hozzárendelünk egy saját eltüntető- ($\hat{a}_{\mathbf{k},\varepsilon}$), és egy keltő operátort ($\hat{a}_{\mathbf{k},\varepsilon}^\dagger$). Ezek kommutációs relációi a következők

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_l] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_l^\dagger] = 0, \quad (44)$$

ahol a k és l indexek egyszerre jellemzik a $\mathbf{k}$ hullámszámvektort és az ε polarizációt.

2.2. A módusok állapotai

Ebben a szakaszban az elektromágneses oszcillátor leggyakrabban alkalmazott állapotait ismertetjük, a kvadratúra-, Fock-állapotokat, Ulf Leonhardt tankönyvének gondolatmenetét követve [34].

2.2.1. Kvadratúra állapotok

Kvadratúra állapotoknak a fenti (34) kifejezésekkel bevezetett $\hat{q}$ és $\hat{p}$ kvadratúra operátorok sajátállapotait nevezzük. Jelöljük ezeket a sajátértékükkel jelzett ket vektorokkal! Képletekkel a következő képpen írhatjuk le ezt a definíciót:

$$\hat{q} |q\rangle = q |q\rangle \quad \hat{p} |p\rangle = p |p\rangle. \quad (45)$$

Bizonyítható, hogy a $\hat{q}$ és $\hat{p}$ operátorok sajátállapotai ortogonálisak, azaz

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q') \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad (46)$$

ahol $\delta(x)$ a Dirac-delta függvény. A kvadratúra állapotok továbbá teljesek is

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q| \, dq = \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle\langle p| \, dp = \mathbb{1}. \quad (47)$$

Megmutatható az is, hogy a $|q\rangle$ és $|p\rangle$ állapotok egymás Fourier-transzformáltjai:

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqp} |p\rangle \, dp \quad |p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqp} |q\rangle \, dq. \quad (48)$$

Ezen állapotok segítségével tudjuk felírni egy elektromágneses oszcillátor tetszőleges $|\psi\rangle$ állapotához tartozó hullámfüggvényt koordináta-, illetve impulzusrepresentációban

$$\Psi(q) = \langle q|\psi\rangle \quad \tilde{\Psi}(p) = \langle p|\psi\rangle, \quad (49)$$

ahol $\tilde{\Psi}(p)$ jelzi, hogy az impulzusrepresentációbeli hullámfüggvény Fourier-transzformáltja a koordinátarepresentációbeli $\Psi(q)$ -nak.

2.2.2. Fock állapotok

A (39) Hamilton-operátorban szereplő $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ operátort részecskeszám-operátornak, sajátállapotait pedig Fock-állapotoknak hívjuk:

$$\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{n}}|n\rangle = \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (50)$$

Itt $\hat{n}$ jelöli a részecskeszám-operátort, $|n\rangle$ pedig az $\hat{n}$ operátor n sajátértékéhez tartozó sajátállapotát. A Fock-állapotokat az egy adott módusban található részecskék számával jellemezzük, innen a részecskeszám-operátor elnevezése. Ezen állapotok alkotják a másodkvantált formalizmus alapját, ezért előszeretettel alkalmazzák a kvantumtérelméletben és a kvantumoptikában. Dolgozatomban is főleg Fock-állapotokkal fogok számolni. Ezeknek a speciális fotonállapotok kísérleti előállítására több módszer is létezik, melyeket az elmúlt évtizedekben dolgoztak ki a kutatók [26, 30, 35–40].

A Fock-állapotok jelentősége és széleskörű használata miatt tekintsük végig azok legfontosabb tulajdonságait. Könnyen bizonyítható, hogy ha $|n\rangle$ sajátállapota az $\hat{n}$ részecskeszám-operátornak n sajátértékkel, akkor $\hat{a}|n\rangle$ is sajátállapot, $n-1$ sajátértékkel, vagyis

$$\hat{n}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a})|n\rangle = \hat{a}(\hat{n} - \mathbb{1})|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle. \quad (51)$$

Ehhez felhasználtuk az $\hat{n}$ operátor (50) definícióját, illetve a keltő-, és eltüntető operátorok (38) kommutációs relációját. Hasonlóan belátható, hogy ebben az esetben, $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ is sajátállapota a részecskeszám-operátornak $n+1$ sajátértékkel. Ezek alapján a megfelelő normálásokat elvégzése után megkapjuk a keltő-, és eltüntető operátorok hatását:

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (52)$$

Láthatjuk, hogy az $\hat{a}$ és $\hat{a}^\dagger$ operátorok eggyel csökkentik, illetve növelik az elektromágneses oszcillátor gerjesztési fokát, avagy eltüntetnek és keltenek egy új részecskét (fotont). Innen származnak az eltüntető-, és keltő operátor elnevezések.

Az előzőből következik, hogy van egy kitüntetett $|0\rangle$ állapot, melyre, ha $\hat{a}$ hat az eredmény 0 lesz. Ez a vákuum állapot, mely annak az esetnek felel meg, mikor nincs foton a vizsgált rendszerben

$$\hat{a}|0\rangle = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}|0\rangle = 0. \quad (53)$$

Vizsgáljuk meg az ehhez a speciális állapothoz tartozó hullámfüggvényt koordinátarepresentációban! Ismert, hogy ekkor $\hat{q}$ a q -val való szorzásnak, $\hat{p}$ pedig a $-i\frac{\partial}{\partial q}$ differenciál-operátornak feleltethető meg, így a megoldandó differenciálegyenlet

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{\partial}{\partial q}\right)\psi_0(q) = 0 \quad (54)$$

alakú, ahol $\psi_0(q)$ a keresett hullámfüggvény. Ennek megoldása egy Gauss-típusú hullámfüggvény:

$$\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-q^2/2}. \quad (55)$$

Láthatjuk, hogy a teljesen üres rendszerhez, melyhez egy részecske sem tartozik, egy fizikailag releváns és valós fizikai effektusokat okozó állapot.

A vákuum állapotra többször hattanva $\hat{a}^\dagger$ operátort megkaphatunk tetszőleges Fock-állapotot:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (56)$$

Az általános $n = m - 1$ esetet vizsgálva a többi Fock-állapot hullámfüggvényét is megkaphatjuk, ha $\hat{a}^\dagger$ keltő operátor hatását vizsgáljuk. Ezt leírhatjuk Fock-térben értelmezve, illetve helyreprezentációban is az alábbi szabályok szerint:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |m-1\rangle &= \sqrt{m} |m\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_{m-1}(q) &= \sqrt{m} \psi_m(q). \end{aligned} \quad (57)$$

Ezt a differenciálegyenletet a

$$\psi_n(q) = \frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-q^2/2} \quad (58)$$

alakú függvények elégítik ki, ahol $H_n(q)$ az n -edik Hermite polinomot jelöli.

Fontos továbbá megjegyeznünk, hogy a Fock-állapotok kifeszítik az elektromágneses oszcillátor egész Hilbert-terét, tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}, \quad (59)$$

illetve ortogonálisak is, azaz

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}. \quad (60)$$

Tehát a Fock-állapotok egy igen jól alkalmazható ortonormált bázist alkotnak az elektromágneses oszcillátor Hilbert-terén, melyet előszeretettel használnak a kvantumoptikában. Ez a Fock-bázis.

2.3. Fázistér-reprezentáció

Az eddig vizsgált kvantummechanikai állapotokat a Paul Dirac által bevezetett bra és ket vektorokkal felírt általános formalizmusban tárgyaltuk. Ezeknek sok különböző matematikai reprezentációja lehetséges, melyek közül a továbbiakban azt a kettőt fogjuk bemutatni amik jelen dolgozatomban is fontos szereppel bírnak. Geszti Tamás tankönyvének [41] gondolatmenetét követve, bevezetjük a sűrűségoperátor fogalmát, matematikai alakját megadjuk először hely-, majd fázistér-reprezentációban is.

2.3.1. Sűrűségoperátor

Ha van egy $\{|\Phi_k\rangle\}$ bázis a vizsgált rendszer állapotainak Hilbert-terében, akkor az egyes kvantummechanikai állapotok kifejezhetők

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_l c_l |\Phi_l\rangle, \\ \langle\Psi| &= \sum_k c_k^* \langle\Phi_k| \end{aligned} \quad (61)$$

alakban. Ismert, hogy egy adott $\hat{A}$ operátorhoz tartozó fizikai mennyiség $|\Psi\rangle$ állapotban végzett mérésének várható értékét a

$$\langle\hat{A}\rangle_\Psi = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle \quad (62)$$

alakban számolhatjuk, amibe behelyettesítve (61) felbontást azt kapjuk, hogy ezt

$$\langle\hat{A}\rangle_\Psi = \sum_k \sum_l \underbrace{c_l c_k^*}_{\rho_{lk}} \underbrace{\langle\Phi_k|\hat{A}|\Phi_l\rangle}_{A_{kl}} = \sum_k \sum_l \rho_{lk} A_{kl} = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) \quad (63)$$

módon is megadhatjuk. Itt felhasználtuk az $\hat{A}$ operátor $\{|\Phi_k\rangle\}$ bázison vett

$$A_{kl} = \langle\Phi_k|\hat{A}|\Phi_l\rangle \quad (64)$$

mátrixreprezentációját, illetve bevezettük az ugyanezen a bázison

$$\rho_{lk} = c_l c_k^* \quad (65)$$

mátrixelemekkel reprezentált $\hat{\rho}$ sűrűségoperátort, melyet egyértelműen meghatároz a $|\Psi\rangle$ állapot

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (66)$$

Jegyezzük meg, hogy a $|q\rangle$ koordináta kvadratúra állapotokat alkalmazva (koordináta-reprezentáció) a mátrix alak

$$\rho(q, q') = \langle q|\Psi\rangle\langle\Psi|q'\rangle = \Psi(q)\Psi^*(q') \quad (67)$$

függvény alakú.

Fontos tulajdonsága a sűrűségoperátornak, hogy nyoma 1, mivel

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_k \langle\Phi_k|\hat{\rho}|\Phi_k\rangle = \sum_k c_k c_k^* = \sum_k |c_k|^2 = 1. \quad (68)$$

Ehhez a $|\Psi\rangle$ állapotok normáltságát használtuk fel az utolsó lépésben. Bizonyítható, hogy tiszta $|\Psi\rangle$ állapotokhoz tartozó $\hat{\rho}$ sűrűségoperátorra

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = 1, \quad (69)$$

ahol a $\text{Tr} \hat{\rho}^2$ mennyiséget szokás a kvantumrendszert jellemző sűrűségoperátor tisztaságának, illetve matematikai nyelven a sűrűségoperátor második momentumának nevezni.

Megeshet, hogy egy rendszer több $|\Psi_k\rangle$ tiszta állapotban is előfordulhat egyenként w_k valószínűséggel. Ekkor a rendszer kevert állapotban van, melyet csak a sűrűségoperátorral

jellemezhetünk. Ennek előállításához a lehetséges $|\Psi_k\rangle$ tiszta állapotokhoz tartozó $\hat{\rho}_k$ sűrűségoperátorokat kell a w_k valószínűségekkel súlyozva összegeznünk:

$$\hat{\rho} = \sum_k w_k \hat{\rho}_k = \sum_k w_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|, \quad (70)$$

ahol mivel w_i valószínűséget jelöl ezért

$$\sum_k w_k = 1 \quad \text{és} \quad w_k \geq 0 \quad \forall k. \quad (71)$$

Más szóval a $\hat{\rho}$ sűrűségoperátor előáll a $|\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|$ diádok w_k együttthatókkal vett konvex kombinációjaként. A kevert állapotokat leíró sűrűségoperátorok második momentumának csak felső korlátja az 1, azaz

$$0 < \text{Tr } \hat{\rho}^2 < 1. \quad (72)$$

A sűrűségoperátor (67) alakú kifejezését kiterjeszthetjük kevert állapotokra is. Ehhez az előzőleg vázolt felépítést kell alkalmazzuk, tehát a különböző lehetséges tiszta állapotok sűrűségoperátorait kell a w_k valószínűségekkel súlyozva összegeznünk

$$\rho(q, q') = \sum_k w_k \langle q | \Psi_k \rangle \langle \Psi_k | q' \rangle = \sum_k w_k \Psi_k(q) \Psi_k^*(q'). \quad (73)$$

2.3.2. Wigner-függvények

Wigner Jenő úgy gondolta, hogy a (73) kifejezés egyszerre tapogatja le egy hullámcsomag helyét és impulzusát a különböző q és q' koordináták összehasonlításával. Az impulzus leolvasásához egy Fourier-transzformációt kell alkalmaznunk. Így kapjuk meg a sűrűségoperátor sajátos reprezentációját, a Wigner-függvényt. A következőképpen definiáljuk ezt:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(q + \frac{\eta}{2}, q - \frac{\eta}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}p\eta} d\eta. \quad (74)$$

Ezt nem csak egy dimenziós rendszerekre definiálhatjuk. Magasabb dimenziókban a Wigner-függvény

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho\left(\mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}, \mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\boldsymbol{\eta}} d^d\eta \quad (75)$$

alakban számolandó, ahol d a dimenziószámot jelöli.

A Wigner-függvények úgynevezett kvázivalószínűségi eloszlások. Ezek olyan függvények, melyek sok tekintetben hasonlítanak a klasszikus valószínűségi eloszlásokhoz tartozó sűrűségfüggvényekre, de azoktól eltérő matematikai viselkedést is mutathatnak. Ennek egyik szemléletes példája, hogy egy valódi valószínűségi sűrűségfüggvény nem vehet fel negatív értéket, ám vannak olyan kvantumállapotok, melyek Wigner-függvényének értéke bizonyos tartományokon negatív. Ez a tulajdonság erősen nemklasszikus rendszerre utal [42] és definícióként használható a kvantumos és klasszikus állapotok elkülönítésére.

A Wigner-függvények egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy értékkészlete mindig a valós számok egy részhalmaza, tehát csak valós értékeket vehet fel. Emellett megmutatható, hogy az egyik vagy másik változójában integrálva megadja a másik vagy egyik

változójának valószínűségi eloszlásához tartozó sűrűségfüggvényt, azaz

$$\mathcal{P}(q) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp \quad \text{és} \quad \mathcal{P}(p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq. \quad (76)$$

A különböző fizikai mennyiségek várható értékét Wigner-reprezentációban is megadhatjuk. Ehhez először a (74) Wigner-transzformációt kell alkalmaznunk a $\rho(q, q')$ sűrűségmátrix helyett a fizikai mennyiséghez tartozó operátorra:

$$g(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q + \frac{\eta}{2} \left| \hat{G} \right| q - \frac{\eta}{2} \right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}p\eta} d\eta, \quad (77)$$

ahol $\hat{G}$ a fizikai mennyiséghez tartozó hermitikus operátor. A várható érték meghatározásához ezzel a transzformált $g(q, p)$ függvénnyel súlyozva kell kiátlagolnunk a Wigner-függvényt a teljes fázistérre, azaz

$$\langle \hat{G} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{G}) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p) g(q, p). \quad (78)$$

Az is belátható, hogy a Wigner-függvények értékkészlete nem a teljes valós számok halmaza, hanem a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenségből kiindulva még a

$$-\frac{1}{\pi\hbar} \leq W(q, p) \leq \frac{1}{\pi\hbar} \quad (79)$$

feltételt is teljesíti.

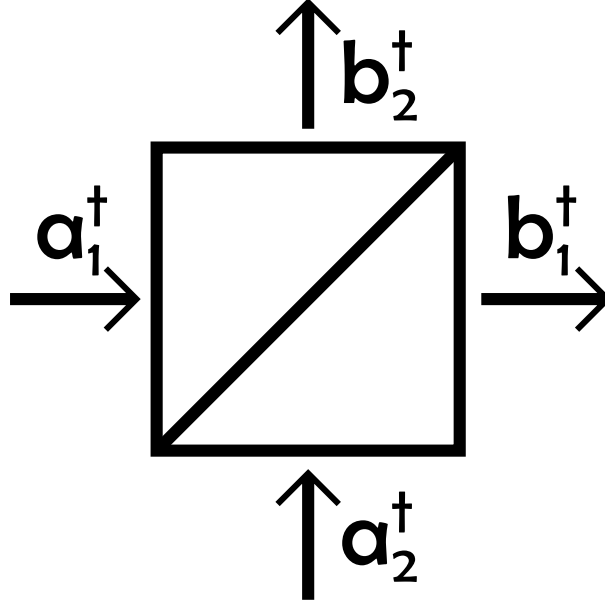
2.4. Nyalábosztók

A nyalábosztók igen gyakori elemei a modern optikai kísérleti elrendezéseknek. A nyalábosztó olyan passzív optikai elem, mely az elektromágneses tér két módusának lineáris csatolására alkalmas. A következőkben ezt az eszközt mutatjuk be. Először a nyalábosztók kvantumoptikai modelljét vázoljuk fel, amivel a dolgozatomban szereplő eredményeimet is számoltam, majd néhány gyakorlati alkalmazás segítségével szemléltetem ezen eszközök hasznosságát.

2.4.1. Elméleti áttekintés

Tekintsünk egy veszteségmentes nyalábosztót, aminek van két-két be-, és kimeneti csatornája. Ezekhez külön-külön módusok tartoznak. A bemeneteket jelölje 1 és 2, a kimeneti módusokat pedig 1' és 2'. Az ezekhez rendelhető keltő operátorok hatását szemléletesen az 1. ábra mutatja. A bemenő módusok eltüntető operátorait jelölje $\hat{a}_1$ és $\hat{a}_2$, a kimenőket pedig $\hat{b}_1$ és $\hat{b}_2$.

Kutatásom során a kvantumoptikai folyamatok leírására a Heisenberg képet használtuk. Ebben a képben úgy tekinthetünk a nyalábosztó hatására, mint egy $\hat{U}_{BS}$ operátor, mely áttranszformálja a bemeneti módusok $\hat{a}_1$ és $\hat{a}_2$ eltüntető operátorait a kimenetiek $\hat{b}_1$ és $\hat{b}_2$ operátorainak lineárkombinációjává.



1. ábra. A nyálábosztó geometriája és az egyes csatornához tartozó keltő operátorok

Mivel a nyálábosztó lineárisan csatolja a módusokat, a bemenet és a kimenet módusait egy mátrix köti össze:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}.$$

A bemenő módusok operátoraira érvényesek a (44) kommutációs relációk, de mivel a kimeneten is fénymódusok vannak, ezért a kommutációs relációk hasonlóan írhatók fel a kimeneti módusok $\hat{b}$ és $\hat{b}^\dagger$ operátoraira is.

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_l] = [\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_l^\dagger] = 0. \quad (80)$$

Ezen kommutációs relációkat akkor és csak akkor tartja meg a nyálábosztó, ha $\mathbf{B}$ unitér. Mivel a globális fázissal nem kell foglalkoznunk, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{B} \in SU(2)$.

A nyálábosztó fizikailag értelmezhető paramétereivel a mátrix így írható [43]:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot e^{i\varphi_\tau} & -\sin \vartheta \cdot e^{-i\varphi_\rho} \\ \sin \vartheta \cdot e^{i\varphi_\rho} & \cos \vartheta \cdot e^{-i\varphi_\tau} \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Itt $\cos^2 \vartheta$ a tükrözési áteresztőképessége, φ_τ és φ_ρ pedig a fáziseltolást jellemző állandók.

Sok esetben, így az ebben a munkában tárgyaltak esetén is, a fázisparaméterek nincsenek lényeges hatással a tanulmányozott jelenségre. Ezért a későbbiekben úgy számolunk, hogy a nyálábosztó nem változtat a fotonok fázisán, azaz

$$\varphi_\tau = \varphi_\rho = 0, \quad (82)$$

így a nyálábosztót jellemző mátrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (83)$$

alakban írható fel. Vagyis a nyalábosztót egy valós mátrixszal modellezzük, melynek egyetlen paramétere annak áteresztő képessége. A jobb átláthatóság érdekében bevezetjük a

$$\tau = \cos^2 \vartheta \quad (84)$$

jelölést az áteresztőképességre. Megjegyezzük, hogy ez a mennyiség csak 0 és 1 közötti valós értéket vehet fel. Ekkor a nyalábosztó hatását leíró mátrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & -\sqrt{1-\tau} \\ \sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \end{pmatrix} \quad (85)$$

és így az általa leírt transzformáció

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &\xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_1 - \sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_2, \\ \hat{a}_2 &\xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_1 + \sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_2 \end{aligned} \quad (86)$$

formában írható fel. A keltő operátorokra ezen szabályok adjungáltja vonatkozik, tehát

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^\dagger &\xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_1^\dagger - \sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_2^\dagger, \\ \hat{a}_2^\dagger &\xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_1^\dagger + \sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_2^\dagger. \end{aligned} \quad (87)$$

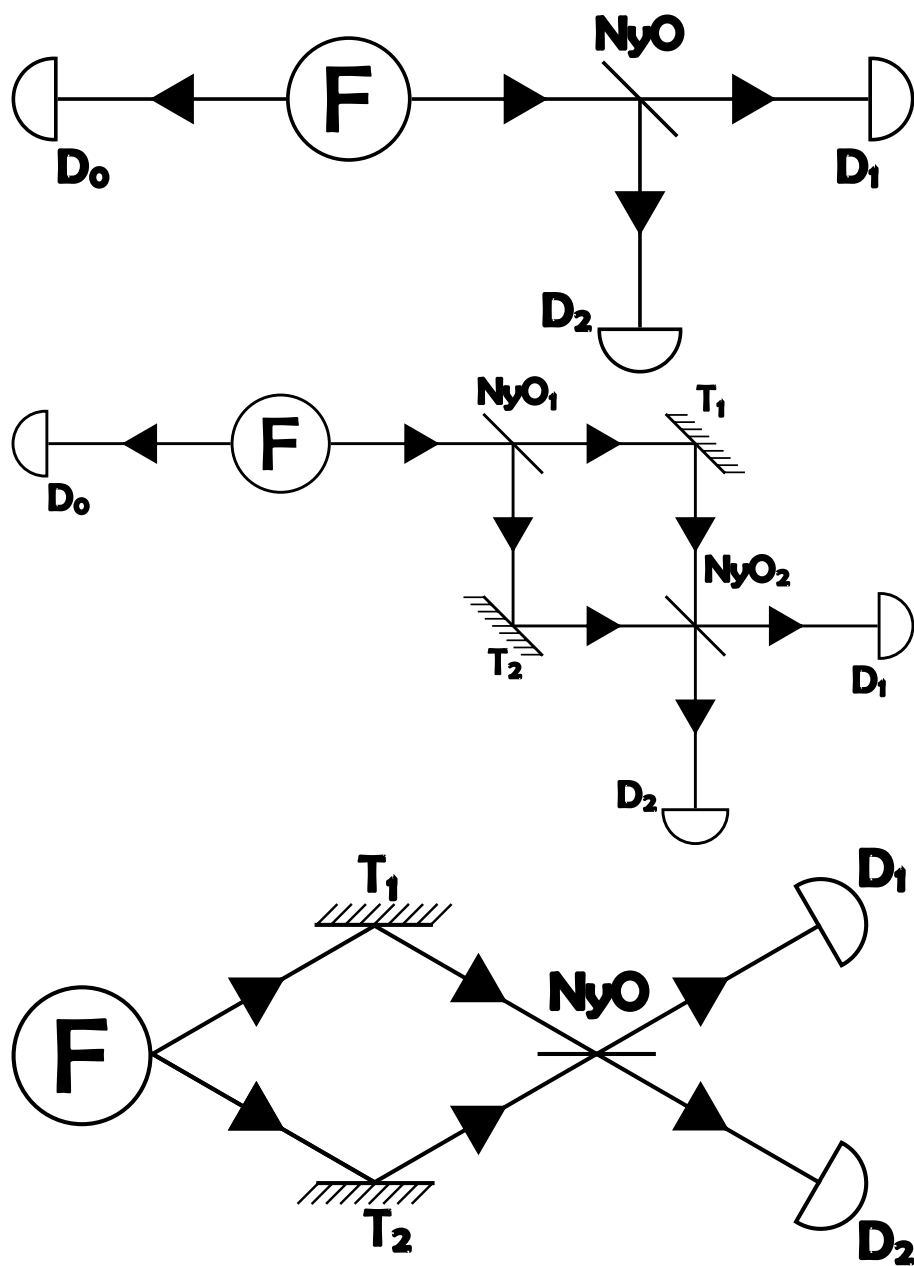
2.4.2. Gyakorlati alkalmazások

A nyalábosztók kísérletekben legtöbbször féligáteresztő tükrök, de optikai szálak csatolásával, úgynevezett lineáris csatolóként is megvalósíthatók. Ilyen megvalósításra példa az optikai hullámvezetők alkotta Y-alakú elágazások, melyek leírása azonos a nyalábosztóékkal [44, 45]. Nyalábosztókat használó kísérleteken keresztül több jelenséget is megérthetünk, mint például a fotonok létezését, egy foton önmagával vett interferenciáját, vagy két foton interferenciáját is [46]. Ilyen elrendezésekre a 2. ábrán láthatunk példákat. A kísérletekben a fényforrás olyan nemlináris kristály, melyben parametrikus konverzió megy végbe. Ez olyan nemlináris optikai folyamat, melyben fotonok időben korrelált fotonpárookra bomlanak: a fényforrás két kimenetén egy-egy foton jelenik meg [47].

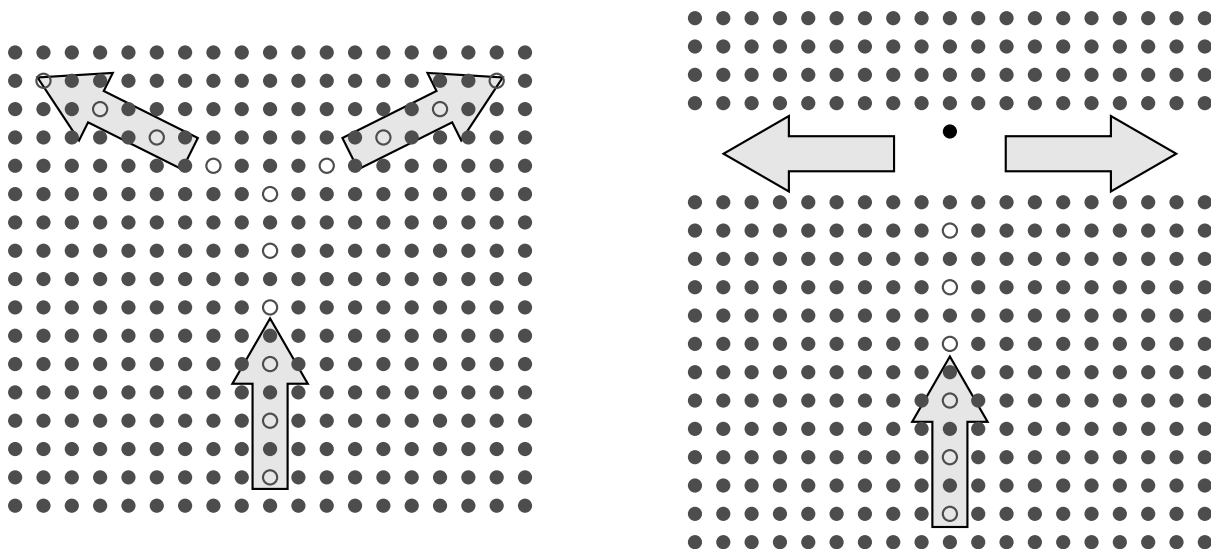
A felső elrendezéssel a fotonok létezését, a fény kvantáltságát bizonyíthatjuk, mivel csak a D_0 – D_1 és a D_0 – D_2 detektorpárok esetében tapasztalunk interferenciát, a D_1 – D_2 pár viszont egyszer sem jelez egyszerre. Ha a fény nem fotonokból állna, hanem a klasszikus kép alapján hullámként írnánk le, akkor a D_1 és D_2 detektorok egyszerre adnának valamekkora jelet.

A középső ábra egy Mach–Zehnder interferométert vázol fel. Az egyik tükör (például T_1) mozgásával egy fáziskülönbséget vezethetünk be, aminek következtében a vizsgált detektor (pl. D_1) érzékelési rátája váltakozik, tehát interferencia lép fel. A D_0 és D_1 detektorok koincidenciáját a fáziskülönbség függvényében figyelve biztosíthatjuk, hogy az interferencia csak akkor lép fel, amikor egy foton van az interferométerben, ami „mindkét utat bejárja”.

Az alsó kísérleti elrendezésben egy forrásból kilépő fotonpárt interferáltatunk egy nyalábosztó segítségével. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy a két detektor soha nem érzékel egy-egy fotont, mindig csak az egyik detektál kettőt. Ezt a jelenséget később részletebben is megvizsgáljuk. Ebben az esetben azt is megfigyelhetjük, hogy ha az egyik fényutat meghosszabbítjuk, azaz ismét bevezetünk egy fáziskülönbséget, akkor már felléphet koincidencia (véletlen egybeesés) a két detektor érzékelései közt. Ennek gyakorisága a fáziskülönbség függvénye.



2. ábra. Nyalábosztókkal végezhető egyszerű kísérletek. **F** jelöli a fényforrást, amely spontán parametrikus konverzióval keltett korrelált fotonpárokat bocsát ki. **NyO** jelöli a nyalábosztó(ka)t, **D** az egyes detektorokat, és **T** az egyszerű síktükröket. Fent: a fény kvantáltságát bizonyítja az, hogy csak a D_0 – D_1 és a D_0 – D_2 detektorpárok közt érzékelünk koincidenciát, D_1 – D_2 között sose. Középen: Mach–Zehnder interferométer, melyben egy fotont önmagával interferáltatunk. Lent: két foton interferáltatása egy nyalábosztóval.



3. ábra. Két módszer az elektromágneses módusok veszteségmentes kettéosztására fotonikus kristályban. Ezek a módusok az erősen lokalizált ponthibák (fehér körök) mentén haladnak, ahogy a nyilak is mutatják. Balra: a szétszított elektromágneses hullámok a rezonátor anyagában haladnak tovább. Jobbra: a vezetett bemeneti módus egy az útjába helyezett ponthiba (fekete pont) hatására oszlik szét és két síkhullám hagyja el a kristályt.

Megemlítjük, hogy a szokásos féligáteresztő tükrök, illetve csatolt hullámvezetők mellett újabb módjai is vannak a jó minőségű, kis energiavesztésű nyalábosztók megvalósításának. Erre példák bizonyos fotonikus kristályok: vannak valós háromdimenziós kristályos anyagok, melyek veszteség nélkül osztják fel a beérkező elektromágneses hullámmódusokat [48]. Az ilyen anyagból készült csatolt rezonátorokban a bemeneti módus az erősen lokalizált ponthibák mentén terjed.

Két elterjedt módja van az elektromágneses módusok szétválasztásának ilyen kristályokban, melyek mechanizmusát a 3. ábra mutatja be szemléletesen. Az egyik módszerrel az elektromágneses módus a kristályos anyagban terjed tova vezetett módusként a ponthibák mentén (3. ábra bal oldal). A másik megoldás az, ha két síkhullámvezető kimenetet kötünk a nyalábosztóhoz, így síkhullámokként tudjuk kivezetni a szétszított módusokat (3. ábra jobb oldal). Egy újabb ponthiba bevezetésével és annak helyzetének változtatásával (a rendszer szimmetriájának elrontásával) a kimeneti hullámok energiáját is befolyásolni tudjuk.

2.5. Hong–Ou–Mandel-interferencia

A nyalábosztók vizsgálata során meg kell említenünk egy igen érdekes jelenséget, amely a fény kvantumos természetének egyik legismertebb megnyilvánulása, és számos optikai jelenség, kvantuminformatikai alkalmazás alapja. C.-K. Hong, Z.-Y. Ou, és L. Mandel azt találta, hogy amikor egy szimmetrikus nyalábosztó két bemenetére egyszerre ér egy-egy foton, akkor azok összetapadnak¹ és ugyanazon a kimeneten lépnek ki [8]. Ez a Hong–Ou–Mandel-interferencia.

A jelenség általánosítható a megkülönböztethetetlen azonos részecskékre (bozonokra), ám fermionokra nem jellemző ez az érdekes viselkedés. Felismerése óta több részecske

¹Az összetapadás jelensége nem tévesztendő össze az összefonódásával.

esetében is megfigyelték már a Hong–Ou–Mandel-interferenciát, mely segítségével több alapvető kvantumfizikai és kvantuminformatikai jelenséget fedeztek már fel. Többek között fotonokra [49–54], plazmonokra [55, 56], atomokra [57] és fononokra [58] is kimutatta már több kutató is az interferenciát.

A jelenség könnyen megérthető a nyalábosztók a 2.4.1. alfejezetben kifejtett matematikai modellje segítségével. A bemenő állapot egy-egy fotont tartalmaz az egyes bemeneti módusokban. Ez a

$$|\psi_{\text{HOM}}\rangle = |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_1 \otimes \hat{a}_2^\dagger |0\rangle_2 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |00\rangle_{12} = |11\rangle_{12} \quad (88)$$

állapottal fejezhető ki. A szimmetrikus nyalábosztó áteresztőképessége $\tau = 1/2$. Ezt behelyettesítve a nyalábosztó transzformációjának (87) alakjába azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^\dagger &\xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \hat{b}_1^\dagger - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \hat{b}_2^\dagger, \\ \hat{a}_2^\dagger &\xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \hat{b}_1^\dagger + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \hat{b}_2^\dagger. \end{aligned} \quad (89)$$

Ezt alkalmazva a (88) kifejezésre megkapjuk a kimenő fotonállapotot

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{HOM}}\rangle = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |00\rangle_{12} &\xrightarrow{\hat{U}_{BS}} \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^\dagger \right) \left(\hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \right) |00\rangle_{1'2'} = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2^\dagger \right) |00\rangle_{1'2'} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|20\rangle_{1'2'} - |02\rangle_{1'2'}) , \end{aligned} \quad (90)$$

ahol a ket vektorok $1'$ és $2'$ indexei az egyes kimeneti módusokat jelölik melyek eltüntető operátorai a $\hat{b}$ operátorok. Látszik, hogy a nyalábosztót valóban csak párban hagyják el a fotonok.

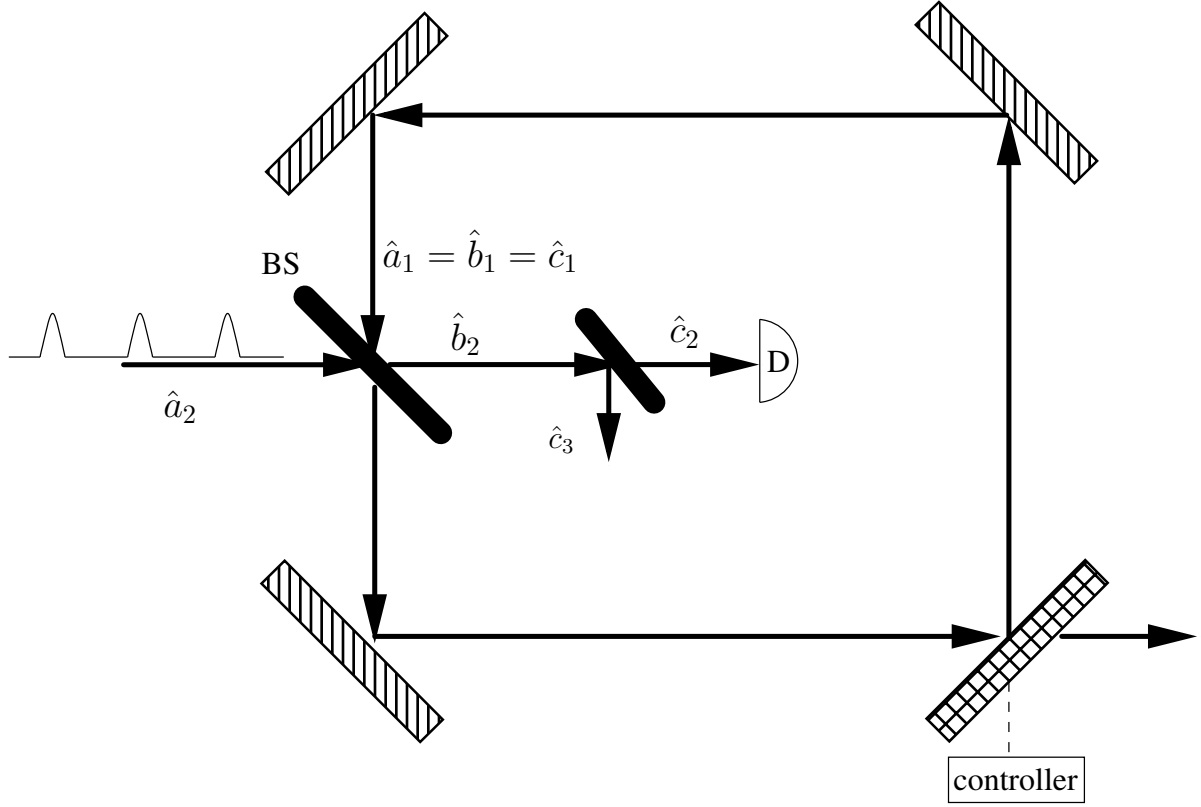
3. Eredmények

A következőkben a kutatásom során elért tudományos eredményeimet mutatom be. Először a vizsgált kvantumoptikai elrendezést ismertetem, majd a megfelelő számítások elvégzésével vizsgálom meg azt, hogy milyen valószínűséggel és hűséggel (*fidelity*-vel) lehet egy újabb fotont hozzá tapasztani egy már meglévő n -foton állapothoz egy nyalábosztó és egy valós detektor segítségével. Végül ezen elemi lépésekből álló iterált fotonösszegzési folyamatot foglalom össze hasonló szempontok szerint.

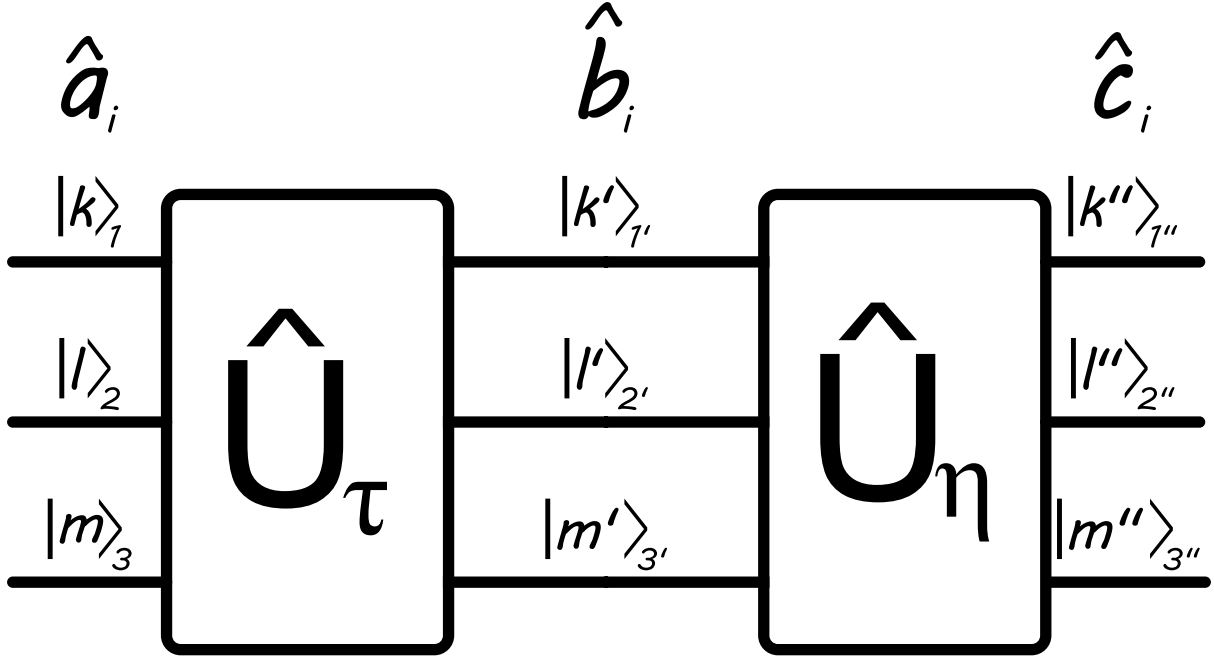
3.1. A szerkezet általános bemutatása

Kutatásom fő célja, hogy megvizsgáljam egy nyalábosztóból, tükrökből, és egy valós detektorból álló hurkos elrendezésű kvantumoptikai rendszer n -foton forrásként való használhatóságát. Ezt az elrendezést a 4. ábrán láthatjuk. A hurkos szerkezetet a BS jelzésű nyalábosztó egyik kimeneti módusának visszacsatolása adja. A valós detektort egy megfelelő áteresztő képességű nyalábosztóval és az utána elhelyezett ideális D detektorral modellezzük.

A szerkezet periodikusan adja össze a fotonokat egy külső periodikus egyfotonforrás segítségével, ami olyan időközönként lő egy-egy fotont a rendszerbe, ami megegyezik azzal az idővel, ami alatt egy foton körbeér a 4. ábrán látható hurkon. Az elrendezésben két



4. ábra. A kutatómunkám során vizsgált hurkos szerkezet. Az ábra bal oldaláról fotonimpulzusok sorozata érkezik be a 2-es móduson. A beérkező egyfotonállapot a τ áteresztőképességű BS nyalábosztón interferenciába lép az 1-es módus fotonállapotával. Az 1' kimeneti módus tükrök segítségével vissza van vezetve ehhez a nyalábosztóhoz a 2'-s kimeneti módus pedig tovább van vezetve a valós detektor felé. A valós η hatásfokú detektort egy η transzmissziós együtthatójú nyalábosztóval és egy utána elhelyezett ideális detektorral modellezzük. A 2' módus fotonállapota az ideális D detektor előtti nyalábosztón interferenciába lép a 3'-s módus vákuumállapotával. Ennek 2'' kimeneti módusa az ideális detektorba van vezetve, mely csak akkor jelez, ha nem vákuumállapotot érzékel. A 3''-s kimeneti csatorna állapota kiszóródik a szerkezet környezetébe, így elhanyagoljuk azt.



5. ábra. A számolásaimban szereplő módusok állapotainak és azok bozonikus eltüntető operátoraink jelölése az $\hat{U}_\tau$ és $\hat{U}_\eta$ operátorok által határolt három szakaszon.

nyalábosztó szerepel: a BS jelzésű, melynek transzmittivitása τ , és a D detektor előtt álló, melynek η az áteresztőképessége. Ezek hatását rendre az $\hat{U}_\tau$ és az $\hat{U}_\eta$ operátorok írják le. Mindkét nyalábosztó eltranszformálja a módusszerkezetet, de a különböző módusok száma nem változik. A nyalábosztók három szakaszra osztanak egy periódust, melyekben mind három-három módus szerepel. Ezeket szemlélteti az 5. ábra. Az $\hat{U}_\tau$ operátor hatása előtt a módusokat 1, 2, 3 sorszámokkal jelöljük, melyekre az $\hat{a}_i$ eltüntető operátorok hatnak ($i \in \{1; 2; 3\}$). Az $\hat{U}_\tau$ és $\hat{U}_\eta$ operátorok hatása közt 1', 2', és 3' jelöli a különböző módusokat, melyek eltüntető operátorait $\hat{b}_i$ -vel jelöljük, illetve $\hat{U}_\eta$ operátor hatása után a különböző módusokra 1''-ként, 2''-ként, illetve 3''-ként hivatkozunk. Az utolsó esetben felsorolt módusok eltüntető operátorait $\hat{c}_i$ jelöli. Az egyes módusok állapotát Fock-bázisban az ábrán látható módon a megfelelő móduval indexelt ket vektorokkal jelöljük.

Minden periódusban egy-egy foton érkezik be a 2-es móduban ($|1\rangle_2$) az első (τ transzmittivitású) nyalábosztóra, ahol az interferenciába lép az 1-es móduban lévő fotonokkal. Ennek kimeneti módusai 1' és 2'. A 3-as módu, mely állapota a vákuumállapot ($|0\rangle_3$) nincs hatással ez a nyalábosztó, így ez jellemzi a 3' állapotát is ($|0\rangle_{3'}$). Az 1' módu vissza van vezetve az első nyalábosztó bemenetére (így kialakítva a hurkot) és erre nincs hatással a második (η transzmittivitású) nyalábosztó, tehát ennek kvantumállapota megegyezik az 1'' móduval, ami a következő periódusban az 1-es módu állapota. A 2' módu fotonjai a második nyalábosztón interferálnak a 3' módu vákuumával, így kapjuk a 2'' és 3'' módusok fotonállapotát. A 2''-s az ideális D detektor felé van vezetve, mely akkor jelez, ha legalább egy fotont érzékel, a 3'' módu állapota pedig kiszóródik a rendszerből, tehát azt elhanyagoljuk. Ez matematikailag a parciális nyom képzését jelenti.

Az elrendezés n -foton forrásként úgy használható, hogy n fotonimpulzus beérkezése során végig figyeljük a detektor jelzéseit. Ha ezidő alatt nem szólal meg az, akkor feltételezhetjük, hogy az iterált fotonösszegzés sikeres volt és akkor a 4. ábra „controller” jelzésű tükrét kivesszük a szerkezetből, így kicsatolva a hurokból az eredményképpen kapott fotonállapotot. Ezt egy változtatható transzmittivitású nyalábosztóval érjük el, aminek

áteresztőképességét 0-ról 1-re változtatjuk. (A laboratóriumokban elérhetők olyan nyalábosztók, melyek paraméterei elektronikusan szabályozhatók.) Persze előfordulhat, hogy a detektor azért nem érzékel fotont, mert annak hatásfoka kevesebb, mint 100%, ezért sosem lehetünk teljesen biztosak abban, hogy ténylegesen sikerült n -foton állapotot előállítani. Azt hogy a kicsatolt módus állapotáról milyen bizonyossággal mondhatjuk, hogy egy n -fotonos Fock-állapot azt a hűség, avagy *fidelity* adja meg. Kutatásom során kiderült, hogy még 3-, illetve 4-foton állapotok előállítása esetén is ez az érték egy elfogadható szintet ér el.

3.2. Fotonösszegzés nyalábosztóval és detektorral

A 4. ábrán látható elrendezés helyettesíthető a 6. ábrán látható periodikus szerkezettel, ami egymás után következő nyalábosztókból és (az előző alfejezetben vázolt modell szerinti) valós detektorokból áll. Az első periódus során a hurokban (az 1-es módusban) még nincs foton, tehát annak állapotát a vákuumállapot jellemzi ($|0\rangle_1$) a 2-es módusban pedig egyetlen foton érkezik ($|1\rangle_2$) a τ transzmittivitású nyalábosztó felé. Ennek kimenetei közül az $1'$ jelűt továbbvezetjük a következő periódus nyalábosztója felé, a $2'$ -s kimeneti módus pedig a detektor felé halad, melyet egy ideális detektorral és az elé helyezett η áteresztőképességű nyalábosztóval modellezünk, amin a beérkező módus a vákuumállapottal ($|0\rangle_{3'}$) interferál.

Itt megjegyezzük, hogy az impulzusüzemű elrendezések esetében ún. időbeli-térbeli módusokkal számolunk: ezek egy adott irányba és polarizációval, és egy adott időablakban értelmezettek. Tehát a módusfüggvények hullámcsomagok. Ez a leírás általánosan elfogadott a kvantumoptikában és kvantuminformatikában.

Vizsgáljuk először ennek a periodikus szerkezetnek egy elemi periódusát, azaz amikor az 1-es módus n , a 2-es 1, a 3-as pedig 0 fotont tartalmaz. Ekkor a rendszer állapota a

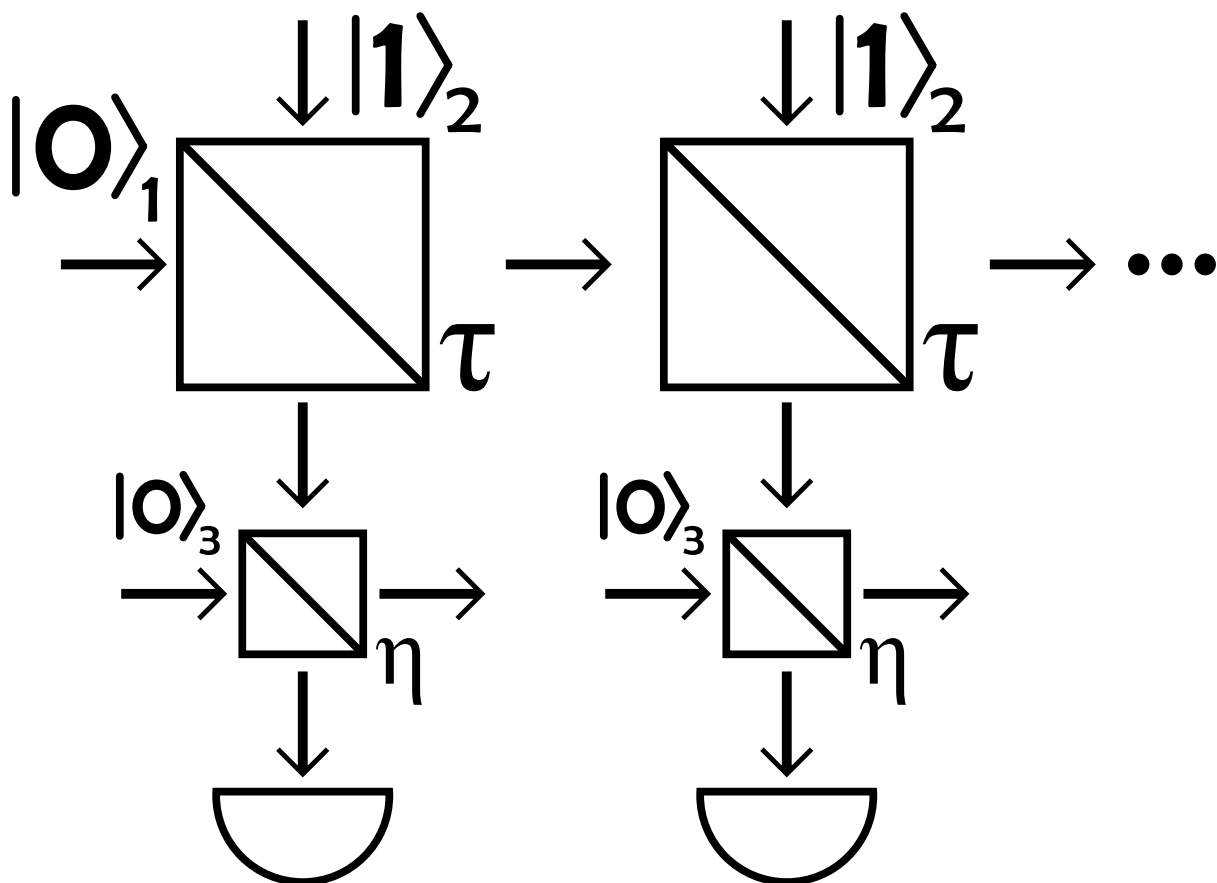
$$|\psi\rangle_{123} = |n\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_1^\dagger)^n |0\rangle_1 \otimes \hat{a}_2^\dagger |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_1^\dagger)^n \hat{a}_2^\dagger |000\rangle_{123} = |n10\rangle_{123} \quad (91)$$

vektorral jellemezhető a Fock bázison. Az első (τ transzmittivitású) nyalábosztó hatását az $\hat{U}_\tau$ operátor írja le.

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{U}_\tau} \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & -\sqrt{1-\tau} & 0 \\ \sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

A keltő operátorokra vett hatását (87) kifejezéshez hasonlóan adhatjuk meg

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \\ \hat{a}_3^\dagger \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{U}_\tau} \begin{pmatrix} \sqrt{\tau} & -\sqrt{1-\tau} & 0 \\ \sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger \\ \hat{b}_2^\dagger \\ \hat{b}_3^\dagger \end{pmatrix} \quad (93)$$



6. ábra. A 4. ábrán látható elrendezést helyettesítő periodikus szerkezet első két eleme. Először vákuumállapot van az 1-es módusban ($|0\rangle_1$) és egy foton érkezik a 2-esben ($|1\rangle_2$). Az 1' kimeneti csatornát továbbvezetjük a következő periódus nyalábosztójára, a másik kimeneti állapot pedig a valós detektorra esik, ahol interferál a 3'-s módus vákuumállapotával ($|0\rangle_{3'}$) és a kimeneti állapot 2''-s módusa az ideális detektorra esik, a 3'' pedig kiszóródik.

alakban. Tehát az $1'$, $2'$, és $3'$ módusok állapota ekkor a

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{1'2'3'} &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_1^\dagger - \sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_2^\dagger \right)^n \left(\sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_1^\dagger + \sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_2^\dagger \right) |000\rangle_{1'2'3'} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_1^\dagger \right)^k \left(-\sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_2^\dagger \right)^{n-k} \right] \left(\sqrt{1-\tau} \cdot \hat{b}_1^\dagger + \sqrt{\tau} \cdot \hat{b}_2^\dagger \right) |000\rangle_{1'2'3'} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sqrt{\tau^k (1-\tau)^{n-k}} \left[\sqrt{1-\tau} \left(\hat{b}_1^\dagger \right)^{k+1} \left(\hat{b}_2^\dagger \right)^{n-k} + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\tau} \left(\hat{b}_1^\dagger \right)^k \left(\hat{b}_2^\dagger \right)^{n-k+1} \right] |000\rangle_{1'2'3'} = \\
&= (-1)^n \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)^n}{n!}} \left(\hat{b}_2^\dagger \right)^{n+1} |000\rangle_{1'2'3'} + \\
&+ \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sqrt{\frac{\tau^{k-1} (1-\tau)^{n-k}}{n!}} \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] \left(\hat{b}_1^\dagger \right)^k \left(\hat{b}_2^\dagger \right)^{n-k+1} |000\rangle_{1'2'3'} + \\
&\quad + \sqrt{\frac{\tau^n (1-\tau)}{n!}} \left(\hat{b}_1^\dagger \right)^{n+1} |000\rangle_{1'2'3'}. \quad (94)
\end{aligned}$$

vektorral írható le. A második (η transzmittivitású) nyálábosztó hatása hasonlóan írható le az $\hat{U}_\eta$ operátorral. Ennek hatása az egyes módusok keltő operátorára

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger \\ \hat{b}_2^\dagger \\ \hat{b}_3^\dagger \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{U}_\eta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} & \sqrt{1-\eta} \\ 0 & -\sqrt{1-\eta} & \sqrt{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1^\dagger \\ \hat{c}_2^\dagger \\ \hat{c}_3^\dagger \end{pmatrix} \quad (95)$$

alakban adható meg. Elvégezve a behelyettesítést, megkapjuk az $1''$, $2''$, és $3''$ módusok

összesített állapotát leíró vektort.

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{1''2''3''} &= (-1)^n \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)^n}{n!}} \left(\sqrt{1-\eta} \cdot \hat{c}_3^\dagger + \sqrt{\eta} \cdot \hat{c}_2^\dagger \right)^{n+1} |000\rangle_{1''2''3''} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sqrt{\frac{\tau^{k-1}(1-\tau)^{n-k}}{n!}} \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] \left(\hat{c}_1^\dagger \right)^k \times \\
&\quad \times \left(\sqrt{1-\eta} \cdot \hat{c}_3^\dagger + \sqrt{\eta} \cdot \hat{c}_2^\dagger \right)^{n-k+1} |000\rangle_{1''2''3''} + \sqrt{\frac{\tau^n(1-\tau)}{n!}} \left(\hat{c}_1^\dagger \right)^{n+1} |000\rangle_{1''2''3''} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^n \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)^n}{n!}} \binom{n+1}{k} \sqrt{\eta^{n-k+1}(1-\eta)^k} \left(\hat{c}_2^\dagger \right)^{n-k+1} \left(\hat{c}_3^\dagger \right)^k |000\rangle_{1''2''3''} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{n-k+1} (-1)^{n-k} \sqrt{\frac{\tau^{k-1}(1-\tau)^{n-k}}{n!}} \sqrt{\eta^{n-k-l+1}(1-\eta)^l} \times \\
&\quad \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] \binom{n-k+1}{l} \left(\hat{c}_1^\dagger \right)^k \left(\hat{c}_2^\dagger \right)^{n-k-l+1} \left(\hat{c}_3^\dagger \right)^l |000\rangle_{1''2''3''} + \\
&\quad + \sqrt{\frac{\tau^n(1-\tau)}{n!}} \left(\hat{c}_1^\dagger \right)^{n+1} |000\rangle_{1''2''3''} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n \eta^{n-k+1}(1-\eta)^k} \sqrt{\frac{(n-k+1)!k!}{n!}} \binom{n+1}{k} |0; n-k+1; k\rangle_{1''2''3''} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{n-k+1} (-1)^{n-k} \sqrt{\tau^{k-1}(1-\tau)^{n-k} \eta^{n-k-l+1}(1-\eta)^l} \sqrt{\frac{k!(n-k-l+1)!l!}{n!}} \times \\
&\quad \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] \binom{n-k+1}{l} |k; n-k-l+1; l\rangle_{1''2''3''} + \\
&\quad + \sqrt{\tau^n(1-\tau)} \sqrt{n+1} |n+1; 0; 0\rangle_{1''2''3''} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n \eta^{n-k+1}(1-\eta)^k} \sqrt{\binom{n+1}{k} (n+1)} |0; n-k+1; k\rangle_{1''2''3''} + \\
&+ \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{n-k+1} (-1)^{n-k} \sqrt{\tau^{k-1}(1-\tau)^{n-k} \eta^{n-k-l+1}(1-\eta)^l} \sqrt{\binom{n-k+1}{l} \frac{(n-k+1)!k!}{n!}} \times \\
&\quad \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] |k; n-k-l+1; l\rangle_{1''2''3''} + \\
&\quad + \sqrt{\tau^n(1-\tau)} \sqrt{n+1} |n+1; 0; 0\rangle_{1''2''3''}. \quad (96)
\end{aligned}$$

Hogy a detektor nem érzékelt fotont a $2''$ -s kimeneti csatornában azt jelenti, hogy a $|\psi\rangle_{1''2''3''}$ állapotot le kell vetítenünk a $\mathbf{1}^{(1)} \otimes \hat{P}_0^{(2)} \otimes \mathbf{1}^{(3)}$ operátor segítségével, ahol $\mathbf{1}^{(k)}$ a k'' módus állapotai Hilbert-terének egységoperátora, $\hat{P}_0^{(2)} = |0\rangle_{2''} \langle 0|_{2''}$ pedig a $2''$ módus

vákuumállapotára vetítő projektor operátor

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1}^{(1)} \otimes \hat{P}_0^{(2)} \otimes \mathbb{1}^{(3)} |\psi\rangle_{1''2''3''} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |i\rangle_{1''} \langle i|_{1''} \otimes |0\rangle_{2''} \langle 0|_{2''} \otimes \sum_{j=0}^{\infty} |j\rangle_{3''} \langle j|_{3''} \right\} \times \\
& \times \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n \eta^{n-k+1} (1-\eta)^k} \sqrt{\binom{n+1}{k} (n+1)} |0; n-k+1; k\rangle_{1''2''3''} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{n-k+1} (-1)^{n-k} \sqrt{\tau^{k-1} (1-\tau)^{n-k} \eta^{n-k-l+1} (1-\eta)^l} \sqrt{\binom{n-k+1}{l} \frac{(n-k+1)!k!}{n!}} \times \\
& \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] |k; n-k-l+1; l\rangle_{1''2''3''} + \\
& \left. + \sqrt{\tau^n (1-\tau)} \sqrt{n+1} |n+1; 0; 0\rangle_{1''2''3''} \right\} = \\
& = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n \eta^{n-k+1} (1-\eta)^k} \sqrt{\binom{n+1}{k} (n+1)} \cdot \delta_{i,0} \delta_{0,n-k+1} \delta_{j,k} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{n-k+1} (-1)^{n-k} \sqrt{\tau^{k-1} (1-\tau)^{n-k} \eta^{n-k-l+1} (1-\eta)^l} \sqrt{\binom{n-k+1}{l} \frac{(n-k+1)!k!}{n!}} \times \\
& \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] \delta_{i,k} \delta_{0,n-k-l+1} \delta_{j,l} + \\
& \left. + \sqrt{\tau^n (1-\tau)} \sqrt{n+1} \cdot \delta_{i,n+1} \delta_{0,0} \delta_{j,0} \right\} |i; 0; j\rangle_{1''2''3''} = \\
& = (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n (1-\eta)^{n+1}} \sqrt{n+1} |0; 0; n+1\rangle_{1''2''3''} + \\
& + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sqrt{\tau^{k-1} (1-\tau)^{n-k} (1-\eta)^{n-k+1}} \sqrt{\frac{(n-k+1)!k!}{n!}} \times \\
& \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] |k; 0; n-k+1\rangle_{1''2''3''} + \sqrt{\tau^n (1-\tau)} \sqrt{n+1} |n+1; 0; 0\rangle_{1''2''3''} . \\
& \tag{97}
\end{aligned}$$

Ennek abszolútérték négyzete adja meg annak a valószínűségét, hogy a detektor nem érzékelt fotont:

$$\begin{aligned}
p(n, \tau, \eta) &= \tau(1-\tau)^n (1-\eta)^{n+1} (n+1) + \\
& + \sum_{k=1}^n \tau^{k-1} (1-\tau)^{n-k} (1-\eta)^{n-k+1} \frac{(n-k+1)!k!}{n!} \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right]^2 + \\
& + \tau^n (1-\tau) (n+1). \tag{98}
\end{aligned}$$

A projekció miatt az állapotot normálnunk kell az abszolútértékének négyzetgyökével,

azaz $\sqrt{p}$ -vel.

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{1''3''} = \frac{1}{\sqrt{p}} \Big\{ & (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n(1-\eta)^{n+1}} \sqrt{n+1} |0; n+1\rangle_{1''3''} + \\
& + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sqrt{\tau^{k-1}(1-\tau)^{n-k}(1-\eta)^{n-k+1}} \sqrt{\frac{(n-k+1)!k!}{n!}} \times \\
& \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] |k; n-k+1\rangle_{1''3''} + \sqrt{\tau^n(1-\tau)} \sqrt{n+1} |n+1; 0\rangle_{1''3''} \Big\}. \quad (99)
\end{aligned}$$

Itt a ket vektorok indexeléséből elhagytuk a $2''$ jelölést, mivel csak $|k; 0; l\rangle_{1''2''3''}$ alakú komponensek építik fel a továbbiakban vizsgált állapotot. Az ehhez tartozó sűrűségoperátor a következő alakú:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} = |\psi\rangle_{1''3''} \langle\psi|_{1''3''} = \frac{1}{p} \Big\{ & (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n(1-\eta)^{n+1}} \sqrt{n+1} |0; n+1\rangle_{1''3''} + \\
& + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sqrt{\tau^{k-1}(1-\tau)^{n-k}(1-\eta)^{n-k+1}} \sqrt{\frac{(n-k+1)!k!}{n!}} \times \\
& \times \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right] |k; n-k+1\rangle_{1''3''} + \sqrt{\tau^n(1-\tau)} \sqrt{n+1} |n+1; 0\rangle_{1''3''} \Big\} \times \\
& \times \Big\{ \langle 0; n+1|_{1''3''} (-1)^n \sqrt{\tau(1-\tau)^n(1-\eta)^{n+1}} \sqrt{n+1} + \\
& + \sum_{l=1}^n \langle l; n-l+1|_{1''3''} (-1)^{n-l} \sqrt{\tau^{l-1}(1-\tau)^{n-l}(1-\eta)^{n-l+1}} \sqrt{\frac{(n-l+1)!l!}{n!}} \times \\
& \times \left[\binom{n}{l} \tau - \binom{n}{l-1} (1-\tau) \right] + \langle n+1; 0|_{1''3''} \sqrt{\tau^n(1-\tau)} \sqrt{n+1} \Big\}. \quad (100)
\end{aligned}$$

A $3''$ módus a veszteségi módus, melyről nincs információnk, ezért parciális nyomot kell számolnunk.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_3 \hat{\rho} = \frac{1}{p} \Big\{ & \tau(1-\tau)^n(1-\eta)^{n+1}(n+1) |0\rangle_{1''} \langle 0|_{1''} + \\
& + \sum_{k=1}^n \tau^{k-1}(1-\tau)^{n-k}(1-\eta)^{n-k+1} \frac{(n-k+1)!k!}{n!} \left[\binom{n}{k} \tau - \binom{n}{k-1} (1-\tau) \right]^2 |k\rangle_{1''} \langle k|_{1''} + \\
& + \tau^n(1-\tau)(n+1) |n+1\rangle_{1''} \langle n+1|_{1''} \Big\}. \quad (101)
\end{aligned}$$

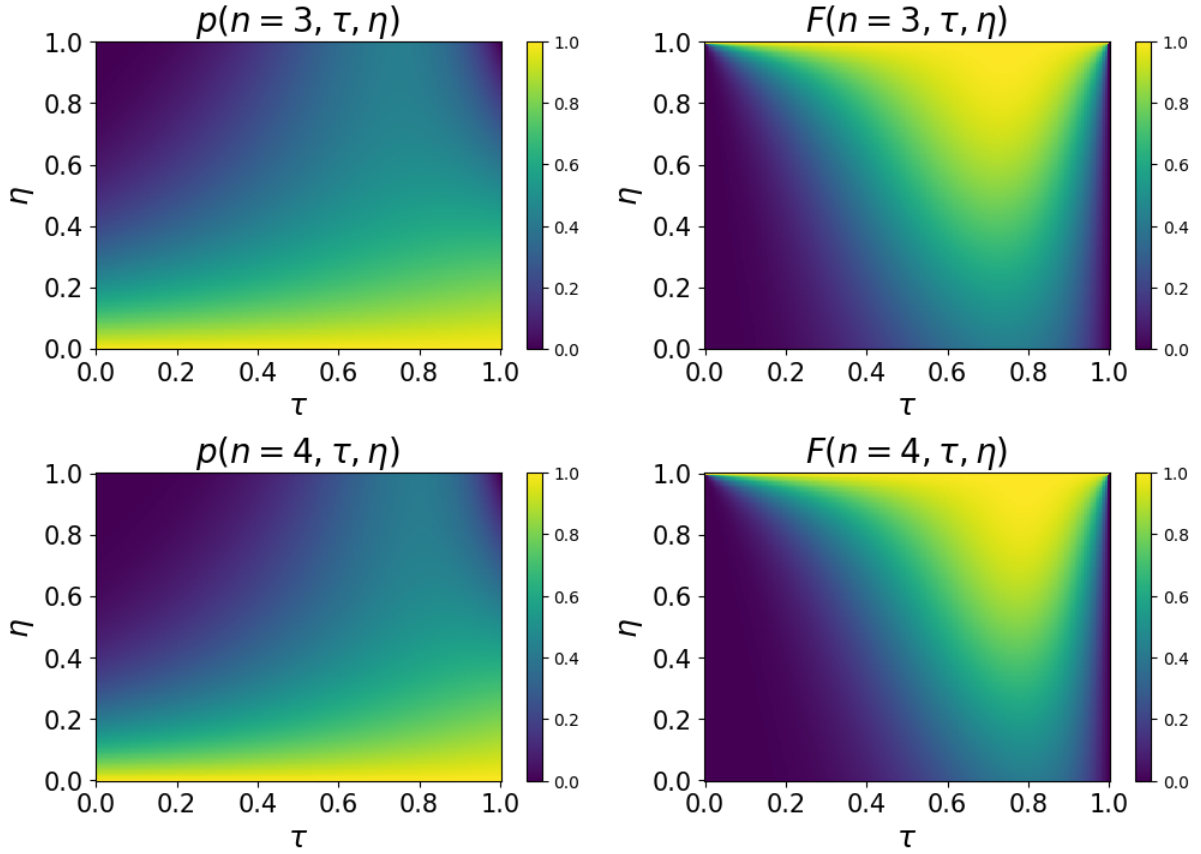
A fotonösszegzés bizonyosságát, hűségét a fidelitás méri. Egy $\hat{\rho}$ sűrűségoperátorral jellemzett kvantumállapot egy másik $|\Phi\rangle$ állapothoz való fidelitása a következőképpen számolható:

$$F = \langle \Phi | \hat{\rho} | \Phi \rangle. \quad (102)$$

A mi esetünkben a $\hat{\rho}$ sűrűségoperátorral leírt állapot $|n+1\rangle_{1''}$ -hez való hűségére vagyunk kíváncsiak

$$F(n, \tau, \eta) = \langle n+1|_{1''} \hat{\rho}_1 |n+1\rangle_{1''} = \frac{\tau^n(1-\tau)(n+1)}{p(n, \tau, \eta)}. \quad (103)$$

Az összetapadás $p(n, \tau, \eta)$ valószínűségét és $F(n, \tau, \eta)$ hűségét $n=3$ és $n=4$ esetre ki is számoltam numerikusan a nyalábosztó τ transzmittivitásának és a detektor η hatásfokának függvényében. Ezt a 7. ábrán láthatjuk. Vegyük észre, hogy $\eta \approx 0.8$ hatásfok



7. ábra. A fotonösszegzés valószínűsége és fidelitása a nyalábosztó τ áteresztőképességének és a detektor η hatásfokának függvényében, amikor 3 (*fent*), illetve 4 (*lent*) fotonhoz próbálunk egy újat hozzátapasztani. A számolásokat numerikusan végeztem el (98) és (103) kifejezések szerint. Látható, hogy egy tipikus $\eta \approx 0.8$ hatásfokú detektor esetében elég nagy értékeket érhetünk el τ megfelelő értéke mellett az összetapadás valószínűségére ($p \approx 0.4$) és annak hűségére ($F \approx 0.9$) is.

mellett, ami tipikus érték a gyakorlatban alkalmazott detektorok esetében akár $p \approx 0.4$ valószínűség és $F \approx 0.9$ hűség is elérhető. Ez biztató jel az iterált fotonösszegzésre nézve.

3.3. Iterált fotonösszegzés

Az előző alfejezetben vázolt elemi lépést most többször kell alkalmaznunk egymás után. Ha n -fotonos Fock-állapotot szeretnénk előállítani, akkor n iterációt kell végrehajtanunk, azaz n darab egyfoton impulzust kell belőnünk a szerkezet 2-es módusán. Ha a folyamat során egyszer sem szólalt meg a detektor, akkor arra következtethetünk, hogy a fotonösszegzés sikeres volt és az eredményként kapott fotonállapotot kicsatolhatjuk a rendszerből. Ám ez a folyamat a detektor nem 100%-os hatásfoka miatt nem biztos, hogy a kívánt n -foton állapotot eredményezi kimenetül. Kutatómunkám során arra kerestem a választ, hogy az n iteráció után milyen hűséggel (fidelitással) lesz ez n -foton állapot és, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a detektor nem érzékel fotont. Ebben az alfejezetben az ehhez szükséges számításaimat és eredményeimet foglalom össze.

A legelső lépésben ismerjük a bemenő állapotot, hiszen ekkor még nincs foton a hurokban és egy érkezik be a 2-es móduson keresztül, de a későbbi iterációk során nem

tudjuk biztosan, hogy hány foton van pontosan az 1-es módban (a hurokban). Ennek állapota egy keveréke lesz az összes lehetséges fotonállapotnak. Ezt a kevert állapotot csak a sűrűségoperátorával tudjuk jellemezni. A k -adik iteráció során az összes lehetséges $|l\rangle_1$ állapotra el kell végezzük az előző alfejezetben leírt számolást, ahol $l \in \mathbb{N}$ és $l < k$, majd a (101) kifejezés szerint kapott $\hat{\rho}_1$ sűrűségoperátorokat lineárkombinálnunk kell azaz a valószínűséggel, hogy az 1-es módban l foton volt. Ezt mindig az előző iteráció eredményeként kapott sűrűségoperátor megfelelő diagonál eleme adja meg. A lineárkombinációként kapott sűrűségoperátor lesz az 1-es módus következő iterációkor használandó (kevert) állapotát leíró sűrűségoperátor.

Jelölje $\hat{\rho}_k$ a k -adik iteráció végén kapott kevert állapot sűrűségoperátora. Az első iteráció előtt legyen ez

$$\hat{\rho}_0 = |0\rangle_1 \langle 0|_1, \quad (104)$$

hiszen ekkor biztosan tudjuk, hogy nincs foton a hurokban. Ez egy tiszta állapot. Az előbb bevezetett $\hat{\rho}_k$ -t a következőképpen számolhatjuk

$$\hat{\rho}_k = \sum_{l=0}^{k-1} \underbrace{\langle l|_1 \hat{\rho}_{k-1} |l\rangle_1}_{p_{l,k-1}} \cdot \hat{\rho}_1^{(l)}, \quad (105)$$

ahol $p_{l,k-1}$ annak a valószínűsége, hogy l foton volt az iteráció elején az 1-es módban, $\hat{\rho}_1^{(l)}$ pedig az előző alfejezetben leírt módon kapott (101) kifejezésben megadott $\hat{\rho}_1$ sűrűségoperátor abban az esetben, amikor a (91) egyenletben leírt kezdeti $|\Psi\rangle_{123}$ állapot

$$|\Psi\rangle_{123} = |l\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \quad (106)$$

alakú.

Ezen számolások elvégzéséhez a python QuTiP könyvtárát [59–61] alkalmaztam, mellyel kvantumfizikai számolásokat végezhetünk el könnyedén numerikusan. A 8. és a 9. ábrán láthatjuk a nyalábosztó τ áteresztőképességének és a detektor η hatásfokának függvényében a vizsgált szerkezet 3-, illetve 4-fotonforrásként való használhatóságát jellemző mennyiségeket, azaz, hogy mekkora annak valószínűsége, hogy az iterált fotonösszegzés során nem érzékel fotont a detektor (p), illetve a fidelitást (F) ebben az esetben, melyet

$$F = \langle n|_1 \hat{\rho}_n |n\rangle_1 \quad (107)$$

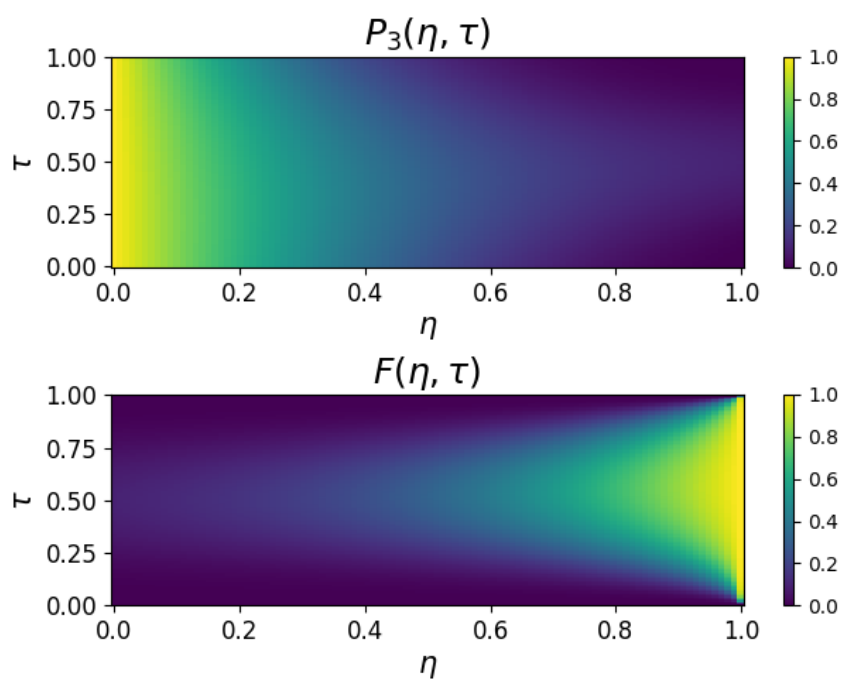
alakban számolunk. A két esetben rendre $n = 3$ és $n = 4$. A k -adik iteráció sikerességének (azaz, a detektor meg nem szólalásának) valószínűségét a (98) kifejezésben megadott valószínűségekkel és a korábban bevezetett $p_{l,k-1}$ értékekkel adhatjuk meg

$$p_k = \sum_{l=0}^{k-1} p_{l,k-1} p(l, \tau, \eta). \quad (108)$$

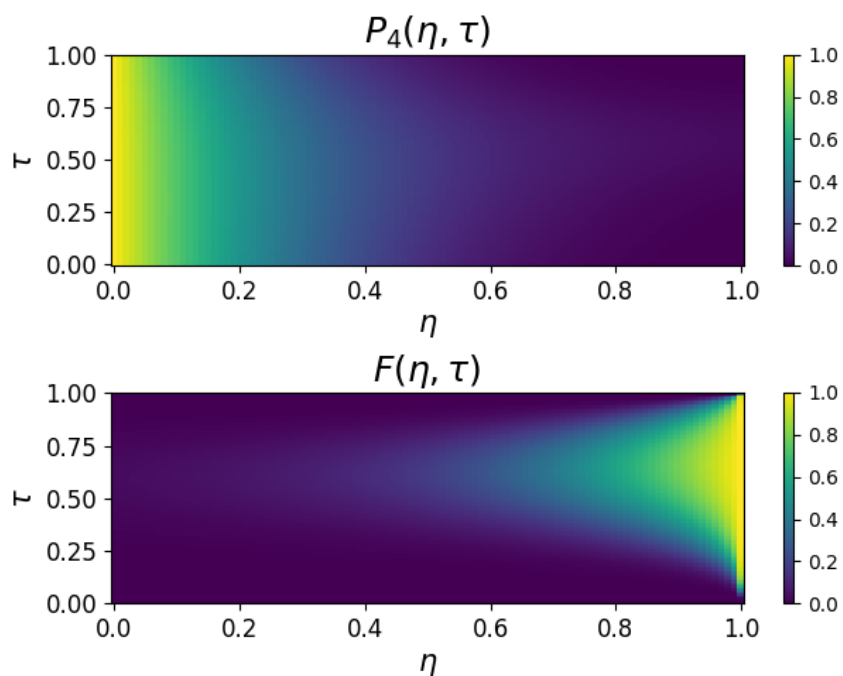
Amikor a szerkezetet n -foton állapot előállítására szeretnénk használni, akkor ezen valószínűségek szorzata adja meg, hogy mekkora valószínűséggel nem fog jelezni a detektor egyszer sem az n darab iteráció alatt

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k. \quad (109)$$

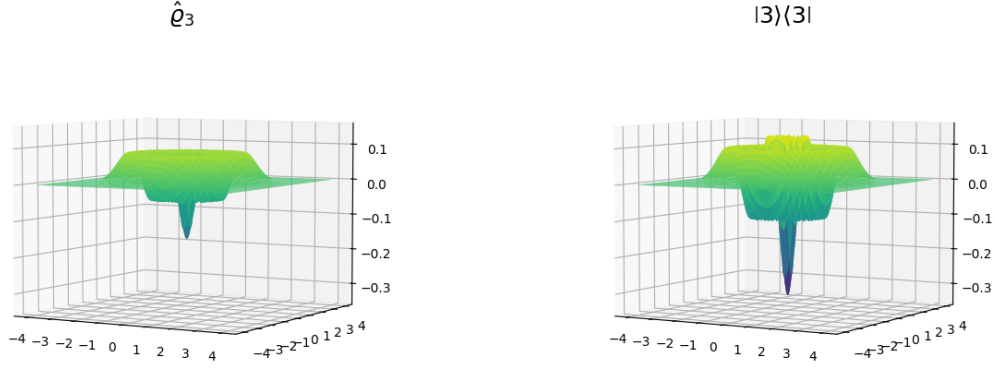
Ezt láthatjuk különböző τ és η értékekre a 8. és 9. ábrák felső felén.



8. ábra. Háromfoton-állapot előállításának valószínűsége (*fent*) és hűsége (*lent*) a τ transzmittivitás és az η határfok függvényében.



9. ábra. Négyfoton-állapot előállításának valószínűsége (*fent*) és hűsége (*lent*) a τ transzmittivitás és az η határfok függvényében.



10. ábra. A dolgozatomban bemutatott kvantumoptikai elrendezés által három iteráció után kapott kevert (*balra*) $\hat{\rho}_3$ -, és a tiszta (*jobbra*) $|3\rangle_1\langle 3|_1$ állapothoz tartozó Wigner-függvény. Látható, hogy a generált állapotot reprezentáló függvény is felvesz negatív értéket egyes tartományokon, ami a fotonállapot nemklasszikus volta utal.

Láthatjuk, hogy egy 80%-os hatásfokú detektort használva $F = 0,7$ -es és $F = 0,6$ -os fidelitásértéket is elérhetünk rendre 3-, illetve 4-fotonállapot előállításakor, amik mellett egészen biztosak lehetünk abban, hogy sikerült az elérni kívánt Fock-állapotot előállítani feltéve, hogy nem jelzett az iterált fotonösszegzés során a detektor, aminek $P_3 \approx 0,14$ és $P_4 \approx 0,05$ valószínűsége azonban nem túl magas. Ezen értékek növelhetők a detektor hatásfokának csökkentésével, ami a hűség csökkenésével jár, tehát a szerkezet alkalmazásakor a felhasználónak mérlegelnie kell a két mennyiség fontosságát.

A dolgozatban bemutatott elrendezéssel generált kevert állapotoknak a kívánt tiszta állapotokhoz való hasonlóságát nem csak a fidelitással jellemezhetjük, hanem annak Wigner-függvényével is. Ugyancsak a QuTiP python könyvtár segítségével végezhetjük el a (74) műveletet. Példának tekintsük azt az esetet, amikor egy $\eta = 0.8$ hatásfokú detektort és egy $\tau = 0.5$ transzmittivitású nyalábosztót használunk, hogy 3-fotonállapotot állítsunk elő. Az eredményképpen kapott $\hat{\rho}_3$ kevert állapot Wigner-függvényét a 10. ábra bal oldalán láthatjuk. Hasonlítsuk össze a mellette látható tiszta $|3\rangle_1\langle 3|_1$ állapot Wigner-függvényével! Jól látható, hogy hasonló a két függvény, azonban a generált kevert állapot Wigner-függvényének értékkészlete szűkebb intervallum, mint a tisztához tartozóé. Egy másik érdekesség, hogy a dolgozatban vázolt szerkezettel előállított fotonállapothoz tartozó Wigner-függvény negatív értéket is felvesz néhány pontban, ami erősen kvantumos természetűre utal.

3.4. További tökéletlenségek, hibaforrások

Eddig a hurkos elrendezés viselkedését idealizált esetben tárgyaltuk. Figyelembe vettük a detektor nem 100%-os hatásfokát, ám más tökéletlenségek is előfordulhatnak. A periodikus egyfoton-forrás nagy valószínűséggel állít elő egyfotonokat, de kis valószínűséggel megtörténhet, hogy egy kibocsátott impulzus nem tartalmaz egy fotont se, vagy az, hogy egynél több foton érkezik a szerkezet felé. Egy másik tényező, ami befolyásolhatja az eredményt az, ha nem egyszerre érkeznek a fotonok a nyalábosztóra. Ezen hibák hatását mutatjuk be röviden a következőkben.

3.4.1. Tökéletlen egyfotonforrás

Mint azt említettük, nem biztos, hogy mindig egy-egy fotont bocsájt ki a periodikus fotonforrás. Kis valószínűséggel ugyan, de megtörténhet, hogy egynél több fotont, vagy hogy egy fotont se küld a szerkezet felé a fotonforrás. Kutatómunkám során azt az esetet vizsgáltam meg, amikor a három-, és a több fotonállapot generálásának valószínűsége már elhanyagolható, hiszen a gyakorlatban használt egyfotonforrások esetében is ennek valószínűsége jóval kisebb, mint a háromnál kevesebb foton generálása.

Ez az eset azzal modellezhető, hogy kezdetben nem a tiszta $|1\rangle_2$ állapot írja le a 2-es módus állapotát, hanem a

$$\hat{\rho}' = q_0 |0\rangle_2 \langle 0|_2 + q_1 |1\rangle_2 \langle 1|_2 + q_3 |2\rangle_2 \langle 2|_2 \quad (110)$$

kevert állapotot reprezentáló sűrűségoperátor. Természetesen teljesülnie kell a

$$q_0 + q_1 + q_2 = 1 \quad (111)$$

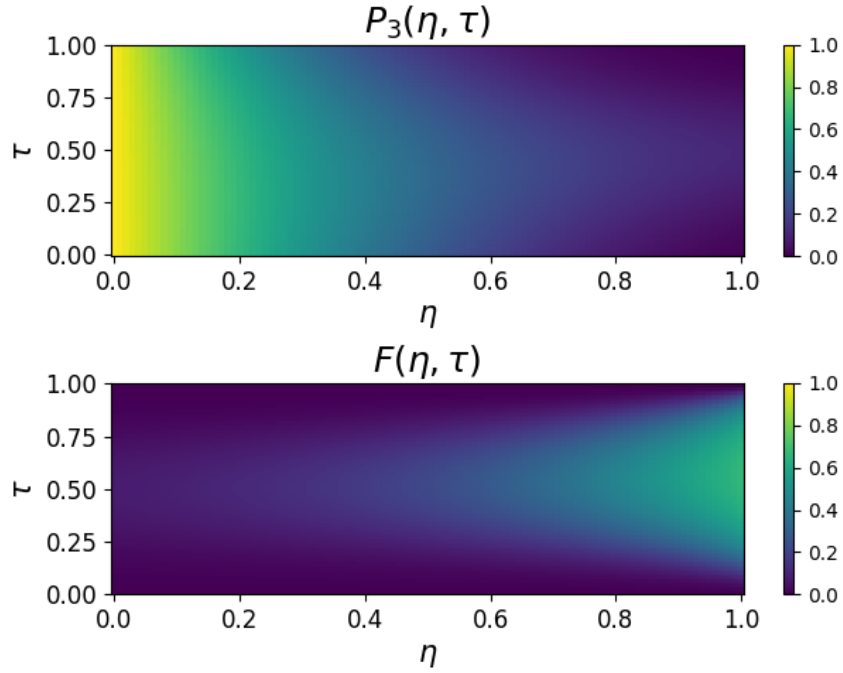
feltételnek. Megmutatható, hogy a (101) kifejezésben leírt sűrűségoperátor ebben az esetben is diagonális marad. Emiatt a numerikus számolás menete is hasonló a tökéletes egyfotonforráséhoz.

Hogy lássuk ennek a hibának a hatását újra elkészítettem a 3-fotonállapot előállításának valószínűségét és fidelitását bemutató ábrát a tökéletlen fotonforrást használata mellett. Ezt a 11. ábrán láthatjuk. Összehasonlítva a 8. ábrával észrevehetjük, hogy (várakozásainknak megfelelően) a fidelitás leromlott ennek a hibának figyelembevételével. Ugyanakkor a detektor meg nem szólalásának valószínűsége megnőtt, ami a 0-fotonos impulzusok lehetőségének köszönhető. Ezen változásokat számszerűen szemléltethetjük egy konkrét példán is. $\tau = 0,5$ és $\eta = 0,8$ paraméterek mellett, ha a periodikus egyfotonforrás ideális, azaz $q_0 = 0$, $q_1 = 1$, és $q_2 = 0$, akkor a siker valószínűsége 0,14, a hűség pedig 0,67, ha pedig $q_0 = 0,08$, $q_1 = 0,90$, és $q_2 = 0,02$ valószínűséggel bocsájt ki a forrás 0-, 1-, illetve 2 fotont, akkor a siker valószínűsége 0,16 a fidelitás pedig 0,44. A tökéletlen fotonforrás esetén generált fotonállapot Wigner-függvényét a 12. ábrán grafikusán ábrázoltam. Látható, hogy ennek értékkészlete még a 10. ábrán vázoltakénál is szűkebb, ami a fidelitás romlásával van kapcsolatban.

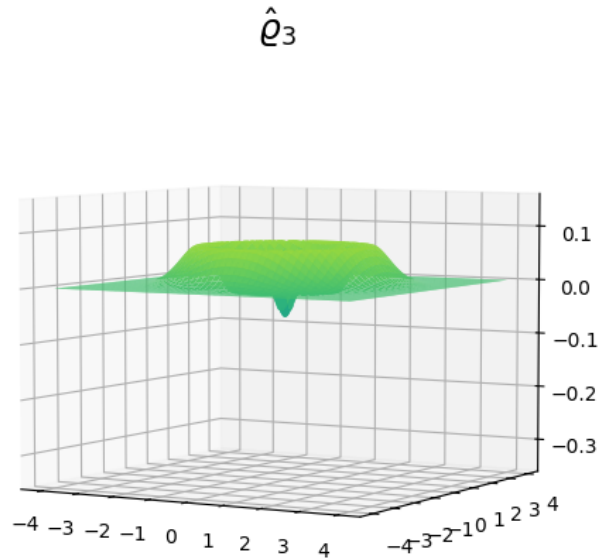
3.4.2. Nem egyszerre érkező fotonok

A másik jelentős hibaforrás az, ha nem egyszerre érkeznek a fotonok a nyalábosztó két bemenetére, ami tovább ronthat a generált fotonállapot hűségén, illetve a sikeres fotonösszegzés valószínűségén. Ezt okozhatja a periodikus fotonforrás periódusidejének kis bizonytalansága, vagy a hurkot alkotó interferométer karjai hosszának instabilitása. A Hong–Ou–Mandel-interferencia esetében ezt a problémát már korábban is megvizsgálták az eredeti cikkben [8] és egy nem rég publikált összefoglalóban is [9] igen részletes leírást adnak a jelenség kvantitatív hatásáról. A dolgozatban bemutatott elrendezés esetében hasonlóan lehetne eljárni, de a részletes leírás túlmutat kutatómunkám tárgykörén. Megjegyezzük, hogy a tökéletlen időzítésből eredő hiba hatása nagyban függ számos kísérleti részlettől, mint például az impulzusok alakjától.

Ugyanakkor kijelenthetjük, hogy a Hong–Ou–Mandel-interferencia esetéhez hasonlóan itt is szükséges, hogy a különböző módusokban a fotonok egyszerre érjenek a nyalábosztóra, hogy megfelelően működjön a bemutatott elrendezés. A periodikus egyfotonforrás impulzuskibocsátásai között eltelt idő az azt alkotó pumpáló lézer periódusidejétől függ,



11. ábra. Háromfoton-állapot előállításának valószínűsége (*fent*) és hűsége (*lent*) a τ transzmittivitás és az η hatásfok függvényében tökéletlen egyfotonforrást használva. A 0-, 1-, és 2-fotonállapotok előállításának valószínűsége rendre $q_0 = 0,08$, $q_1 = 0,90$, és $q_2 = 0,02$.



12. ábra. Tökéletlen egyfotonforrás használatával három iteráció után generált kevert fotonállapot Wigner-függvénye. Használt paraméterek: $\tau = 0,5$, $\eta = 0,8$, $q_0 = 0,08$, $q_1 = 0,90$, és $q_2 = 0,02$. Látható, hogy ebben az esetben a függvény értékkészlete a 10. ábrán láthatókénál is szűkebb. Ez is a hűség romlását jelzi.

ami szerencsére igen pontosan beállítható és a hurkot alkotó szakaszok hossza is megfelelően rögzíthető.

4. Összefoglalás, kitekintés

Kutatásom során egy periodikus egyfotonforrásból, nyalábosztóból, tükrökből, és egy valószínű detektorból álló kvantumoptikai elrendezéssel való iterált fotonösszegzés lehetőségét vizsgáltam meg. Arra kerestük a választ, hogy egy ilyen eszközökből felépített visszacsatoló hurkos szerkezettel milyen valószínűséggel és hűséggel (*fidelity*) tudunk periodikusan beérkező fotonokat a nyalábosztó segítségével összetapasztani, hogy tetszőleges n -fotonos Fock-állapotokat generáljunk.

Eredményképpen megmutattam, hogy ha egy nyalábosztó bemeneti módusain n -, illetve 1 foton érkezik egyszerre és az egyik kimeneti csatornájában lévő fotonok jelenlétét egy detektorral megmérjük, akkor a detektor hatásfokának növekedésével annak a valószínűsége, hogy a detektor nem érzékel fotont csökken, a fotonok összetapasztásának hűsége pedig nő. Grafikonjaimon az is jól látható, hogy különböző detektorhatásfokok mellett található olyan τ transzmittivitás értékek, melyekre az előbb említett valószínűség-, illetve a fidelitás maximális.

A továbbiakban bemutattam az iterált fotonösszegzés részleteit. Numerikus módszereket használva kiszámoltam, hogy mekkora a sikeres fotonösszegzés valószínűsége, illetve fidelitása különböző τ és η értékek mellett, amikor 3 vagy 4-fotonos állapotokat szeretnénk generálni. Azt kaptam, hogy a gyakorlatban alkalmazott detektorok jellemző hatásfokával ($\eta \approx 0,8$) számolva a τ transzmittivitás megfelelő beállításával elfogadható valószínűséggel és hűséggel állíthatunk elő ezzel az iteratív eljárással ilyen állapotokat. A generált kevert-, és az előállítandó tiszta állapotok hasonlóságát azok Wigner-függvényei is mutatják. Az is észrevehető, hogy az előállított kevert állapotot reprezentáló Wigner-függvény negatív értékeket is felvesz, ami erősen nemklasszikus tulajdonságokra utal.

Végül azt is megvizsgáltam, hogy a periodikus fotonforrás-, illetve a hurkot alkotó interferométer hibái, hogyan befolyásolják az iterált fotonösszegzés eredményét. Eredményül azt kaptam, hogy ha a fotonforrásból beérkező impulzus állapota nem tiszta, hanem több lehetséges Fock-állapotnak keveréke, akkor a sikeres összegzés valószínűsége megnő, azonban a fidelitás lecsökken. Kutatómunkámon ugyan túlnyúlik, de felvázoltam az időbeli pontatlanságok, hibák hatását is.

Dolgozatom témája tovább bővíthető ezen hibák minél pontosabb figyelembevételével, illetve a hurkos elrendezés gyakorlati alkalmazásaival. Nemrégiben jelent meg publikáció egy igen nagy teljesítményű programozható kvantumprocesszorról, a Borealisról [62], ami egy kritikus mérőldkő lehet a praktikus kvantumszámítógépek megvalósítása felé, ezért a szerkezet működésének és alkalmazhatóságai határainak minél pontosabb megismerése elengedhetetlen fontosságú.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőimnek, Koniorczyk Mátyásnak és Homa Gábornak a kutatómunkám végzése során felvetett ötleteiket, útmutatásaikat, a módszerek részletes bemutatását, és a dolgozatírás folyamatos ellenőrzését.

A Kulturális és Innovációs Minisztérium EKÖP-24 kódszámú Egyetemi Kiválósági Ösztöndíj Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alaphól finanszírozott szakmai támogatásával készült.



Hivatkozások

- [1] The European Quantum Communication Infrastructure (EuroQCI) Initiative — digital-strategy.ec.europa.eu. <https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/policies/european-quantum-communication-infrastructure-euroqci>. [Accessed 10-Jul-2023].
- [2] Quantum Technologies Flagship — digital-strategy.ec.europa.eu. <https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/policies/quantum-technologies-flagship>. [Accessed 10-Jul-2023].
- [3] Paul G Kwiat, Edo Waks, Andrew G White, Ian Appelbaum, and Philippe H Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Physical Review A*, 60(2):R773, 1999.
- [4] Fumihiro Kaneda and Paul G Kwiat. High-efficiency single-photon generation via large-scale active time multiplexing. *Science Advances*, 5(10):eaaw8586, 2019.
- [5] Pieter Kok, William J Munro, Kae Nemoto, Timothy C Ralph, Jonathan P Dowling, and Gerard J Milburn. Linear optical quantum computing with photonic qubits. *Reviews of Modern Physics*, 79(1):135, 2007.
- [6] Nicolas Gisin, Grégoire Ribordy, Wolfgang Tittel, and Hugo Zbinden. Quantum cryptography. *Reviews of Modern Physics*, 74(1):145, 2002.
- [7] Valerio Scarani, Helle Bechmann-Pasquinucci, Nicolas J Cerf, Miloslav Dušek, Norbert Lütkenhaus, and Momtchil Peev. The security of practical quantum key distribution. *Reviews of Modern Physics*, 81(3):1301, 2009.
- [8] Chong-Ki Hong, Zhe-Yu Ou, and Leonard Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Physical Review Letters*, 59(18):2044, 1987.

- [9] Christian Drago and Agata M. Brańczyk. Hong-ou-mandel interference: a spectral-temporal analysis. *Canadian Journal of Physics*, 102(8):411–421, August 2024.
- [10] Alessandro Zavatta, Silvia Viciani, and Marco Bellini. Quantum-to-classical transition with single-photon-added coherent states of light. *Science*, 306(5696):660–662, October 2004.
- [11] Alessandro Zavatta, Silvia Viciani, and Marco Bellini. Single-photon excitation of a coherent state: Catching the elementary step of stimulated light emission. *Physical Review A*, 72(2), August 2005.
- [12] Alessandro Zavatta, Valentina Parigi, and Marco Bellini. Experimental nonclassicality of single-photon-added thermal light states. *Physical Review A*, 75(5), May 2007.
- [13] Valentina Parigi, Alessandro Zavatta, Myungshik Kim, and Marco Bellini. Probing quantum commutation rules by addition and subtraction of single photons to/from a light field. *Science*, 317(5846):1890–1893, September 2007.
- [14] Naeem Akhtar, Jizhou Wu, Jia-Xin Peng, Wu-Ming Liu, and Gao Xianlong. Sub-planck structures and sensitivity of the superposed photon-added or photon-subtracted squeezed-vacuum states. *Physical Review A*, 107(5), May 2023.
- [15] Nicola Biagi, Saverio Francesconi, Alessandro Zavatta, and Marco Bellini. Photon-by-photon quantum light state engineering. *Progress in Quantum Electronics*, 84:100414, June 2022.
- [16] C. A. Holmes, G. J. Milburn, and D. F. Walls. Photon-number-state preparation in nondegenerate parametric amplification. *Physical Review A*, 39(5):2493–2501, March 1989.
- [17] I. Dotsenko, M. Mirrahimi, M. Brune, S. Haroche, J.-M. Raimond, and P. Rouchon. Quantum feedback by discrete quantum nondemolition measurements: Towards on-demand generation of photon-number states. *Physical Review A*, 80(1), July 2009.
- [18] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger, and H. Walther. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature*, 403(6771):743–746, February 2000.
- [19] Simon Brattke, Benjamin T. H. Varcoe, and Herbert Walther. Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics. *Physical Review Letters*, 86(16):3534–3537, April 2001.
- [20] Clément Sayrin, Igor Dotsenko, Xingxing Zhou, Bruno Peaudecerf, Théo Rybarczyk, Sébastien Gleyzes, Pierre Rouchon, Mazyar Mirrahimi, Hadis Amini, Michel Brune, Jean-Michel Raimond, and Serge Haroche. Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature*, 477(7362):73–77, August 2011.
- [21] S. Brattke, G. R. Guthöhrlein, M. Keller, W. Lange, B. Varcoe, and Herbert Walther. Generation of photon number states on demand. *Journal of Modern Optics*, 50(6–7):1103–1113, April 2003.

- [22] Max Hofheinz, E. M. Weig, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, Erik Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, H. Wang, John M. Martinis, and A. N. Cleland. Generation of fock states in a superconducting quantum circuit. *Nature*, 454(7202):310–314, July 2008.
- [23] M. Cosacchi, J. Wiercinski, T. Seidelmann, M. Cygorek, A. Vagov, D. E. Reiter, and V. M. Axt. On-demand generation of higher-order fock states in quantum-dot–cavity systems. *Physical Review Research*, 2(3), September 2020.
- [24] Edo Waks, Eleni Diamanti, and Yoshihisa Yamamoto. Generation of photon number states. *New Journal of Physics*, 8:4–4, January 2006.
- [25] Merlin Cooper, Laura J. Wright, Christoph Söller, and Brian J. Smith. Experimental generation of multi-photon fock states. *Optics Express*, 21(5):5309, February 2013.
- [26] Tatsuki Sonoyama, Kazuma Takahashi, Tomoki Sano, Takumi Suzuki, Takefumi Nomura, Masahiro Yabuno, Shigehito Miki, Hirotaka Terai, Kan Takase, Warit Asavanant, Mamoru Endo, and Akira Furusawa. Generation of multi-photon fock states at telecommunication wavelength using picosecond pulsed light. *Optics Express*, 32(18):32387, August 2024.
- [27] ShengLi Zhang, YuLi Dong, XuBo Zou, BaoSen Shi, and GuangCan Guo. Continuous-variable-entanglement distillation with photon addition. *Physical Review A*, 88(3), September 2013.
- [28] Ferenc Bodog, Matyas Mechler, Matyas Koniorczyk, and Peter Adam. Optimization of multiplexed single-photon sources operated with photon-number-resolving detectors. *Physical Review A*, 102(1), July 2020.
- [29] Evan Meyer-Scott, Christine Silberhorn, and Alan Migdall. Single-photon sources: Approaching the ideal through multiplexing. *Review of Scientific Instruments*, 91(4), April 2020.
- [30] Yasuhiko Arakawa and Mark J. Holmes. Progress in quantum-dot single photon sources for quantum information technologies: A broad spectrum overview. *Applied Physics Reviews*, 7(2), June 2020.
- [31] Peter Adam and Matyas Mechler. Single-photon sources based on incomplete binary-tree multiplexers with optimal structure. *Optics Express*, 31(19):30194, August 2023.
- [32] Rusong Li, Fengqi Liu, and Quanyong Lu. Quantum light source based on semiconductor quantum dots: A review. *Photonics*, 10(6):639, June 2023.
- [33] Peter Adam and Matyas Mechler. Single-photon sources based on stepwise optimized binary-tree multiplexers. *Optics Express*, 32(10):17173, April 2024.
- [34] Ulf Leonhardt. *Measuring the quantum state of light*. Cambridge University Press, 1997.
- [35] Gilles Nogues, Arno Rauschenbeutel, Stefano Osnaghi, Michel Brune, Jean-Michel Raimond, and Serge Haroche. Seeing a single photon without destroying it. *Nature*, 400(6741):239–242, 1999.

- [36] Igor Aharonovich, Dirk Englund, and Milos Toth. Solid-state single-photon emitters. *Nature photonics*, 10(10):631–641, 2016.
- [37] Alexei Ourjoumtsev, Rosa Tualle-Brouri, and Philippe Grangier. Quantum homodyne tomography of a two-photon fock state. *Physical review letters*, 96(21):213601, 2006.
- [38] Merlin Cooper, Laura J Wright, Christoph Söller, and Brian J Smith. Experimental generation of multi-photon fock states. *Optics express*, 21(5):5309–5317, 2013.
- [39] Martin Bouillard, Guillaume Boucher, Júlia Ferrer Ortas, Bhaskar Kanseri, and Rosa Tualle-Brouri. High production rate of single-photon and two-photon fock states for quantum state engineering. *Optics express*, 27(3):3113–3120, 2019.
- [40] Akito Kawasaki, Kan Takase, Takefumi Nomura, Sigehito Miki, Hirotaka Terai, Masahiro Yabuno, Fumihiro China, Warit Asavanant, Mamoru Endo, Jun-ichi Yoshikawa, et al. Generation of highly pure single-photon state at telecommunication wavelength. *Optics Express*, 30(14):24831–24840, 2022.
- [41] Geszti Tamás. *Kvantummechanika - Harmadik, javított kiadás*. Typotex Kiadó, 2015.
- [42] Anatole Kenfack and Karol Życzkowski. Negativity of the wigner function as an indicator of non-classicality. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 6(10):396–404, August 2004.
- [43] Richard A Campos, Bahaa EA Saleh, and Malvin C Teich. Quantum-mechanical lossless beam splitter: SU (2) symmetry and photon statistics. *Physical Review A*, 40(3):1371, 1989.
- [44] Masayuki Izutsu, Yoshiharu Nakai, and Tadasi Sueta. Operation mechanism of the single-mode optical-waveguide Y junction. *Optics letters*, 7(3):136–138, 1982.
- [45] T Ranganath and Shyh Wang. Ti-diffused linbo 3 branched-waveguide modulators: performance and design. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 13(4):290–295, 1977.
- [46] CH Holbrow, Enrique Galvez, and ME Parks. Photon quantum mechanics and beam splitters. *American Journal of Physics*, 70(3):260–265, 2002.
- [47] Paul G Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Physical Review Letters*, 75(24):4337, 1995.
- [48] Mehmet Bayindir, B Temelkuran, and EJAPL Ozbay. Photonic-crystal-based beam splitters. *Applied Physics Letters*, 77(24):3902–3904, 2000.
- [49] Charles Santori, David Fattal, Jelena Vučković, Glenn S Solomon, and Yoshihisa Yamamoto. Indistinguishable photons from a single-photon device. *Nature*, 419(6907):594–597, 2002.
- [50] Raj B Patel, Anthony J Bennett, Ian Farrer, Christine A Nicoll, David A Ritchie, and Andrew J Shields. Two-photon interference of the emission from electrically tunable remote quantum dots. *Nature photonics*, 4(9):632–635, 2010.

- [51] Jones Beugnon, Matthew PA Jones, Jos Dingjan, Benoît Darquié, Gaëtan Messin, Antoine Browaeys, and Philippe Grangier. Quantum interference between two single photons emitted by independently trapped atoms. *Nature*, 440(7085):779–782, 2006.
- [52] Peter Maunz, DL Moehring, Steven Olmschenk, Kelly Cooper Younge, DN Matsukevich, and Christopher Monroe. Quantum interference of photon pairs from two remote trapped atomic ions. *Nature Physics*, 3(8):538–541, 2007.
- [53] Alp Sipahigil, Michael Lurie Goldman, Emre Togan, Yiwen Chu, Matthew Markham, Daniel J Twitchen, Alexander S Zibrov, Alexander Kubanek, and Mikhail D Lukin. Quantum interference of single photons from remote nitrogen-vacancy centers in diamond. *Physical Review Letters*, 108(14):143601, 2012.
- [54] Alp Sipahigil, Kay D Jahnke, Lachlan J Rogers, Tokuyuki Teraji, Junichi Isoya, Alexander S Zibrov, Fedor Jelezko, and Mikhail D Lukin. Indistinguishable photons from separated silicon-vacancy centers in diamond. *Physical Review Letters*, 113(11):113602, 2014.
- [55] Giuliana Di Martino, Yannick Sonnefraud, Mark S Tame, Stéphane Kéna-Cohen, F Dieleman, ŞK Özdemir, MS Kim, and Stefan A Maier. Observation of quantum interference in the plasmonic hong-ou-mandel effect. *Physical Review Applied*, 1(3):034004, 2014.
- [56] James S Fakonas, Hyunseok Lee, Yousif A Kelaita, and Harry A Atwater. Two-plasmon quantum interference. *Nature Photonics*, 8(4):317–320, 2014.
- [57] Raphael Lopes, Almazbek Imanaliev, Alain Aspect, Marc Cheneau, Denis Boiron, and Christoph I Westbrook. Atomic hong-ou-mandel experiment. *Nature*, 520(7545):66–68, 2015.
- [58] Kenji Toyoda, Ryoto Hiji, Atsushi Noguchi, and Shinji Urabe. Hong-Ou-Mandel interference of two phonons in trapped ions. *Nature*, 527(7576):74–77, 2015.
- [59] P.D. Nation and J.R. Johansson. QuTiP - Quantum Toolbox in Python — qutip.org. <https://qutip.org/>. [Accessed 07-11-2024].
- [60] J.R. Johansson, P.D. Nation, and Franco Nori. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 183(8):1760–1772, August 2012.
- [61] J.R. Johansson, P.D. Nation, and Franco Nori. Qutip 2: A python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 184(4):1234–1240, April 2013.
- [62] Lars S. Madsen, Fabian Laudenbach, Mohsen Falamarzi. Askarani, Fabien Rortais, Trevor Vincent, Jacob F. F. Bulmer, Filippo M. Miatto, Leonhard Neuhaus, Lukas G. Helt, Matthew J. Collins, Adriana E. Lita, Thomas Gerrits, Sae Woo Nam, Varun D. Vaidya, Matteo Menotti, Ish Dhand, Zachary Vernon, Nicolás Quesada, and Jonathan Lavoie. Quantum computational advantage with a programmable photonic processor. *Nature*, 606(7912):75–81, June 2022.