

Jordan-Wigner-transzformáció általánosításával megoldható spinrendszerek

Szabó Péter Dániel

Témavezető: Pozsgay Balázs



EÖTVÖS LORÁND
UNIVERSITY | BUDAPEST

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. Dirac-fermion	5
1.2. Majoranna-fermion	5
1.3. Jordan-Wigner-transzformáció	5
1.4. A Dirac-fermionokra vonatkozó összefüggések	6
1.4.1. A ψ_λ fermionok kommutációs relációi	8
1.5. A $[\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}]$ kommutátor és a kapcsolata a projektorfelbontással	9
1.6. Az Ising-modell diagonalizálása	9
1.6.1. Az 1 részecskés állapotfüggvény	11
1.6.2. S_z Spinoperátor	12
2. A 2-es szomszédságú algebra spinrendszerei	13
2.1. Általános megoldás $ j - k > 2$ algebrán	13
2.2. Jordan-Wigner-transzformáció a 2-es szomszédos algebra esetén	14
2.3. Léptető operátoros felírás	15
2.4. A $\mathbb{C}$ mátrixos módszer megoldása	15
2.5. Az ilyen rendszerek láncolata	16
3. Gráfelmélet és kapcsolata a Jordan-Wigner transzformálhatósággal	17
3.1. Megengedett gráfok élgráfjai	18
4. Hasonlósági transzformáció U unitér operátorral	20
4.1. Az Ising-modellre redukálható rendszerek	20
4.1.1. Példa 1	20
4.1.2. Példa 2	23
4.1.3. Példa 3	25
4.2. Néhány tiltott gráf	27
5. A 2-es szomszédos, $j - k > 2$ spinrendszerek megoldásai $L = 6$ és $L = 7$ esetekre	28
5.1. $L = 6$	29
5.2. $L = 7$	31
5.3. $L = 8$	34
5.4. Kiszámított sajátenergiák	35
A. Saját eredmények	37
A.1. Kérdések	37
A.2. Módszerek	37
A.3. Eredmények	37

Absztrakt

Vizsgálni fogom példákon keresztül, hogy milyen H Hamilton-operátorokra lehet a kölcsönható spinrendszerek szabad fermionosak Jordan-Wigner-transzformációval. Egy adott Hamilton, akkor Jordan-Wigner-transzformálható, ha felírható $\sum \chi_j \chi_k C_{jk}$ alakban, ahol χ hermitikus fermionok egy csoportját jelölik, és ennek minden tagja antikommütál egymással, vagyis $\{\chi_j, \chi_k\} = 0$. A C egy dimenzióban lineáris mátrix, ellentétben a Hamiltonnal, ami exponenciális, tehát ha H 2^N dimenziós, akkor C N dimenziós. Így könnyebben, kisebb számítási igénnyel diagonalizálható a spinrendszer a sajátenergiáira. Kitérek azokra a rendszerekre, amelyek nem megoldhatóak tetszőleges L hosszúságú láncokra, viszont bizonyos méretig és kombinációkra még igen. Megmutatom a hasonlósági transzformáció hasznát a Jordan-Wigner-transzformálhatóságban. Ez azt jelenti, hogy a H elforgatható U unitér operátorokkal $UHU^\dagger$ formában anélkül, hogy az megváltoztatná a rendszer sajátenergiáit. A példáim sok esetben visszavezethetőek az Ising kvantum spinláncra. Ez utóbbi az egyszerű, 1 dimenziós láncra utal, melynek algebrája a $\{h_j, h_{j+1}\} = 0$ és $[h_j, h_k] = 0$, ha $|j - k| > 1$. Az eredményem segíthet annak megértésében, hogy meddig terjeszthető ki a Jordan-Wigner keretrendszere a szabad fermionos soktest-problémákra.

1. Bevezetés

A dolgozatom témája kölcsönható spinláncokon alapszik. Ezek egy 1 dimenziós diszkrét téren hatnak, ahol egy homogén, úgynevezett vákuumban egy gerjesztés jelenthet részecskét. A spinek állapotai $|\uparrow\rangle$ fel- és $|\downarrow\rangle$ le spinek lehetnek, ahol

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

A matematikai formalizmus, melyre erősen támaszkodni fogok, az a mátrixalgebra, ezen belül is fontos alapját képezi a Pauli-operátorok behozatala. Ezen három mátrix:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\{X, Y\} = \{Y, Z\} = \{Z, X\} = 0 \quad (3)$$

Ezekből össze lehet rakni tenzorszorzásokkal úgynevezett Pauli-láncokat. Ennek jelölése az alábbi lehet például:

$$X_i Y_j Z_k \quad (4)$$

Ez tömören azt jelöli, hogy 2x2-es mátrixok egy láncban össze vannak tenzorszorozva. A megjelölt példa nem feltétlenül csak a három tag tenzorszorzatainak az egymásutánjára utalhat. A teljes kiírása ennek:

$$\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \dots \otimes X \otimes \dots \otimes Y \otimes \dots \otimes Z \otimes \dots \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \quad (5)$$

ahol X az i , Y a j és Z a k rácsponton található, a többi pontban pedig $\mathbb{I}$ identitásoperátorok szerepelnek. Egyetlen Pauli vagy identitás 2 dimenziós. Ha egy L hosszú Pauli-láncot tekintünk, akkor a tenzorszorzataikból adódóan, egy ilyen lánc dimenziója exponencializálódni fog. Fontos lesz tisztázni még néhány alapfogalmat, ami szükséges lesz a későbbiekben. A láncokat alkotó operátorok és maguk a láncok mind hermitikusak és négyzetre emelve az identitást kell kapni.

$$(h_\alpha)^\dagger = h_\alpha, (h_\alpha)^2 = \mathbb{I} \quad (6)$$

Két Pauli-lánc h_α és h_β kommutációs relációk jelölése rendre a kommutátor és az antikommütátor:

$$[h_\alpha, h_\beta] = h_\alpha h_\beta - h_\beta h_\alpha = 0 \quad (7)$$

$$\{h_\alpha, h_\beta\} = h_\alpha h_\beta + h_\beta h_\alpha = 0 \quad (8)$$

Ezen kommutációs relációk szemléltetésére alkalmas az alábbi három lánc, melyek egyike antikommutál és kommutál két másik láncsal. A szemléletes magyarázata az alábbi relációknak az az, hogy a Pauli-operátorok csak az azonos rácsponton tudnak antikommutálni egymással. Az üres rácspont pedig kommutál a másikkal, mivel azon az identitás hat. A teljes lánc, akkor antikommutál a másikkal, ha páratlan számú antikommutálás van a rácspontjaik közt, és kommutál, ha nulla vagy páros számú antikommutálás van köztük:

$$[X_1 Z_2, Y_1 Y_2 Y_3] = 0 \quad (9)$$

$$\{X_1 Z_2, Y_1 Y_3\} = 0 \quad (10)$$

1.1. Dirac-fermion

A spinrendszereken lévő állapotok léptetésére szolgáló operátorok a c_j és $c_j^\dagger$ Dirac-fermionok, ahol $j = 1, \dots, n$. Ezek a fermionok nem hermitikusak, mivel az adjungáltja egy ellenkező hatást ér el, szemben az eredetivel. A fermionok antikommutációs relációk:

$$\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk} \quad (11)$$

A kétállapotú rendszerekre az operátorok úgy hatnak, hogy a c a le spinből fel spint, a $c^\dagger$ a fel spinből le spint csinál.

$$c |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad (12)$$

$$c^\dagger |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad (13)$$

Mivel a rendszer a nevéből is fakadóan kétállapotú, így azokon kívül nincs több, tehát ha egy felfelé léptető operátort hattatok egy fel spinre és egy lefelé léptetőt egy le spinre, akkor a nullvektort kapom meg

$$c^2 |\downarrow\rangle = |0\rangle \quad (14)$$

$$(c^\dagger)^2 |\uparrow\rangle = |0\rangle \quad (15)$$

A fermionok reprezentációi:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

1.2. Majoranna-fermion

A dolgozatom lényegi része a majoranna-fermionokat fogja használni, így ezt fontos megemlíteni, bevezetni. Ezeknek az operátoroknak teljesíteniük kell a feltételeket, hogy hermitikusak, azaz $(\chi_k)^\dagger = \chi_m$, négyzetre emelve az identitást adja ki, $(\chi_k)^2 = \mathbb{I}$ és a halmaz minden tagja antikommutál egymással, vagyis

$$\{\chi_k, \chi_l\} = 2\delta_{kl} \quad (17)$$

teljesül, ahol $k = 1, \dots, N$. Összefüggésbe hozva a Dirac-fermionokkal, j és az k index között egy 2-es faktor van, tehát $N = 2n$.

1.3. Jordan-Wigner-transzformáció

Az úgynevezett Jordan-Wigner-transzformáció Pascual Jordan és Wigner Jenő nevéhez fűződik. Ez spint leképezi fermionikus teremtő és annihiláló operátorokra, amit ők eredetileg így vezettek be [4]. Tegyük fel, hogy van egy gráf, melynek pontjai egy-egy h_j Hamilton-sűrűség operátorra utalnak, ahol $j = 1, \dots, N$ jelöli a gráf egy pontját. A Hamilton-operátor így tehát kifejezhető, mint

$$H = \sum_{j=1}^N \alpha_j h_j \quad (18)$$

ahol az α_j egy adott együttható, de ez választható 1-nek. A Jordan-Wigner-transzformálhatóságban az az alpja, hogy a h -k felírhatóak χ -ben másodrendben, például $h_j = \alpha \chi_k \chi_l$. Ha ebből kiindulunk, hamar rájöhethetünk, hogy pontosan mi is lesz a H

$$H = \sum_{j,k=1}^M \chi_j \chi_k C_{jk} \quad (19)$$

ahol az indexek futnak $j, k = 1, \dots, M$ -ig, C_{jk} egy $M \times M$ -es mátrix egy jk . eleme a mátrixban, ami azt adja meg, hogy milyen $\chi_j \chi_k$ indexűek az egyes tagok a Hamiltonban és mellette milyen együttthatóval rendelkeznek. Most vezessünk be egy adott reprezentációt a χ fermionokra:

$$\chi_{2j-1} = \left(\prod_{k=1}^{j-1} Z_k \right) X_j, \quad \chi_{2j} = \left(\prod_{k=1}^{j-1} Z_k \right) Y_j \quad (20)$$

Ennek a formája analóg a Jordan-Wigner-transzformációval, ami szerint a c_j és $c_j^\dagger$ Dirac-fermionok vannak ilyen formában felírva: $c_j = \left(\prod_{k=1}^{j-1} Z_k \right) \sigma_j^-$ $c_j^\dagger = \left(\prod_{k=1}^{j-1} Z_k \right) \sigma_j^+$ Ez egy hű reprezentáció, mivel tetszőleges χ -k összesorzásából nem lehet az $\mathbb{I}$ identitás. A kvantummechanikában az operátorok, a fizikai mennyiségek mind hermitikusak, ezzel biztosítva azt, hogy azok sajátértékei valós számok lesznek. Tehát egy fizikai mennyiség az egy hermitikus operátor, a sajátértékei a lehetséges értékei a mennyiségnek és a sajátvektorok a lehetséges állapotai. A következő számolásban kihasználom, hogy a H Hamilton-operátor is hermitikus, majd megnézem, hogy ebből mi jön ki a C mátrixra.

$$H = H^\dagger = \sum_{j,k}^N \chi_k^\dagger \chi_j^\dagger C_{jk}^* = - \sum_{j,k}^N \chi_j^\dagger \chi_k^\dagger C_{jk}^* \quad (21)$$

$$\sum_{j,k}^N (\chi_k^\dagger \chi_j^\dagger + \chi_j^\dagger \chi_k^\dagger) C_{jk}^* = \sum_{j,k}^N \{\chi_k^\dagger, \chi_j^\dagger\} C_{jk}^* = \sum_{j,k}^N \{\chi_k, \chi_j\} C_{jk}^* = 0 \quad (22)$$

Kihasználva, hogy a majoranna-fermionok egymással antikommutának, ha $j \neq k$, és kommutálnak, ha $j = k$, tehát így kijöhet, hogy a $C_{jj} = 0$. És mivel az elején feltettük, hogy hermitikus az operátor, így azt az egyenlőséget kapjuk, hogy

$$\sum_{j,k}^N \chi_j \chi_k C_{jk} = - \sum_{j,k}^N \chi_j \chi_k C_{jk}^* \quad (23)$$

amelyből leolvasható a C -re vonatkozó összefüggés:

$$C_{jk}^* = -C_{jk} \quad (24)$$

Tehát a C mátrix szükségszerűen tisztán képzetes, hermitikus is $C^\dagger = C$, ami várható volt $H^\dagger = H$ felírásakor.

1.4. A Dirac-fermionokra vonatkozó összefüggések

Most felhasználok a Dirac-fermion is, amit ezúttal ψ -vel fogok jelölni. Átszámolva a Majoranna-fermionról a Dirac-fermionra, az kapható, hogy az utóbbi kifejezhető az előbbi lineáris kombinációjaként a

$$\psi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_j \quad (25)$$

alakban, ahol α_j egy $\mathbb{C}$ szám. Ez egy léptető operátor, az energiaszinteket léptetheti, tehát ha $H|\phi_0\rangle = E_0|\phi_0\rangle$ (ez legyen az alapállapot), tegyük fel, hogy

$$H(\psi|\phi_0\rangle) = (E_0 + \epsilon)\psi|\phi_0\rangle \quad (26)$$

Ez tovább egyenlő

$$= (\psi H + \epsilon \psi) |\phi_0\rangle = H \psi |\phi_0\rangle \quad (27)$$

amelyből az alábbi összefüggésre lehet jutni:

$$[H, \psi] = \epsilon \psi \quad (28)$$

Ebből természetesen ki lehet számolni tetszőleges számú egymásutáni hatás energiaszintjét. A $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$ egyenletből fogok kiindulni, ahol az egyes tagok az n . energiszintre és állapotba gerjesztődtek.

$$H(\psi^n |\phi_0\rangle) = (E_0 + n\epsilon) \psi^n |\phi_0\rangle \quad (29)$$

Beazonosítható, hogy $|\phi_n\rangle = \psi^n |\phi_0\rangle$ és $E_n = E_0 + n\epsilon$. Könnyen belátható a (28) képlet segítségével, hogy ez működik. A (28)-ra és a (19)-re vonatkozó összefüggést felhasználva hogy függhet össze a C mátrix az ϵ gerjesztéssel.

$$\left(\sum_{j,k}^N \chi_j \chi_k C_{jk} \right) \left(\sum_m^N \alpha_m \chi_m \right) - \left(\sum_m^N \alpha_m \chi_m \right) \left(\sum_{j,k}^N \chi_j \chi_k C_{jk} \right) \quad (30)$$

$$= \sum_{jkm}^N \alpha_m (\chi_j \chi_k \chi_m - \chi_m \chi_j \chi_k) C_{jk} = \sum_{jkm}^N \alpha_m [\chi_j \chi_k, \chi_m] C_{jk} \quad (31)$$

A szumma belsejében lévő rész 0 lesz, ha $m \neq j, k$, ugyanis mivel a χ_m mindkét taggal antikommutál, a szorzatukkal már kommutál. A másik két eset, amikor $m = j$ vagy $m = k$, akkor

$$[\chi_j \chi_k, \chi_j] = -2\chi_k, [\chi_j \chi_k, \chi_k] = 2\chi_j \quad (32)$$

Ezt behelyettesítve és az $m \neq j, k$ -t felhasználva az egyenlet úgy módosul, hogy

$$= \sum_{jk}^N 2(\alpha_k \chi_j - \alpha_j \chi_k) C_{jk} \quad (33)$$

Végrehajtva egy j, k indexcserét, a $\alpha_j \chi_k = -\alpha_k \chi_j$, amit pedig visszahelyettesítve az egyenletbe

$$4 \sum_{jk}^N \alpha_k \chi_j C_{jk} = \epsilon \sum_m^N \alpha_m \chi_m \quad (34)$$

$$C_{jk} = \frac{\epsilon}{4} \quad (35)$$

Mivel a mátrix $C_{jk} = -C_{kj}$ antiszimmetrikus, ezért az ϵ_i sajátértékeihez is tartoznak $-\epsilon_i$ sajátértékek. Áttérek most az ϵ -ról a λ -ra, majd ennek megfelelően újból felírom a (28) egyenletet.

$$[H, \psi_\lambda] = \lambda \psi_\lambda \quad (36)$$

Minden λ -hoz tartozik egy neki megfelelő $-\lambda$, és a (36) teljesül minden sajátértékre, emellett tegyük fel, hogy N különböző $\psi_{\pm\lambda}$ van, tehát a ψ_λ -ból és a $\psi_{-\lambda}$ -ból is fejenként $N/2$ van, ami egész, így N páros kell, hogy legyen.

1.4.1. A ψ_λ fermionok kommutációs relációi

Mielőtt elkezdeném vizsgálni, bemutatom az antikommutációs relációkat, majd a (25) és (36) egyenletek segítségével belátom őket, és általánosítom az eddig bevezetett összefüggéseket.

$$\{\psi_{\pm\lambda}, \psi_{\pm\mu}\} = 0 \quad (37)$$

$$\{\psi_\lambda, \psi_{-\mu}\} = \delta_{\lambda\mu}(\dots) \quad (38)$$

Az utóbbi még egy ismeretlen szorzófaktorral, ami majd a tényleges számolás elvégzéséből következik. Először be szeretném látni, hogy $\{\psi_\lambda, \psi_\lambda\} = 2 \sum_j \alpha_j^2 = 0$.

$$\{\psi_\lambda, \psi_\lambda\} = 2\psi_\lambda^2 = \sum_{j,k}^N \alpha_j \alpha_k (\chi_j \chi_k + \chi_k \chi_j) = \sum_{j,k}^N \alpha_j \alpha_k (2\delta_{jk}) = 2 \sum_j^N (\alpha_j)^2 \mathbb{I} \quad (39)$$

Most veszem a (36)-ot, beszorzom egyszer balról, másodszor jobbról ψ -vel, és ezt a kettőt összeadom:

$$\psi H \psi - \psi^2 H = \lambda \psi^2 \quad (40)$$

$$H \psi^2 - \psi H \psi = \lambda \psi^2 \quad (41)$$

$$H \psi^2 - \psi^2 H = [H, \psi^2] = 2\lambda \psi^2 \quad (42)$$

Látható, hogy a kommutátor 0 lesz abból eredően, hogy $[A, \mathbb{I}] = 0$ tetszőleges A operátorra. Ebből pedig az következik, hogy maga $\psi^2 = 0$, ami nem meglepő, ugyanis ez kiléptet a térből, 0-t adva ezzel. Ezzel beláttam, hogy

$$2 \sum_j (\alpha_j)^2 = 0 \quad (43)$$

Következhet $\{\psi_\lambda, \psi_\mu\} = 0$ összefüggés bizonyítása. Ezesetben is kapható egy hasonló összefüggés és ugyanilyen módszerrel:

$$[H, \{\psi_\lambda, \psi_\mu\}] = (\lambda + \mu) \{\psi_\lambda, \psi_\mu\} \quad (44)$$

$$\{\psi_\lambda, \psi_\mu\} = \psi_\lambda \psi_\mu + \psi_\mu \psi_\lambda = \sum_{j,k}^N \alpha_j \beta_k (\chi_j \chi_k + \chi_k \chi_j) = \sum_{j,k}^N \alpha_j \beta_k \delta_{jk} \mathbb{I} = \sum_j^N \alpha_j \beta_j \mathbb{I} \quad (45)$$

Ugyanazzal az érveléssel élve, a kommutátor itt is $[H, \{\psi_\lambda, \psi_\mu\}] = 0$ lesz, ebből pedig következik, hogy

$$\{\psi_\lambda, \psi_\mu\} = 0 \quad (46)$$

Jöhet az utolsó antikommutációs reláció, mikor az eredmény nem 0. Ezt csak arra az esetre látom be, mikor $\delta_{\lambda\mu} = 1$, azaz $\lambda = \mu$. Egy kis alakítgatással, kijön, hogy

$$\psi_\lambda \psi_{-\lambda} = \sum_{j,k}^N \alpha_j \alpha_k^* \chi_j \chi_k = \sum_{j=k}^N |\alpha_j|^2 + \sum_{j>k}^N (\alpha_j \alpha_k^* - \alpha_j^* \alpha_k) \chi_j \chi_k \quad (47)$$

$$\psi_{-\lambda} \psi_\lambda = \sum_{j,k}^N \alpha_j \alpha_k^* \chi_k \chi_j = \sum_{j=k}^N |\alpha_j|^2 - \sum_{j>k}^N (\alpha_j \alpha_k^* - \alpha_j^* \alpha_k) \chi_j \chi_k \quad (48)$$

$$\{\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}\} = 2 \sum_j^N |\alpha_j|^2 \quad (49)$$

1.5. A $[\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}]$ kommutátor és a kapcsolata a projektorfelbontással

Ebben a részben bemutatom a H Dirac-fermionos felírását, ebből visszaírom a Majoranna-fermionos felírásra, azzal a céllal, hogy megmutathassam, hogyan köti össze a két felírást a projektorfelbontás. Ehhez a $\mathbb{C}$ sajátérték-egyenletéből és az új H Hamilton-operátorból fogok kiindulni:

$$C\alpha = \Lambda\alpha, \quad C\alpha^* = -\Lambda\alpha^* \quad (50)$$

$$H = \sum_{j=1}^{N/2} \frac{\lambda_j}{2} [\psi_{\lambda_j}, \psi_{-\lambda_j}] \quad (51)$$

Mielőtt ezt megtenném, definiálom a

$$\mathcal{Z}_\lambda = \frac{1}{2} [\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}] \quad (52)$$

operátort és annak tulajdonságait, emellett a kommutációs relációit bemutatom. Négyzetre emelve a $\mathcal{Z}$ tagot és kibontva a definíciója szerint, azt kapom, hogy

$$\mathcal{Z}_\lambda^2 = \frac{1}{4} (\psi_\lambda \psi_{-\lambda} \psi_\lambda \psi_{-\lambda} - \psi_\lambda \psi_{-\lambda} \psi_{-\lambda} \psi_\lambda - \psi_{-\lambda} \psi_\lambda \psi_\lambda \psi_{-\lambda} + \psi_{-\lambda} \psi_\lambda \psi_{-\lambda} \psi_\lambda) \quad (53)$$

$$= \frac{1}{4} (\psi_\lambda \psi_{-\lambda} \psi_\lambda \psi_{-\lambda} + \psi_{-\lambda} \psi_\lambda \psi_{-\lambda} \psi_\lambda) = \frac{1}{4} (\psi_\lambda \{\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}\} \psi_{-\lambda} + \psi_{-\lambda} \{\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}\} \psi_\lambda) \quad (54)$$

$$= \frac{1}{2} (\psi_\lambda \psi_{-\lambda} + \psi_{-\lambda} \psi_\lambda) = \frac{1}{2} \{\psi_\lambda, \psi_{-\lambda}\} = \mathbb{I} \quad (55)$$

vagyis a $\mathcal{Z}_\lambda$ sajátértékei ± 1 . Továbbá érvényes

$$[\mathcal{Z}_\lambda, \mathcal{Z}_\mu] = 0 \quad (56)$$

Most származtatom az eredményt adott j -re, tehát ez úgy fog kinézni, hogy

$$\frac{\lambda_j}{2} [\psi_{\lambda_j}, \psi_{-\lambda_j}] = \frac{\lambda_j}{2} \left[\sum_{p,q}^N (\alpha_{\lambda_p} \alpha_{-\lambda_q} - \alpha_{-\lambda_p} \alpha_{\lambda_q}) \chi_p \chi_q \right] \quad (57)$$

p és q cseréjére antiszimmetrikus, tehát az egyenlet módosul

$$\lambda_j \left[\sum_{p,q}^N \alpha_{\lambda_p} \alpha_{-\lambda_q} \chi_p \chi_q \right] = \sum_{p,q}^N \chi_p \chi_q C_{pq} \quad (58)$$

Látható, hogy az α -s tag az a sajátmódusok projektorfelbontása, a C felbontása ($C_{pq} = \lambda_j \alpha_{\lambda_p} \alpha_{-\lambda_q}$). Tehát a Hamilton felírható, mint

$$H = \sum_{j=1}^N \lambda_j |\alpha_j\rangle \langle \alpha_j| \quad (59)$$

1.6. Az Ising-modell diagonalizálása

Az Ising kvantum spinlánc 1 dimenzióban a legegyszerűbb Jordan-Wigner-transzformálható spinrendszer. Az algebra, ami definiálja őt a h_j Hamilton-sűrűség operátorokkal felírva a következő:

$$(h_j)^\dagger = h_j, \quad (h_j)^2 = \mathbb{I} \quad (60)$$

$$\{h_j, h_{j+1}\} = 0 \quad (61)$$

$$[h_j, h_k] = 0, |j - k| > 1 \quad (62)$$

Tehát a rendszer kielégíti a kauzalitás elvét, ami a többi spinláncra is teljesül. A lánc minden pontja egy adott $|\downarrow\rangle$ vagy $|\uparrow\rangle$ állapotban van, emellett mindegyikhez tartozik egy Z_j operátor, és a köztes tag az $X_j X_{j+1}$. Az Ising-modell [6] Hamilton-operátora a következőképpen fog kinézni:

$$H = \sum_j^N h_j = \sum_{j=1}^{N-1} -i\chi_j \chi_{j+1} \quad (63)$$

ahol a $-i$ faktor a C_{jk} mátrix hermitikus voltából jön be. Tehát ebből a C mátrix felírása kikövetkeztethető:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i & \cdots & \cdots & 0 \\ i & 0 & -i & & \vdots \\ \vdots & i & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

A mátrix sajátértékei még nem a rendszer keresett sajátenergiái, hanem λ_j sajátértékek. Mivel a rendszer szabad fermionos, így az energiák értékei

$$E = \sum_j \pm \lambda_j \quad (65)$$

alakban megkaphatóak, és ezzel diagonalizálható a rendszer. Ha a (63) egyenletre alkalmazom a Jordan-Wigner-transzformációnál említett hű reprezentációt, akkor a H felírása:

$$H = \sum_{j=1}^L Z_j + \sum_{j=1}^{L-1} X_j X_{j+1} \quad (66)$$



ahol a χ operátorok N -ig futnak, ha a spinlánc $L = N/2$ hosszú. Ez látható a két szumma határaiból is. A kérdés, hogy egyeznek-e a két különbözőképpen számított sajátenergiák. A H egyszerű, numerikus diagonalizálása a (66) egyenlettel különböző L láncokra a következők:

$$L = 1 : E = \pm 1 \quad (67)$$

$$L = 2 : E = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.41 \quad (68)$$

$$L = 3 : E_1 = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2.24, E_2 = \pm 1 \quad (69)$$

$$L = 4 : E_1 = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \approx 2.73, E_2 = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \approx \pm 0.73 \quad (70)$$

Ezek az értékek a C mátrix diagonalizálásával is megvalósulnak, ha $E = \sum \pm \lambda_j$ teljesül. A C mátrixos módszer analitikus megoldása a sajátérték-egyenletből könnyen felírható tetszőleges k -ra.

$$C\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (71)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & \cdots & \cdots & 0 \\ i & 0 & -i & & \vdots \\ \vdots & i & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ \vdots \\ v(N) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ \vdots \\ v(N) \end{pmatrix} \quad (72)$$

Ebből adott k -ra, amire érvényes, hogy $1 \leq k \leq N$, kapok egy

$$v(k+1) - v(k-1) = i\lambda v(k) \quad (73)$$

alakú egyenletet a sajátértékre, ahol

$$v(0) = v(N+1) = 0 \quad (74)$$

A megoldást $v(k) = \sin(pk)$ alakban kell keresni. A p együttható meghatározható az $v(N+1)$ határfeltételéből.

$$\sin(p(N+1)) = 0, \quad p = \frac{\pi}{N+1} \quad (75)$$

1.6.1. Az 1 részecskés állapotfüggvény

Egydimenziós spinláncok esetén a részecske egy eltérés vagy szebben, egy gerjesztés a tér, lánc többi részéhez képest. A le spinek jelentsék a vákuumot, ahol nincs részecske, és a részecske legyen a fel spin. Mivel a részecske a definiált tér minden pontjában lehet, minden ilyen állapotot szuperponálok.

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^L f(j) |\downarrow \downarrow \dots \uparrow \dots \downarrow \downarrow\rangle = \sum_{j=1}^L f(j) |j\rangle \quad (76)$$

ahol a részecske a j . helyen van, ilyenkor ott fel spin lesz. Továbbá ha feltételezzük, hogy 1 részecske van a spinláncon, akkor az valahol biztos lesz a láncon, így a teljes valószínűség $P = 1$:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{j=1}^L |f(j)|^2 = 1 \quad (77)$$

$$X_j = \sigma_j^+ + \sigma_j^-, \quad Y_j = -i\sigma_j^+ + i\sigma_j^- \quad (78)$$

Ebből a Hamilton a jobbra-balra mozgató operátorokkal kifejezve az XY modellből kiindulva:

$$H_{XY} = \sum_{j=1}^{L-1} (X_j Y_{j+1} - Y_j X_{j+1}) = 2i \sum_{j=1}^{L-1} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- - \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) \quad (79)$$

Ezt fogom hattatni a $|\psi\rangle$ állapotra, ami az 1 részecskés, L hosszú spinlánc általános hullámfüggvénye. Vagyis ebből megkapom a $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ Schrödinger-egyenletet.

$$= 2i \left(\sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- - \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \right) \left(\sum_{k=1}^L f(k) |k\rangle \right) = 2i \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{k=1}^L f(k) (\delta_{j+1,k} |k-1\rangle - \delta_{jk} |k+1\rangle) \quad (80)$$

$$= 2i \sum_{j=1}^{L-1} f(j+1) |j\rangle - f(j) |j+1\rangle \quad (81)$$

Ezt beszorozva egy duális $\langle k|$ egységvektorral balról, ezt kapom a fent említett Schrödinger-egyenletre:

$$\langle k|H|\psi\rangle = 2i(f(k+1) - f(k-1)) = Ef(k) \quad (82)$$

Ezt megoldva, megtalálhatóak az E sajátenergiák. Az előző részben ugyanilyen alakú karakterisztikus egyenlet jelenik meg. Az XX modellnél ezt ugyanúgy végig lehet vezetni, ha felírjuk a Hamiltont [5]:

$$H_{XX} = \sum_{j=1}^{L-1} (X_j X_{j+1} + Y_j Y_{j+1}) \quad (83)$$

1.6.2. S_z Spinoperátor

A spinrendszerekben az egyes spin állapotok lét különböző állapotot vehetnek fel. A spinoperátornak ezek a sajátállapotai. A z irányú spinoperátor:

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L Z_j \quad (84)$$

melynek a kommutációs relációi egymással (permutációval megkapható a másik kettő kommutációs reláció is):

$$[S_x, S_y] = -iS_z \quad (85)$$

Veszek egy Hamiltont, ami teljesíti, hogy Ising és az alábbi formát veszi fel, emellett legyen periodikus:

$$H = \sum_{j=1}^{L-1} (X_j Y_{j+1} - Y_j X_{j+1}) \quad (86)$$

$$X_{L+1} = X_1, Y_{L+1} = Y_1 \quad (87)$$

A spinoperátor egy fizikai mennyiség, melynek sajátértékei megadják a lehetséges értékeit ugyanúgy, mint a Hamilton-operátor esetén. A Heisenberg-képben nem a $|\psi\rangle$ állapotok változnak az időben, hanem a rendszer Hilbert-téren ható operátorai, fizikai mennyiségei. Eszerint egy adott fizikai mennyiség időderiváltja függ annak és Hamiltonnak a kommutátorától:

$$\frac{d}{dt} S_z = i[H, S_z] \quad (88)$$

Ki fog számolni az egyenlet jobbi oldalát, kiderítve, hogy S_z megmaradó mennyiség lesz-e.

$$[H, S_z] = \left[\sum_{j=1}^{L-1} (X_j Y_{j+1} - Y_j X_{j+1}), \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L Z_k \right] \quad (89)$$

$$\left[X_j Y_{j+1}, \frac{1}{2} Z_k \right] = \delta_{jk} (X_j Z_k) Y_{j+1} + \delta_{j+1,k} X_j (Y_{j+1} Z_k) = i(Y_j Y_{j+1} + X_j X_{j+1}) \quad (90)$$

$$\left[-Y_j X_{j+1}, \frac{1}{2} Z_k \right] = -\delta_{jk} (Y_j Z_k) X_{j+1} + -\delta_{j+1,k} Y_j (X_{j+1} Z_k) = -i(Y_j Y_{j+1} + X_j X_{j+1}) \quad (91)$$

Látható, hogy a kommutátorok kiejtik egymást, nullát hagyva az egész kommutátorból. Tehát a spinoperátor egy megmaradó mennyiség, feltéve, hogy teljesül az explicit időderiváltra vonatkozó összefüggés, miszerint $\frac{\partial}{\partial t} S_z = 0$.

$$[H, S_z] = 0 \quad (92)$$

2. A 2-es szomszédságú algebra spinrendszerei

Az Ising-modell Hamiltonjának gráfjában csak a szomszédos tagok antikommutálnak. A következőkben tárgyalt spinrendszer esetén viszont nemcsak a szomszédos csúcsok, hanem az amelletti pontok is antikommutálnak egymással.

$$\{h_j, h_{j+1}\} = \{h_j, h_{j+2}\} = 0 \quad (93)$$

$$[h_j, h_k] = 0, \quad |j - k| > 2 \quad (94)$$

Emellett teljesülnie kell a következő feltételeknek is, ahogy az Ising-modellben is.

$$(h_j)^2 = \mathbb{I} \quad (95)$$

$$h_j^\dagger = h_j, \quad (96)$$

2.1. Általános megoldás $|j - k| > 2$ algebrán

A következőkben kiszámoljuk a

$$H = \sum_{j=1}^L h_j \quad (97)$$

rendszer sajátenergiáját különböző reprezentációkat használva, de előtte reprezentációtól független formában fogom megtenni. Vegyük az $L = 5$ esetet:

$$H = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 \quad (98)$$

Négyzetre emelve és kihasználva feljebb említett összefüggéseket:

$$H^2 = 5I + 2(h_1h_4 + h_1h_5 + h_2h_5) \quad (99)$$

Észrevehető, hogy még egyszer négyzetre emelve, ugyanilyen alakra juthatunk, így eltávolíthatjuk a nem kívánatos tagokat:

$$H^4 = 37I + 20(h_1h_4 + h_1h_5 + h_2h_5) \quad (100)$$

$$H^4 - 10H^2 + 13I = 0 \quad (101)$$

Ezt a nullooperátort hattatva egy $|\psi\rangle$ állapotra és felhasználva a Schrödinger-egyenletet azt kapjuk, hogy:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (102)$$

Ezt és az operátorok linearitását kihasználva tehát

$$E^4 - 10E^2 + 13 = 0 \quad (103)$$

Ezen karakterisztikus egyenlet megoldásai:

$$E = \sqrt{5 \pm 2\sqrt{3}} \approx \pm 2.909, \pm 1.239 \quad (104)$$

Tehát ezt a rendszert a reprezentációtól függetlenül ezek a sajátenergiák jellemzik. Ez semmit nem mond a rendszer dimenziójáról és a degenerációkról sem.

2.2. Jordan-Wigner-transzformáció a 2-es szomszédos algebra esetén

A Jordan-Wigner-transzformálhatóságnak a feltétele, hogy a Hamilton kifejezhető legyen a χ szerint másodrendben úgy, hogy közben az adott algebrára vonatkozó szabályok, feltételek nem sérülnek. Vizsgálódásaim azt mutatták, hogy ezzel a szabályszerűségekkel rendelkező spin-rendszer $L = 5$ -ig Jordan-Wigner, ugyanis a h_j -k már nem lesznek felírhatóak másodrendben $j > 5$ esetén. A Hamilton-sűrűség operátorok másodrendben kifejezve

$$h_1 = -i\chi_1\chi_2, h_2 = -i\chi_2\chi_3, h_3 = -i\chi_3\chi_4, h_4 = -i\chi_4\chi_5, h_5 = -i\chi_5\chi_6 \quad (105)$$

A χ_j fermionok $j = 1, \dots, M$ -ig futnak, ahol M rendszertől függően van meghatározva.

$$H = \sum_{j,k=1}^M \chi_j \chi_k C_{jk} \quad (106)$$

A reprezentáció, amit felhasználok a sajátenergiák numerikus kiszámolásához, a bevezetőben is felhasználtam:

$$\chi_1 = X_1, \chi_2 = Y_1, \chi_3 = Z_1X_2, \chi_4 = Z_1Y_2, \chi_5 = Z_1Z_2X_3 \quad (107)$$

A megadott fermionokat behelyettesítve a h_j sűrűségekbe, megkapom, hogy

$$h_1 = Z_1, h_2 = X_1X_2, h_3 = X_1Y_2, h_4 = Z_2, h_5 = X_2X_3 \quad (108)$$

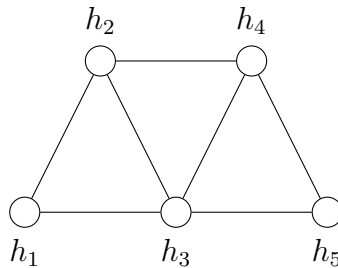
Most vegyünk egy adott reprezentációt, amely kielégíti a 2-es szomszédságú rendszert. Könnyen látható ennél a reprezentációnál [3]:

$$h_1 = Z_1, h_2 = X_1Z_2, h_3 = X_1X_2Z_3, h_4 = X_2X_3Z_4, h_5 = X_3X_4Z_5 \quad (109)$$

Ezen jól látható, hogy még 2-vel arrébb is antikommütálnak, viszont 3-mal már kommutálnak. Tehát van két Hamilton-operátorom, amelyek mind teljesítik az algebra követelményeit:

$$H_{\text{Jordan-Wigner}} = Z_1 + X_1X_2 + X_1Y_2 + Z_2 + X_2X_3 \quad (110)$$

$$H_{\text{Fendley}} = Z_1 + X_1Z_2 + X_1X_2Z_3 + X_2X_3Z_4 + X_3X_4Z_5 \quad (111)$$



A sajátértékeket numerikusan számolva, kijön az előző fejezetben meghatározott eredmény. Azonban itt degenerációk lépnek fel. A Jordan-Wigner reprezentációját használva a négy különböző sajátérték egyenként kétszer jelenik meg, 8 sajátérték lesz. Az H_{Fendley} sajátértékei is ugyanezen értékek lesznek, itt viszont a degeneráció nagyobb. Egy sajátértékre 8 érték jut, tehát összesen 32 lesz. A degenerációk a dimenziószámból adódnak a következőképpen:

$$\text{deg} = \frac{2^{\dim}}{4} \quad (112)$$

2.3. Léptető operátoros felírás

Most induljunk ki abból, hogy a Pauli-operátorok felírhatóak léptető operátorok összegeként:

$$X_j = \sigma_j^+ + \sigma_j^-, Y_j = -i\sigma_j^+ + i\sigma_j^- \quad (113)$$

ahol

$$\sigma_j^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_j^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (114)$$

Definíció szerint a léptető operátorok úgy működnek, hogy

$$\sigma^+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \sigma^- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad (115)$$

$$\sigma^+ |\uparrow\rangle = |0\rangle, \sigma^- |\downarrow\rangle = |0\rangle \quad (116)$$

ahol a fel- és le vektorok:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (117)$$

Most tegyük fel, hogy a hullámfüggvény felírható fel- és le vektorok tenzorszorzatainak lineárkombinációjaként. Itt a részecske jelenti a fel- és az "üres tér" jelenti a le vektort. Vagyis a hullámfüggvény:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{L=5} f(j) |\downarrow \dots \uparrow \dots \downarrow\rangle = f(1) |\uparrow \downarrow \downarrow \downarrow\rangle + f(2) |\downarrow \uparrow \downarrow \downarrow\rangle + \dots + f(5) |\downarrow \downarrow \downarrow \uparrow\rangle \quad (118)$$

ahol legyen $|\downarrow \dots \uparrow \dots \downarrow\rangle = |j\rangle$. Ha erre hattatjuk a Hamiltont, a $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ alapján meghatározhatóak a rendszer sajátenergiái bizonyos esetekben. Azonban ez akkor oldható meg ténylegesen, ha a H a részecskét csak lépteti, és nem teremt vákuumból más részecskét, megszegve ezzel az energiamegmaradás elvét.

2.4. A C mátrixos módszer megoldása

A Jordan-Wigner-transzformálhatóság a Hamiltont bilineárisan felírva χ Majoranna-fermionokkal, a rendszer energiáinak meghatározása a $H = \sum_{j,k}^L C_{jk} \chi_j \chi_k$ -ban szereplő C mátrix diagonalizálásával végbevihető. A mátrix sajátértékeinek meghatározásából $\pm\lambda_j$ értékek jönnek ki páronként, azaz $+\lambda_j$ és $-\lambda_j$ értékek. Az energiát ezeknek az összege adja meg, vagyis

$$E = \sum_j \pm\lambda_j \quad (119)$$

Mivel a H -t leíró, C -t tartalmazó egyenletben a C_{lm} -nek (ahol l és m rögzített) akkor van nemnulla értéke, ha a H -ban megjelenik a másodrendű $h = \chi_l \chi_m$. Tehát a $(C)_{jk}$ komponens az

$$h_1 = -i\chi_1\chi_2, h_2 = i\chi_2\chi_3, h_3 = i\chi_2\chi_4, h_4 = -i\chi_3\chi_4, h_5 = i\chi_4\chi_5 \quad (120)$$

kifejezések alapján kell megalkotni.

$$C = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (121)$$

A sajátérték-egyenletet 0-ra rendezve.

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (122)$$

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0. \quad (123)$$

Ebből pedig a karakterisztikus egyenlete. A fenti nullmátrix determinánsa is nulla:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (124)$$

$$-\lambda^5 + 5\lambda^3 - 3\lambda = 0 \quad (125)$$

Ezen egyenlet megoldásai:

$$\lambda_0 = 0 \quad (126)$$

$$\lambda_1 = 0.835, \lambda_2 = 2.074 \quad (127)$$

$$-\lambda_1, -\lambda_2 \quad (128)$$

Látható, hogy a rendszer szabad fermionos, mivel párban vannak a sajátértékei, vagyis érvényesül a feljebb már említett szumma az energiára.

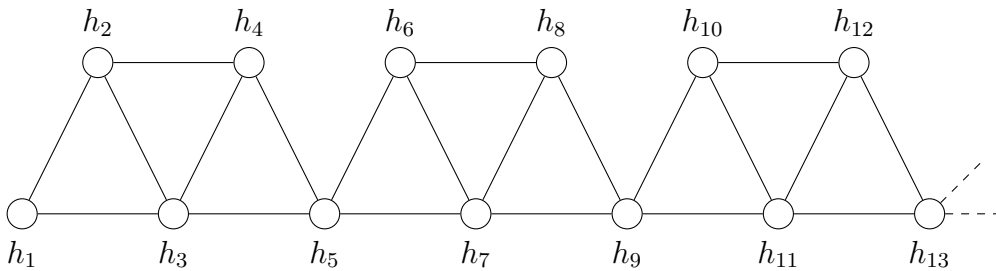
$$E = \sum_j \pm\lambda_j \quad (129)$$

Itt $j = 2$ -ig terjed, tehát fel kell szummázni őket előjelesen a λ_0 kivételével. Így adódnak a következők:

$$E_1^\pm = \pm(+\lambda_1 + \lambda_2) = \pm 2.909, E_2^\pm = \pm(-\lambda_1 + \lambda_2) \pm 1.239 \quad (130)$$

2.5. Az ilyen rendszerek láncolata

Az előzőekben azt vizsgáltam, hogy a 2-es szomszédos, $|j - k| > 2$ algebra milyen L -ig marad Jordan-Wigner-transzformálható, egzaktul megoldható a keretrendszert használva, azaz meddig írható fel a bilineáris fermionokkal nem sértve közben az algebra szabályait. Azonban mi van, ha sérül az algebra, vagyis teszek engedményeket. Az állítás az lesz, hogy mivel egy $L = 5$ -ös blokk Jordan-Wigner, azok összeillesztései is az lesz tetszőleges méretű lánc esetén.



Tehát azt kell balátzni, hogy például a h_5 illeszkedésnél teljesülhet-e a bilinearitás a megfelelőképpen. Az előző felírás szerint:

$$h_1 = i\chi_1\chi_2, h_2 = i\chi_2\chi_3, h_3 = i\chi_2\chi_4, h_4 = i\chi_3\chi_4, h_5 = i\chi_4\chi_5 \quad (131)$$

A következő két h_j operátort ($j = 6, 7$) úgy kell megválasztani, hogy mindkettőben szerepeljen a χ_5 , de alacsonyabb indexű ne. Tehát legyenek ezek

$$h_6 = i\chi_5\chi_6, h_7 = i\chi_5\chi_7 \quad (132)$$

Látható, hogy teljesítik a gráfon látható antikommutációs relációkat:

$$\{h_5, h_6\} = \{h_5, h_7\} = \{h_6, h_7\} = 0 \quad (133)$$

Innen már egyszerű megsejteni a többi tag fermionos felírását is. Az első blokkhoz fog hasonlítani, csak eltolva. Ezek pedig az alábbiak:

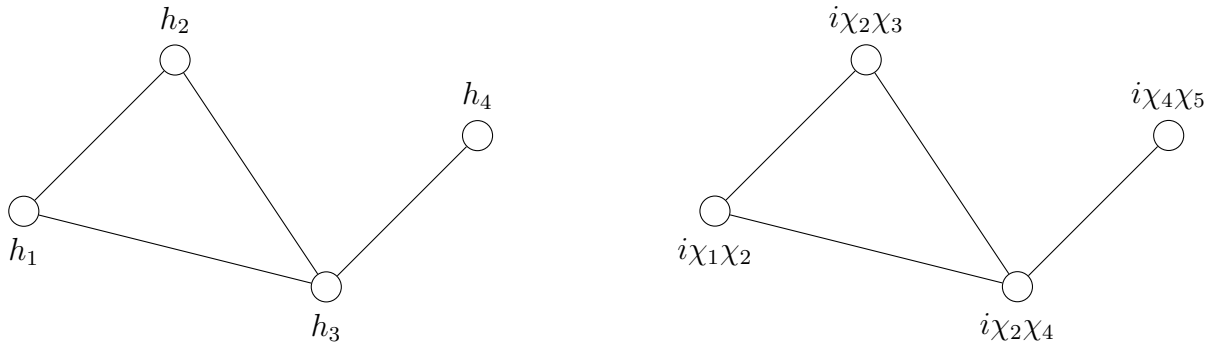
$$h_6 = i\chi_5\chi_6, \quad h_7 = i\chi_5\chi_7, \quad h_8 = i\chi_6\chi_7, \quad h_9 = i\chi_7\chi_8 \quad (134)$$

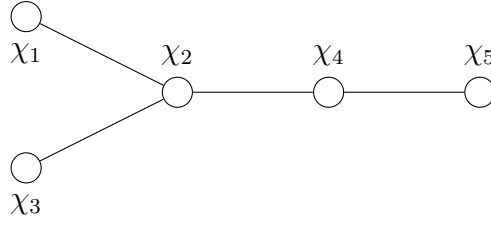
Ebből következik, hogy ez tetszőleges számú blokk esetén teljesül. A spinrendszer diagonalizálása természetesen a C_{jk} , dimenzióban lineáris mátrix segítségével lehetséges. A mátrix komponensei χ -k indexei szerint lesznek meghatározva:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -i & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (135)$$

3. Gráfelmélet és kapcsolata a Jordan-Wigner transzformálhatósággal

Ebben a részben arról lesz szó érintőlegesen, hogy milyen kapcsolat van a szabad fermionos rendszerek és a gráfelmélet között. Ennek alapja a frusztrációs gráf. A hálózat, avagy gráf megmondja az antikommutációs szerkezetét a spin Hamiltonnak, ahol az fel van írva, mint σ^j Pauli-láncok összessége. Először is legyen a Hamiltonnak egy frusztrációs gráfja a Pauli-operátorokkal kifejezve a h_j Hamilton-sűrűség operátorokat, melyek a csúcsok lesznek a gráfban, és köztük van él, ha az adott tagok antikommutálnak egymással. Most definiálom a gráfelmélet nyelvén, hogy mikor van szabad fermionos megoldása a Hamiltonnak. Veszem egy N hosszú lánc Hamilton-operátorát, melynek a frusztrációs gráfja egy másik gráf vonalgráfja, akkor létezik szabad fermionos megoldás. Ez valójában azt jelenti, amit a korábbi, Jordan-Wigner-transzformáció alfejezetben említettem, amely szerint a Majoranna-fermionokban bilineáris $H = \sum_j \chi_j \chi_k C_{jk}$ Hamiltonnak tehát van szabad fermionos megoldása. Egy egyszerű példán szemléltethető az áttérés a frusztrációs gráfról az élgráfra. Az alábbi három gráf, fent a frusztrációs gráf, alarra pedig az élgráf.





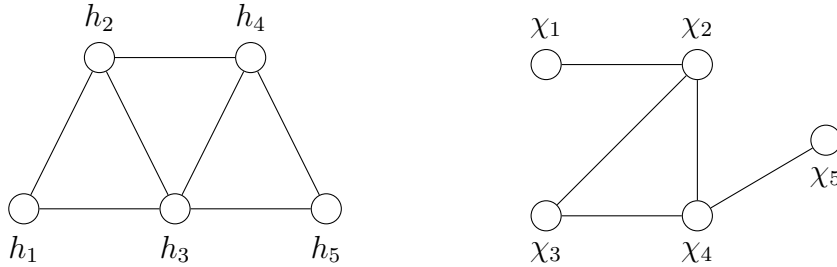
A leképezés a frusztrációs gráfról az élgráfra a csúcsokból éleket csinál. Az alsó ábrán az élek a megfelelő h_j operátorokat jelölik. Például ha $h_1 = i\chi_1\chi_2$, akkor a h_1 a χ_1 és a χ_2 csúcs közti él. He ez a leképezés teljesül egy adott gráfra, ami a Hamiltont modellezi, akkor az adott Hamilton Jordan-Wigner-transzformálható. Ez a bevezetőben említett Jordan-Wigner átfogalmazása.

3.1. Megengedett gráfok élgráfjai

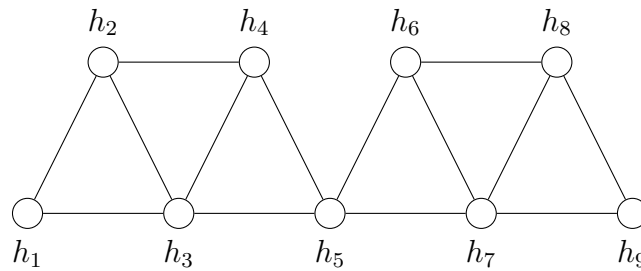
Ahogy a nevében is benne van, a megengedett gráfoknak van élgráfja. A következőkben a [2]-re hivatkozva bemutatok pár tiltott gráfot, és eddig vett megengedett gráfok élgráfjait. Ekkor a megfelelő Hamilton Jordan-Wigner-transzformálható. Az egyik és egyben legegyszerűbb Hamilton az Ising spinlánc. Alább ábrázolom a hozzá tartozó frusztrációs gráfot és a neki megfelelő élgráfot.

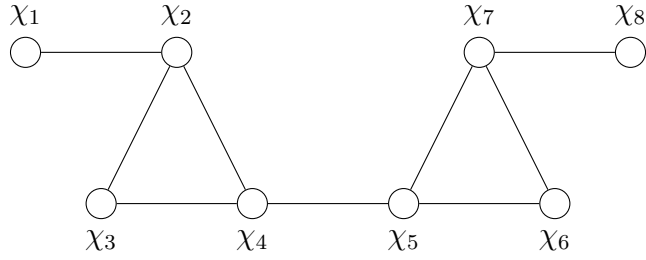


Az előző fejezetben szó volt a 2-es szomszédos algebráról és arról, hogy $L = 5$ -ig még megengedett gráfról van szó. Az előbbi cikk ábra szintjén említést tesz a tiltott gráfok szekcióban ugyanezen algebra $L = 6$ hosszú esetéről. Az alábbi ábrán látható az $L = 5$ eset frusztrációs gráfja és élgráfja. Ezzel belátható, hogy $L = 5$ -re a Hamilton Jordan-Wigner-transzformálható.



Az előző fejezet utolsó alfejezetében látható volt, hogy 5-ös blokkok összetevése is Jordan-Wigner, tehát ennek a rendszernek is van egy élgráfja. A frusztrációs gráf és a neki megfelelő élgráf:

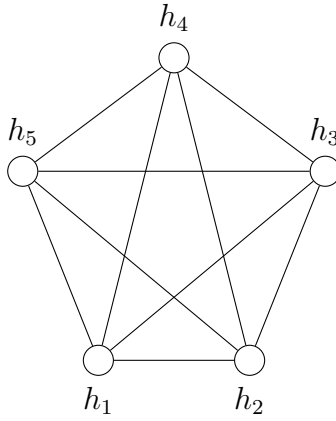




Érdekes eset lehet a teljes gráf. A teljes gráfban minden spin kölcsönhat minden másik spinnel, vagyis a frusztrációs gráfjában a h_j Hamilton-sűrűség operátorok mindegyike össze van kötve az összes többivel. Például ha $L = 5$, akkor a

$$H = \sum_{j=1}^5 h_j \quad (136)$$

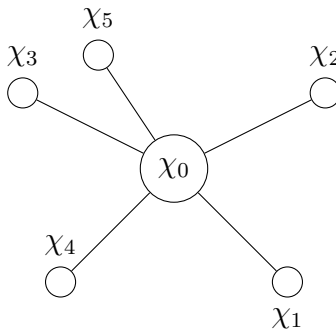
operátorhoz tartozó gráf:



Ez a rendszer Jordan-Wigner-transzformálható, ugyanis ha mindegyik h_j tartalmazza például a χ_0 -t, akkor azok egymással mind antikommutálnak. Legyen tehát

$$h_j = i\chi_0\chi_j \quad (137)$$

Mivel a rendszer Jordan-Wigner, így van, a Majoranna-fermionokkal kifejezhető élgráfja. A χ_0 szerepel minden h_j tagban, ezért abból fog kijönni az összes többi χ_j .



4. Hasonlósági transzformáció U unitér operátorral

Ebben a szekcióban be fogom mutatni, hogy egy tetszőleges H hermitikus Hamilton-operátoron végrehajtott UHU^{-1} alakú hasonlósági transzformáció nem változtatja meg az operátor saját-energiáit. Ez az operátor unitér, azaz $U^\dagger = U^{-1}$. Az unitér tulajdonsága azért szükséges, hogy teljesüljön a valószínűség megmaradása (erről még részletesebben). A H egy másik bázisra transzformálása az unitér sajátosságából következően felfogható forgatásként egy komplex térben. Tehát

$$U = e^{ih_j} \quad (138)$$

alakban teljesíti a feltételt. Itt h_j egy tetszőleges hermitikus operátor lehet, melyre érvényes még az is, hogy $(h_j)^2 = \mathbb{I}$. Ez egy forgatás az $SU(2)$ szimmetriacsoportban, ami ekvivalens a közönséges $O(3)$ csoporttal. A következőkben arról lesz szó, hogy hogyan lehet egy adott gráfot visszaforgatni egy Jordan-Wigner-transzformálható rendszerbe, például az Ising-modelbe. Ez azt jelenti, hogy a rendszer sajátértékei megmaradnak, de könnyen megoldható lesz Jordan-Wigner-transzformációval. A példákat, melyeket a következőkben sikerült megoldanom, az irodalomban nem találtam.

4.1. Az Ising-modellre redukálható rendszerek

Ha vesszük a Majorana fermionokra a

$$\chi_{2j-1} = \bigotimes_{k=1}^{j-1} Z_k X_j, \quad \chi_{2j} = \bigotimes_{k=1}^{j-1} Z_k Y_j \quad (139)$$

reprezentációkat, és kifejtjük vele a $H = \sum_{j=1}^L h_j = \sum_{j=1}^L i\chi_j \chi_{j+1}$ Hamiltont, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^L Z_j + \sum_{j=1}^{L-1} X_j X_{j+1} \quad (140)$$

Az a feltételezés, hogy egy ettől eltérő, de ezeket az elemeket tartalmazó Hamilton eltranszformálható úgy, hogy a C mátrix a következő alakot vegye fel:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & \cdots & 0 \\ -a & 0 & b & & \vdots \\ \vdots & -b & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (141)$$

ahol a, b tisztán képzetesek. Az a, b együtthatók abból jönnek, hogy a transzformáció átforgatja a kiinduló gráfot az Isingbe, így az más szorzófaktorral jelenik meg a Hamilton-operátorban, ezért a mátrixban is. A következőkben látott megoldásokban a támaszkodok [1] publikációkban is alkalmazott módszerre.

4.1.1. Példa 1

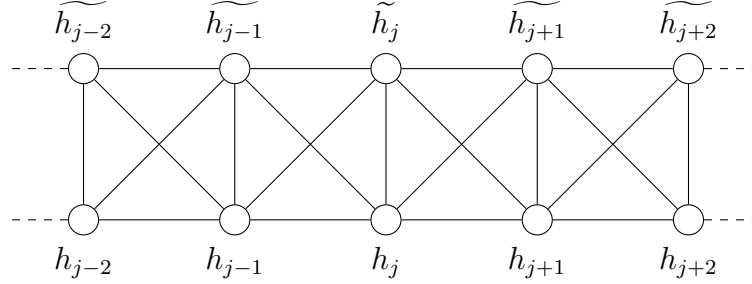
A következő eset két különálló Ising-modellből fog állni, melyek egymással valamilyen összefüggésben állnak. Az egyik láncot a h_j , a másikat jelöljék a $\widetilde{h}_j$ tagok. Ezekre külön-külön érvényesek, hogy

$$\{h_j, h_{j+1}\} = \{\widetilde{h}_j, \widetilde{h}_{j+1}\} = 0 \quad (142)$$

Emellett további kölcsönható tagok vannak egymás közt a következőképpen:

$$\{h_j, \widetilde{h_{j-1}}\} = \{h_j, \widetilde{h_j}\} = \{h_j, \widetilde{h_{j+1}}\} = 0 \quad (143)$$

Ezen összefüggések halmaza magában hordozza ennek a fordítottját a $h_j \leftrightarrow \widetilde{h_j}$ cserére, így ezek fordítva is teljesülnek. A rendszer gráfja:



A Hamilton-operátor:

$$H = \sum_{j=1}^N (h_j + \widetilde{h_j}) \quad (144)$$

Észrevehető, hogy egy

$$U_j = e^{i\frac{\phi}{2}(ih_j\widetilde{h_j})} \quad (145)$$

transzformációval a h_j és a $\widetilde{h_j}$ tagok egymásba forgathatóak. Mivel a szomszédos tagok, amelyek kapcsolódnak ezen tagokhoz, mind h_j -vel és $\widetilde{h_j}$ -vel antikommutálnak, így a szorzatukkal kommutálnak, tehát ezekre invariáns a transzformáció. Az egész lánc eltranszformálása az Ising-moddellre:

$$H' = \left(\prod_{j=1}^N e^{i\frac{\phi}{2}(ih_j\widetilde{h_j})} \right) H \left(\prod_{j=1}^N e^{i\frac{\phi}{2}(ih_j\widetilde{h_j})} \right)^\dagger \quad (146)$$

Mivel az argumentumban lévő tagok egymással kommutálnak, így átírható a teljes unitér transzformáció egy összegzésre:

$$H' = \left(e^{i\frac{\phi}{2} \sum_j ih_j\widetilde{h_j}} \right) H \left(e^{i\frac{\phi}{2} \sum_j ih_j\widetilde{h_j}} \right)^\dagger \quad (147)$$

Minden $j = 1, \dots, N$ -re érvényes lesz a két transzformáció által létrejött összefüggés:

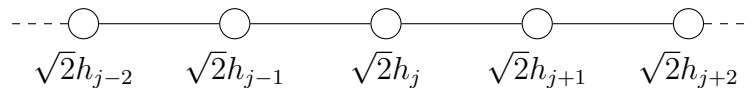
$$U_j h_j U_j^\dagger = e^{i\frac{\phi}{2}(ih_j\widetilde{h_j})} h_j e^{-i\frac{\phi}{2}(ih_j\widetilde{h_j})} = h_j \cos\phi + \widetilde{h_j} \sin\phi \quad (148)$$

$$U_j \widetilde{h_j} U_j^\dagger = e^{i\frac{\phi}{2}(ih_j\widetilde{h_j})} \widetilde{h_j} e^{-i\frac{\phi}{2}(ih_j\widetilde{h_j})} = \widetilde{h_j} \cos\phi - h_j \sin\phi \quad (149)$$

Tehát a rendszert $\phi = -\pi/4$ szöggel kell elforgatni, hogy leegyszerűsíthető legyen a

$$H' = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N h_j \quad (150)$$

Hamiltonra, melyhez a következő gráf társul:



Az eltranszformált Hamilton-operátor felírható egy bilineáris lineárkombinációként, mint $H' = \sum_{jk} \chi_j \chi_k C_{jk}$, ami

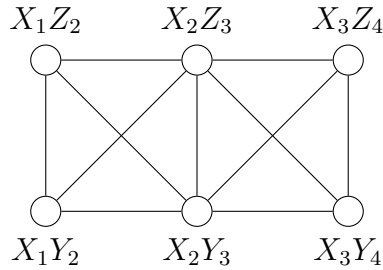
$$H' = i\sqrt{2}\chi_1\chi_2 + i\sqrt{2}\chi_2\chi_3 + \dots \quad (151)$$

melyből a C mátrix a következő:

$$C = i \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & & \vdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & & \vdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (152)$$

Most veszem az eredeti Hamilton-operátort modellező gráf egy bizonyos darabját. Ez a következő (Ezen nem változtat, ha más csatolást választok, azaz ha 1-től eltérő együtthatókkal számolok. Ez igaz lesz az ezt követő rendszerekre is):

$$H = X_1Y_2 + X_1Z_2 + X_2Y_3 + X_2Z_3 + X_3Y_4 + X_3Z_4 \quad (153)$$



Numerikus számítások szerint a rendszer sajátenergiái az alábbiak:

$$E_{\pm 1} = \pm 1.414 \quad (154)$$

$$E_{\pm 2} = \pm 3.162 \quad (155)$$

Felhasználva a már levezetett, új gráfot, kiszámolhatóak a sajátértékei a C mátrixnak, melyből a spinrendszer sajátenergiái is. A levezetés során új együtthatók jöttek ki. Eszerint a mátrix:

$$C = i \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (156)$$

Megoldva erre a sajátérték-egyenletet, azok az alábbiak:

$$\lambda_{\pm 1} = \pm 2.288 \quad (157)$$

$$\lambda_{\pm 2} = \pm 0.874 \quad (158)$$

A bevezetésben már említett, a C sajátértékeit és a H sajátenergiáit összekötő összefüggés, a

$$E = \sum_j \pm \lambda_j \quad (159)$$

alapján a numerikusan kiszámított értékek egyenlőek lesznek az alábbiakkal:

$$E_{\pm 1} = \lambda_{\pm 1} - \lambda_{\pm 2} = \pm(2.288 - 0.874) = \pm 1.414 \quad (160)$$

$$E_{\pm 2} = \lambda_{\pm 1} + \lambda_{\pm 2} = \pm(2.288 + 0.874) = \pm 3.162 \quad (161)$$

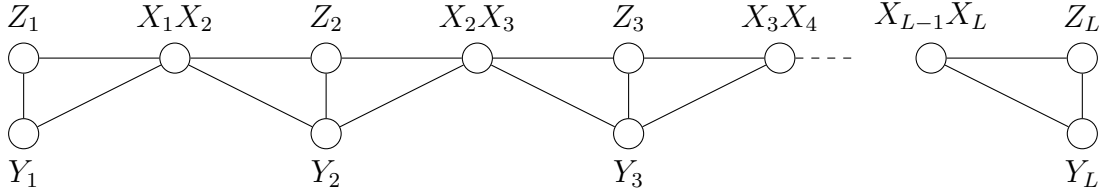
Tehát megegyeznek, amit el is vártam.

4.1.2. Példa 2

Az imént következő példa egy Ising-láncból és további spinoperátorokból álló Hamilton. Ez felírható az eredeti Ising-reprezentációval és a plusz Y -os tagokból.

$$H = \sum_{j=1}^L Z_j + \sum_{j=1}^{L-1} X_j X_{j+1} + \sum_{j=1}^L Y_j \quad (162)$$

A gráf az utolsó taggal úgy tér el az egyszerű Ising-lánctól, ahogy az alábbi ábrán látható:



Ez az előző példával hasonló transzformációt igényel azzal a különbséggel, hogy Y_j tagok közt nincs egy további operátor, ami ugyan nem változtatja meg az eljárást, de kevésbé volt úgy átlátható, mint ebben az esetben. Az unitér operátor, mellyel ez teljesül, az alábbi lesz:

$$U_j = e^{i\frac{\phi}{2}(Z_j Y_j)} = e^{i\frac{\phi}{2} X_j} \quad (163)$$

Ezek egymás utáni hattatása eredményezi a módosult együtthatójú, már Jordan-Wigner-transzformálható spinrendszert. A teljes unitér operátor és annak hatása a Hamiltonra:

$$U = \prod_{j=1}^L e^{i\frac{\phi}{2} X_j} = e^{i\frac{\phi}{2} \sum_j X_j} \quad (164)$$

$$H' = U H U^\dagger = \left(\prod_{j=1}^L e^{i\frac{\phi}{2} X_j} \right) H \left(\prod_{j=1}^L e^{i\frac{\phi}{2} X_j} \right)^\dagger = \left(\prod_{j=1}^L e^{i\frac{\phi}{2} X_j} \right) H \left(\prod_{j=1}^L e^{-i\frac{\phi}{2} X_j} \right) \quad (165)$$

Az utóbbi egyenletből a hattatás végrehajtásával az fog kijönni, hogy

$$H' = \sqrt{2} \sum_{j=1}^L Z_j + \sum_{j=1}^{L-1} X_j X_{j+1} \quad (166)$$

Ez úgy jön ki, hogy a megfelelő $j = 1 \dots L$ indexekre egyesével transzformálódnak a Z_j és az Y_j spinoperátorok. Mindkettőt át lehet vinni az egyikből a másikba és visszafelé, de én az Y_j eltüntetését tűzöm ki célul. Az eltranszformálódó tagok:

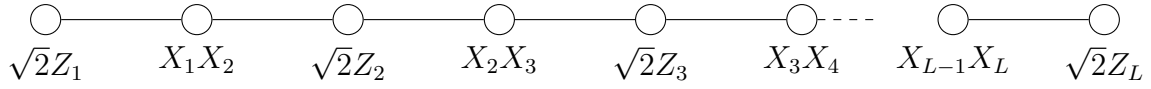
$$U_j Z_j U_j^\dagger = Z_j \cos \phi + Y_j \sin \phi \quad (167)$$

$$U_j Y_j U_j^\dagger = Y_j \cos \phi - Z_j \sin \phi \quad (168)$$

Mivel az Y_j együtthatóját választom 0-nak, így $\cos \phi + \sin \phi = 0$, melyhez

$$\phi = -\frac{\pi}{4} \quad (169)$$

Az eltranszformált $H' = U H U^\dagger$ az Ising-modellhez tartozó gráfot fogja felvenni



Az új Hamilton-operátor, ami kijött tehát felírható, mint $H' = \sum_{jk} \chi_j \chi_k C_{jk}$:

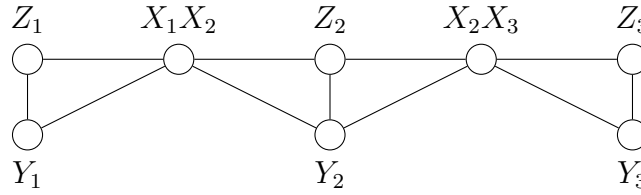
$$H' = i\sqrt{2}\chi_1\chi_2 + i\chi_2\chi_3 + \dots \quad (170)$$

melyből a $\mathbf{C}$ mátrix maga az alábbi:

$$\mathbf{C} = i \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} & & \vdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (171)$$

A rendszer numerikus sajátenergiáinak meghatározásához veszem a következő Hamiltont:

$$H = Z_1 + Y_1 + X_1X_2 + Z_2 + Y_2 + X_2X_3 + Z_3 + Y_3 \quad (172)$$



A spin Hamilton $\mathbf{C}$ mátrixa erre a részre leszűkítve:

$$\mathbf{C} = i \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (173)$$

Először veszem a mátrix, a $\mathbf{C}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ egyenletből adódó λ sajátértékeket.

$$\lambda_{\pm 1} = \pm 0.811 \quad (174)$$

$$\lambda_{\pm 2} = \pm 1.590 \quad (175)$$

$$\lambda_{\pm 3} = \pm 2.194 \quad (176)$$

Ahogy az előző esetben is látható volt, az energiák meghatározhatóak a sajátértékekből. A Hamilton-operátor numerikusan megoldott lehetséges energiái pedig az alábbiak:

$$E_{\pm 1} = \pm(-\lambda_{\pm 3} + \lambda_{\pm 2} + \lambda_{\pm 1}) = \pm 0.207 \quad (177)$$

$$E_{\pm 2} = \pm(\lambda_{\pm 3} - \lambda_{\pm 2} + \lambda_{\pm 1}) = \pm 1.414 \quad (178)$$

$$E_{\pm 3} = \pm(\lambda_{\pm 3} + \lambda_{\pm 2} - \lambda_{\pm 1}) = \pm 2.974 \quad (179)$$

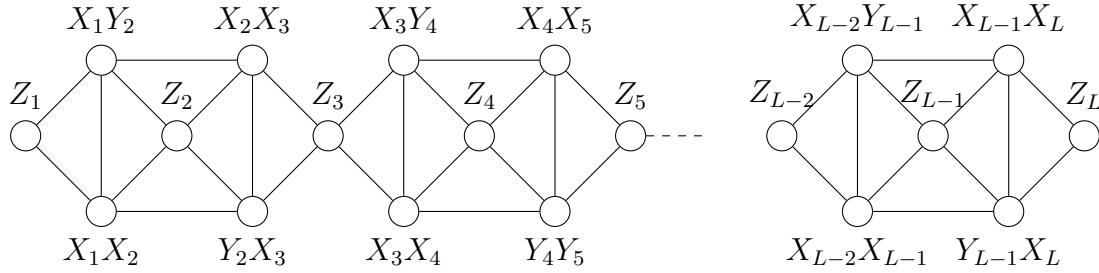
$$E_{\pm 4} = \pm(\lambda_{\pm 3} + \lambda_{\pm 2} + \lambda_{\pm 1}) = \pm 4.595 \quad (180)$$

4.1.3. Példa 3

Az következőkben egy hasonló tiltott gráfokból álló spinrendszert fogok vizsgálni, mint az előző példánál volt. A rendszer Hamilton-operátora az alábbi:

$$H = \sum_{j=1}^L Z_j + \sum_{j=1}^{L-1} X_j X_{j+1} + \sum_{j=1}^{L/2-1/2} X_{2j-1} Y_{2j} + Y_{2j} X_{2j+1} \quad (181)$$

Az ezt a modellt reprezentáló gráf pedig:



Ránézve a Hamiltonra, az lesz a gondolat, hogy az XX és Z tagok maradjanak meg, tehát az XY és YX tagokat hasonlósági transzformációval semmissé tenni. Észrevehető, hogy a Z_j Paulik, ahol j páros antikommütálnak mindezen tagokkal X_j vagy Y_j Paulikon keresztül. Az unitér operátorra tehát a sejtésem:

$$U_j = e^{i\frac{\phi}{2}Z_{2j}} \quad (182)$$

A teljes unitér operátor kiírása ezek szorzata, és mivel az egyes U_j operátorok kommutálnak egymással, ezért a sorrendjük megcserélhető, ami tehát a következő, ha L páros:

$$U = \prod_{j=1}^{L/2} e^{i\frac{\phi}{2}Z_{2j}} \quad (183)$$

és ha L páratlan

$$U = \prod_{j=1}^{(L-1)/2} e^{i\frac{\phi}{2}Z_{2j}} \quad (184)$$

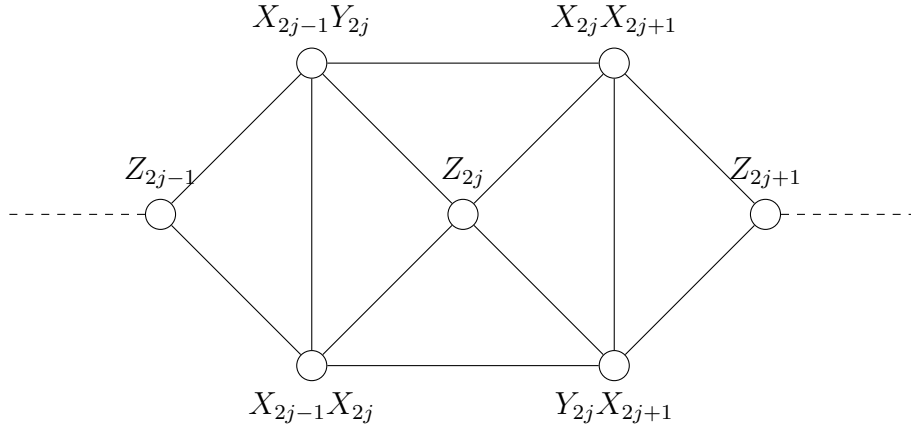
Tehát a teljes eltranszformált Hamilton-operátor:

$$H' = U H U^\dagger = \left(\prod_{j=1} e^{i\frac{\phi}{2}Z_{2j}} \right) H \left(\prod_{j=1} e^{i\frac{\phi}{2}Z_{2j}} \right)^\dagger \quad (185)$$

A triviális tagok, amelyek kommutálnak a transzformációval, azok a Z -k, a nemtriviális tagok az XX , XY és YX . Ezekre hattanva az U_j -t egy tetszőleges blokkra, ahogy az alábbi ábra is mutatja majd. Annyit kell tudni ehhez, hogy az X_{2j} és az Y_{2j} hogyan transzformálódik U_j hatására.

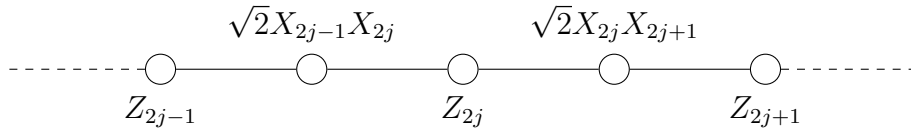
$$U_j X_{2j} U_j^\dagger = X_{2j} \cos \phi + Y_{2j} \sin \phi \quad (186)$$

$$U_j Y_{2j} U_j^\dagger = Y_{2j} \cos \phi - X_{2j} \sin \phi \quad (187)$$



Természetesen ϕ -t $-\pi/4$ -nek választom, így tehát az elforgatásból adódó Pauli-láncok a $\sqrt{2}X_{2j-1}X_{2j}$ és a $\sqrt{2}X_{2j}X_{2j+1}$ lesznek. Tehát mivel az Y eltűnik, így a rendszer az Ising-modellre egyszerűsödik. A Hamilton és a neki megfelelő gráf tehát:

$$H' = \sum_{j=1}^L Z_j + \sqrt{2} \sum_{j=1}^{L-1} X_j X_{j+1} \quad (188)$$



Az új, eltranszformált Hamilton-operátor tehát így felírható, mint $H' = \sum_{jk} \chi_j \chi_k C_{jk}$, ami

$$H' = i\chi_1\chi_2 + i\sqrt{2}\chi_2\chi_3 + \dots \quad (189)$$

melyből a $\mathbf{C}$ mátrix maga az alábbi:

$$\mathbf{C} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & & \vdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (190)$$

Most is veszek egy szeletet a gráfból, amire megoldom mindkét módszerrel. Elsőnek a mátrixot diagonalizálom, ami úgy néz ki, hogy

$$\mathbf{C} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (191)$$

és a sajátértékei:

$$\lambda_{\pm 1} = \pm 0.311 \quad (192)$$

$$\lambda_{\pm 2} = \pm 1.481 \quad (193)$$

$$\lambda_{\pm 3} = \pm 2.170 \quad (194)$$

Ugyanígy jöhet a Hamilton numerikus megoldása a sajátenergiákra, ha a Hamilton-operátor:

$$H = Z_1 + X_1X_2 + X_1Y_2 + Z_2 + X_2X_3 + Y_2X_3 + Z_3 \quad (195)$$

$$E_{\pm 1} = \pm(\lambda_{\pm 3} - \lambda_{\pm 2} - \lambda_{\pm 1}) = \pm 0.378 \quad (196)$$

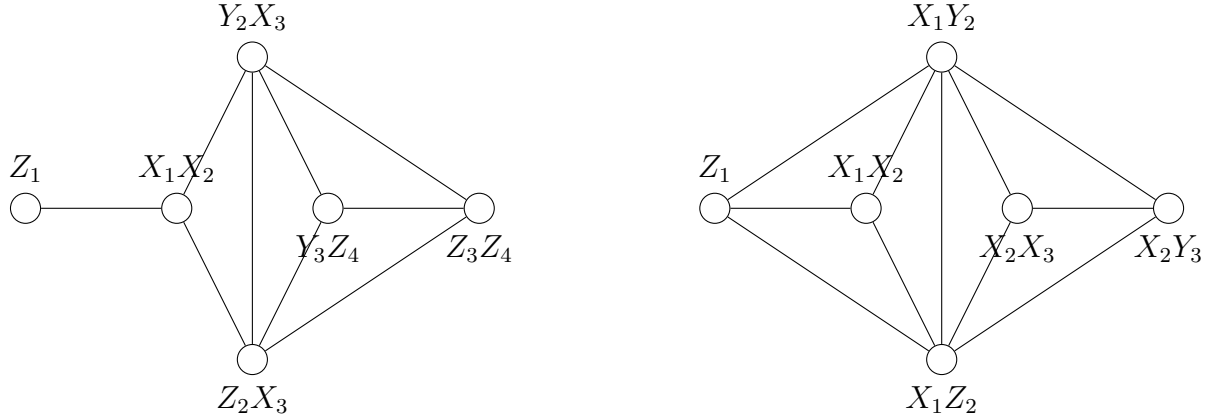
$$E_{\pm 2} = \pm(\lambda_{\pm 3} - \lambda_{\pm 2} + \lambda_{\pm 1}) = \pm 1 \quad (197)$$

$$E_{\pm 3} = \pm(\lambda_{\pm 3} + \lambda_{\pm 2} - \lambda_{\pm 1}) = \pm 3.340 \quad (198)$$

$$E_{\pm 4} = \pm(\lambda_{\pm 3} + \lambda_{\pm 2} + \lambda_{\pm 1}) = \pm 3.962 \quad (199)$$

4.2. Néhány tiltott gráf

Itt bemutatom a tiltott gráfok, nem Jordan-Wigner rendszerek unitér transzformációval való leegyszerűsítését, hogy egzaktul kezelhetőek legyenek. Alább látható a két tiltott gráf, amiket sikerült így megoldanom [2].



A Hamilton-operátorok a következők az ábra alapján:

$$H_1 = Z_1 + X_1X_2 + Y_2X_3 + Z_2X_3 + Y_3Z_4 + Z_3Z_4 \quad (200)$$

$$H_2 = Z_1 + X_1X_2 + X_1Y_2 + X_1Z_2 + X_2X_3 + X_2Y_3 \quad (201)$$

A célom az, hogy véges mennyiségű unitér operátorral való elforgatással a H -t, kapjak egy H' -t, ami Jordan-Wigner-transzformálható lesz. Az ábrán látható első gráf leegyszerűsíthető az Ising-modellre két egymásutáni forgatással. Megmutatom, ez hogyan működik. Legyen az U_1 operátor

$$U_1 = e^{i\frac{\phi}{2}X_2} \quad (202)$$

Ezt hattatva a H_1 -re az $U_1H_1U_1^{-1}$ szerint, azok a tagok változnak meg ennek hatására, melyek antikommutálnak az X_2 operátorral. Ezek az Y_2X_3 és Z_2X_3 operátorok. Az eredmények ebből:

$$e^{i\frac{\phi}{2}X_2}Y_2X_3e^{-i\frac{\phi}{2}X_2} = Y_2X_3\cos\phi - Z_2X_3\sin\phi \quad (203)$$

$$e^{i\frac{\phi}{2}X_2}Z_2X_3e^{-i\frac{\phi}{2}X_2} = Z_2X_3\cos\phi + Y_2X_3\sin\phi \quad (204)$$

Ha az egyik tagot el szeretném tüntetni, például az Y -os tagot, akkor teljesülnie kell az $Y_2X_3(\cos\phi + \sin\phi) = 0$ egyenlőségnek, tehát $\phi = -\pi/4$. Ezt visszahelyettesítve, $\sqrt{2}Z_2X_3$ lesz a megmaradó tag. Az U_2 operátor

$$U_2 = e^{i\frac{\phi}{2}X_3} \quad (205)$$

Tovább hattanva ezt az operátort az új Hamiltonra, a $U_2 U_1 H_1 U_1^{-1} U_2^{-1}$ kapom meg, amelyben csak az $Y_3 Z_4$ és a $Z_3 Z_4$ tagok lesznek eltranszformálva:

$$e^{i\frac{\phi}{2}X_3} Y_3 Z_4 e^{-i\frac{\phi}{2}X_3} = Y_3 Z_4 \cos\phi - Z_3 Z_4 \sin\phi \quad (206)$$

$$e^{i\frac{\phi}{2}X_3} Z_3 Z_4 e^{-i\frac{\phi}{2}X_3} = Z_3 Z_4 \cos\phi + Y_3 Z_4 \sin\phi \quad (207)$$

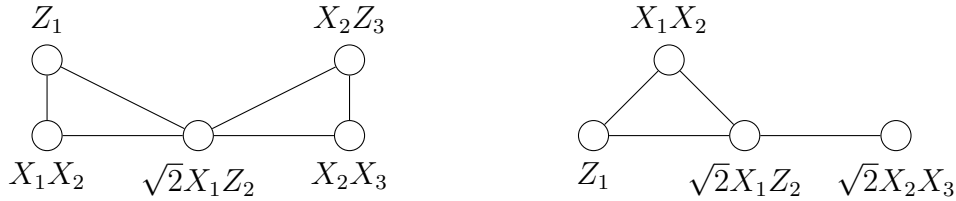
Ugyanígy $\phi = -\pi/4$, és megmarad a $\sqrt{2}Z_3 Z_4$. Az alábbi ábrán az U_1 és U_2 utáni gráf.



Ez az egész folyamat ugyanígy végigjátszható a H_2 Hamiltonra is egy U_1 és egy U_2 forgatással.

$$U_1 = e^{i\frac{\phi}{2}X_2}, \quad U_2 = e^{i\frac{\phi}{2}Y_3} \quad (208)$$

Az U_1 esetén egy $\phi = -\pi/4$ forgatás fogja az $X_1 Y_2$ tagot eltüntetni és lesz a másik transzformálódó tagból $\sqrt{2}X_1 Z_2$. Az U_2 -nél szintén $\phi = -\pi/4$ szögű forgatás az új Hamilton $X_2 Z_3$ tagjából 0-t csinál, a megmaradó tag $\sqrt{2}X_2 X_3$ lesz. Az ezt a folyamatot szemléltető ábrák:



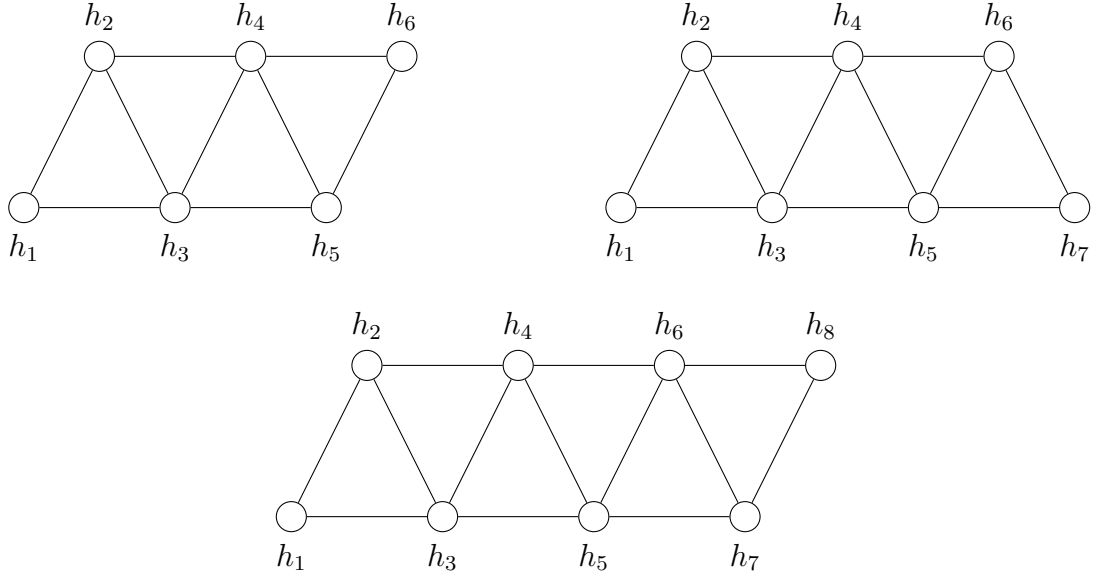
A két C mátrix a két rendszerre rendre a következők:

$$C_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (209)$$

Erre a két rendszerre is kiszámítottam az energiákat, és egyeznek.

5. A 2-es szomszédos, $|j - k| > 2$ spinrendszerek megoldásai $L = 6$ és $L = 7$ esetekre

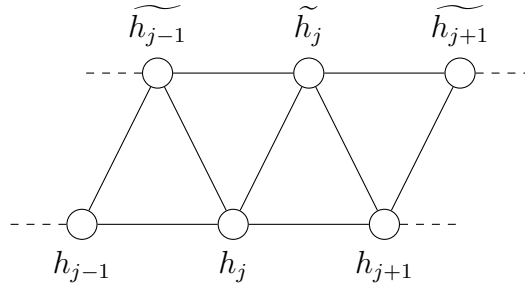
A korábbi részekben kiemeltem, és bemutattam azt, hogy az ezt az algebrát kielégítő spinrendszerek nem Jordan-Wigner-transzformálhatóak. Ez azt jelenti, hogy ez nem oldható meg egyáltalán tetszőleges hosszú lánra. Most ebben a részben ugyanaz lesz a célom, ami az előzőekben is volt, vagyis hasonlósági transzformációkkal addig manipulálni a Hamilton-operátort, hogy az a Jordan-Wigner-transzformálható rendszerek halmazába essen. A teljes probléma szerint általánosan kell úgy eltranszformálni a Hamiltont, hogy az Jordan-Wigner legyen tetszőleges hosszú lánc esetén. A következőkben tárgyalt esetek csak részproblémái ennek.



Legyen egy h_j és egy $\tilde{h}_j$ algebra, amelyek egy-egy Isinget írnak le, és teljesítik:

$$\{h_j, h_{j+1}\} = \{\tilde{h}_j, \tilde{h}_{j+1}\} = 0 \quad (210)$$

Emellett a h_j és $\tilde{h}_j$ algebrák valamilyen összefüggésben állnak, ami a $|j - k| > 2$ algebra kielégítése alapján van megalkotva.



Az ábra alapján felismerhetők a maradék, de az igazán lényeges kommutációs, antikommutációs relációk. Ezek a következők:

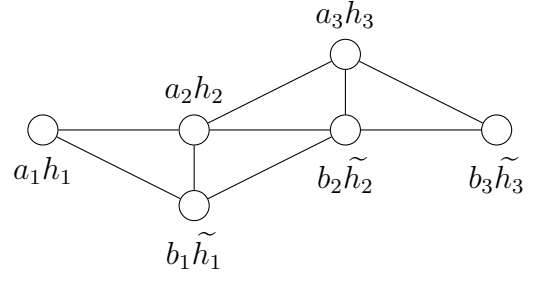
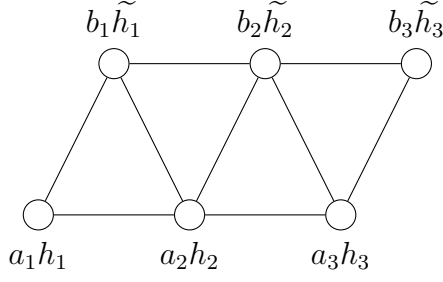
$$\{\tilde{h}_j, h_{j+1}\} = 0 \quad (211)$$

$$[h_j, \tilde{h}_{j+1}] = 0 \quad (212)$$

Az alábbi két esetet, amelyeket megoldottam, nem találtam meg az irodalomban.

5.1. $L = 6$

A probléma elkezdéséhez a láncot felbontottam két külön Ising-láncre, amelyek külön-külön teljesítik az 1-es szomszédos algebrát, és egymás közt vannak az előzőekben meghatározott kölcsönhatások. A választásom az alábbi ábrán szerepel. Mellette ugyanaz, csak más elrendezésben:



A számolásom nem fogja követni az együttthatók értékeit, csupán azt mutatom meg, hogy milyen forgatások szükségesek és, hogy azok hova vezetnek. Könnyen észrevehető, hogy az elrendezés nagyon hasonló az Isingre redukálható rendszerek első példájához. Az első transzformáció, ahogy abban a példában is szerepelt, legyen a két szemben lévő operátor szorzatának az exponenciálisa:

$$U_1 = e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} \quad (213)$$

Ez az operátor $U_1 H U_1^\dagger$ formában csak a $\tilde{h}_1$, h_2 és a h_3 operátorokra hat, ezekből jöhet elő részecske nem megfelelő szögű forgatás esetén.

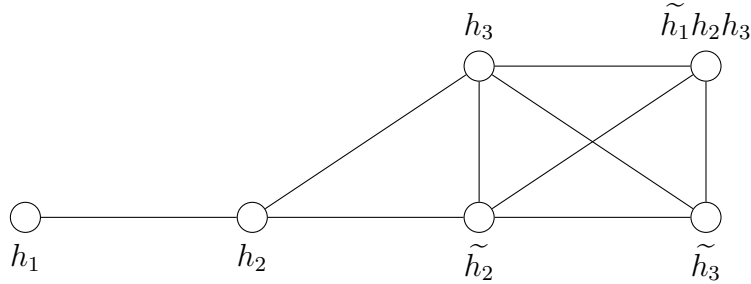
$$e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} \tilde{h}_1 e^{-i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} = \tilde{h}_1 \cos\phi + h_2 \sin\phi \quad (214)$$

$$e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} h_2 e^{-i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} = h_2 \cos\phi - \tilde{h}_1 \sin\phi \quad (215)$$

Itt az a kérdés, hogy $\tilde{h}_1$ -t vagy h_2 -t tartsam meg. A h_2 operátort szeretném meghagyni, elmentés esetén ellenkező előjelű forgatás szükséges. Azonban a h_3 is antikommútál az U_1 transzformációval, így további tag is bejön, ami az elforgatott szögből jön.

$$e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} h_3 e^{-i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} = h_3 \cos\phi - \tilde{h}_1 h_2 h_3 \sin\phi \quad (216)$$

A transzformált gráf így a következő alakot veszi fel (ez nem tartalmazza az éppen megfelelő együttthatókat):



Észrevehető, hogy a h_3 és a $\tilde{h}_3$ tagok szorzata minden más taggal kommutál, így az ezzel való elforgatás nem hoz be zavart okozható tagokat. Tehát legyen

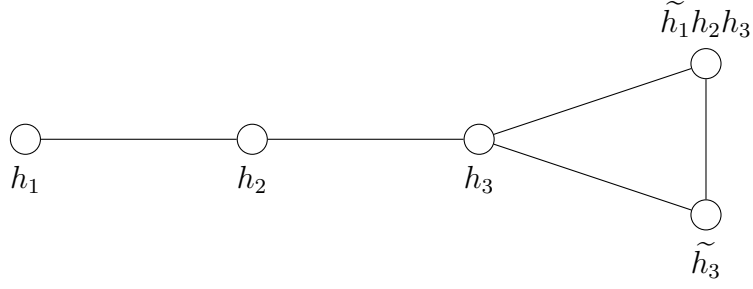
$$U_2 = e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_2 h_3)} \quad (217)$$

A két tag transzformáltja U_2 -vel:

$$e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_2 h_3)} \tilde{h}_2 e^{-i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_2 h_3)} = \tilde{h}_2 \cos\phi + h_3 \sin\phi \quad (218)$$

$$e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_2 h_3)} h_3 e^{-i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_2 h_3)} = h_3 \cos\phi - \tilde{h}_2 \sin\phi \quad (219)$$

Ebből a két egyenletből azt akarom kihozni, hogy a $\tilde{h}_3$ -t a h_3 -ba forgatva eltüntetem az előbbi tagot. Ezzel a gráf a következőképpen néz ki:



Az utolsó lépést ugyanúgy két, egymással antikommutáló tag szorzata segítségével hajtom végre. Ez a két tag $\tilde{h}_3$ és $\tilde{h}_1 h_2 h_3$ lehet csak. Tehát az unitér operátora az utolsó forgatásnak:

$$U_3 = e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2 h_3 \tilde{h}_3)} \quad (220)$$

A transzformáció hatása rendre a $\tilde{h}_3$ -ra és a $\tilde{h}_1 h_2 h_3$ -ra a következők:

$$e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2 h_3 \tilde{h}_3)} h_3 e^{-i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2)} = \tilde{h}_3 \cos\phi - \tilde{h}_1 h_2 h_3 \sin\phi \quad (221)$$

$$e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2 h_3 \tilde{h}_3)} \tilde{h}_1 h_2 h_3 e^{-i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2 h_3 \tilde{h}_3)} = \tilde{h}_1 h_2 h_3 \cos\phi + \tilde{h}_3 \sin\phi \quad (222)$$

Ebből a két egyenletből a $\tilde{h}_1 h_2 h_3$ eltűnését akarom kihozni, így azt h_3 -ba forgatom. A végső Hamilton és a hozzá tartozó gráf tehát:

$$H' = U H U^\dagger = a'_1 h_1 + a'_2 h_2 + a'_3 h_3 + b'_3 \tilde{h}_3 \quad (223)$$

ahol $a'_1 = a_1$, mivel a 3 transzformáció egyik alkalommal sem hatott a h_1 -re. És a teljes transzformációs operátor:

$$U = U_3 U_2 U_1 \quad (224)$$

Az új Hamilton-operátort modellező gráf:

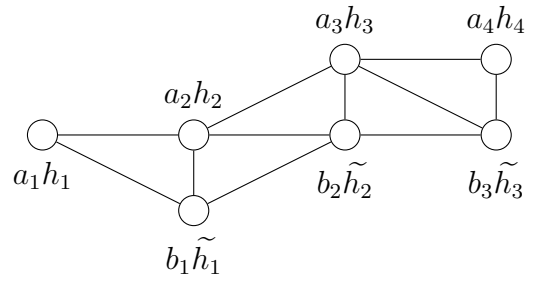
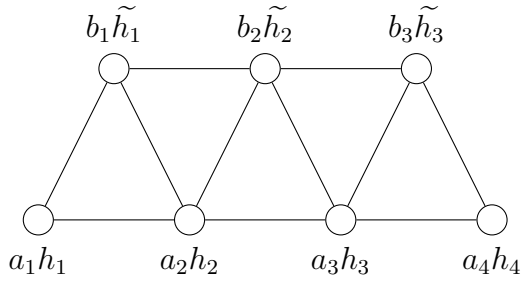


Az eddigiek megmutatták, hogy egy ilyen spinrendszer $\mathbf{C}$ mátrixa hogy írható fel

$$\mathbf{C}_{\mathbf{L=6}} = i \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a'_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a'_2 & 0 & a'_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a'_3 & 0 & b'_3 \\ 0 & 0 & 0 & -b'_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (225)$$

5.2. $L = 7$

A különböző hosszúságú láncokat külön csinálom meg, mert más lépéseket, transzformációkat kellett végrehajtanom a Hamiltonon, hogy végül leegyszerűsítsem az Ising-láncre. Viszont megnézve mindhárom esetet, kitapasztaltam egy sémát, ami az L hosszúsággal áll összefüggésben. Tehát a feljebb, az előzőben ábrázolt gráf alapján ez is felrajzolható hasonló elrendezésben.



A továbbiakban nélkülözni fogom az együttthatók követését a számolás során, ahogy az előző esetben is tettem. Az első transzformáció, az U_1 , amit az egyszerűsítés alatt alkalmaztam

$$U_1 = e^{i\frac{\phi}{2}(ih_3\tilde{h}_3)} \quad (226)$$

Egy adott transzformáció argumentumában szereplő két tag határozza meg, hogy melyik két operátort forgatom egymásba, amelyek a h_3 és a $\tilde{h}_3$. Azonban a h_2 operátor nem kommutál az U_1 unitér operátorral, tehát lesz keletkező részecske. Viszont a többi mind kommutál az említett három tagon kívül. Hattatva az U_1 -et a h_3 -ra és $\tilde{h}_3$ -ra, a következők születnek:

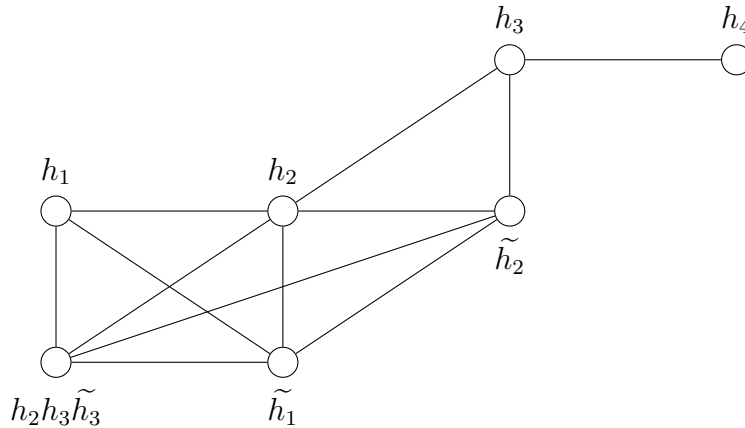
$$U_1 h_3 U_1^\dagger = h_3 \cos \phi + \tilde{h}_3 \sin \phi \quad (227)$$

$$U_1 \tilde{h}_3 U_1^\dagger = \tilde{h}_3 \cos \phi - h_3 \sin \phi \quad (228)$$

A két egyenletből azt szeretném kihozni, hogy a $\tilde{h}_3$ tűnjön el, és a h_3 maradjon meg, mert az természetesebbnek hat. És a h_2 transzformálásával felbukkanó tag pedig:

$$h_2 h_3 \tilde{h}_3 \quad (229)$$

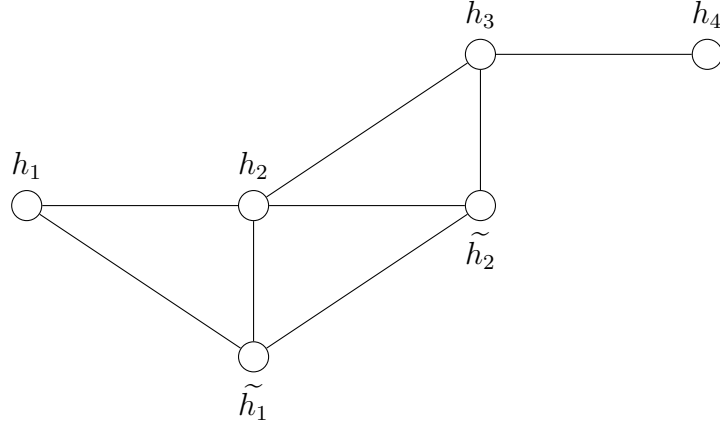
Az így kialakult gráf az alábbi:



Észrevehető, hogy a két alsó spin, a $h_2 h_3 \tilde{h}_3$ és a $\tilde{h}_1$ szorzatának exponenciálisa,

$$U_2 = e^{i\frac{\phi}{2}(i\tilde{h}_1 h_2 h_3 \tilde{h}_3)} \quad (230)$$

kommutál minden más taggal, ugyanis a két említett tag egyenértékű szerepet töltenek be a gráfban, kicserélhetőek. Tehát az U_2 operátorral $h_2 h_3 \tilde{h}_3$ -at a $\tilde{h}_1$ -be forgatom. Ezt megejtve a megváltozott Hamilton:



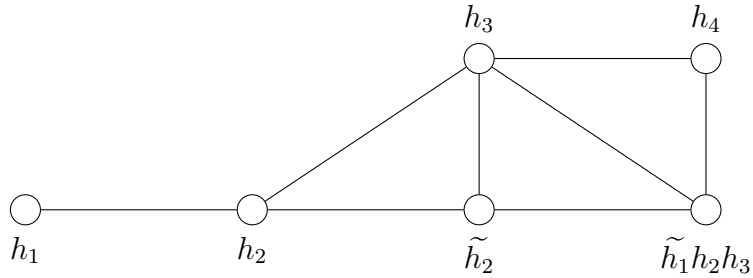
Innen már ismerős a szituáció az $L = 6$ eseténél, ekkor összecsispantható a h_2 a $\tilde{h}_1$ spinnel, behozva egy részecskét a h_3 -mal való antikommutálás miatt, de a helyzet ugyanaz, mint akkor volt. Legyen tehát az unitér transzformáció

$$U_3 = e^{i\frac{\phi}{2}(i\tilde{h}_1 h_2)} \quad (231)$$

Ezt tehát hattatva megszüntetem $\tilde{h}_1$ -t, és meghagyom h_2 -t, emellett a h_3 miatt bejövő tag:

$$U_3 h_3 U_3^\dagger = h_3 \cos \phi - \tilde{h}_1 h_2 h_3 \sin \phi \quad (232)$$

Az új tagot beillesztve az új Hamiltont leíró gráfba:



Az unitér operátorhoz a h_3 és a $\tilde{h}_2$ operátorokat választom ki, mert egymáson kívül mindketten csak a h_4 operátorral antikommutál a szorzatuk. A procedurát a

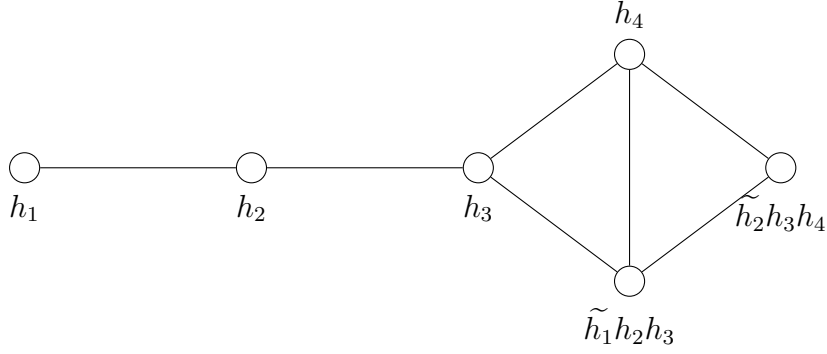
$$U_4 = e^{i\frac{\phi}{2}(i\tilde{h}_2 h_3)} \quad (233)$$

transzformációval folytatom redukálást, ami már egy nagyon egyszerű, de még mindig nem Jordan-Wigner-transzformálható rendszerhez vezet.

$$U_4 \tilde{h}_2 U_4^\dagger = \tilde{h}_2 \cos \phi + h_3 \sin \phi \quad (234)$$

$$U_4 h_3 U_4^\dagger = h_3 \cos \phi - \tilde{h}_2 \sin \phi \quad (235)$$

Tehát itt úgy választom meg a ϕ szöveget, hogy a $\tilde{h}_2$ eltűnjön, és csak a h_3 maradjon meg. Azonban mivel h_4 nem maradt érintetlen, így megjelenik egy $\tilde{h}_2 h_3 h_4$ tag is. És az így kialakult Hamiltoni gráf ezzel



A következő lépés innen már egyszerűen belátható, hogy a h_4 és a $\tilde{h}_1 h_2 h_3$ tagokból tevődik össze, ami tehát az alábbi:

$$U_5 = e^{i\frac{\phi}{2}(\tilde{h}_1 h_2 h_3 h_4)} \quad (236)$$

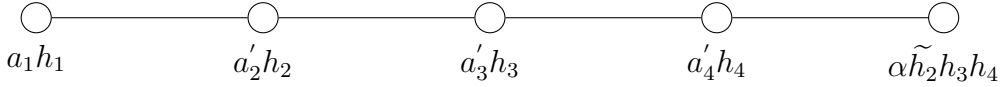
Ezt hattatva $U_5 H U_5^{-1}$ formában, eltüntetem a hosszabb tagot, és meghagyom a h_4 -et. Ezáltal a teljesen eltranszformált Hamilton a következő lesz:

$$H' = a'_1 h_1 + a'_2 h_2 + a'_3 h_3 + a'_4 h_4 + \alpha \tilde{h}_2 h_3 h_4 \quad (237)$$

Emellett a teljes unitér operátor:

$$U = U_5 U_4 U_3 U_2 U_1 \quad (238)$$

És a Hamiltonhoz tartozó gráf:

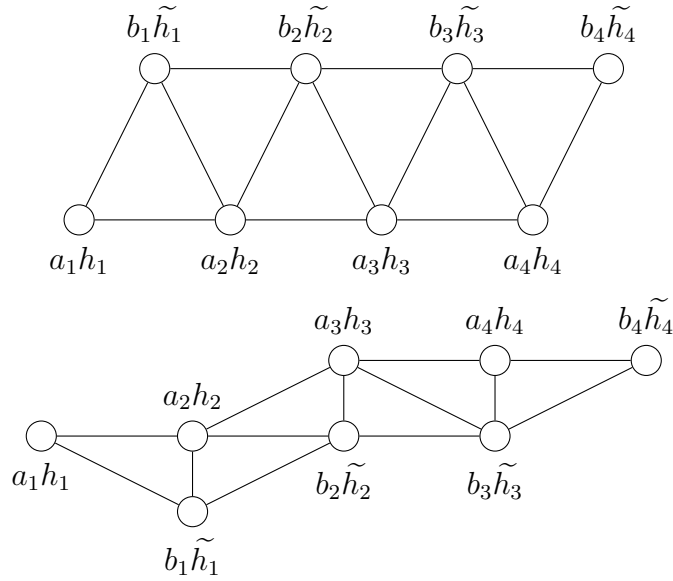


A kialakult rendszerhez tartozó mátrix:

$$\mathbf{C}_{L=7} = i \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a'_2 & 0 & a'_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a'_3 & 0 & a'_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a'_4 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (239)$$

5.3. $L = 8$

A transzformációkat mindig $e^{h_j h_k}$ formában választom meg, lehetővé téve ezzel a h_j vagy h_k semmissé tevését. Azonban ilyenkor a gráf szokatlan szerkezete miatt megjelenik egy plusz tag. Azt nem tisztáztam, hogy mikor milyen lépést kell elvégezni adott L hosszú gráfra, csak azt ismertem fel, hogy melyik a legmegfelelőbb lépés egy adott helyzetben. Természetesen feltehetően más sorrendben is elvégezhető a lépések egymásutánja.



Erre a hosszra ugyanezen forgatások a tapasztalataim alapján nem voltak elegendőek. Ha sikerült eltüntetnem tagokat, bejöttek továbbiak, amelyek az antikommutációs relációikkal további komplikációkat okoztak, és ezzel nem egyszerűbbé, hanem bonyolultabbá tették a Hamiltoni gráfot.

5.4. Kiszámított sajátenergiák

Az első, $L = 6$ esetre a $H_{L=6} = h_1 + \tilde{h}_1 + h_2 + \tilde{h}_2 + h_3 + \tilde{h}_3$ Hamiltont véve, az alábbi mátrixot kapom:

$$\mathbf{C}_{L=6} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1.225 & 0 \\ 0 & 0 & -1.225 & 0 & 1.225 \\ 0 & 0 & 0 & -1.225 & 0 \end{pmatrix} \quad (240)$$

A fent látható $\mathbf{C}_{L=6}$ mátrix sajátértékeire az alábbi értékek jönnek ki:

$$\lambda_1 = \pm 2.176$$

$$\lambda_2 = \pm 1.126$$

Egy korábbi fejezetben látható volt, hogy ezen algebra felírható az alábbi reprezentációban:

$$H_{L=6} = X_1 + Z_1X_2 + Z_1Z_2X_3 + Z_2Z_3X_4 + Z_3Z_4X_5 + Z_4Z_5X_6 \quad (241)$$

Ebben a reprezentációban számolt $H_{L=6}$ sajátenergiák értékei:

$$E_1 = \pm 3.301$$

$$E_2 = \pm 1.049$$

Ha a $\mathbf{C}_{L=6}$ λ sajátértékeit a

$$E_n = \sum_j \pm \lambda_j$$

összefüggés szerint összeadogatom az előjeleket permutálva, az energiákra jutok, ami egyezik a numerikusan számított értékekkel.

A következő, $L = 7$ -re felírt Hamilton bővül egy taggal, tehát $H_{L=7} = h_1 + \tilde{h}_1 + h_2 + \tilde{h}_2 + h_3 + \tilde{h}_3 + h_4$ Hamiltonra az alábbi mátrixot használom:

$$\mathbf{C}_{L=7} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1.225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.225 & 0 & 1.354 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.354 & 0 & 0.816 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.816 & 0 \end{pmatrix} \quad (242)$$

És a sajátértékei:

$$\lambda_1 = \pm 2.251$$

$$\lambda_2 = \pm 1.352$$

$$\lambda_3 = \pm 0.329$$

Majd ugyanazon eljárás szerint megkaphatóak az energiák:

$$E_1 = \pm 3.931$$

$$E_2 = \pm 3.274$$

$$E_3 = \pm 0.570$$

Ez, ami a cél is volt, szintén teljesül a

$$H_{L=7} = X_1 + Z_1 X_2 + Z_1 Z_2 X_3 + Z_2 Z_3 X_4 + Z_3 Z_4 X_5 + Z_4 Z_5 X_6 + Z_5 Z_6 X_7 \quad (243)$$

Hamilton-operátorra numerikusan.

A. Saját eredmények

A.1. Kérdések

- Milyen egyéb megoldható rendszerek vannak?
- Milyen módszerrel lehetséges rejtett Jordan-Wigner-transzformációt találni egy-egy példán? Például vajon lehetséges tiltott gráfokat megoldani így?

A.2. Módszerek

- A különböző spinrendszerek megoldhatóságát a Jordan-Wigner-transzformálhatóságuk alapján néztem meg. Ez azt jelenti, hogy egy ilyen Hamiltonhoz rendelhető egy mátrix, amit diagonalizálva megkaphatóak a sajátenergiák.
- A dolgozatom során használtam a gráfelméletet. Kiindulási pontnak egy gráfot vettem, majd annak a Hamiltonját vizsgáltam. Ez arra jó, hogy láthassam, hogy az adott gráfhoz Jordan-Wigner-transzformálható Hamilton tartozik-e.
- Továbbá nagyrészt hasonlósági transzformációkat használtam. Ezen módszer szerint egy így eltranszformált rendszer sajátenergiái megmaradnak. Ezt a módszert arra használtam, hogy egzaktul megoldható rendszereket találjak úgy, hogy megváltoztatom a Hamilton-ban lévő tagokat, ezzel egy Jordan-Wigner-transzformálható rendszert kapva.

A.3. Eredmények

- A 2-es szomszédos algebrát Majoranna-fermionokkal vizsgálva, az algebra $N = 5$ tagú Hamilton esetén még megoldható, de felette már nem. Ezek láncolata, azaz a végeknél való illesztés tetszőleges hosszan is megtehető.
- A [2] cikkben említett tiltott gráfokat el tudtam úgy transzformálni, hogy azok így már Jordan-Wigner-transzformálhatóak lettek. Az eltranszformált rendszer energiáit összevettem a módosítatlan rendszer energiáival, és egyezést találtam. Ezeket a 4. szekcióban írtam le
- A 2-es szomszédos algebrája $N > 5$ felett is a tiltott gráfok közé tartoznak. Ezt $N = 6$, $N = 7$ és $N = 8$ esetekre vizsgáltam, azonban utóbbira nem tartom lehetségesnek. Több lépésben is hattattam a hasonlósági transzformációt a Hamilton-operátorra, hogy azt visszavezethessem egy Ising-modellre, ami már megoldható. Az ebből számított energiákat össze is vettem egy már megoldott módszerben használt $H_{N=6}$ és $H_{N=7}$ Hamiltonokkal, és egyezést találtam.

Hivatkozások

- [1] Adrian Chapman, Samuel J. Elman, and Ryan L. Mann. A unified graph-theoretic framework for free-fermion solvability, 2023.
- [2] Adrian Chapman and Steven T. Flammia. Characterization of solvable spin models via graph invariants. Quantum, 4:278, June 2020.
- [3] Paul Fendley. Free fermions in disguise. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 52(33):335002, July 2019.
- [4] P. Jordan and E. Wigner. Über das paulische äquivalenzverbot. Z. Physik, 47:631–651, 1928.
- [5] Elliott Lieb, Theodore Schultz, and Daniel Mattis. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. Ann. Phys., 16(3):407–466, 1961.
- [6] T. D. Schultz, D. C. Mattis, and E. H. Lieb. Two-dimensional ising model as a soluble problem of many fermions. Rev. Mod. Phys., 36:856–871, 1964.