

# A FEKETE LYUKON ÁTHALADÓ GEODETIKUSOK SZÓRÓDÁSÁNAK VIZSGÁLATA MAXIMÁLISAN KITERJESZTETT KERR-TÉRIDŐBEN

OTDK-DOLGOZAT

KÉSZÍTETTE: Szepessy Dávid, fizikus MSc II.

TÉMAVEZETŐK: Dr. Kocsis Bence, Dr. Dávid Gyula és Dr. Cserti József



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

2024. ŐSZ

# Tartalomjegyzék

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I. BEVEZETÉS</b>                                                       | <b>3</b>  |
| <b>1. Áttekintés és motiváció</b>                                         | <b>3</b>  |
| 1.1. A dolgozat felépítése . . . . .                                      | 4         |
| <b>II. A KERR-METRIKA</b>                                                 | <b>6</b>  |
| <b>2. A Kerr-metrika áttekintése</b>                                      | <b>6</b>  |
| 2.1. Koordinátarendszerek . . . . .                                       | 6         |
| 2.2. A Kerr-téridő szingularitásszerkezete . . . . .                      | 8         |
| 2.3. A Kerr-téridő Penrose-diagramja . . . . .                            | 9         |
| 2.4. A kiterjesztett Kerr-téridő . . . . .                                | 11        |
| 2.4.1. A $*K$ -koordináták . . . . .                                      | 11        |
| 2.5. Killing-mezők . . . . .                                              | 14        |
| <b>3. A Kerr-téridő geodetikusai</b>                                      | <b>14</b> |
| 3.1. Mozgásállandók . . . . .                                             | 14        |
| 3.1.1. A Carter-állandó . . . . .                                         | 15        |
| 3.2. A geodetikus egyenletek . . . . .                                    | 16        |
| 3.2.1. A $\vartheta$ -mozgás . . . . .                                    | 16        |
| 3.2.2. A $t$ - és $\varphi$ -mozgás . . . . .                             | 16        |
| 3.3. A geodetikusok típusai . . . . .                                     | 17        |
| <b>III. A FEKETE LYUKON ÁTHALADÓ GEODETIKUSOK SZÓRÓDÁSÁNAK VIZSGÁLATA</b> | <b>18</b> |
| <b>4. A probléma részletes ismertetése</b>                                | <b>18</b> |
| <b>5. A megfigyelőhöz eljutó geodetikusok vizsgálata</b>                  | <b>20</b> |
| <b>6. Kezdőfeltételek</b>                                                 | <b>21</b> |
| 6.1. Párhuzamos nyaláb . . . . .                                          | 21        |
| <b>7. A geodetikus egyenletek megoldása</b>                               | <b>21</b> |
| 7.1. A flyby típusú geodetikusok a Penrose-diagramon . . . . .            | 22        |
| 7.2. Az $r$ -mozgás . . . . .                                             | 22        |
| 7.3. A $\vartheta$ -mozgás . . . . .                                      | 22        |
| 7.3.1. A $Q > 0$ eset . . . . .                                           | 22        |
| 7.3.2. A $Q < 0$ eset . . . . .                                           | 23        |
| 7.3.3. A $\vartheta$ -fordulópontok számának meghatározása . . . . .      | 25        |
| 7.4. A $t$ - és $\varphi$ -mozgás . . . . .                               | 26        |
| 7.4.1. A $\vartheta$ -integrálok . . . . .                                | 26        |
| 7.4.2. Az $r$ -integrálok . . . . .                                       | 26        |
| <b>8. Az árapályerő</b>                                                   | <b>27</b> |
| <b>9. A numerikus szimuláció áttekintése</b>                              | <b>28</b> |

|                                                                                           |               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>10.Eredmények</b>                                                                      | <b>30</b>     |
| 10.1. A szórási kép sűrűségeloszlása párhuzamos nyaláb esetén . . . . .                   | 30            |
| 10.2. A fekete lyukból a távoli megfigyelőhöz érkező nyaláb intenzitáseloszlása . . . . . | 32            |
| 10.3. Az maximális árapályerő eloszlása . . . . .                                         | 34            |
| <br><b>IV. ÖSSZEFOGLALÁS, KITEKINTÉS</b>                                                  | <br><b>36</b> |

## I. rész

## BEVEZETÉS

## 1. Áttekintés és motiváció

Az Einstein-egyenletek 1915-ös felírását követően alig egy évvel később megszületett az egyenletek mai napig egyik legfontosabb megoldása: a Schwarzschild-megoldás [30]. Ez a megoldás egy gömbszimmetrikus (nem forgó) objektum körüli téridőt ír le (lásd alább). Ha egy nem forgó csillagot vagy bolygót (vagy más anyageloszlást) gömbszimmetrikusnak tételezünk fel és úgy modellezünk, hogy az objektum körül vákuum van, akkor az objektum geometriai sugarán kívüli vákuumban a Schwarzschild-megoldás írja le a téridő szerkezetét (külső megoldás). Az objektum geometriai sugarán belüli (belső) megoldást az objektum anyageloszlásának (energiaimpulzus-tenzorának) ismeretében tudjuk (elvileg) meghatározni.

Bár a Schwarzschild-megoldás metrikus tenzora bizonyos sugarakon szinguláris (eseményhorizontok és az  $r = 0$  valódi szingularitás), a csillag körüli külső megoldás esetében ez nem jelent fizikai problémát, ugyanis az eseményhorizont a csillagon belül helyezkedne el, ahol viszont a külső megoldás nem érvényes. Éppen emiatt a szingularitások vizsgálata (a Kerr- és a Schwarzschild-megoldás esetén is) egy darabig pusztán matematikai szempontból volt érdekes. Ma azonban már kísérletileg elfogadott tény, hogy léteznek olyan asztrofizikai objektumok, amelyek nem adnak le termikus sugárzást (mint a neutroncsillagok és fehér törpék), mert nincs felszínük, tehát feltehetően eseményhorizont veszi őket körül, valamint a fénypályákat is pontosan úgy görbítik el, mint ahogy az elméletileg számolható olyan objektumokra, amelynek a geometriai sugara kisebb a saját eseményhorizontjuknál [1, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 19, 25, 34]. Az ilyen objektumokat hívjuk fekete lyukaknak.

A Schwarzschild-megoldás forgó objektumokra érvényes általánosítása a Kerr-megoldás, amelynek felírására csak majdnem 50 évvel később került sor [17]. Ez tengelyszimmetrikus, stacionárius vákuummegoldás. Amikor a teljes téridőn a Kerr-megoldás érvényes, Kerr-féle fekete lyukról beszélünk. Többféle módszerrel is tesztelhető a téridő geometriája megfigyelhető fekete lyukak körül (ütköző fekete lyukak gravitációs hullámai, akkretáló fekete lyukak röntgen-spektroszkópiája stb.), és jelenleg az összes megfigyelés összhangban van a Kerr-megoldással [2, 28, 29, 34, 35]. A dolgozatban a Kerr-féle fekete lyukakkal foglalkozom.

A fekete lyukak létezésével fizikai kérdéssé lépett elő a Schwarzschild- és Kerr-megoldás szingularitásszerkezetének vizsgálata. Ennek egy fontos eszköze a geodetikusan teljes téridővé való kiterjesztés: ez az alapvetően matematikai fogalom azt jelenti, hogy a téridőt egy olyan valódi téridőbe ágyazzuk be, amelyben minden geodetikus vagy mindkét irányban végtelen, vagy (valódi) szingularitáson végződik. (A geodetikusok azok a trajektóriák a téridőben, amelyen fény vagy (kis tömegű) részecskék mozognak.) A geodetikusan teljes Schwarzschild-téridőben megjelenik egy, a mi, fekete lyukon kívüli világunkkal azonos metrikus tulajdonságokkal rendelkező tartomány: egy párhuzamos világegyetem. Mindkét világból beeshetnek objektumok a fekete lyukba, és mindkét világba érkehetnek objektumok a fehér lyukból. A fekete lyuk múltjában tehát nem egy csillag található, hanem egy fehér lyuk. A két világ között azonban időszerű trajektória nem haladhat át, emiatt nem lehetséges közöttük az átjárás. A Kerr-megoldás esetén a kiterjesztett téridő összetettebb (lásd részletesen a 2.4 részt): a gyűrű alakú szingularitás végtelen számú párhuzamos világegyetemet kapcsol össze, és lehetségesek a párhuzamos világegyetek között áthaladó időszerű trajektóriák (sőt, geodetikusok is).<sup>1</sup>

Azt, hogy a kiterjesztett Kerr-fekete lyuk téridő valóban létezik-e, nem tudjuk. A sztatikus,

<sup>1</sup>Mivel a kiterjesztett Kerr-téridő esetében a téridő bizonyos régiói lehetnek fehér vagy fekete lyukak is attól függően, hogy a téridő mely (másik) tartományához viszonyítjuk (ezért a dolgozatban egységesen a fekete lyuk elnevezést használom). A fekete lyukon áthaladó trajektória olyan trajektóriát jelöl, amely befelé áthalad az eseményhorizontokon (beesik a fekete lyukba), majd kifelé is áthalad rajtuk (a téridő egy másik tartományán kibukkan a fehér lyukból).

gömbszimmetrikus, töltött Reissner–Nordström-féle fekete lyukak esetén – ami hasonló kiterjesztett téridővel rendelkezik – ismeretes, hogy instabilitások léphetnek fel, ami fényszerű szingularitáshoz vezethet a belső horizont körül [31, 26, 27, 24, 21] (ezzel esetlegesen elzárva az utat az áthaladó trajektóriák előtt [6]). A forgó esetben kevésbé tisztázott a kérdés; Burko és társai számításai szerint itt is hasonló instabilitások alakulnak ki [5, 4]. Kerr legújabb állítása szerint azonban forgó fekete lyuk esetén az anyaggal való kölcsönhatás a fekete lyuk belsejében megakadályozhatja a szingularitás létrejöttét [18]. A szingularitás környezetében a kvantumeffektusok is lényegesen megváltoztathatják a téridő szerkezetét, ami hatással lehet az átjárhatóságra [3, 20]. A dolgozatomban a Kerr-fekete lyuk kiterjesztett téridőt a fizikai valóság (pl. az M87 és a Tejút közepén megfigyelt szupermasszív fekete lyuk [11, 10]) matematikai közelítésének tekintem, és az ebben megvalósuló geodetikusokat vizsgálom.<sup>2</sup>

A dolgozat célja az, hogy megfigyelésekkel ellenőrizhető jóslatot adjunk arra, milyen következményei lehetnek a kiterjesztett Kerr-téridő létezésének. Ehhez azokat a geodetikusokat fogom vizsgálni, amelyek a fekete lyukon keresztül áthaladnak valamelyik párhuzamos világból a mi világunkba. Meghatározom, hogy a másik világban a legegyszerűbb, izotróp eloszlást feltételezve milyen eloszlást mutatnak azok a geodetikusok, amelyek eljutnak a mi világunkban a fekete lyuktól távol elhelyezkedő megfigyelőhöz. Az így kapott eredmények kísérleti jóslatok lehetnek egy erre megfelelő csillagászati teleszkóppal (pl. *Event Horizon Telescope*, EHT [11, 10] vagy egyéb aktívgalaxismag-megfigyelésekkel [32]) végzett megfigyelés eredményeire.

## 1.1. A dolgozat felépítése

Az I. bevezető hátralevő részében összefoglalom a dolgozatban használt fontosabb jelöléseket és konvenciókat. A II. részben ismertetem a Kerr-metrikával kapcsolatos fontosabb előismereteket, amelyek felhasználásra kerülnek a dolgozat későbbi részeiben. Ez a rész nem a saját eredményeimen alapul, az itt olvasható ismeretek megtalálhatóak az irodalomban. A 2. fejezetben a leggyakrabban használt koordinátarendszerek áttekintését követően ismertetem a téridő szingularitás szerkezetét, majd bemutatom a Kerr-téridő kiterjesztésének fontosabb lépéseit; végül a Kerr-téridő szimmetriáival foglalkozom. A 3. fejezetben a Kerr-téridő geodetikusát vizsgálom, bevezetem a geodetikusokon érvényes mozgásállandókat, végül pedig ismertetem a geodetikus egyenlet irodalomból ismert megoldásait.

A III. részben következik a saját eredményeim bemutatása: az előző részben bemutatott eszköztárral vizsgálom a fekete lyukon áthaladó geodetikusok szóródását a kiterjesztett Kerr-téridőben. A pontos problémakitűzést követően a 6. fejezetben elemzem a probléma megoldása szempontjából szükséges kezdőfeltételeket. A 7. fejezetben a geodetikus egyenletek általános alakjait alkalmazom az általam vizsgált geodetikusokra. Diszkutálom az egyenletekben szereplő előjeleket és a mozgás során fellépő fordulópontok szerepét. Az egyenleteket numerikusan implementálható alakra hozom. A 9. fejezetben röviden áttekintem a geodetikus egyenletek numerikus megoldására írt programom felépítését. A 10. fejezetben bemutatom a numerikus szimulációk során kapott eredményeimet. Ismertetem a fekete lyukon való áthaladás után kialakuló szórási képet. Ábrázolom a távoli megfigyelőhöz eljutó nyaláb intenzitáseloszlását, valamint az árapályerő eloszlását. Diszkutálom az eredményeket. A dolgozatot összegzés, köszönetnyilvánítás és irodalomjegyzék zárja.

## A dolgozatban használt jeölések és konvenciók

**Indexek, a metrikus tenzor szignatúrája:** Az ábécé közepéről vett kis latin négyesindexek ( $k, l, m$  stb.) a 0, 1, 2, 3 értékeket veszik fel. A  $g_{kl}$  metrikus tenzor szignatúrája  $(+, -, -, -)$ .

<sup>2</sup>Természetesen a maximálisan kiterjesztett Kerr-téridő abban az értelemben is közelítés, hogy egy kozmológiai táguló univerzumba van beágyazva, aminek lehet kezdete is (Ősrobbanás) és tartalmazhat több, egymástól nagyon távoli fekete lyukat és egyéb objektumokat.

**Mértékegységrendszer:** A dolgozatban (az (1) egyenletet leszámítva) az asztrofizikában gyakran alkalmazott  $c = G = 1$  egységrendszert használom, amelyben a távolság és időegység  $GM/c^2$ , illetve  $GM/c^3$ .

**Paraméterek:** A numerikus szimulációk során a fekete lyuk tömege  $M = 1$ , a spinparaméter pedig  $a = 0,95$ . A geodetikus mozgást végző részecskék tömegéről feltételezzük, hogy sokkal kisebb mint a fekete lyuk tömege, így konkrét értékük a tesztészecske közelítésben kiesik a számolásból (Einstein-féle ekvivalenciaelv) tehát a megmaradó mennyiségek valójában a tömegegységre jutó specifikus megmaradó mennyiséget jelölik.

**Elliptikus integrálok:** Az elsőfajú, inkomplett elliptikus integrált (a dolgozatban használt konvenció szerint) az alábbi módon definiáljuk:

$$F(\psi, k) = \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1 - k \cdot \sin^2 t}} dt. \quad (\text{A})$$

Inverzét a

$$\psi = F^{-1}(F(\psi, k), k) \quad (\text{B})$$

egyenetlittel értelmezzük.

## II. rész

# A KERR-METRIKA

Ebben a részben [23], [9], [15] és [33] alapján, a teljesség igénye nélkül összefoglalom a Kerr-téridő e dolgozat szempontjából legfontosabb tulajdonságait. Az itt közöltek tehát nem saját eredményeim, csupán a dolgozat megértéséhez fontos, az irodalomban megtalálható előismeretek összegzése. Először a Kerr-téridővel kapcsolatos általános ismeretek következnek: a gyakran használt koordinátarendszerek áttekintése, a szingularitás szerkezet vizsgálata és a téridő kiterjesztése; végül pedig a Kerr-téridő geodetikusaival kapcsolatos fontosabb tudnivalók és egyenletek olvashatók.

## 2. A Kerr-metrika áttekintése

Az Einstein-egyenletek Roy P. Kerr által 1963-ban [17] felfedezett vákuummegoldásának Boyer–Lindquist-koordinátákban felírt alakja a következő :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\rho^2} \sin^2 \vartheta\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + 2 \frac{r_s r a}{\rho^2} \sin^2 \vartheta c dt d\varphi, \quad (1)$$

ahol  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$ ;  $\Delta = r^2 - r_s r + a^2$  és a Schwarzschild-sugár  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Az ívelemnégyzetében szereplő koordináták  $ct, r, \vartheta, \varphi$ , paraméterek pedig  $M$  (tömeg) és  $a$  (spinparaméter).

Az (1) ívelemnégyzettel megadott Kerr-megoldás az alábbi fontos tulajdonságokkal rendelkezik: (1) a metrikus tenzor kielégíti a homogén Einstein-egyenleteket (vákuummegoldás); (2) a metrika tengelyszimmetrikus, de nem gömbszimmetrikus; (3) a metrika stacionér (nem függ a  $t$  koordinátáidőttől, de  $g_{t\varphi} \neq 0$ ); (4) a metrika a végtelenben simán tart a Minkowski-metrikához; (5) a megoldás két szabad paramétert tartalmaz ( $M$  és  $a$ ); végül (6) a Landau–Lifsic-pszudotenzorral kiszámítható a centrumban lévő objektum energiája és impulzusmomentuma:  $E_0 = Mc^2$ ,  $J = Mca$ , az  $a$  paraméter helyébe nullát írva visszajutunk a Schwarzschild-megoldáshoz.

E tulajdonságok alapján megállapíthatjuk, hogy a Kerr-megoldás a Schwarzschild-megoldás forgó fekete lyukakra történő általánosítása. A továbbiakban az e megoldás által leírt, Kerr-féle fekete lyukakkal foglalkozom.

### 2.1. Koordinátarendszerek

Az (1) ívelemnégyzettel megadott Kerr-téridő egy absztrakt négydimenziós sokaság, így (nyílt részhalmazai) tetszés szerint koordinátázható(k). A különböző koordinátázásokhoz az ívelemnégyzet különböző alakja tartozik; a végtelen számú lehetséges koordinátarendszer közül a vizsgálandó probléma szempontjai alapján tetszés szerint választhatunk. Az alábbiakban összefoglalom a dolgozatban használt koordinátarendszereket.

A Kerr-metrika vizsgálatához érdemes áttérnünk az általános relativitáselméletben gyakran alkalmazott  $c = G = 1$  egységrendszerbe. Ekkor az időkoordináta  $ct$  helyett egyszerűen  $t$  lesz, valamint  $r_s = 2M$ ; a Kerr-metrika esetében pedig a metrikát keltő objektum energiája  $E_0 = M$  és impulzusmomentuma  $J = Ma$ . Ebben az egységrendszerben az idő ( $t_g = r_g/c$ ) és a tömeg ( $M = (c^2/G)r_s$ ) egysége is megegyezik a távolság egységével ( $r_g = GM/c^2$ ). A dolgozat további részében külön utalás hiányában ezt az egységrendszert használom.

### 1. A BOYER–LINDQUIST-KOORDINÁTÁK

Az ívelemnégyzet (1) alakja a  $ct, r, \vartheta, \varphi$  Boyer–Lindquist-koordinátákban (röviden: BL-koordinátákban) van felírva. Amint a koordináták jelölése is sugallja, ezek bizonyos értelemben polárkoordináták:

- Az objektumtól távol (nagy  $r$  esetén), valamint az  $M = 0$ ,  $a = 0$  esetben a metrika a Minkowski-metrika polárkoordinátákban felírt alakját adja.
- Az  $a = 0$  esetben a metrika a Schwarzschild-metrika polárkoordinátákban felírt alakját adja.<sup>3</sup>

Az (1) ívelemnégyzet BL-koordinátákban, a  $c = G = 1$  egységrendszerben felírt alakja a következő:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2 - \left(r^2 + a^2 + 2\frac{Mra^2}{\rho^2} \sin^2 \vartheta\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + 4\frac{Mra}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dt d\varphi, \quad (2)$$

ahol  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$ ;  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ .

Számos előnye ellenére a BL-koordinátarendszer – hasonlóan a Schwarzschild-metrika esetéhez – kevésbé alkalmas a téridő szingularitásainak és horizontjainak vizsgálatára.

## 2. A KERR-KOORDINÁTÁK

Vezessük be a  $t^*$ ,  $r^*$ ,  $\vartheta^*$ ,  $\varphi^*$  koordinátákat a következő definícióval:

$$\begin{aligned} t^* &= t + T(r) \\ r^* &= r \\ \vartheta^* &= \vartheta \\ \varphi^* &= \varphi + A(r), \end{aligned} \quad (3)$$

ahol a  $T(r)$  és  $A(r)$  függvények teljesítik a

$$\begin{aligned} \frac{dT(r)}{dr} &= \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \\ \frac{dA(r)}{dr} &= \frac{a}{\Delta} \end{aligned} \quad (4)$$

feltételeket. Ezek megoldásaként

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{2M^2}{a} A(r) + M \ln |\Delta| + r \\ A(r) &= \frac{a}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{M - r + \sqrt{M^2 - a^2}}{r - M + \sqrt{M^2 - a^2}} \right| \end{aligned} \quad (5)$$

Az így kapott  $t^*$ ,  $r^*$ ,  $\vartheta^*$ ,  $\varphi^*$  koordinátarendszert Kerr\*-koordinátarendszernek (röviden  $K^*$ ) nevezzük (mivel  $r^* = r$  és  $\vartheta^* = \vartheta$ , ezért ezekről elhagyjuk a csillagot). A (3) koordinátatranszformáció végrehajtásával és a (4) felhasználásával a (2) ívelemnégyzet  $K^*$ -koordinátákban kifejezett alakja:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^{*2} - \rho^2 d\vartheta^2 - \left(r^2 + a^2 + 2\frac{Mra^2}{\rho^2} \sin^2 \vartheta\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^{*2} + \\ &+ 4\frac{Mra}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dt^* d\varphi^* - 2dt^* dr + 2a \sin^2 \vartheta d\varphi^* dr. \end{aligned} \quad (6)$$

A (4) követelmény biztosítja, hogy a radiálisan,  $r' = -1$  kezdőfeltétellel indított nullgeodetikusok (*ingoing principal null geodesics*) kielégítsék a  $t^{*'} = 0$ ,  $r' = -1$  és  $\vartheta' = \varphi^{*'} = 0$  egyenleteket (a vessző a sajátidő szerinti deriválást jelöli). Ebben a koordinátarendszerben tehát a centrálisan befelé indított fénysugarak adják a koordinátavonalakat.

<sup>3</sup>Fontos megjegyezni, hogy az  $a \rightarrow 0$  határesetben a téridő nem analitikusan megy át a Schwarzschild-téridőbe.

Láthatjuk, hogy az ívelemnégyszet ezen alakjában a  $\rho$ -n kívül nem szerepel olyan kifejezés nevezőben, amely zérus lehet, ezért a  $K^*$ -koordinátákban a metrikus tenzor mindenhol értelmezve van (kivéve a  $\rho = 0$  valódi szingularitást; cserébe a metrikus tenzornak három nemnulla nemdiagonális komponense is van, ami rendkívül körülményessé teszi számítások elvégzését). Éppen ezért ez a koordinátarendszer rendkívül előnyös lesz a Kerr-téridő szingularitásszerkezetének tanulmányozásához és a téridő kiterjesztéséhez.

Az ívelemnégyszet e koordinátákban felírt alakja az  $a = 0$  esetben a Schwarzschild-metrika Eddington–Finkelstein-koordinátákban felírt alakjába megy át.

### 3. A KERR–SCHILD-KOORDINÁTÁK (DESCARTES-KOORDINÁTÁK)

Vezessük be a  $t_D, x, y, z$  koordinátákat az alábbi definícióval:

$$\begin{aligned} t_D &= t^* - r \\ x &= (r \cos \varphi + a \sin \varphi) \sin \vartheta \\ y &= (r \sin \varphi - a \cos \varphi) \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (7)$$

Az így kapott koordinátarendszert Kerr–Schild- (vagy Descartes-) koordinátarendszernek nevezzük. A (6) ívelemnégyszet Kerr–Schild-koordinátákkal kifejezett alakja a következő:

$$ds^2 = dt_D^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[ dt_D + \frac{r(xdx + ydy)}{r^2 + a^2} + \frac{r(ydx - xdy)}{r^2 + a^2} + \frac{z}{r} dz \right]^2, \quad (8)$$

ahol  $r(x, y, z)$  nem koordináta, hanem a koordináták (rövidítés céljából bevezetett) függvénye:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right).$$

E koordinátarendszer bizonyos értelemben Descartes-i, mert a forrástól távol a metrika a Minkowski-metrika Descartes-koordinátákban kifejezett alakjába megy át. Az ívelemnégyszet e koordinátákban felírt alakja az  $a = 0$  esetben a Schwarzschild-metrika Descartes-koordinátákban felírt alakjába megy át.

#### 2.2. A Kerr-téridő szingularitásszerkezete

A Kerr-téridő szingularitásszerkezete összetettebb, mint a Schwarzschild-téridőé. Az ívelemnégyszet BL-koordinátákban felírt (2) alakját tanulmányozva az alábbiakat állapíthatjuk meg.

- A metrika  $\Delta = 0$  esetén szingulárisává válik: a  $dr^2$  együtthatója divergál. Ha  $a < M$ , akkor a  $\Delta = 0$  egyenletnek két valós gyöke van,<sup>4</sup>

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (9)$$

A  $dr^2$  együtthatója tehát az  $r > r_+$  és az  $r < r_-$  tartományokon pozitív, az  $r_- < r < r_+$  tartományon pedig negatív.

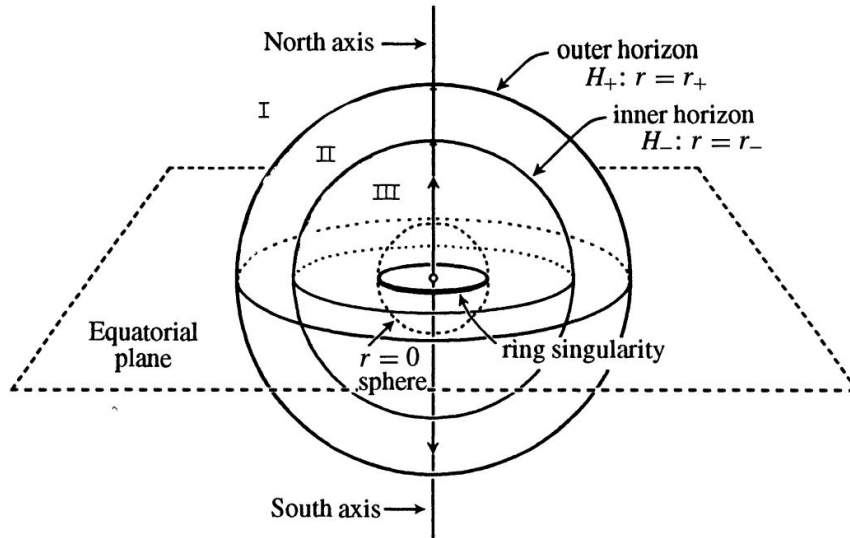
Az ívelemnégyszet  $K^*$ -koordinátákban felírt alakját tekintve látható, hogy ez a szingularitás megfelelő koordinátaválasztással eltüntethető (*koordinátaszingularitás*). Belátható továbbá, hogy az  $r = r_{\pm}$  hiperfelületek fényszerűek, ezért *horizontok*. Az  $r = r_-$  hiperfelületet belső, az  $r = r_+$  hiperfelületet külső horizontnak nevezzük.

---

<sup>4</sup>Az  $a = M$  és az  $a > M$  esetekben a  $\Delta = 0$  egyenletnek egy vagy nulla darab valós gyöke van, ezért a téridő szingularitásszerkezete más. Ezek az esetek matematikailag kidolgozottak, azonban, mivel a megfigyelések alapján a természetben nem fordulnak elő, ezért a dolgozatomban nem foglalkozom velük.

- $\rho^2 - 2Mr = 0$  esetén  $dt^2$  együttthatója nullává válik. Ennek az egyenletnek szintén két valós megoldása van. Mindkét megoldás térben zárt hiperfelület; az egyik az  $r_+ < r < 2M$ , a másik pedig a  $0 < r < r_-$  tartományon helyezkedik el. A két felület között  $dt^2$  együttthatója negatív (ezt a tartományt nevezzük *ergoszférának*), mindenhol máshol pozitív.
- A metrika  $\rho^2 = 0$  esetén szingulárisává válik. A  $\rho^2 = 0$  egyenlet pontosan akkor teljesül, ha  $r = 0$  és  $\cos \vartheta = 0$ . (7) alapján e tartomány térbeli vetülete gyűrű alakú. Megmutatható, hogy az itt fellépő szingularitás *valódi szingularitás* (nem szüntethető meg koordinátatranszformációval).

Az  $r_+$ ,  $r_-$  hiperfelületek, valamint a gyűrűszingularitás térszerű vetületei az alábbi, 1. ábrán láthatóak.



1. ábra. A  $t = \text{konst.}$  térszerű hiperfelület sematikus ábrázolása (az  $r$ -koordináta  $e^r$  függvénye van ábrázolva, tehát az  $r = -\infty$  pont az ábra közepén látható). Az ábrán látható a forgástengely (függőlegesen) és a  $\vartheta = \pi/2$  egyenlítői sík (szaggatott vonallal), valamint az  $r_+$  és  $r_-$  horizontok. Látható, hogy az  $r = 0$ ,  $\vartheta = \pi/2$  gyűrűszingularitás nem zárja el az utat az  $r < 0$  tartomány előtt. Az  $r < 0$  tartomány csak az exponenciális ábrázolás miatt látszik térben végesnek. Az ábra forrása: O'Neill [23].

### 2.3. A Kerr-téridő Penrose-diagramja

Vegyük észre, hogy az ívelemnégyszet (2) és (6) alakjában az  $r = 0$  eset nem okoz szingularitást, ezért az  $r$  koordináta értelmezési tartománya kiterjeszthető  $-\infty$ -ig. Az  $r < 0$  tartományon a metrika sehol sem szinguláris, ezért ott nincsenek horizontok.

Az  $r = r_{\pm}$  külső és belső horizontok három részre osztják a Kerr-téridőt. A három tartományra a következő jelölést fogom használni:

- I. blokk:  $r > r_+$
  - II. blokk:  $r_- < r < r_+$
  - III. blokk:  $r < r_-$ .
- (10)

Az I. blokk felel meg a fekete lyukon kívüli tartománynak, asztrofizikai szempontból ez a „mi világunk”: minden, ami a fekete lyukon kívül van. Ezen a tartományon a fekete lyuktól távol érvényes a newtoni határeset. A II. blokk a két horizont közötti tartomány. Megmutatható, hogy ha egy geodetikus az egyik horizonton belép a II. blokkba, biztosan elhagyja azt a másik horizonton keresztül. A III. blokk szintén egy fekete lyukon kívüli világ. Ez a tartomány igen egzotikus: innen nézve a szingularitást nem takarja eseményhorizont (csupasz szingularitás, *naked singularity*), lehetségesek

zárt időszerű trajektóriák, és a fekete lyuk taszítja a geodetikusokat (ezt a tartományt *antiverzum*nak nevezem). Az I. és III. blokk térben végtelen, a II. térben véges tartomány.

Ahhoz, hogy könnyen vizualizálhatóvá tegyük a Kerr-metrikát, szorítkozzunk a  $\vartheta = 0$  tengelyekre (amelyeken a  $\varphi$  koordináta nincs értelmezve). A dolgozat későbbi részeiben természetesen nem szorítkozom ezekre a tengelyekre, a téridő szingularitásszerkezetének megértése szempontjából ez azonban praktikus egyszerűsítés, ezért ebben az alfejezetben ezt alkalmazom. Az így kapott Penrose-diagramok sematikus szemléltetését adják a kiterjesztett téridőnek akkor is, ha nem korlátozódunk a  $\vartheta = 0$  tengelyekre. A tengelyeken a metrika BL-koordinátákban a következő alakú:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \left( dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) \left( dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right). \quad (11)$$

Vezessük be az  $u, v$  koordinátákat az I. és III. blokkon a

$$\begin{aligned} u &= t - T(r) \\ v &= t + T(r), \end{aligned} \quad (12)$$

a II. blokkon pedig a

$$\begin{aligned} u &= T(r) + t \\ v &= T(r) - t \end{aligned} \quad (13)$$

definícióval. Az (5) egyenletben szereplő  $T(r)$  függvényt kényelmesebb alakra írva:

$$T(r) = r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln |r - r_+| - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln |r - r_-|. \quad (14)$$

Így a tengelyeken érvényes (11) ívelemnégyszet az  $u, v$  koordinátákkal kifejezve

$$ds^2 = \frac{|\Delta|}{r^2 + a^2} du dv. \quad (15)$$

Ezután megfelelő koordinátatranszformációval egy kompakt tartományra képezzük le a végtelen  $u, v$  tartományt (*behúzzuk* a végteleneket). A Kerr-téridő esetén ezt az I. és III. blokkon a

$$\begin{aligned} U &= \text{tg}^{-1}(-e^{-\alpha u}) \\ V &= \text{tg}^{-1}(e^{\alpha v}) \end{aligned} \quad (16)$$

a II. blokkon pedig a

$$\begin{aligned} U &= \text{tg}^{-1}(e^{\alpha u}) \\ V &= \text{tg}^{-1}(e^{\alpha v}) \end{aligned} \quad (17)$$

transzformációval valósítjuk meg, ahol

$$\alpha = \frac{r_+ + r_-}{2(r_+^2 + a^2)}.$$

Az ívelemnégyszet az  $U, V$  koordinátákkal kifejezve

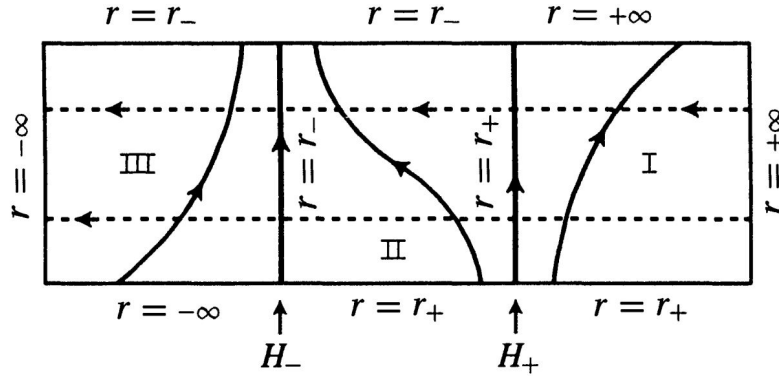
$$ds^2 = -\frac{4}{\alpha^2} \frac{|\Delta|}{\sin 2U \sin 2V} dU dV. \quad (18)$$

Mivel ez az ívelemnégyszet szinguláris az  $U = 0$  és  $V = 0$  helyeken, ezért végre kell még hajtanunk a megfelelő

$$g_{kl} \rightarrow \Omega(U, V) \cdot g_{kl} \quad (19)$$

transzformációt (jelen esetben  $\Omega = \sin 2U \sin 2V$ ). A (19) alakú transzformációkat konform leképezésnek hívjuk. Ezek nem koordinátabázishoz tartozó koordinátatranszformációk (tehát a (19) alakban kapott metrika nem elégíti ki a homogén Einstein-egyenleteket), mindazonáltal lokálisan szögtartóak, ami a téridő esetén azt jelenti, hogy (19) megőrzi a téridő kauzális szerkezetét (a fénykúpokat).

Ezzel tehát egy kompakt tartományra képeztük le a Kerr-téridő  $\vartheta = 0$  tengelyeit úgy, hogy megőriztük a téridő kauzális szerkezetét. Az ilyen leképezések eredményét hívjuk *Penrose*-diagramoknak. A Penrose-diagramok igen szemléletesek teszik a téridő szingularitás szerkezetét és a téridőben lehetséges geodetikusok típusait, valamint könnyen kezelhetővé teszik a térbeli és időbeli végteleneket. A Kerr-téridő Penrose-diagramja a 2. ábrán kerül szemléltetésre.



2. ábra. A  $K^*$ -téridő Penrose-diagramja. A szaggatott vízszintes vonallal jelölt, befelé haladó nullgeodetikusok (*ingoing principal null geodesics*) mindkét horizonton áthaladnak. A folytonos vonallal jelölt, kifelé haladó nullgeodetikusok egyik horizonton sem haladnak át. Az ábra forrása: O'Neill [23].

## 2.4. A kiterjesztett Kerr-téridő

Egy sokaságot (téridőt) geodetikusan teljesnek nevezünk, ha benne minden geodetikus szingularitáson vagy a végtelenben végződik. A 2. ábrán látható, hogy a Kerr-téridő nem geodetikusan teljes, mert vannak olyan geodetikusok, amelyek az  $r_{\pm}$  horizontokon végződnek (a horizontok pedig, amint láttuk, nem valódi szingularitások). A Kerr-metrika azonban teljessé tehető a téridő megfelelően konstruált kiterjesztésével. Az így kapott maximálisan kiterjesztett Kerr-téridő olyan téridő, amely geodetikusan teljes, és részsokaságként tartalmazza a Kerr-téridőt.

A Kerr-téridő kiterjesztéséhez szükségünk lesz egy további matematikai elemre, melyet az alábbiakban foglalok össze.

### 2.4.1. A ${}^*K$ -koordináták

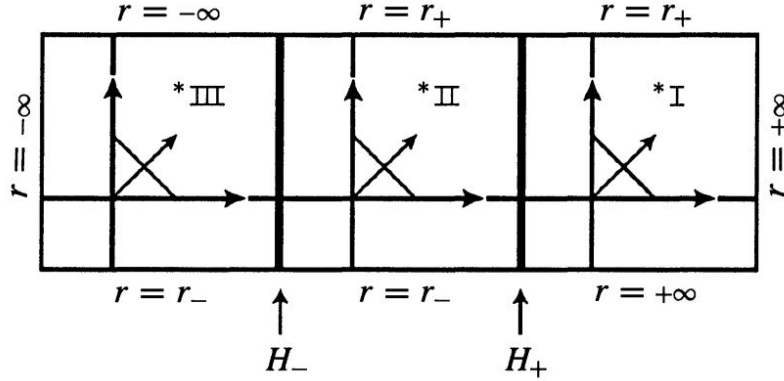
Vezessük be a  $({}^*t, r, \vartheta, {}^*\varphi)$  koordinátákat ( ${}^*K$ -koordináták) a következő definícióval:

$$\begin{aligned} {}^*t &= t - T(r) \\ {}^*\varphi &= \varphi - A(r), \end{aligned} \quad (20)$$

ahol a  $T(r)$  és  $A(r)$  a (4) egyenletben bevezetett függvények. Az ívelemnégyzet  ${}^*K$ -koordinátákban kifejezett alakja a következő:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) d{}^*t^2 - \rho^2 d\vartheta^2 - \left(r^2 + a^2 + 2\frac{Mra^2}{\rho^2} \sin^2 \vartheta\right) \sin^2 \vartheta d{}^*\varphi^2 + \\ &\quad + 4\frac{Mra}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dt d{}^*\varphi + 2d{}^*t dr - 2a \sin^2 \vartheta d{}^*\varphi dr. \end{aligned} \quad (21)$$

Ebben a koordinátázásban a radiálisan,  $r' = +1$  kezdőfeltétellel kifelé indított nullgeodetikusok (*outgoing principal null geodesics*) kielégítik a  $*t' = 0$ ,  $r' = +1$  és  $\vartheta' = *\varphi' = 0$  egyenleteket. A  $*K$ -koordinátarendszerben tehát a centrálisan kifelé indított fénysugarak adják a koordinátavonalakat. Ebből következik, hogy ebben a koordinátarendszerben a geodetikusok áthaladhatnak kifelé az  $r_{\pm}$  horizontokon; a befelé haladó geodetikusok pedig a horizontokon végződnek.



3. ábra. A  $*K$ -térídő Penrose-diagramja. A függőleges egyenessel jelölt, kifelé haladó nullgeodetikusok (*outgoing principal null geodesics*) mindkét horizonton áthaladnak, a függőleges egyenessel rajzolt, befelé haladók pedig egyiken sem. Az ábra forrása: O'Neill [23].

Írjuk fel a  $K^*$  és  $*K$  közötti leképezést (koordinátatranszformációt)! A (3) és (20) egyenletekből leolvasható, hogy

$$\begin{aligned} t^* &= t + 2T(r) \\ \varphi^* &= \varphi + 2A(r). \end{aligned} \quad (22)$$

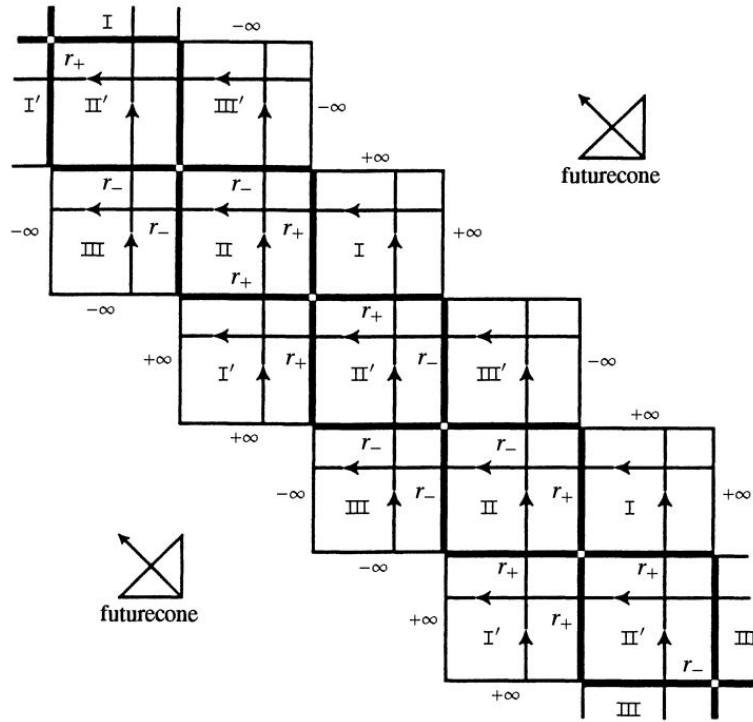
Ez a leképezés megőrzi az időirányítást az I. és III. blokkokon, és megfordítja az időirányítást a II. blokkon. Ez az oka annak, hogy a  $K^*$ -on a befelé, a  $*K$ -n pedig a kifelé haladó geodetikusok haladnak át a horizontokon.

Bár látjuk, hogy a  $K^*$ - és  $*K$ -ívelemnégyzetek ugyanannak a téridőnek két különböző koordinátázásai, az előző két bekezdésben megállapítottak miatt sokszor érdemes őket úgy tekinteni, mintha két különböző téridő volnának. Ennek megfelelően a  $K^*$  és  $*K$  jelölés a továbbiakban egyszerre jelöl koordinátarendszert és téridőt – mivel fontos megkülönböztetni a kettőt, ezért mindig igyekszem utalni rá, melyik jelentésben szerepelnek ezek a jelölések.

\*\*\*

A Kerr-téridő kiterjesztéséhez induljunk ki a 2. ábrán látható  $K^*$ -téridőből. Az ábrán ábrázolt geodetikusok közül a szaggatott vonallal jelöltek teljesek, a folytonos vonallal jelöltek nem teljesek: valamelyik irányban az  $r_+$  vagy  $r_-$  felületről végződnek. Ahhoz, hogy a teljessé tegyük őket, ezekben az irányokba kell kiterjeszteni a téridőt. Ezt úgy tudjuk megtenni, ha a Penrose-diagram ezen oldalai mellé helyezzük a  $*K$  megfelelő blokkjait.

Az így kapott téridő azonban szintén nem lesz teljes, mert az újonnan megjelent blokkok  $r_+$  és  $r_-$  oldalain szintén végződhetnek geodetikusok. Emiatt ezekhez a oldalakhoz ismét a  $K^*$  és  $*K$  megfelelő blokkjait kell illeszteni. Az új blokkok bizonyos oldalaihoz aztán ismét újabb blokkokat kell illeszteni és így tovább. Véges lépés után mindig marad olyan  $r_+$  és  $r_-$  oldal, amelyen geodetikusok végződnek; a Kerr-téridő végtelen sok  $K^*$  és  $*K$  blokk egymáshoz illesztésével tehető csak teljessé. Az blokkok így kapott végtelen láncolatát nevezzük maximálisan kiterjesztett Kerr-téridőnek; ezt szemlélteti az alábbi, 4. ábra.



4. ábra. A maximálisan kiterjesztett Kerr-téridő Penrose-diagramja. Az ábrán látható blokkok vízszintesen  $K^*$ - és  $K^{*'}-$ , függőlegesen pedig  ${}^*K$ - és  ${}^*K'$ -téridőkké kapcsolódnak össze. Az ábrán folytonos egyenes vonalakkal jelölt nullgeodetikusok mind teljesek. Az ábra forrása: O'Neill [23].

Néhány fontos megjegyzés a maximálisan kiterjesztett Kerr-téridővel kapcsolatban:

- A blokkok összekapcsolása az oldalaik és a csúcsok mentén gondos matematikai megfontolásokat kíván, de véghezvihető. Így végül a blokkok nemcsak vízszintesen, hanem függőlegesen is összekapcsolódnak  $K^*$ ,  ${}^*K$ , illetve e kettő időtükrözésével kapott téridő ( $K^{*'}$  és  ${}^*K'$ )<sup>5</sup> valamelyikévé. Ez a horizontokon áthaladó geodetikusok számításánál elengedhetetlen lesz: a  $K^*$ ,  ${}^*K$ ,  $K^{*'}$  és  ${}^*K'$  közül mindig tudunk (pontosan egy) olyan koordinátázást választani, amelyben a vizsgált geodetikus az adott horizonton át analitikusan folytatható.
- A (10) egyenletet követő diszkusszióban láttuk, hogy az I. blokk felel meg a „mi világunknak”, a III. blokk pedig szintén egy fekete lyukon kívüli, de igen egzotikus tartomány (antiverzum). Fontos látni, hogy a kiterjesztett téridőben felbukkanó végtelen számú I. és III. blokk pontosan ugyanolyan, mint az eredeti I. és III. blokk. Az összes I. blokk olyan világegyetemet jelöl tehát, amelyek minden (metrikus) tulajdonságában pontosan megegyezik az általunk látott világgal (ezeket nevezzük párhuzamos világegyetemeknek).
- Mivel ez a téridő geodetikusan teljes, geodetikusok csak a (térbeli és időbeli) végtelenből (valamint a gyűrűszingularitásról) indulnak és ott végződnek. Ebből következik, hogy ha egy geodetikus belép egy II. blokkba valamelyik (külső vagy belső) horizonton keresztül, azt el is hagyja (a másik horizonton keresztül). (Arról, hogy mitől függ, hogy a II. blokkot a két, azonos sugárhoz tartozó horizont közül melyiken keresztül hagyja el egy geodetikus, később lesz szó (lásd a 7.1. részt).

<sup>5</sup>Az időtükrözött téridőket a  $t \rightarrow -t$  transzformációval kapjuk, és az eredeti téridő jele mögé írt aposztróffal jelöljük. A Kerr-téridő kiterjesztésének pontos matematikai leírásában fontos szerepük van, azonban a rövidegre törekvés végett részletes ismertetésüket mellőzöm. [23]

## 2.5. Killing-mezők

Egy ismert metrikájú téridő szimmetriáit a *Killing*-mezők segítségével tudjuk vizsgálni. Egy  $\xi^k$  infinitezimális vektormezőt Killing-mezőnek nevezünk, ha teljesíti az alábbi Killing-egyenletet:

$$\nabla^k \xi^l + \nabla^l \xi^k = 0. \quad (23)$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a  $\xi^k$ -irányú eltolás nem változtatja meg a metrikus tenzor alakját, ezért szimmetria. Egy adott téridő esetén a különböző, egymástól lineárisan független Killing-mezők a téridő különböző szimmetriáit írják le (a szimmetriacsoport generátorai).

Ha adott koordinátázásban a metrikus tenzor nem függ valamelyik koordinátától, akkor az abba az irányba mutató vektormező Killing-mező. A Kerr-metrika BL-koordinátákban felírt alakjában a  $t$  és  $\varphi$  koordinátákat eleve úgy választjuk, hogy azok Killing-mezők integrálgörbéi legyenek. Ennek megfelelően a Kerr-metrika esetében a  $t$ - és  $\varphi$ -irányú eltolás két független Killing-vektor. Belátható, hogy a Kerr-metrika esetén csak ez a két független Killing-vektor van [23].

## 3. A Kerr-téridő geodetikusai

Ebben a részben a Kerr-téridő geodetikusaihoz kapcsolódó legfontosabb tudnivalókat foglalom össze. Mivel a dolgozatban időszerű geodetikussal dolgozom, ebben a részben is az időszerű geodetikusokat ismertetem. A legfontosabb források: [23, 9].

### 3.1. Mozgásállandók

A geodetikusokat meghatározó egyenlet a

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{lm}^k \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} = 0 \quad (24)$$

geodetikus egyenlet. Ez egy bonyolult differenciálegyenlet-rendszer az  $x^k(\tau)$  trajektóriára. Az egyenletrendszer megoldását jelentősen megkönnyítik a mozgásintegrálok: olyan kifejezések, amelyek a koordinátáknak csak első deriváltjait tartalmazzák és konstansok egy geodetikus mentén.

Egy mozgásállandót mindig tudunk képezni: egy geodetikus mentén a négyessebesség  $q := u_k u^k$  abszolútértéke állandó. Időszerű geodetikusokon  $q = 1$ , fényszerűeken pedig  $q = 0$ .

Láttuk korábban, hogy a téridő szimmetriáit a hozzájuk tartozó Killing-mezőkkel tudjuk leírni. Tudjuk továbbá, hogy a szimmetriákhoz megmaradó mennyiségek tartoznak. És valóban: belátható, hogy ha  $\xi^k$  Killing-mező, akkor egy geodetikus mentén az

$$u_k \xi^k \quad (25)$$

skalárszorzat mozgásállandó. Adott téridő geodetikusain minden független Killing-mezőhöz tartozik tehát egy mozgásállandó. Korábban láttuk, hogy a Kerr-téridő esetén két független Killing-mező van: a  $t$ - és a  $\varphi$ -irányú eltolás, ezért két további megmaradó mennyiségünk lesz.

Az időbeli eltoláshoz tartozó mozgásintegrált energiának nevezzük. Kiszámítani (25) alapján az

$$E = u_0 \quad (26)$$

képlettel tudjuk (BL-koordinátákban). A  $z$  tengely körüli forgatáshoz tartozó megmaradó mennyiséget impulzusmomentumnak nevezzük, és konvenció szerint a

$$L = -u_3 \quad (27)$$

képlettel definiáljuk (BL-koordinátákban). Ezzel tehát van három megmaradó mennyiségünk:  $q$ ,  $E$  és  $L$ .

A Kerr-metrika esetében azonban van egy negyedik megmaradó mennyiség is: a *Carter*-állandó. Mivel a Kerr-metrika nem gömbszimmetrikus (csupán tengelyszimmetrikus), ezért a metrika szimmetriatulajdonságaiból közvetlenül nem következtethetünk rá.<sup>6</sup> Létezése viszont kulcsfontosságú a geodetikus egyenlet megoldása szempontjából: a négydimenziós téridőn négy darab független mozgásintegrál létezése lehetővé teszi a geodetikus egyenletek analitikus megoldását (a mozgásegyenletek rendszere *teljesen integrálható*).

### 3.1.1. A Carter-állandó

A metrika szimmetriáiból (az  $E$  és  $L$  mozgásállandó létezéséből) következik, hogy a  $t$  és  $\varphi$  koordinátákra vonatkozó differenciálegyenletek szeparálhatóak a többitől (lásd alább [23]). Carter megmutatta [8], hogy az  $r$  és  $\vartheta$  koordinátákra vonatkozó csatolt differenciálegyenletek is bizonyos értelemben szeparálhatóak. Az egyenletek szeparálása során szokás szerint megjelenik egy konstans, amelyet Carter-állandónak nevezünk.

Fejezzük ki a  $q = u_k u^k$  mennyiséget. A négyessebesség és a metrikus tenzor behelyettesítésével némi számolás után a következőt kapjuk:

$$-q\rho^2 = \frac{\rho^4}{\Delta} r'^2 + \rho^4 \vartheta'^2 - \frac{P^2(r)}{\Delta} + \frac{D^2(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta}, \quad (28)$$

ahol a vessző sajátidő szerinti deriválást jelöl, és

$$\begin{aligned} P(r) &= (r^2 + a^2)E - La, \\ D(\vartheta) &= L - Ea \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (29)$$

A bal oldalra  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$ -t behelyettesítve az egyenlet a

$$-\frac{\rho^4}{\Delta} r'^2 - qr^2 + \frac{P^2(r)}{\Delta} = \rho^4 \vartheta'^2 + qa^2 \cos^2 \vartheta + \frac{D^2(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \quad (30)$$

alakra hozható. Az egyenletet megvizsgálva láthatjuk, hogy a bal oldalon majdnem csak  $r$ -től, a jobb oldalon pedig majdnem csak  $\vartheta$ -től függő tagok szerepelnek. Ha az egyenlet szeparálható volna, a két oldalnak ugyanazzal a konstanssal kellene egyenlőnek lennie. A  $\rho^4$  azonban tartalmaz  $r$  és  $\vartheta$  változót is, ezért úgy tűnik, hogy az egyenlet nem szeparálható. Carter eredménye az, hogy megmutatta: az egyenlet mégis szeparálható, és igazak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} \rho^4 r'^2 &= R(r) \\ \rho^4 \vartheta'^2 &= \Theta(\vartheta) \end{aligned} \quad (31)$$

Ezzel a (30) egyenlet szeparálhatóvá válik; a szeparációs konstans  $K$ -val jelölve

$$\begin{aligned} R(r) &= -\Delta(qr^2 + K) + P^2(r) \\ \Theta(\vartheta) &= K - qa^2 \cos^2 \vartheta - \frac{D^2(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (32)$$

Az itt definiált  $R(r)$  és  $\Theta(\vartheta)$  függvények fontos szerepet játszanak a geodetikusok leírásánál.

A  $K$  konstans helyett gyakran használják a

$$Q = K - (L - aE)^2 \quad (33)$$

---

<sup>6</sup>A Carter-állandó a Kerr-metrika magasabbrendű szimmetriájából ered, amelyet egy kétindexes Killing-tenzorral lehet leírni.

mennyiséget. Mivel a megmaradó mennyiségek bármely függvénye is megmaradó mennyiség, így ez is az. A dolgozatban ezt használom és erre hivatkozom Carter-állandóként ( $K$ -ra pedig módosított Carter-állandóként).<sup>7</sup>

A Carter-állandó is kapcsolatba hozható a négyessebességgel. BL-koordinátákban

$$u_{\vartheta} = g_{\vartheta\vartheta} u^{\vartheta} = -\rho^2 \frac{d\vartheta}{d\tau}, \quad (34)$$

ahova a (31), (32) és (33) egyenleteket behelyettesítve

$$u_{\vartheta} = \pm \sqrt{Q - (a^2(1 - E^2) + L^2/\sin^2 \vartheta) \cos^2 \vartheta}. \quad (35)$$

\*\*\*

Ezzel tehát van négy darab megmaradó mennyiségünk a geodetikus egyenlet négy darab  $x^k(\tau)$  ismeretlenéhez. Ez lehetővé teszi, hogy a rendkívül bonyolult metrika ellenére analitikus képletekkel oldjuk meg a geodetikus egyenletet.

## 3.2. A geodetikus egyenletek

### 3.2.1. A $\vartheta$ -mozgás

A (31) egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{|r'|}{\sqrt{R(r)}} = \frac{1}{\rho^2} = \frac{|\vartheta'|}{\sqrt{\Theta(\vartheta)}}. \quad (36)$$

Ez egy szeparálható differenciálegyenlet, melyet integrálva kapjuk a  $\vartheta$ -mozgást leíró

$$\int_{r_0}^{r(\tau)} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \epsilon \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(\tau)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta(\vartheta)}} \quad (37)$$

egyenletet. A jobb oldalon álló előjel  $\epsilon = \text{sgn}(r') \cdot \text{sgn}(\vartheta')$ . Ez egy-egy olyan szakaszra érvényes, amelyen  $R(r) > 0$  és  $\Theta(\vartheta) > 0$ . Ahol  $R(r) = 0$ , ott az  $r$  koordinátában, ahol  $\Theta(\vartheta) = 0$ , ott a  $\vartheta$  koordinátában fordulópont van.

### 3.2.2. A $t$ - és $\varphi$ -mozgás

A  $t$ - és  $\varphi$ -beli szimmetria következtében az  $e$  koordinátákra vonatkozó egyenleteket egyszerű  $r$  és  $\vartheta$  szerinti integrálok formájában tudjuk felírni. Figyelni kell azonban arra, hogy a  $t$  és  $\varphi$  koordináták transzformálódnak a  $K^*$  és  ${}^*K$  közötti áttérésnél, ezért a rájuk vonatkozó egyenletek is függeni fognak attól, hogy melyik téridőn dolgozunk, konkrétan [23]:

$$\begin{aligned} \varphi^*(\tau) - \varphi_0^* &= \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(\tau)} \frac{D(\vartheta)/\sin^2 \vartheta}{\sqrt{\Theta(\vartheta)}} d\vartheta + \int_{r_0}^{r(\tau)} \frac{a}{\Delta} \left( \frac{\pm P(r)}{\sqrt{R(r)}} \oplus 1 \right) dr \\ t^*(\tau) - t_0^* &= \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(\tau)} \frac{aD(\vartheta)}{\sqrt{\Theta(\vartheta)}} d\vartheta + \int_{r_0}^{r(\tau)} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left( \frac{\pm P(r)}{\sqrt{R(r)}} \oplus 1 \right) dr \end{aligned} \quad (38)$$

A  $\vartheta$  szerinti integrálok előtt álló  $\pm$  előjel  $\text{sgn}(\vartheta')$ -vel, az  $r$ -integrálokban szereplő  $\pm$  előjel pedig  $\text{sgn}(r')$ -vel egyenlő. A  $\oplus$  előjel  $K^*$  esetén  $(+)$ ,  ${}^*K$  esetén pedig  $(-)$  előjelet jelent (ez különbözteti meg a kétféle téridőben érvényes egyenleteket). Az egyenletek itt is egy-egy olyan szakaszon érvényesek, amelyen  $R(r) > 0$  és  $\Theta(\vartheta) > 0$ . Megmutatható, hogy a (38) egyenletben szereplő  $r$ -integrálok a  $\oplus$  előjel megfelelő megválasztásával minden horizonton át folytathatók anélkül, hogy az integrál divergálna. (A  $\oplus$  előjel megfelelő megválasztása a megfelelő, az adott horizonton átfedő  $K^*$  vagy  ${}^*K$  koordinátarendszer választásának felel meg.)

<sup>7</sup>Az  $a = 0$  Schwarzschild-határesetben  $L$  a z-irányú impulzusmomentum-komponenssel,  $K$  pedig az impulzusmomentum-vektor négyzetével egyenlő.

### 3.3. A geodetikusok típusai

A Kerr-téridőben megvalósuló geodetikusok két csoportba sorolhatóak aszerint, hogy az energiájuk kisebb vagy nagyobb, mint 1: előbbieket kötött, utóbbiakat szabad geodetikusoknak nevezzük. A (31)-ből láthatjuk, hogy az  $r$  koordináta azon a tartományon változhat, amelyeken  $R(r) > 0$ . A (32) egyenletet kiírva láthatjuk, hogy  $|r| \rightarrow \infty$  pontosan akkor lehetséges, ha  $E > 1$ . A dolgozatban a szabad geodetikusokkal fogok foglalkozni. A szabad geodetikusoknak két típusa van [23]:

- *Tranzit* (magyarul nagyjából: áthatoló) típusúnak nevezzük azt a geodetikust, amelynek  $r$  koordináta bejárja a teljes  $-\infty < r < \infty$  tartományt. A tranzit geodetikusok  $r$  koordinátája monoton csökken  $r = \infty$ -tól  $r = -\infty$ -ig ( $K^*$ -on beesnek a fekete lyukba) vagy monoton nő  $r = -\infty$ -tól  $r = \infty$ -ig ( ${}^*K$ -n kirepülnek a fekete lyukból). Ezek a geodetikusok tehát vagy az antiverzumból (III. blokk) indulnak, vagy ott végződnek.
- *Flyby* (magyarul nagyjából: elkerülő) típusúnak nevezzük azt a geodetikust, amelynek  $r$  koordinátája a  $-\infty < r_{\min} < r < \infty$  tartományon változhat (alulról korlátos). (A  $-\infty < r < r_{\max} < \infty$ , felülről korlátos esetet is flybynak nevezzük, de ezzel az esettel a dolgozatomban nem foglalkozom.) Az ilyen geodetikusok  $r = \infty$ -ból indulnak,  $r$  koordinátájuk monoton csökken  $r = r_{\min}$ -ig, majd monoton nő és  $r = \infty$ -ben végződnek. Az ilyen típusú geodetikusok tehát behatolhatnak a horizontokon belülre, de ez nem szükségszerű (a dolgozat későbbi részében azokkal a flyby típusú geodetikusokkal foglalkozom, amelyek behatolnak a horizonton belülre, tehát amelyekre  $r_{\min} < r_-$ , lásd az 1. és az 5. ábrákat).

### III. rész

## A FEKETE LYUKON ÁTHALADÓ GEODETIKUSOK SZÓRÓDÁSÁNAK VIZSGÁLATA

Az előző részben összefoglaltam a Kerr-metrikával kapcsolatos azon előzetes ismereteket, amelyek szükségesek az általam vizsgált probléma tanulmányozásához. A dolgozat hátralevő részében ezzel az eszköztárral fogom vizsgálni a fekete lyukon áthaladó geodetikusokat, azok szóródását és a szórási képet meghatározó paramétereket. A célkitűzésem kézzelfogható és egyszerű: csillagászati megfigyelésekkel ellenőrizhető jóslatot tenni arra az esetre, ha a kiterjesztett Kerr-téridő párhuzamos világegyetemei valóban léteznek. A dolgozat hátralevő részében saját eredményeim következnek, amelyek három nagyobb részre oszthatóak:

- Az irodalomban megtalálható általános geodetikus egyenletek specifikálása és alkalmazása a dolgozatban vizsgált esetre. Diszkutálom és a vizsgált esetre alkalmazom az egyenletekben szereplő előjeleket. Az egyenletekben szereplő kifejezéseket numerikusan implementálhatóvá alakítom, és összevonom a szakaszonként érvényes integrálokat.
- A megfelelő alakra hozott geodetikus egyenletek implementálása. A numerikus számításokra írt programmal kiszámítom a megfelelő kezdőfeltételeket, a geodetikusok végső koordinátáit és a geodetikus mentén fellépő maximális árapályerőt.
- A kapott eredmények értelmezése, grafikonok készítése. A szórási kép, intenzitáseloszlás és az árapályerő eloszlásának ábrázolása. Az ábrák diszkutálása.

Ebben a fejezetben először részletesen foglalkozom a kiterjesztett Kerr-téridő számunkra releváns részével, az ezen lehetséges geodetikusokkal. Ezután felírom az előző részben tárgyalt mozgásegyenletek olyan alakját, amelyek praktikusán implementálhatóak. Megfogalmazom a vizsgált kezdőfeltételeket, majd röviden ismertetem az általam írt program felépítését. Bemutatom és diszkutálom a kapott eredményeket.

### 4. A probléma részletes ismertetése

A kutatásomban a célkitűzésem az, hogy megvizsgáljam, milyen, csillagászati módszerekkel ellenőrizhető következményei lehetnek a kiterjesztett Kerr-téridő létezésének. A 2.4. részben láthattuk, hogy a Kerr-téridő geodetikusán teljessé történő kiterjesztése matematikai szempontból magától értetődő és természetes törekvés, amely véghezvihető. Arról, hogy a kiterjesztett téridő valóban létezhet-e, lásd részletesen az 1. fejezet utolsó két bekezdését.

A dolgozatomban a kiterjesztett Kerr-téridőt a fizikai valóság (pl. az M87 és a Tejút közepén megfigyelt szupermasszív fekete lyukak [11, 10]) matematikai közelítésének tekintem. Ekkor lehetségesek a fekete lyukon keresztül az egyik világból a másikba átmenő geodetikusok. A célom meghatározni, hogy egy megfelelő teleszkópot (pl. Event Horizon Telescope, EHT) valamely fekete lyukra (pl. M87\*, SgrA\*) irányítva milyen intenzitáseloszlást mutatnak a párhuzamos világegyetemekből érkező geodetikusok (a geodetikus mozgást végző részecskék vagy sugárzás).

\*\*\*

Vizsgáljuk meg a kiterjesztett Kerr-téridő Penrose-diagramjának 4. ábráját. Az általunk látott – külső,  $r \gg 0$  – tartomány valamelyik I. blokknak felel meg. Helyezzük el magunkat ennek megfelelően valamelyik I. blokkon (jelöljük ezt a blokkot  $I_{ki}$ -vel), a térbeli végtelenben (mivel az ábra felfelé és

lefelé folytatódik a végtelenségig, ezért nem számít, melyik I. blokkot választjuk). Vizsgáljuk meg ezután, hogy a kiterjesztett téridő mely tartományairól érkehetnek hozzánk geodetikusok a fekete lyukon keresztül. Az ábrán jelölt jövőszerű fénykúpot (*futurecone*) figyelembe véve láthatjuk, hogy ezek a geodetikusok csak az ábrán vízszintesnek rajzolt  $r_+$  horizonton át érkehetnek.

Fordítsuk meg a kérdést: mi történhet azokkal a geodetikusokkal, amelyek a mi világunkból, a végtelenből indulva beesnek a fekete lyukba? Mivel a geodetikusokat a végtelenből indítottuk, ezért ezek szabad geodetikusok ( $E > 1$ ). A 3.3 részben megállapítottak alapján ezek vagy tranzit vagy flyby típusúak.

- A flyby típusúak  $r$  koordinátája monoton csökken  $r = r_{\min}$ -ig, majd monoton nő  $r = \infty$ -ig. Ez csak úgy valósulhat meg, ha a Penrose-diagramon balra, majd felfelé haladva a következő I. blokk térbeli (és időbeli) végtelenjében végződnek. (Ez kétféleképpen valósulhat meg a Penrose-diagramon, lásd az 5. ábrát.)
- A tranzit típusúak  $r$  koordinátája monoton csökken, és  $r = -\infty$  végtelenben végződnek. Ezért ezek a geodetikusok a Penrose-diagramon balra haladva, a III. blokk  $r = -\infty$  térbeli (és időbeli) végtelenjében végződnek.

Visszafordítva a gondolatmenetet láthatjuk, hogy a fekete lyukon keresztül a mi világunk térbeli végtelenjét elérő geodetikusok vagy

- a Penrose-diagramon tőlünk jobbra lefelé elhelyezkedő I. blokkból (jelöljük ezt a blokkot  $I_{be}$ -vel) indultak és flyby típusúak, vagy
- a Penrose-diagramon tőlünk lefelé elhelyezkedő III. blokkból indultak és tranzit típusúak.

A kiterjesztett téridőnek csak e két blokkjáról indulhat olyan geodetikus, amelyet mi megfigyelhetünk, más tartományról nem.

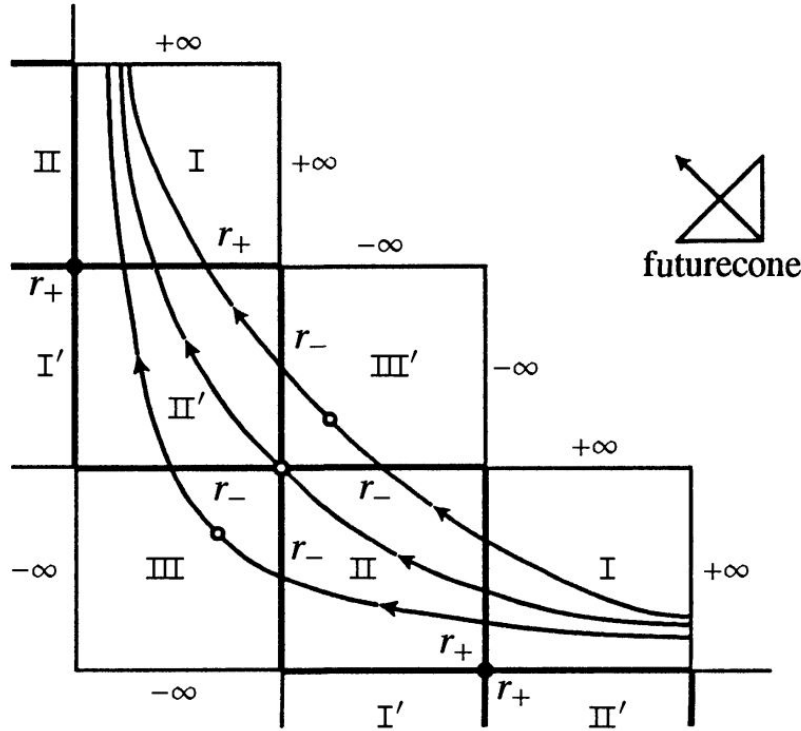
\*\*\*

Céлом, hogy meghatározzam: ha innen a Földről ránézünk egy Kerr-típusú fekete lyukra, milyen eloszlást mutatnak a fekete lyukba a másik világ(ok)ban beeső, azon áthaladó, hozzánk elérő részecskék. A mi, Földről végzett megfigyeléseink az  $I_{ki}$  blokkon, a fekete lyuktól igen távol, adott  $\vartheta$  szögben (látószög) elhelyezkedő pontból végzett megfigyelésnek felel meg; melyre egyszerűen csak megfigyelőként fogok hivatkozni. A részecskék közötti kölcsönhatást elhanyagolom, mozgásukat geodetikus mozgásként modellezem.<sup>8</sup> Ahhoz, hogy meghatározhassuk a megfigyelő által látott eloszlást, természetesen feltételezni kell valamit arról, mi a szög és a megmaradó mennyiségek szerinti eloszlása a beeső részecskéknek a másik világ(ok)ban. Első közelítésként feltételezem, hogy a beeső részecskék energiája adott, eloszlása pedig izotróp: a fekete lyuktól elegendően nagy sugarú gömbön (végtelen távol) a gömb (éggömb) bármely pontjáról bármely irányba azonos valószínűséggel indulnak részecskék, adott energiával. (Gömbi koordinátákban kifejezve ez azt jelenti, hogy az indítás  $\vartheta_0, \varphi_0$  kezdőkoordinátáira  $\cos \vartheta$  és  $\varphi$  eloszlása,  $v_{0,\vartheta}$ ,  $v_{0,\varphi}$  kezdősebességére pedig  $\cos v_{0,\vartheta}$  és  $v_{0,\varphi}$  eloszlása egyenletes.) Jelen dolgozatban csak az  $I_{be}$  blokkból érkező geodetikusokkal foglalkozom, a III. blokkból érkezőkkel nem – ez kézenfekvő egyszerűsítés, hiszen az I. blokk a miénkhez hasonló párhuzamos világ (így feltételezhetünk egy izotróp eloszlást), a III. blokk azonban lényegesen különböző (antiverzum).

Az  $I_{be}$  blokkból izotróp eloszlással indított geodetikusok egy része beesik a fekete lyukba. A beeső geodetikusok egy része a III. blokk  $r = -\infty$ -jén végződik, a másik részük pedig a megfigyelő  $I_{ki}$  világának  $r = \infty$  térbeli végtelenjén. Mivel a megfigyelő a fekete lyuktól távolról, igen kicsi térszögben

<sup>8</sup>Ennek megfelelően a vizsgált részecskékre sokszor egyszerűen a *geodetikus* szóval utalok; pl. a geodetikusok eloszlása.

néz rá a fekete lyukra, így ezek közül azokat tudja megfigyelni, amelyek a fekete lyuktól elegendően távol a látószög irányába haladnak (ezek azok a geodetikusok, amelyek mentén részecske vagy sugárzás érkezik a fekete lyukból a megfigyelőhöz). A dolgozatban a célom az ilyen geodetikusok eloszlásának, az eloszlás energiától és látószögtől való függésének meghatározása.



5. ábra. Flyby típusú geodetikusok a kiterjesztett Kerr-téridőn. Az ábrán látható az ilyen típusú geodetikusok három lehetséges esete: *A* (alsó), *B* (felső) és *S* (középső). Az *A* esetben az  $r$ -beli fordulópont (üres karikával jelölve) a III., a *B* esetben a III.' blokkon van. A kétféle esetet az *S* eset választja el (ez az eset a dolgozat szempontjából nem lesz fontos). Az ábra határára írt  $\pm\infty$ -ek a térbeli végteleneket jelölik. A *futurecone* jelöli a jövőszerű fénykúpot. Az ábra forrása: O'Neill [23].

## 5. A megfigyelőhöz eljutó geodetikusok vizsgálata

Az előző részben vázoltak alapján egyszerűnek tűnik a feladat: veszünk sok, izotróp eloszlással indított geodetikust az  $I_{be}$  blokkon, meghatározzuk a fekete lyukon való áthaladás után, elegendően nagy sugáron a koordinátáikat az  $I_{ki}$  blokkon, és kiválogatjuk azokat, amelyek a látószög irányába haladnak. Ezzel azonban nehézségekbe ütközünk: mivel az a térszög, amelyben a megfigyelő rálát a fekete lyukra, nagyon kicsi, ezért túlságosan sok geodetikust kellene vizsgálnunk ahhoz, hogy legyen köztük elegendően sok, amely ebbe a kis térszögbe esik. Ahhoz, hogy megoldjuk ezt a problémát, fordítsuk meg a vizsgált geodetikusokat: Kövessük időben visszafelé az  $I_{ki}$  blokkon, kellően nagy sugáron, az adott látószög irányába (adott energiával) érkező párhuzamos, homogén nyalábot a fekete lyuk felé. Az így indított geodetikusok közül vizsgáljuk azokat, amelyek az  $I_{be}$  blokk  $r = \infty$ -jén végződnek. Visszafordítva a geodetikusok időbeli irányát, ezek lesznek azok a geodetikusok, amelyek a fordított esetben eljutnak a megfigyelőhöz. Ezután megvizsgáljuk a geodetikusok eloszlását az  $I_{be}$  blokk térbeli végtelenjén. A nyalábot az itteni  $\vartheta$  és  $\varphi$  koordináták szerinti sűrűségeloszlással visszanyomva az  $I_{be}$  blokkbeli eloszlás izotróp eloszlásba illeszkedik. Ha visszafordítjuk a geodetikusok időbeli irányát, megkapjuk az  $I_{be}$  blokkról induló, az  $I_{ki}$  blokkbeli megfigyelőhöz eljutó geodetikusok intenzitásbeli eloszlását, ha a beeső geodetikusok eloszlása izotróp.

## 6. Kezdőfeltételek

Ahhoz, hogy a fekete lyukon áthaladó geodetikusokat vizsgálni tudjuk, ki kell választanunk, milyen kezdőfeltétellel szeretnénk indítani a geodetikusokat. Ez a kezdeti hely ( $x^k$ ) és négyessebesség ( $u_k$ ) megadását jelenti. A négyessebesség megadása ekvivalens az  $(E, Q, L)$  három darab megmaradó mennyiség megadásával (valamint a  $q$  rögzítésével). Ezt legegyszerűbben BL-koordinátákban tudjuk megtenni. (26), (27) és (34) alapján

$$u_k = \begin{pmatrix} E \\ u_r \\ \pm \sqrt{Q - \cos^2 \vartheta (a^2(1 - E^2) + L^2/\sin^2 \vartheta)} \\ -L \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Ezután az  $u_r$  komponenst az  $u_k u^k = q$  feltételből tudjuk meghatározni (ügyelve rá, hogy a skálárszorozást a metrikus tenzor megfelelő, BL-koordinátákban felírt alakjával végezzük). Az  $u_r$  és  $u_\vartheta$  komponensek előjelét tetszés szerint választhatjuk.

### 6.1. Párhuzamos nyaláb

Egymással párhuzamos sebességgel indított geodetikusokhoz tartozó kezdőfeltételeket a legegyszerűbben úgy tudunk felírni, ha a négyessebességeket Kerr–Schild-koordinátákban (Descartes-koordinátákban) írjuk fel, majd áttranszformáljuk őket BL-koordinátákba.<sup>9</sup> Kerr–Schild-koordinátákban az  $x-z$  síkkal párhuzamosan, a függőlegessel  $\alpha$  szöget bezáró négyessebességet az

$$u_{(D)}^k = (u, -v \sin \alpha, 0, -v \cos \alpha) \quad (40)$$

alakban tudunk felírni.<sup>10</sup> Ezt, a Descartes-koordinátákban felírt, felsőindexes négyessebességet a

$$\Lambda_{kl} = g_{km}^{(BL)} \frac{\partial x_{(BL)}^m}{\partial x_{(D)}^l} \quad (41)$$

mátrixszal transzformálhatjuk BL-koordinátákban felírt, alsóindexes négyessebességgé. Az ebben szereplő deriváltmátrixot a (7) transzformációs képletek invertálásával kell meghatároznunk. A (7) képletek sajnos analitikusan nem invertálhatóak, azonban az egyes egyenletek bal oldalon álló koordináta szerinti deriváltját véve egyenletrendszert kapunk a  $\partial r/\partial x$  stb. deriváltakra. Az egyenletrendszert a *Mathematica* szoftverrel oldottam meg. Ezzel megvan a (41) transzformációs mátrix, amelyet a (40) egyenletre hattatva megkapjuk a négyessebességet (39) alakban. A (40) egyenletben szereplő  $u$  paramétert az  $u_k u^k = 1$  feltételből kapjuk.

## 7. A geodetikus egyenletek megoldása

Ebben a fejezetben a célom a (37) és (38) geodetikus egyenletek specifikálása a dolgozatban vizsgált esetekre. Amit vizsgálni szeretnék, hogy az I. blokkon  $t = t_0$ ,  $r_0 = \infty$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  pontból adott megmaradó mennyiségekkel indított, a fekete lyukon áthaladó, flyby típusú geodetikusnak mik lesznek a  $t_f$ ,  $\vartheta_f$ ,  $\varphi_f$  végső koordinátái az áthaladás után  $r = \infty$ -ben.

<sup>9</sup>Mivel a horizontokon áthaladó geodetikusokkal foglalkozom, a geodetikusok számítása végig  $K^*$ - és  $*K$ -koordinátákban történik. A megmaradó mennyiségek kiolvasása azonban (39) alapján a BL-koordinátákban felírt (alsóindexes) négyessebességből praktikus.

<sup>10</sup>Mivel ezt az alakot a koordináták deriváltjaként definiáljuk, a felsőindexes négyessebességet kapjuk.

### 7.1. A flyby típusú geodetikusok a Penrose-diagramon

Az általunk vizsgált, flyby típusú geodetikusok befelé haladva áthatolnak a horizontokon, majd az  $r$ -beli fordulópont után kifelé haladva ismét áthatolnak a horizontokon. Ez azonban a Penrose-diagramon kétféleképpen is megtörténhet attól függően, hogy az 5. ábrán melyik  $r_+$ - és  $r_-$ -oldalakon haladnak át. Az ábra szerint megkülönböztetjük az  $A$  és a  $B$  esetet.<sup>11</sup> Az  $A$  eset feltétele, hogy  $P(r_-) < 0$  (ami ekvivalens az  $L < 2MEr_-/M$  feltétellel); a  $B$  eset feltétele, hogy  $P(r_-) > 0$  (ami ekvivalens az  $L > 2MEr_-/M$  feltétellel). Az  $A$  esetben a geodetikust két koordinátarendszerrel kell térképezni: az 5. ábrán jelölt irányban haladva a geodetikus  $K^*$ -on indul, majd a III. blokkon át kell tértünk a  $*K$ -ra. A  $B$  esetben négy koordinátarendszer kell a geodetikus térképezéséhez:  $K^*$ -ról a II. blokkon át kell térni a  $*K'$ -re, onnan a III.' blokkon a  $K'^*$ -re, végül a II.' blokkon a  $*K$ -ra.

### 7.2. Az $r$ -mozgás

Az flyby típusú geodetikusok esetén az  $r$ -mozgást meghatározó  $R(r)$  függvénynek két komplex és két valós (jelöljük ezeket  $r_1 < r_2$ -vel) gyöke van, és  $r \rightarrow \infty$  esetén  $R(r) \rightarrow \infty$ . Ez azt jelenti, hogy az  $r$  koordináta  $r = \infty$ ,  $r' < 0$  kezdőfeltétellel indulva monoton csökken az  $r_{\min} = r_2$  minimális sugárig, ott fordulópontja van, majd monoton nő  $r = \infty$ -ig. Az, hogy a geodetikus behatol a fekete lyukba, azt jelenti, hogy  $r_{\min} < r_+$ .<sup>12</sup> Ezzel megvan, mit kell a (37) bal oldalára írni: befelé haladva  $\infty$ -tól  $r_{\min}$ -ig, kifelé haladva pedig  $r_{\min}$ -tól  $\infty$ -ig kell integrálni.

### 7.3. A $\vartheta$ -mozgás

Ahogy a (37) egyenletben láttuk, a  $\vartheta$ -mozgást a  $\Theta(\vartheta)$  függvény határozza meg:  $\vartheta$  azon a tartományon változhat, amelyen  $\Theta(\vartheta) > 0$ .  $\Theta(\vartheta)$  zérushelyeit meghatározva a fordulópontokat alább írom föl.

Ahhoz, hogy megkapjuk  $\vartheta_f$ -t, a (37) egyenletet kell használnunk. Ez az összefüggés azt mondja, hogy adott  $r_0$ ,  $\vartheta_0$ -ból indulva, ha a bal oldalon adott  $r$ -ig integrálunk, meghatározhatjuk, milyen  $\vartheta$ -ig kell integrálni a jobb oldalon, és ezzel megkapjuk  $\vartheta(r)$ -t. Az integrál felső határát ha másképpen nem, numerikusan meg tudjuk határozni.

A  $\vartheta$  szerinti integrál felső határának numerikus meghatározása helyett azonban analitikusan is dolgozhatunk. A (37) jobb oldalán szereplő integrál kifejezhető ugyanis egy elliptikus integrállal [9]. Ehhez  $\vartheta$  helyett térjünk át a  $\mu = \cos \vartheta$  integrálási változóra:

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(\tau)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta(\vartheta)}} = - \int_{\mu_0=\cos \vartheta_0}^{\mu=\cos \vartheta} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}}, \quad (42)$$

ahol

$$\Theta_\mu = -a^2(E^2 - 1)\mu^4 - [L^2 + Q - a^2(E^2 - 1)]\mu^2 + Q. \quad (43)$$

A részletes számolásokhoz külön kell tárgyalni a  $Q > 0$  és a  $Q < 0$  esetet.

#### 7.3.1. A $Q > 0$ eset

Ebben az esetben a  $\Theta_\mu$  zérushelyeit megvizsgálva belátható, hogy a fordulópontokat a

$$\mu_{\pm}^2 = \frac{1}{2a^2(E^2 - 1)} \left[ \sqrt{(L^2 + Q - a^2(E^2 - 1))^2 + 4a^2Q(E^2 - 1)} \mp (L^2 + Q - a^2(E^2 - 1)) \right] \quad (44)$$

<sup>11</sup>Az  $S$  esettel nem foglalkozom, mert az a geodetikusoknak csupán nullmértékű részhalmaza, ezért a numerikus szimulációban nem fordul elő.

<sup>12</sup>Az  $R(r)$  függvény (32) alakjából belátható, hogy ha  $r_{\min} < r_+$ , akkor  $r_{\min} < r_-$ , magyarul ha a geodetikus áthatol a külső horizonton, biztosan áthatol a belsőn is; a kettő között nem lehetséges  $r$ -beli fordulópont.

egyenlet határozza meg [9], mellyel kifejezve

$$\Theta_\mu = a^2(E^2 - 1)(\mu_+^2 - \mu^2)(\mu_-^2 + m\mu^2). \quad (45)$$

Látható, hogy  $0 \leq \mu^2 \leq \mu_+^2$ , vagyis  $\vartheta$  a  $\cos^{-1}(\mu_+) \leq \vartheta \leq \cos^{-1}(-\mu_+)$  tartományon oszcillál, amely szimmetrikus a  $\pi/2$  egyenlítői síkra.

Ennek a megfelelő integrálja kifejezhető egy elliptikus integrállal:

$$\int_\mu^{\mu_+} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = \frac{1}{a\sqrt{(E^2 - 1)(\mu_+^2 + \mu_-^2)}} \cdot F(\psi, k), \quad (46)$$

ahol  $F(\psi, k)$  elsőfajú, inkomplett elliptikus integrál (a elliptikus integrálokkal kapcsolatban használt konvencióról lásd az (A) egyenletet); a paraméterek

$$k = \frac{\mu_+^2}{\mu_+^2 + \mu_-^2},$$

$$\cos(\psi(\mu)) = \frac{\mu}{\mu_+}. \quad (47)$$

Ennek segítségével a (42) jobb oldalán szereplő integrált két részre bontva és a (37) egyenletbe helyettesítve az alábbi formulát kapjuk:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = -\epsilon \int_{\mu_0}^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = \epsilon \int_\mu^{\mu_+} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} + \epsilon \int_{\mu_+}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}}, \quad (48)$$

ahol  $\epsilon = \text{sgn}(r') \cdot \text{sgn}(\vartheta')$ . A jobb oldalon szereplő összeg első tagját (46)-ból helyettesítve

$$F(\psi, k) = a\sqrt{(E^2 - 1)(\mu_+^2 + \mu_-^2)}\epsilon \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + F(\psi_0, k), \quad (49)$$

ahol  $\psi_0 = \psi(\mu_0)$ .

### 7.3.2. A $Q < 0$ eset

Ebben az esetben a fordulópontokat a

$$\mu_\pm^2 = \frac{1}{2a^2(E^2 - 1)} \left[ \pm \sqrt{(-L^2 + |Q| + a^2(E^2 - 1))^2 - 4a^2|Q|(E^2 - 1)} + (-L^2 + |Q| + a^2(E^2 - 1)) \right] \quad (50)$$

egyenlet határozza meg [9], mellyel kifejezve

$$\Theta_\mu = a^2(E^2 - 1)(\mu_+^2 - \mu^2)(\mu_-^2 - m\mu^2). \quad (51)$$

Látható, hogy  $\mu_-^2 \leq \mu^2 \leq \mu_+^2$ , vagyis  $\vartheta$  vagy a  $\cos^{-1}(\mu_+) \leq \vartheta \leq \cos^{-1}(\mu_-)$  (északi félgömb), vagy a  $\cos^{-1}(-\mu_-) \leq \vartheta \leq \cos^{-1}(-\mu_+)$  (déli félgömb) tartományon oszcillál (nem metszi a  $\pi/2$  egyenlítői síkot).

Ennek a megfelelő integrálja szintén kifejezhető egy elliptikus integrállal:

$$\int_{\mu_-}^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = \frac{1}{a\mu_+\sqrt{E^2 - 1}} \cdot F(\psi, k), \quad (52)$$

ahol a paraméterek

$$k = \frac{\mu_+^2 - \mu_-^2}{\mu_+^2}$$

$$\sin(\psi(\mu)) = \sqrt{\frac{\mu_+^2(\mu^2 - \mu_-^2)}{\mu^2(\mu_+^2 - \mu_-^2)}}. \quad (53)$$

Ennek segítségével a (42) jobb oldalán szereplő integrált két részre bontva és a (37) egyenletbe helyettesítve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = -\epsilon \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} = -\epsilon \int_{\mu_-}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} + \epsilon \int_{\mu_-}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}}. \quad (54)$$

A jobb oldalon szereplő összeg két tagját (52)-ből helyettesítve

$$F(\psi, k) = -a\mu_+ \sqrt{E^2 - 1} \epsilon \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + F(\psi_0, k). \quad (55)$$

\*\*\*

Adott  $r$  (valamint  $r_0$  és  $\mu_0$  kezdeti koordináták) esetén a (49), illetve (55) egyenlet jobb oldalán álló kifejezéseket ismerjük, ezért a bal oldalon álló elliptikus integrált invertálva megkaphatjuk  $\psi$ -t, amelyből (47), illetve (53) alapján meghatározhatjuk  $\vartheta(r) = \cos^{-1} \mu$ -t.

A jobb oldalon álló  $r$ -integrál numerikus elvégzése a mi esetünkben nem praktikus, mert az egyik integrálási határ,  $r_0$  nagyon nagy (végtelen), a másik,  $r = r_{\min}$  pedig  $R(r)$  egyik zérushelye. Szerencsére ezt az integrált is lehetséges elliptikus integrállal kifejezni. Az integrandus (32) és (29) alapján egy negyedfokú polinom  $-1/2$ -ik hatványa. Az ilyen típusú integrálok a [7] alapján elliptikus integrállá alakíthatóak az alábbiak szerint.

$$\int_{r_0}^{r_{\min}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = -\frac{g}{\sqrt{E^2 - 1}} \cdot F(\phi, m). \quad (56)$$

Az itt szereplő paraméterek

$$g = \frac{1}{\sqrt{AB}}; \cos \phi = \frac{(A - B)r_0 + r_2 B - r_1 A}{(A + B)r_0 - r_2 B - r_1 A}; m = \frac{(A + B)^2 - (r_2 - r_1)^2}{4AB}$$

$$A = \sqrt{(r_2 - b_1)^2 + a_1^2}; B = \sqrt{(r_1 - b_1)^2 + a_1^2}; a_1 = \sqrt{\frac{-(c - c^*)^2}{4}}; b_1 = \frac{c + c^*}{2}, \quad (57)$$

ahol  $r_1$  és  $r_2$  az  $R(r)$  függvény valós ( $r_1 < r_2 = r_{\min}$ ),  $c$  és  $c^*$  pedig a komplex gyökei.

Az egyenletben szereplő  $\epsilon = \text{sgn}(r') \cdot \text{sgn}(\vartheta')$  előjel azonban további nehézséget jelent a (49) és (55) egyenletek alkalmazásánál. Ez ugyanis megváltozik, valahányszor fordulópont van  $\vartheta$ -ban, ezért az egyenletek csak az egyes fordulópontok közötti szakaszokra alkalmazhatók közvetlenül. Ha az általunk vizsgált,  $r_0$ -tól  $r_{\min}$ -ig tartó szakaszon van fordulópont, akkor a (37) jobb oldalán álló integrált több részletben kell elvégezni, ügyelve arra, hogy az  $\epsilon$  előjel más lesz a különböző tagoknál. Vegyük például azt az esetet, amikor  $Q > 0$ , az  $r_0$  kezdőpontban  $\text{sgn}(\vartheta') > 0$  (és természetesen  $\text{sgn}(r') < 0$ ), és egy darab fordulópont van  $\vartheta$ -ban, mielőtt a geodetikus eléri az  $r_{\min}$  sugarat. Ekkor a (37) egyenlet helyes alakja a következő:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_+} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta(\vartheta)}} + \int_{\vartheta_+}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta(\vartheta)}}. \quad (58)$$

Áttérve a  $\mu$  változóra és felbontva az integrálokat

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \int_{\mu_0}^{\mu_+} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} + 2 \int_{\mu_+}^{-\mu_+} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} + \int_{\mu}^{\mu_+} \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}}. \quad (59)$$

(46) segítségével a jobb oldalon álló integrálokat (az  $F$ -et (46)-ban szorzó tényező erejéig) kifejezhetjük rendre  $F(\psi_0, k)$ -val,  $F(\psi(-\mu_+), k)$ -val és  $F(\psi, k)$ -val. Ezeket beírva kapjuk a (49) helyébe lépő

$$F(\psi, k) = a\sqrt{(E^2 - 1)(\mu_+^2 + \mu_-^2)} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} - F(\psi_0, k) + 2F(\psi(-\mu_+), k) \quad (60)$$

összefüggést. (47) alapján azonban  $\psi(-\mu_+) = \pi$ . Jelöljük  $\psi_e$ -vel a fordulópont előtt érvényes (49) invertálásával számított,  $\psi_u$ -val pedig a fordulópont után érvényes, (60) invertálásával számított  $\psi$  értéket. Ezzel

$$F(\psi_u, k) = -F(\psi_e, k) + 2 \cdot F(\pi, k). \quad (61)$$

Ez azt jelenti, hogy az első és második fordulópont közötti szakaszon  $\psi_u$  a  $0 < \psi_u < \pi$  tartományban,  $\psi_e$  pedig a  $\pi < \psi_e < 2\pi$  tartományban változik. Felhasználva az elliptikus integrálok periodicitását kifejező

$$F^{-1}(-x + 2F(\pi, k), k) - \pi = \pi - F^{-1}(x, k) + 2\pi \quad (62)$$

képletet azt kapjuk, hogy  $\psi_e = 2\pi - \psi_u$ , tehát  $\cos \psi_e = \cos \psi_u$ .

Ebből következik, hogy a fordulópont után is használhatjuk az eredeti, (49) összefüggést a  $\vartheta$  meghatározására: az így kapott  $\psi$  értéke eltér attól, amit a (60) invertálásával kapnánk, mivel azonban  $\vartheta$  számításához a  $\psi$  koszinuszára van szükség, ez az eltérés nem számít. Ez ráadásul segítségünkre is lesz később: az alapján, hogy a (49) invertálásával kapott  $\psi$  érték  $\pi$  egész számú többszörösei szerint melyik tartományba esik, meg tudjuk állapítani, hány fordulópont volt a mozgás során. Ha az  $\text{sgn}(\vartheta') < 0$  esetet vesszük, a számolás analóg, csupán annyi a különbség, hogy az integrálok felbontásánál  $-\mu_+$  helyett  $\mu_+$ -t kell venni.

Hasonló számításokkal igazoltam, hogy több fordulópont, valamint  $Q < 0$  esetén is használható az eredeti képlet  $\vartheta$  számítására. Ezen eredményekre támaszkodva tehát  $\vartheta$ -t a (49) és (55) egyenletek invertálásával számolom. Ezen számolások saját eredményeim, az irodalomban korábban nem szerepeltek.

Vizsgáljuk most meg, mi történik, amikor az  $r$  koordináta fordulóponthoz ér  $r = r_{\min}$ -nél. A (37) egyenletben ekkor  $\text{sgn}(r')$  előjelet vált, ezzel egyidőben azonban az integrálási határok is felcserélődnek: a fordulópont előtt befelé haladva integráltunk ( $r$  csökkent), utána kifelé haladva integrálunk ( $r$  nő). Emiatt az  $r_0 \rightarrow r_{\min} \rightarrow r_0$  folyamat számításánál az  $r$  szerinti integrált egyben kifejezhetjük, és (37) bal oldalára, illetve (49) és (55) jobb oldalára a

$$2 \cdot \int_{r_0}^{r_{\min}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} \quad (63)$$

integrált helyettesíthetjük. Ezzel megkaptuk, hogyan kell meghatározni a  $\vartheta_f$  koordinátát az áthaladás után  $r = r_0$  sugáron, ha adott a kezdeti  $\vartheta_0$  az áthaladás előtt  $r = r_0$ -ban, valamint adottak megmaradó mennyiségek és  $\text{sgn}(\vartheta'_0)$ . Ha  $Q > 0$ , akkor a

$$\psi = F^{-1} \left( 2a \sqrt{(E^2 - 1)(\mu_+^2 + \mu_-^2)} \cdot \text{sgn}(\vartheta'_0) \int_{r_0}^{r_{\min}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + F(\psi_0, k), k \right) \quad (64)$$

inverz elliptikus integrállal (ahol  $\mu_{\pm}$ -t (44),  $k$ -t (47) adja meg) kapott  $\psi$ -ből (47) alapján; ha pedig  $Q < 0$ , akkor a

$$\psi = F^{-1} \left( -2a\mu_+ \sqrt{E^2 - 1} \cdot \text{sgn}(\vartheta'_0) \int_{r_0}^{r_{\min}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + F(\psi_0, k), k \right) \quad (65)$$

inverz elliptikus integrállal (ahol  $\mu_{\pm}$ -t (50),  $k$ -t (53) adja meg) kapott  $\psi$ -ből (53) alapján határozhatjuk meg  $\mu = \cos \vartheta_f$ -t. Az  $r$  szerinti integrált mindkét esetben (56)-ból számítjuk.

### 7.3.3. A $\vartheta$ -fordulópontok számának meghatározása

Jelöljük  $m$ -mel a fordulópontok számát. Amint fentebb utaltam rá,  $m$  értékét az elliptikus integrálok invertálásával kapott (64) és (65)  $\psi$  mennyiségekből tudjuk meghatározni. Tanulmányozzuk figyelmesen, mi történik ezekben a kifejezésekben az inverz elliptikus integrálok argumentumában!

### A $Q > 0$ eset

Az indítás pillanatában az  $r$ -integrál zérus, ezért  $0 \leq \psi_0 \leq \pi$ . A fordulópontokon  $\cos \vartheta = \pm \mu_+$ , ezért (47) alapján minden alkalommal, amikor  $\psi = n\pi$ , fordulópont van. Ha  $\text{sgn}(\vartheta'_0) < 0$ , amint az  $r_0$ -ból indított geodetikus halad ( $r$  csökken), úgy (64) argumentuma monoton nő, ezért az invertálásával kapott  $\psi$  is monoton nő. Ha  $\text{sgn}(\vartheta'_0) > 0$ , amint az  $r_0$ -ból indított geodetikus halad ( $r$  csökken), úgy (64) argumentuma monoton csökken, ezért az invertálásával kapott  $\psi$  is monoton csökken. A fordulópontok száma tehát mindkét esetben

$$m = |\psi \setminus \pi|. \quad (66)$$

Az abszolútértékben álló kifejezés  $\psi$  egész osztása  $\pi$ -vel (a hányados egész része).

### A $Q < 0$ eset

Ebben az esetben  $0 \leq \psi_0 \leq \pi/2$ . A  $\cos \vartheta = \pm \mu_-$  fordulópontokon (53) alapján  $\psi = n\pi$ , a  $\cos \vartheta = \pm \mu_+$  fordulópontokon pedig  $\psi = \pi/2 + n\pi$ . Ha  $\text{sgn}(\vartheta'_0) > 0$ , (65) argumentuma monoton nő, ezért  $\psi$  is monoton nő. Ha  $\text{sgn}(\vartheta'_0) < 0$ , (65) argumentuma monoton csökken, ezért  $\psi$  is monoton csökken. A fordulópontok száma így mindkét esetben

$$m = |\psi \setminus (\pi/2)|. \quad (67)$$

## 7.4. A $t$ - és $\varphi$ -mozgás

A  $t$ - és  $\varphi$ -mozgást meghatározó egyenleteket a (38) alkalmazásával kaphatjuk az általunk tanulmányozott esetre. Az egyenletek alkalmazásához három dolgot kell diszkutálnunk: a  $\vartheta$ -integrálok előtt álló előjelet, az  $r$ -integrálokban szereplő előjelet és az  $r$ -integrálokban szereplő  $\oplus 1$  tagot.

### 7.4.1. A $\vartheta$ -integrálok

A  $\vartheta$ -integrálok előtt álló előjelet  $\text{sgn}(\vartheta')$  adja, az előjel tehát ellentétesre változik, valahányszor  $\vartheta$  fordulóponthoz érkezik. Példaként vizsgáljuk a  $\varphi$  koordinátát ( $t$  esete teljesen analóg). Ha tudjuk, hogy hány fordulópontja van  $\vartheta$ -nak a vizsgált szakaszon, akkor a fordulópontok közötti szakaszok alapján a teljes  $\vartheta$ -integrált felírhatjuk. Rövidítsük  $\Phi_\vartheta$ -val a (38) első egyenletében szereplő  $\vartheta$  szerinti integrál integrandusát. A teljes integrál függeni fog attól, hogy a fordulópontok  $m$  száma páros vagy páratlan, illetve hogy  $\text{sgn}(\vartheta'_0)$  pozitív vagy negatív. Az integrál a teljes szakaszon a különböző esetekben:

$$\int \Phi_\vartheta d\vartheta = \begin{cases} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_+} \Phi_\vartheta d\vartheta + (m-1) \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \Phi_\vartheta d\vartheta + \int_{\vartheta_-}^{\vartheta} \Phi_\vartheta d\vartheta, & \text{ha } m \text{ páros és } \text{sgn}(\vartheta'_0) > 0; \\ -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_-} \Phi_\vartheta d\vartheta + (m-1) \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \Phi_\vartheta d\vartheta - \int_{\vartheta_+}^{\vartheta} \Phi_\vartheta d\vartheta, & \text{ha } m \text{ páros és } \text{sgn}(\vartheta'_0) < 0; \\ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_+} \Phi_\vartheta d\vartheta + (m-1) \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \Phi_\vartheta d\vartheta - \int_{\vartheta_+}^{\vartheta} \Phi_\vartheta d\vartheta, & \text{ha } m \text{ páratlan és } \text{sgn}(\vartheta'_0) > 0; \\ -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_-} \Phi_\vartheta d\vartheta + (m-1) \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} \Phi_\vartheta d\vartheta + \int_{\vartheta_-}^{\vartheta} \Phi_\vartheta d\vartheta, & \text{ha } m \text{ páratlan és } \text{sgn}(\vartheta'_0) < 0. \end{cases} \quad (68)$$

A  $\vartheta$ -tartomány  $\vartheta_+$  és  $\vartheta_-$  határait a  $Q > 0$  esetben a (45), a  $Q < 0$  esetben pedig az (51) utáni diszkusszió alapján kapjuk. E képletek szintén saját eredményeim.

### 7.4.2. Az $r$ -integrálok

Ahhoz, hogy a (38) egyenletben szereplő  $r$ -integrálokat felírjuk, a bennük szereplő  $\oplus$  előjel miatt a geodetikusok pontos menete szerint az 5. ábrán látható módon meg kell különböztetnünk az  $A$  és

$B$  esetet. Tekintsük itt is (38)  $\varphi$ -re vonatkozó egyenletét ( $t$  analóg módon adódik). Az alábbiakban felírom a két esetben érvényes  $r$ -integrálokat. Ehhez az egyes esetekben szükséges koordinátázásokat kell követni, és  $\oplus$  helyébe a megfelelő előjelet ( $K^*$ -on és  $K^{*'}-n$  (+),  ${}^*K$ -n és  ${}^*K'-n$  (-)) írni. A koordinátarendszerek közötti váltásnál végre kell hajtani a megfelelő koordinátatranszformációt is. A  $K^* \leftrightarrow {}^*K$ , valamint a  $K^{*'} \leftrightarrow {}^*K'$  áttéréseknél (22) megfelelő alakját kell alkalmazni.

#### Az $A$ eset

Ebben az esetben a geodetikus a

$$K^* \rightarrow {}^*K \quad (69)$$

térképeken fut, így a teljes  $r$ -járulékot két részben tudjuk felírni:

$$\begin{aligned} \int \Phi_r dr &= \int_{r_0}^{r_{\min}} \frac{a}{\Delta} \left( \frac{-P(r)}{\sqrt{R(r)}} + 1 \right) dr - 2A(r_{\min}) + \int_{r_{\min}}^{r_0} \frac{a}{\Delta} \left( \frac{P(r)}{\sqrt{R(r)}} - 1 \right) dr = \\ &= -2A(r_{\min}) + 2 \int_{r_{\min}}^{r_0} \frac{a}{\Delta} \left( \frac{P(r)}{\sqrt{R(r)}} - 1 \right) dr, \end{aligned} \quad (70)$$

ahol a  $-2A(r_{\min})$  tag a koordinátarendszerek közötti (22) transzformációból jön. (A  $K^* \rightarrow {}^*K$  transzformációt bárhol elvégezhetjük a III. blokkon, az eredmény nem függ tőle – az  $r = r_{\min}$  pont praktikus választás.)

#### A $B$ eset

Ebben az esetben a geodetikus a

$$K^* \rightarrow {}^*K' \rightarrow K^{*'} \rightarrow {}^*K \quad (71)$$

térképeken fut, így a teljes  $r$ -járulékot négy részben tudjuk felírni:

$$\begin{aligned} \int \Phi_r dr &= \int_{r_0}^1 \frac{a}{\Delta} \left( \frac{-P(r)}{\sqrt{R(r)}} + 1 \right) dr + \int_1^{r_{\min}} \frac{a}{\Delta} \left( \frac{-P(r)}{\sqrt{R(r)}} - 1 \right) dr + \\ &+ 2A(r_{\min}) + \int_{r_{\min}}^1 \frac{a}{\Delta} \left( \frac{P(r)}{\sqrt{R(r)}} + 1 \right) dr + \int_1^{r_0} \frac{a}{\Delta} \left( \frac{P(r)}{\sqrt{R(r)}} - 1 \right) dr = \\ &= 2A(r_{\min}) + 2 \int_{r_{\min}}^1 \frac{a}{\Delta} \left( \frac{P(r)}{\sqrt{R(r)}} + 1 \right) dr + 2 \int_1^{r_0} \frac{a}{\Delta} \left( \frac{P(r)}{\sqrt{R(r)}} - 1 \right) dr, \end{aligned} \quad (72)$$

ahol a  $+2A(r_{\min})$  tag a  ${}^*K' \rightarrow K^{*'}$  koordinátarendszerek közötti transzformációból jön ((22) inverze). (A másik két áttéréseknél az (5) egyenletben szereplő integrációs konstans megfelelő választásával  $A(1) = 0$ .)

\*\*\*

Ezzel a  $\varphi$  koordinátát a

$$\varphi = \int \Phi_\vartheta + \int \Psi_r dr + \varphi_0 \quad (73)$$

módon számíthatjuk, ahol az egyes integrálok a fenti jelöléssel összhangban a  $\vartheta$ - és  $r$ -járulékokat jelölik, és (68), illetve (70) vagy (72) alapján kell behelyettesíteni őket.

## 8. Az árapályerő

Az eredmények értelmezéséhez érdemes nyomon követni, mekkora maximális árapályerő lép fel az egyes trajektóriák mentén – ez ugyanis segíthet kvalitatíve megérteni a kialakuló szórási képeket, mert

az árapályerő megmutatja, hogy az egymáshoz közeli geodetikusok mennyire távolodnak el egymástól (mennyire szóródnak szét). A geodetikusokon haladó, véges kiterjedésű testek (pl. részecskék) esetén az árapályerővel arányos erő igyekszik deformálni (széttépni vagy összenyomni) a testet. Nagyon nagy árapályerő kvantumeffektusok kialakulásához is vezethet, ezért fizikailag értelmes lehet azokra a geodetikusokra korlátozódni, amelyeken az árapályerő nem halad meg egy bizonyos küszöbértéket.

Vizsgáljuk egy  $\mathcal{G}$  geodetikus adott  $x^k(\tau)$  pontjának kicsiny környezetében haladó,  $x^k + \eta^k$  geodetikusokat.  $\eta$  a deviációs négyesvektor; a geodetikushoz rögzített Fermi-koordinátákban  $\eta^k = (0, \eta_x, \eta_y, \eta_z)$ . Megmutatható, hogy a geodetikusokat leíró *deviációs egyenlet* kovariáns formába írható;  $\eta$ -ban elsőrendű pontossággal

$$\frac{D^2 \eta^k}{d\tau^2} = R_{lmp}^k \Big|_{\mathcal{G}} u^l u^m \eta^p, \quad (74)$$

ahol  $R_{lmp}^k$  a Riemann-tenzor. Vezessük be a következő kétindexes tenzort (*árapálytenzor*)  $\mathcal{G}$ -n:

$$T_p^k(\tau) = R_{lmp}^k \Big|_{\mathcal{G}} u^l u^m. \quad (75)$$

Látható, hogy e tenzor határozza meg az árapályerőt:  $K^k = T_l^k \eta^l$ . Ez az erő (gyorsulás) adja meg, hogy a  $\mathcal{G}$  adott pontjához közeli geodetikusok milyen gyorsulással távolodnak  $\mathcal{G}$ -től. A  $\mathcal{G}$  adott pontjában fellépő árapályerő nagyságát a  $T_l^k$  tenzor sajátértékeivel<sup>13</sup> jellemezhetjük. A négy darab  $\lambda_{(k)}$  sajátérték megadja, hogy a hozzá tartozó sajátirányban mekkora árapályerő hat. Szemléletesen ez úgy képzelhető el, hogy a geodetikus adott pontján haladó kicsi, egymástól független pontokból álló gömb hogyan torzul ellipszissé (illetve időben hogyan torzul).

A Kerr-metrika időszerű geodetikusai mentén fellépő árapálytenzor analitikusan ismert. A [22] cikkben szerepel az árapálytenzor egzakt alakja. Az ottani alakból a **Mathematica** segítségével meghatároztam a  $T_l^k$  tenzor sajátértékeit. A térszerű sajátértékekre a következő kifejezések adódnak:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{I_1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{(2K + r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)^2 I_1^2 + 4(K + r^2)(K - a^2 \cos^2 \vartheta) I_2^2}}{(r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)}, \\ \lambda_2 &= I_1, \\ \lambda_3 &= -\frac{I_1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{(2K + r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)^2 I_1^2 + 4(K + r^2)(K - a^2 \cos^2 \vartheta) I_2^2}}{(r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)}, \end{aligned} \quad (76)$$

ahol

$$I_1 = Mr \frac{r^2 - 3a^2 \cos^2 \vartheta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^3}, \quad I_2 = Ma \cos \vartheta \frac{3r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^3}, \quad (77)$$

$K$  pedig a (33)-ban szereplő módosított Carter-állandó,  $K = Q + (L - aE)^2$ . Ezek az egyenletek úgy értendők, hogy adott geodetikus esetén a megfelelő  $K$  értéket behelyettesítve megkapjuk a geodetikus  $r(\tau)$ ,  $\vartheta(\tau)$  pontjában az árapálytenzor sajátértékeit.

## 9. A numerikus szimuláció áttekintése

A 4. részben kitűzött feladat megvalósításához a geodetikus egyenletek megoldását numerikus módszerekkel végzem. Az program **Python** nyelven került implementálásra: ez rosszabb futási időt eredményez, cserébe rendkívül praktikus az elliptikus integrálokra és numerikus integrálásra használható csomagok miatt. A geodetikusok számítása során az  $r$ -beli végtelent numerikusan  $r_0 = 10^7$ -nek veszem; a geodetikusokat ettől a sugártól indítom és itt is érnek véget. A program felépítése a következő.

<sup>13</sup>Mivel  $T_l^k$  egy alsó- és egy felsőindexes tenzor, van értelme a sajátértékeiről beszélni.

- **A kezdőfeltételek implementálása.** Amint a 4. részben megállapítottam, ahhoz, hogy a megfigyelőhöz eljutó geodetikusokat tanulmányozhassuk, a látóirányból indított homogén (párhuzamos) nyaláb szóródását kell tanulmányoznunk. Ezen geodetikusok időben megfordítva és intenzitásban visszanyomulva fogják adni az izotróp kezdőfeltétel esetén a megfigyelőhöz eljutó geodetikusokat. A párhuzamos nyaláb implementálása a 6.1 rész alapján történik: Kerr–Schild-koordinátákban az adott  $r_0$  sugáron a  $\vartheta = \alpha$ ,  $\varphi = 0$  látóirány környezetében az  $x - z$  síkkal párhuzamos kezdeti négyesimpulzusokat gyártunk (40) szerint, majd ezeket (41) alapján BL-koordinátákba számítjuk át. (Amint említettem, a (41) transzformációs mátrixot a (7) alapján numerikusan lehet meghatározni. Kiszámítását Mathematicával végeztem.) Az így kapott négyesimpulzusokból (39) alapján kiolvassuk a megmaradó mennyiségeket, valamint  $\text{sgn}(\vartheta'_0)$ -t. Az indítás kezdeti  $t = 0$ ,  $r = r_0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  koordinátái, a megmaradó mennyiségek és  $\text{sgn}(\vartheta'_0)$  egyértelműen meghatározzák a geodetikust.
- **A fekete lyukon áthaladó geodetikusok kiválasztása.** A megmaradó mennyiségek ismeretében (32) és (29) alapján numerikusan meghatározzuk az  $R(r)$  függvény gyökeit (ehhez a numpy megfelelő programját használom). A 7.2. résszel összhangban a függvénynek vagy négy komplex (tranzit típus), vagy két valós ( $r_1 < r_2$ ) és két komplex (flyby típus) gyöke van. A tranzit típusú geodetikusokkal ebben a dolgozatban nem foglalkozom. A flyby típusúaknál az  $r$ -beli fordulópontot az  $r_{\min} = r_2$  nagyobb valós gyök adja. Ez alapján ha  $r_2 < r_+$ , akkor a geodetikus áthalad a fekete lyukon, egyéb esetben nem.
- **A  $t_f$ ,  $\vartheta_f$ ,  $\varphi_f$  végső koordináták kiszámítása** (a geodetikus egyenletek implementálása). A  $\vartheta_0$ ,  $\varphi_0$  kezdeti koordináták, valamint a megmaradó mennyiségek és  $\text{sgn}(\vartheta'_0)$  ismeretében meghatározzuk a geodetikus  $t_f$ ,  $\vartheta_f$ ,  $\varphi_f$  végső koordinátáit, amikor a fekete lyukon való áthaladás után ismét eléri az  $r_0$  sugarat. Ehhez a 7. részben tárgyalt geodetikus egyenleteket implementálok. Először a (64) vagy (65) egyenletek segítségével meghatározom  $\psi$ -t (ahol  $\mu_{\pm}$ -t (44) vagy (50),  $k$ -t pedig (47) vagy (53) adja meg). Az  $r$ -integrálokat (56) alapján számolom (ehhez szükség van  $R(r)$  gyökeire, amelyeket korábban már meghatároztunk). Az elliptikus integrálokat és inverzüket a scipy csomag ellipkinc, illetve ellipj programjával számítom.  $\psi$ -ből (47) vagy (53) alapján adódik  $\vartheta_f = \cos^{-1} \mu$ . (66) vagy (67) alapján meghatározom a  $\vartheta$ -fordulópontok  $m$  számát. Ennek segítségével  $\text{sgn}(\vartheta'_0)$  ismeretében a (68) megfelelő képletét, valamint (70)-et vagy (72)-t (73)-ba helyettesítve megkapom  $\varphi_f$ -t.  $t_f$  ezzel analóg módon adódik. Az itt szereplő integrálokat numerikus integrálással számítom (scipy/quad).
- **Az árapályerő maximumának kiszámítása.** Ahhoz, hogy a szórási képeket jobban megérthessük, szeretnénk kiszámítani az egyes geodetikusok mentén fellépő maximális árapályerőt. Ehhez a (76) képleteket használom, amelyek megadják az árapálytenzor térszerű sajátértékeit a geodetikus adott pontjában. A sajátértékek  $r$  szerinti sorfejtéséből látható, hogy az árapályerő maximuma az  $r = r_{\min}$  fordulópont közelében lesz.

A maximumot numerikusan a geodetikus  $r < 1$  szakaszán, felezéssel határozom meg.<sup>14</sup> Ehhez a (64) és (65) képletekkel tudjuk kiszámítani az adott  $r$ -hez tartozó  $\vartheta$ -t. Ezeket (továbbá  $K$ )-t (76)-ba helyettesítve megkapjuk az adott  $r$ -hez tartozó sajátértékeket. Az  $r$ -intervallum megfelelő számú felezésével (ügyelve a befelé és kifelé haladó szakasz megkülönböztetésére) aztán tetszőleges pontossággal megkaphatjuk az árapályerő maximumát.

<sup>14</sup>Az árapályerő maximumának numerikus meghatározásában nehézséget jelent, hogy a maximum jellemzően igen éles csúcsként adódik a geodetikus mentén, illetve hogy az árapályerőnek lokális maximumai is lehetnek. A scipy feltételes szélsőértékkereső csomagja emiatt sok esetben kudarcot vallott, ellenben egy egyszerű felezéssel megírt algoritmus megbízhatóan adja vissza a valódi árapályerő-maximumot.

- **Az intenzitás normálása.** Miután megkaptuk a párhuzamos, homogén intenzitással, az  $I_{ki}$  blokkon,  $\vartheta = \alpha$  irányból indított nyaláb szórási képét az  $I_{be}$  másik világban, a geodetikusok időbeli irányát megfordítva megkapjuk azokat a geodetikusokat, amelyek  $I_{be}$ -ből indulva, a fekete lyukon áthaladva az  $\alpha$  látószögben, a fekete lyuktól távol elhelyezkedő megfigyelőhöz jutnak. Ahhoz, hogy megkapjuk a megfigyelőhöz jutó nyaláb intenzitáseloszlását az  $I_{be}$ -ben feltételezett izotróp eloszlás esetén, úgy kell visszanyomnunk a nyaláb intenzitását, hogy a szórási kép egy izotróp eloszlásba illeszkedjék  $I_{be}$ -ben. Ehhez venni kell az  $I_{be}$  blokkon kialakult szórási kép  $\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$  sűrűségeloszlását, és minden geodetikus az adott geodetikus  $\vartheta_f, \varphi_f$  végpontjában kapott intenzitás  $1/\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$  inverzével kell címkézni. Az így kapott intenzitáseloszlást ábrázolva a kezdeti, párhuzamos nyalábon megkapjuk a megfigyelőhöz eljutó, a fekete lyukon áthaladó geodetikusok intenzitáseloszlását.

A  $\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$  sűrűségeloszlást numerikusan úgy határozom meg, hogy veszem az egyes geodetikusokat, és megszámlalom az adott geodetikus  $\vartheta_f, \varphi_f$  végpontjának adott sugarú környezetében végződő geodetikusokat (az azimut- és polárszögekben értelmezett távolság természetesen  $\sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2}$ ). A geodetikusok körüli kis tartományt az éggömb felületének  $10^{-4}$  részének vettem.

- **Ellenőrzés.** Az eredményeimet numerikusan ellenőriztem. Ehhez egy adaptív lépésközü Runge–Kutta-algoritmust írtam (ellenőrzőprogram), amely a metrikus tenzor, valamint a kezdőhely és -sebesség megadása után kis lépésenként (sokkal rosszabb futási idővel) határozza meg az adott geodetikus görbét. Az ellenőrzőprogrammal számított geodetikusok végpontjai minden tesztelt esetben (kb. 100 darab trajektória különböző kezdőfeltételekkel) megegyeztek a geodetikus egyenleteken alapuló program eredményeivel.

## 10. Eredmények

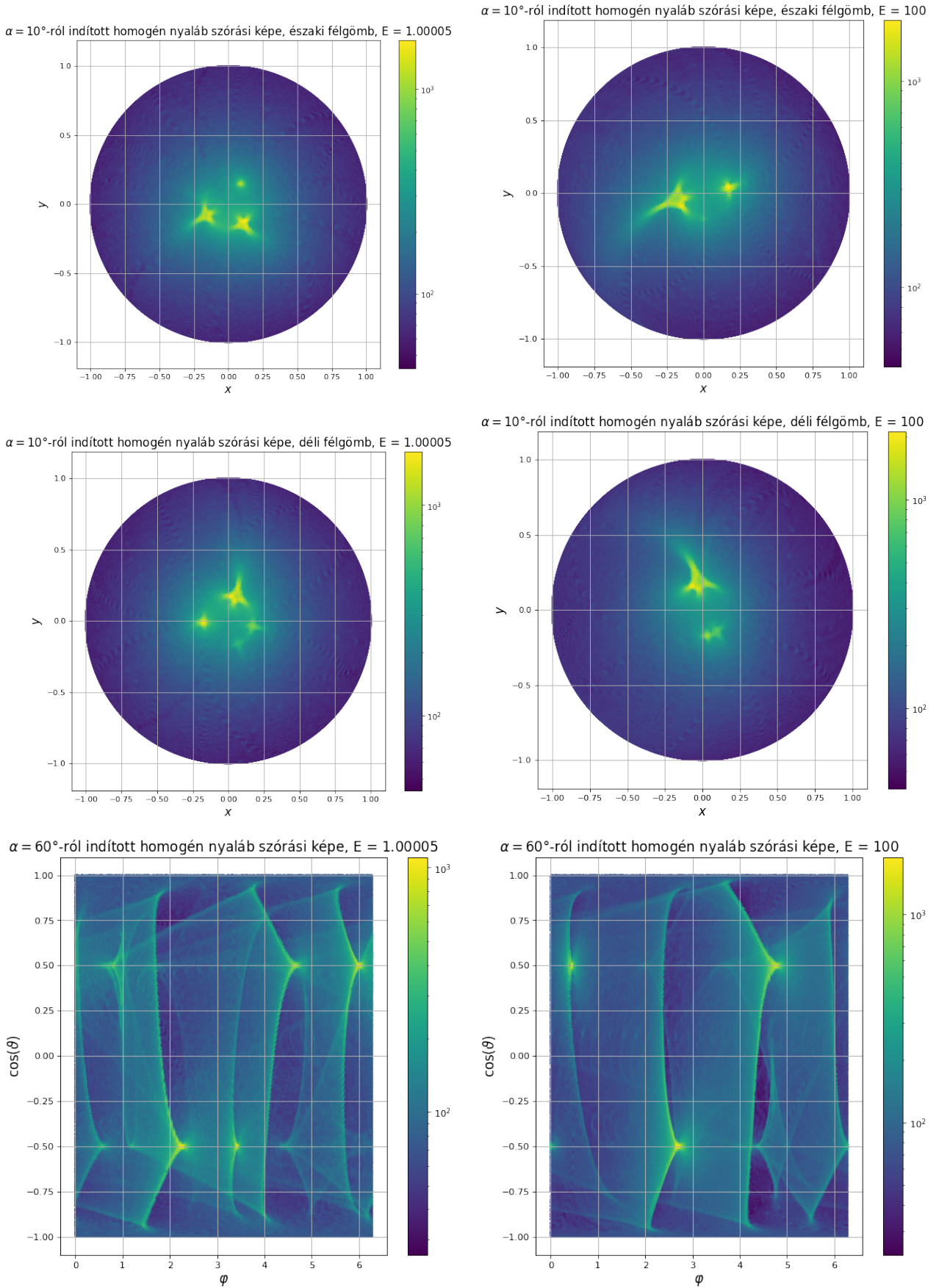
Alább az előző részekben részletezett analitikus és numerikus számítások eredményei következnek. A numerikus szimulációt kétféle energiaértékre futtattam: az  $E = 1/\sqrt{1 - 0,01^2} \approx 1,00005$  esetben a fekete lyuktól végtelen távolságra a nyaláb sebessége a fénysebesség 1%-a; az  $E = 100$  esetben pedig 99,995%-a (tehát a Lorentz-faktor  $\gamma = 100$ ). Mivel az energia növelésével az időszerű geodetikusok a fényszerűekhez tartanak, ezért az utóbbi eset tekinthető közelítésnek a fekete lyukon áthaladó fotonok (pl. háttérsugárzás) esetére is. A látószögre szintén kétféle értéket vettem:  $\alpha = 10^\circ$  és  $\alpha = 60^\circ$ . A spinparaméter minden esetben  $a = 0,95$ . Minden esetben  $10^6$  darab átmenő trajektóriát ábrázolok.

Alább az eredményeimet a megoldás logikai menete szerint prezentálom:

1. Az  $I_{ki}$  blokkon (időben visszafelé),  $\alpha$  irányból centrálisan befelé indított,  $E$  energiájú párhuzamos nyaláb szóródási képe ( $\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$  sűrűségeloszlása) az  $I_{be}$  blokkon. (Lásd a 6. ábrát.)
2. Az  $1/\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$ -vel súlyozott intenzitáseloszlás ábrázolása a nyaláb keresztmetszeti képén (az  $I_{ki}$  blokkon). Ha a kiterjesztett téridő létezik (izotróp beeső eloszlást feltételezve), akkor a Földről  $\alpha$  szögben látszó fekete lyukra irányítva egy megfelelő teleszkópot, ilyen eloszlást kell látnunk a fekete lyukból érkező részecskékben vagy sugárzásban. (Lásd a 7. és a 8. ábrát.)
3. Az áthaladás során fellépő maximális árapályerő eloszlásának ábrázolása a nyaláb keresztmetszeti képén. Ezek az ábrák segítenek az intenzitáseloszlásra kapott eredmények értelmezésében. (Lásd a 9. ábrát.)

### 10.1. A szórási kép sűrűségeloszlása párhuzamos nyaláb esetén

Adott energiájú,  $\alpha$  irányból indított párhuzamos nyalábok  $\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$  sűrűségeloszlása a fekete lyukon való áthaladás után a 6. ábrán látható.



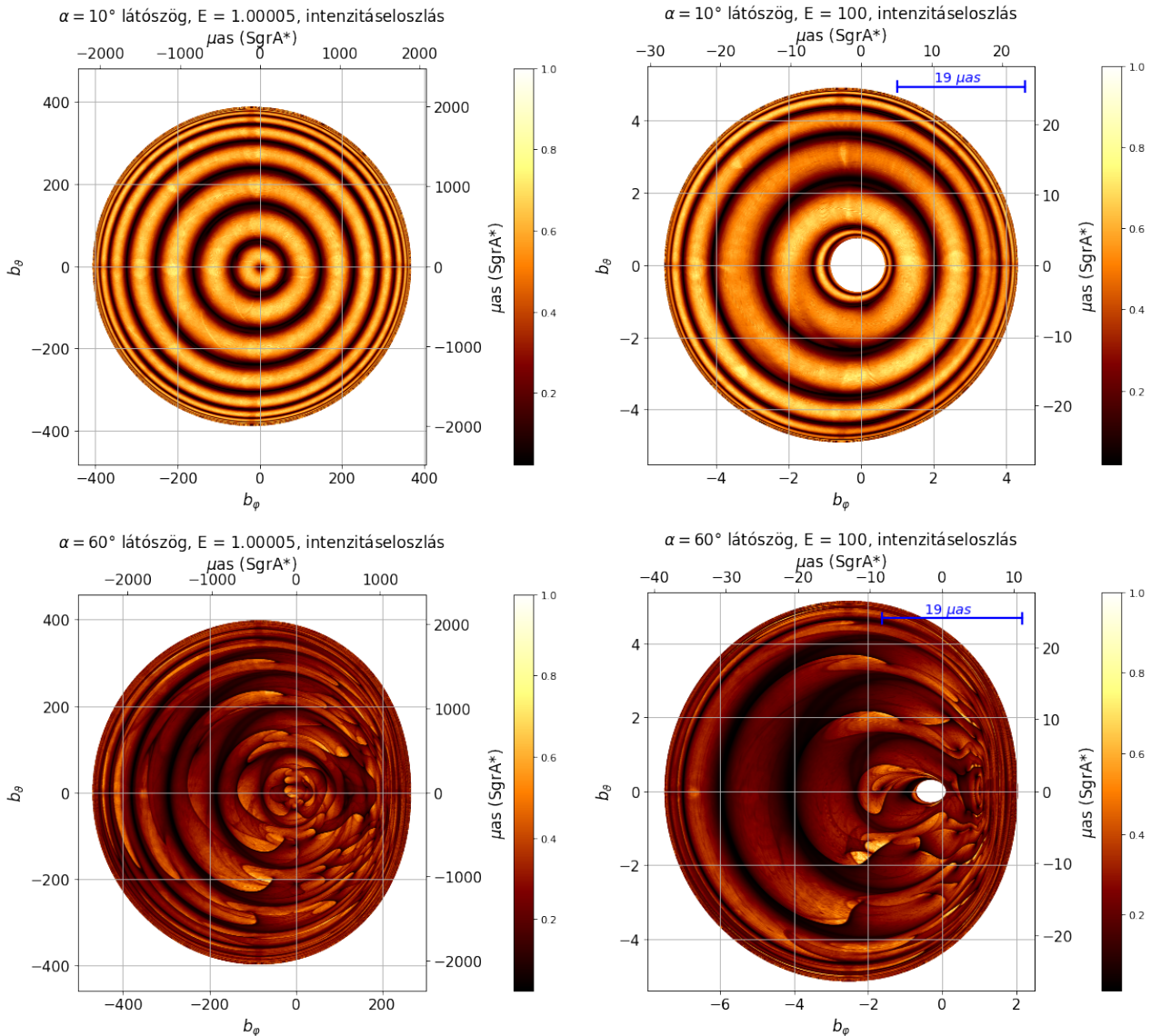
6. ábra. Az  $I_{ki}$  blokkon (a megfigyelő világa),  $\alpha$  irányból indított,  $E$  energiájú homogén, párhuzamos nyaláb  $\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$  sűrűségeloszlása az  $I_{be}$  blokkon (párhuzamos világegyetem) a fekete lyukon való áthaladás után, logaritmikusan színezve. Az eloszlásokban kausztikákat, valamint a  $\vartheta = \alpha$  és  $\vartheta = 90^\circ - \alpha$  irányok körül intenzitáscsúcsokat figyelhetünk meg. Fent és középen:  $\alpha = 10^\circ$ , északi és déli félgömb (projekciók); lent:  $\alpha = 60^\circ$ . Balra:  $E = 1.00005$ , jobbra:  $E = 100$ .  $M = 1$ ,  $a = 0,95$ .

Az  $\alpha = 10^\circ$  irányból indított nyalábok esetén a sűrűségeloszlást az északi és déli félgömbre külön-külön vetítve ábrázolom, hogy a tengelyekhez közeli tartományok jól kivehetőek legyenek. Ehhez az  $x = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$ ,  $y = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$  projekciót alkalmazom.

Az ábrákon látható, hogy a párhuzamos nyaláb minden esetben az egész éggömbre szóródik (nincsenek tiltott irányok). Intenzitáscsúcsokat és kausztikákat a  $\vartheta = \alpha$  és  $\vartheta = 90 - \alpha$  irányok körül mindegyik ábrán megfigyelhetünk. Ezen csúcsok mellett a nagy sűrűségű tartományok sávos elhelyezkedést mutatnak. A  $\varphi$  koordinátát vizsgálva belátható, hogy a sávok ismétlődését a különböző számú teljes  $\varphi$ -beli körbefordulást elszenvedő geodetikusok okozzák.

## 10.2. A fekete lyukból a távoli megfigyelőhöz érkező nyaláb intenzitáseloszlása

A 7. ábrán a párhuzamos nyalábok keresztmetszete látható az  $I_{ki}$  blokkon a  $b_\varphi = \varphi_0 \cdot r_0 \cdot \sin \vartheta_0$ ,  $b_\vartheta = (\vartheta_0 - \alpha) \cdot r_0$  impaktparaméter-síkon,  $1/\rho(\vartheta_f, \varphi_f)$ -val színezve.



7. ábra. A fekete lyuktól távol,  $\vartheta = \alpha$  irányban elhelyezkedő megfigyelőhöz eljutó  $E$  energiájú nyaláb intenzitáseloszlása a nyaláb keresztmetszetén ábrázolva (a nyalábra szemből nézve) a  $b_\varphi$ ,  $b_\vartheta$  síkon, izotróp beeső eloszlás esetén. A jobb oldali és felső tengelyeken látható a látszó szög mérete az SgrA\* esetén (ívmásodpercben). A megfigyelő által észlelt nyalábok jó közelítéssel kör keresztmetszetűek, a nyalábok intenzitása körkörös szerkezetű. A párhuzamos világegyetemek léteznek, akkor egy megfelelő teleszkópot valamelyik fekete lyukra irányítva (nulladik közelítésben) ilyen intenzitáseloszlást kell tapasztalnunk. Ahol releváns, látható az EHT felbontása ( $19 \mu\text{as}$ ). Fent:

$\alpha = 10^\circ$ , lent:  $\alpha = 60^\circ$ . Balra:  $E = 1.00005$ , jobbra:  $E = 100$ .  $M = 1$ ,  $a = 0, 95$ .

A 7. ábrán látható eloszlások adják a  $\vartheta = \alpha$  irányban, a fekete lyuktól távol elhelyezkedő megfigyelőhöz érkező nyaláb intenzitáseloszlását. Nulladik közelítésben ehhez hasonló megfigyelésekre számíthatunk az EHT-t egy fekete lyukra irányítva, ha a kiterjesztett Kerr-téridő valóban létezik, és a másik világegyetemben izotróp eloszlással esnek részecskék a fekete lyukba, majd a kiáramlást követően szub-mm rádiósugárzást generálnak. A jobb oldali ( $E = 100$ ) ábrák közelítést adnak a másik világegyetemből érkező fotonok (pl. háttérsugárzás) megfigyelhető eloszlására.

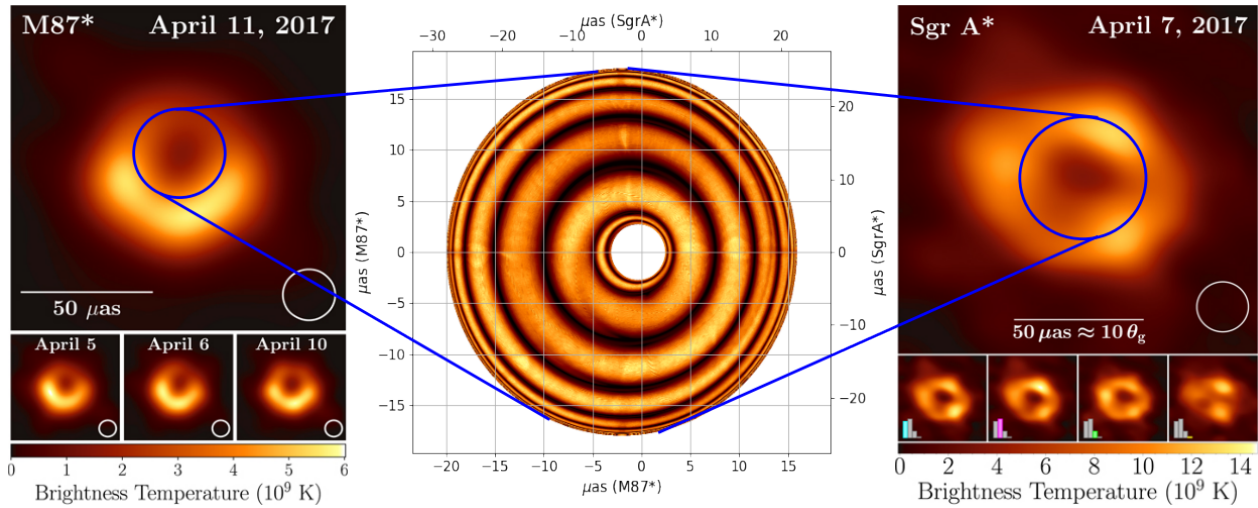
Láthatjuk, hogy a megfigyelőhöz eljutó geodetikusok a  $b_\vartheta$ ,  $b_\varphi$  impaktparaméter-síkon nagyjából kör alakú nyalábot adnak.<sup>15</sup> Az  $E = 100$  energia esetén a  $b_\vartheta = b_\varphi = 0$  körül azért nem látunk geodetikusokat, mert erre a tartományra az általunk nem vizsgált antiverzumból (III. blokk) érkeznek geodetikusok. Mivel az antiverzumban a szingularitás taszítóhatást fejt ki a geodetikusokra [23], ezért kis energia esetén onnan nem érkeznek geodetikusok: a részecskék energiája nem elég nagy a taszítás legyőzéséhez. Az energiát növelve ez az üres tartomány nő. Az antiverzumban beérkező geodetikusok eloszlására feltételezéssel élve modellezhetjük az erre a tartományra érkező geodetikusokat is – bár erre vonatkozóan is vannak eredményeim, de e dolgozatban az antiverzumból érkező részecskékkel nem foglalkozom.

A kijövő nyalábok intenzitáseloszlása gyűrűszerű struktúrát mutat, egymást felváltva követő nagyobb és kisebb intenzitású gyűrűkkel. Láthatjuk, hogy a gyűrűk száma az energia növelésével csökken. A tengelyhez közelebbi,  $\alpha = 10^\circ$  látószög esetén a gyűrűs szerkezet tagoltabb. A legnagyobb és legkisebb intenzitás közötti különbség körülbelül tízszeres. Hasonló gyűrűszerű struktúra a fekete lyukba nem behatoló, hanem azt elkerülő, végtelenbe tartó geodetikusok esetén a gravitációs lencsehatás miatt alakul ki nem forgó fekete lyuk esetén is. Ott a fekete lyukat  $N$  egész számszor megkerülő fotonok képei elkülönülő gyűrűként jelennek meg, ezek az  $N = \infty$  határesetben az instabil körpályának megfelelő sugárhoz tartozó impakt paraméternél torlódnak. A Kerr esetben az így kapott gyűrűk torzított D-betű alakúak [16]. A fekete lyukon áthaladó geodetikusok is tetszőlegesen sokszor megkerülhetik a fekete lyukat a horizonton kívül, aszimptotikusan az  $N = \infty$  esetén ezek szintén az instabil körpálya sugarának megfelelő impakt paraméternél torlódnak.

Az ábrák tehát azt mutatják, hogy mit lát egy fekete lyuktól távol elhelyezkedő megfigyelő, ha a fekete lyukra néz. Az ábrákon a megfigyelőhöz eljutó nyaláb intenzitáseloszlása, belső struktúrája látható. Ezek az ábrák a dolgozat legfontosabb eredményei, mert konkrét kísérleti jóságot jelentenek: ha áthaladhatnak geodetikusok a fekete lyukon keresztül a párhuzamos világegyetemből, akkor egy megfelelő teleszkópot valamelyik ismert fekete lyukra irányítva (nulladik közelítésben) ilyen intenzitáseloszlást kell tapasztalnunk.

A 8. ábrán konkrétan is szemléltetem egy ilyen megfigyelés lehetőségeit. Az ábra két oldalán az eddig az EHT-vel elkészült kettő feketelyuk-fénykép látható: az M87\* és az SgrA\* [11, 10]. Az ábra közepén (a párhuzamos világegyetemek létezése esetén) a fekete lyukból a teleszkópba érkező fénynyaláb (a fekete lyukon áthaladó sugárzás) intenzitáseloszlása látható  $\alpha = 10^\circ$  látószög esetén (az M87\* esetén a spinparaméter becsült értéke  $a \approx 0.9 \pm 1$ , a látószög pedig  $\alpha \approx 20^\circ$  [10]). Az ábrán kékekkel jelöltem e nyaláb méretét az EHT-fényképekhez arányosítva. Ha a párhuzamos világegyetemek léteznek, akkor az eredményeim alapján a feketelyuk-fényképek közepén (a fekete lyuk árnyékában) ilyen körkörös intenzitáseloszlást kell tapasztalnunk. Az EHT felbontását figyelembe véve látható, hogy a gyűrűs szerkezet keresése a közeljövőben lehetségessé válhat. (A középső nyaláb összintenzitásának becslése az akkretáló anyag által kibocsátott sugárzás összeintenzitásához viszonyítva a kutatás jövőbeli feladatát képezi.)

<sup>15</sup>Az ábrákon megfigyelhetjük a fekete lyuk forgásából eredő *drag* jelenségét: a magyarul *húzásnak*, *vonszolásnak* fordítható jelenség azt a hatást jelöli, hogy a forgó fekete lyuk a közelében elhaladó trajektóriák  $\varphi$ -beli forgását a saját forgásirányába igyekszik elterelni (ez intuitív kép csupán, a pontos jelenség a geodetikus egyenletek segítségével tárgyalható). Láthatjuk, hogy az egyenlítői síkhoz közelebbi,  $\alpha = 60^\circ$  látószög esetében a nyaláb közepe jelentősen eltolódik  $b_\vartheta = b_\varphi = 0$ -hoz képest.



8. ábra. A párhuzamos világegyetektől érkező nyaláb megfigyelési lehetőségei az EHT-vel. Az ábra két oldalán az eddig elkészült két fekete lyuk-fényképet látjuk, mindkettőn megfigyelhető az akkretáló anyag által kibocsátott sugárzás a fekete lyuk árnyéka körül. Ha a párhuzamos világegyetemek léteznek, a fekete lyuk árnyékában a középső ábrának megfelelő intenzitáseloszlást kell tapasztalnunk. A középső ábra tengelyein feltüntettem a látszó szögméretet az M87\* és az SgrA\* esetén. A nyaláb méretét az eredeti fényképekhez arányosítva kékkkel jelöltem. Az EHT felbontását figyelembe véve látható, hogy a gyűrűs szerkezet keresése a közeljövőben lehetségessé válhat. A középső nyaláb összintenzitásának (fényessége a fényképen) becslése a kutatás jövőbeli tárgyát képezi.

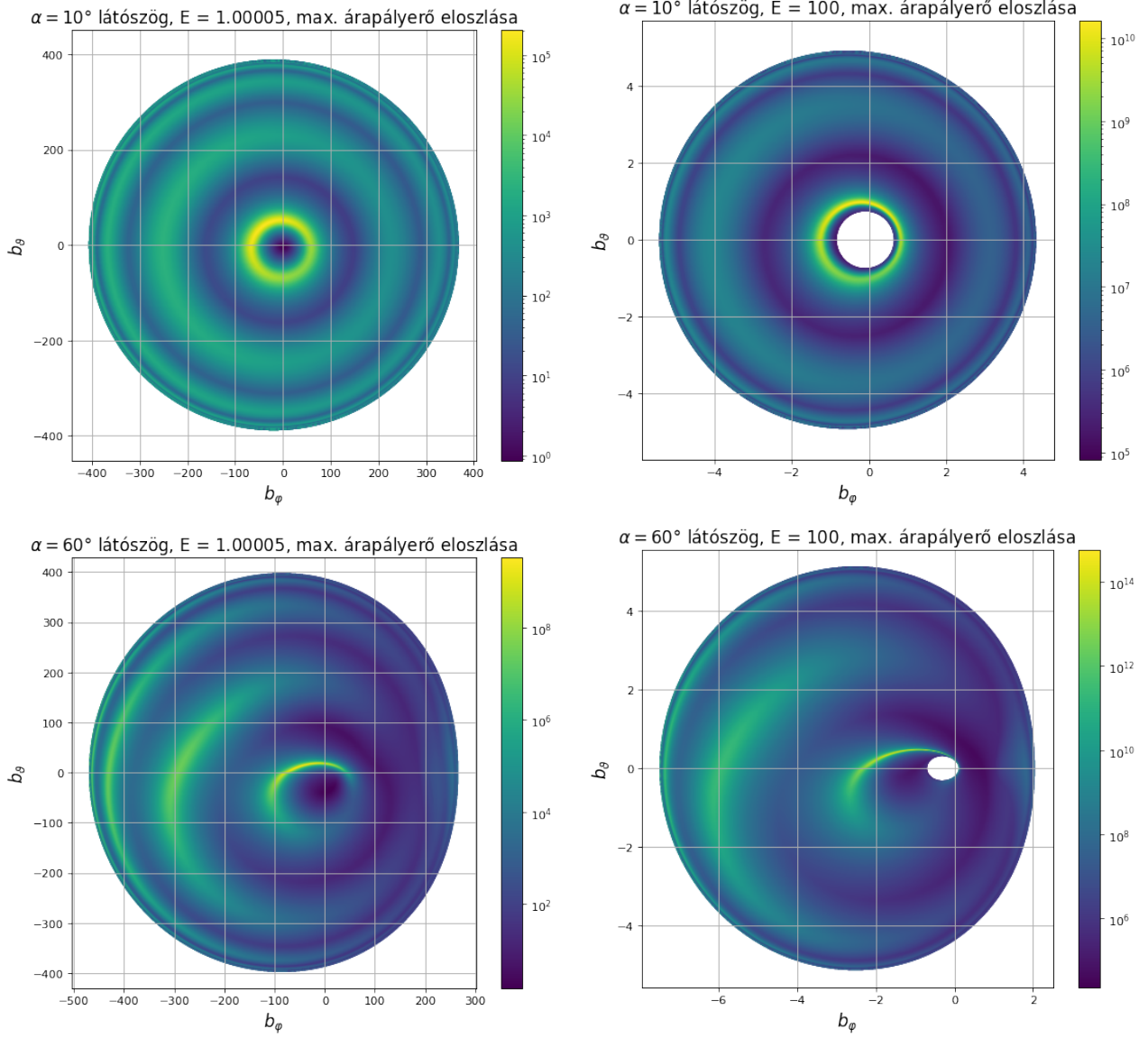
Ahhoz, hogy a gyűrűs szerkezet intuitív megértéséhez közelebb kerüljünk, érdemes megvizsgálni az egyes geodetikusok mentén a fekete lyukon történő áthaladás közben fellépő maximális árapályerőt.

### 10.3. Az maximális árapályerő eloszlása

A 9. ábrán az adott  $\alpha$  látóirányba haladó párhuzamos nyaláb keresztmetszeti képén ábrázolom az áthaladás során fellépő legnagyobb árapályerőt. Az ábrák megmutatják, hogy a nyaláb adott pontjába érkező részecske vagy fény mekkora legnagyobb árapályerőt szenvedett el a fekete lyukon való áthaladás során.

Az ábrákon látható, hogy az árapályerők maximuma az energia növelésével nő. Ez intuitíven azzal magyarázható, hogy nagyobb energia esetén a geodetikusok közelebb haladnak el a gyűrűsingularitáshoz, és a (76) egyenlet alapján az árapályerő kis sugár esetén a sugár csökkenésével meredeken nő.

A maximális árapályerő eloszlását ábrázoló 9. ábrát az intenzitáseloszlást ábrázoló 7. ábrával összevetve láthatjuk, hogy az intenzitáseloszlás gyűrűs szerkezete midegyik ábra esetén erősen korrelál az árapályerő maximumának eloszlásával. Intuitíven nehezen magyarázható egybeesés azonban, hogy a nyalábon az intenzitásnak ott is (lokális) maximuma van, ahol a maximális árapályerőnek (lokális) maximuma van, és ott is, ahol a maximális árapályerőnek (lokális) minimuma van. Az ábrákon látható gyűrűs szerkezet és az intenzitáseloszlásnak a maximális árapályerővel való egybeesésének pontos értelmezése a kutatás következő szakaszának feladata lesz. Lehetséges, hogy a gyűrűs szerkezet nem a szingularitáshoz köthető, hanem egyszerűen a fekete lyukat  $N$ -szer megkerülő geodetikusok gravitációs lencsehatásával kapcsolatos.



9. ábra. A fekete lyukon történő áthaladás során fellépő maximális árapályerő eloszlása a fekete lyuktól  $\alpha$  irányban, távol elhelyezkedő megfigyelőhöz eljutó nyaláb keresztmeteszetén ábrázolva, logaritmikusan színezve. Az ábrákon azt látjuk, hogy szemből tekintve a nyalábra az adott pontba érkező geodetikus (részecske- vagy fénypálya) mentén mekkora maximális árapályerő hat a fekete lyukon való áthaladás során. Látható, hogy a maximális árapályerő haosnló, gyűrűs szerkezetű eloszlást mutat, mint az intenzitás (lásd a 7. ábrát). Jobbra:  $E = 1.00005$ , balra:

$E = 100$ .  $M = 1$ ,  $a = 0,95$ .

---

## IV. rész

# ÖSSZEFOGLALÁS, KITEKINTÉS

A dolgozatban a maximálisan kiterjesztett Kerr-téridőben vizsgáltam a fekete lyukon áthaladó geodetikusokat. A geodetikus egyenleteket implementálva numerikus módszerekkel, az általam írt program segítségével meghatároztam a fekete lyukon áthaladó geodetikusok szórási képét párhuzamosan indított nyaláb esetén. Izotróp kezdeti eloszlás esetén meghatároztam a fekete lyuktól távol elhelyezkedő megfigyelőhöz eljutó nyaláb intenzitáseloszlását, valamint a fekete lyukon történő áthaladás során fellépő maximális árapályerő eloszlását a nyalábon.

A dolgozatom legfontosabb eredménye a 7. és 8. ábra. Ezeken az ábrákon látható, hogy a párhuzamos világegyetemek létezése esetén milyen intenzitáseloszlást kell látnunk egy teleszkóppal, ha messziről egy fekete lyukra irányítjuk. Az ábrákon a nyaláb belső struktúrája látható a nyaláb keresztmetszetén (szemből) ábrázolva. Ezek az ábrák konkrét megfigyelési jóslatok, amelyek segíthetnek eldönteni, hogy a párhuzamos világegyetemek léteznek-e. Bár ezek az ábrák izotróp beeső intenzitás feltételezésével készültek, mivel a kialakuló gyűrűs szerkezet erősen kontrasztos, ezért más beeső intenzitás esetén is hasonló intenzitáseloszlásra számíthatunk.

A fekete lyukak minden korábbinál részletesebb tanulmányozását lehetővé tevő Event Horizon Telescope segítségével a közeljövőben lehetőség nyílna ezen jóslatok megfigyelésekkel történő ellenőrzésére. A 8. ábrán konkrétan is ábrázoltam, milyen megfigyelések válhatnak lehetségessé az eredményeimre vonatkozóan az EHT-val, és hogy az eredményeim hogyan kapcsolódnak az eddig végzett feketelyuk-megfigyelésekhez (feketelyuk-fényképekhez).

## Kitekintés

A dolgozatban tárgyalt témakör és a bemutatott eredményeim a kutatás több irányba történő kiterjesztését is lehetővé teszik, amelyek közül több esetben már eredményeim is vannak.

A kutatás következő fázisában bonyolultabb beeső eloszlás (pl. pontforrás) esetén is meghatározzuk a távoli megfigyelő által észlelt képet. Ehhez meghatározzuk a szórásmátrixot: a különböző  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  multipólok szórási képét. Általános forrás esetén ezek megfelelő lineárkombinációja adja a megfigyelt képet. Jelen dolgozat az  $Y_{00}$  homogén eloszlást tárgyalja. Ezen eredményeket a készülő cikkünkben fogjuk publikálni.

Megfelelő becslésekkel szeretnénk meghatározni a párhuzamos világegyetemből érkező nyaláb összintenzitását. Ez határozza meg, hogy az EHT-val készült feketelyuk-fényképeken milyen halványan kell keresni a 9. ábrán látható struktúrákat. A kutatás további részében szintén szeretnénk intuitív magyarázatot adni a gyűrűs intenzitáseloszlás kialakulására.

A dolgozatban tárgyalt témakör további jelenséggörökkel kapcsolatban is érdekes lehet. Az aktív galaxismagokban megfigyelt asztrofizikai jetek (kifúvások) ismert megfigyelési eredmények. A kiterjesztett téridőben a fekete lyukon áthaladó geodetikusok alternatív modellként szolgálhatnak a jelenséggör tárgyalására. A fekete lyukon áthaladó másik (tranzit) típusú geodetikusokkal kapcsolatban érdekes részeredményeim vannak.

## Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönetemet fejezem ki témavezetőim: Kocsis Bence, Dávid Gyula és Cserti József áldozatos és kitartó támogatásáért. Tőlük csak tanulhat az ember: a tudásukon túl a mindig lelkes, motiváló és segítőkész, ugyanakkor pontos és szigorú, megalkuvást nem ismerő hozzáállásukat.

## Hivatkozások

- [1] R. ABBOTT, ET AL, V. C. LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION, AND KAGRA COLLABORATION, *GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the Second Part of the Third Observing Run*, Physical Review X, 13 (2023), p. 041039.
- [2] C. BAMBI, *Testing black hole candidates with electromagnetic radiation*, Reviews of Modern Physics, 89 (2017), p. 025001.
- [3] A. BONANNO AND F. SAUERESSIG, *Stability properties of Regular Black Holes*, arXiv e-prints, (2022), p. arXiv:2211.09192.
- [4] L. M. BURKO AND G. KHANNA, *Marolf-Ori singularity inside fast spinning black holes*, Phys. Rev. D, 99 (2019), p. 081501.
- [5] L. M. BURKO, G. KHANNA, AND A. ZENGINOĞLU, *Cauchy-horizon singularity inside perturbed Kerr black holes*, Phys. Rev. D, 93 (2016), p. 041501.
- [6] L. M. BURKO AND A. ORI, *Are Physical Objects Necessarily Burnt Up by the Blue Sheet inside a Black Hole?*, Phys. Rev. Lett., 74 (1995), pp. 1064–1066.
- [7] P. BYRD AND F. M., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [8] B. CARTER, *Global structure of the kerr family of gravitational fields*, Phys. Rev., 174 (1968), pp. 1559–1571.
- [9] S. CHANDRASEKHAR, *The Mathematical Theory of Black Holes*, 1998.
- [10] EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION, K. AKIYAMA, A. ALBERDI, W. ALEF, J. C. ALGABA, R. ANANTUA, K. ASADA, R. AZULAY, U. BACH, A.-K. BACZKO, D. BALL, AND ET AL, *First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way*, ApJ, 930 (2022), p. L12.
- [11] EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION, K. AKIYAMA, A. ALBERDI, W. ALEF, K. ASADA, R. AZULAY, A.-K. BACZKO, AND ET AL, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, ApJ, 875 (2019), p. L1.
- [12] R. GENZEL, F. EISENHAEUER, AND S. GILLESSEN, *The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster*, Reviews of Modern Physics, 82 (2010), pp. 3121–3195.
- [13] A. M. GHEZ, S. SALIM, N. N. WEINBERG, J. R. LU, T. DO, J. K. DUNN, K. MATTHEWS, M. R. MORRIS, S. YELDA, E. E. BECKLIN, T. KREMENEK, M. MILOSAVLJEVIC, AND J. NAIMAN, *Measuring Distance and Properties of the Milky Way’s Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits*, ApJ, 689 (2008), pp. 1044–1062.
- [14] C. J. HAILEY, K. MORI, F. E. BAUER, M. E. BERKOWITZ, J. HONG, AND B. J. HORD, *A density cusp of quiescent X-ray binaries in the central parsec of the Galaxy*, Nature, 556 (2018), pp. 70–73.
- [15] S. W. HAWKING AND G. F. R. ELLIS, *The large-scale structure of space-time.*, 1973.
- [16] T. JOHANSEN AND D. PSALTIS, *Testing the No-hair Theorem with Observations in the Electromagnetic Spectrum. II. Black Hole Images*, ApJ, 718 (2010), pp. 446–454.

- [17] R. P. KERR, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Phys. Rev. Lett., 11 (1963), pp. 237–238.
- [18] R. P. KERR, *Do Black Holes have Singularities?*, arXiv e-prints, (2023), p. arXiv:2312.00841.
- [19] J. KORMENDY AND L. C. HO, *Coevolution (Or Not) of Supermassive Black Holes and Host Galaxies: Supplemental Material*, arXiv e-prints, (2013), p. arXiv:1308.6483.
- [20] J. MALDACENA, A. MILEKHIN, AND F. POPOV, *Traversable wormholes in four dimensions*, Classical and Quantum Gravity, 40 (2023), p. 155016.
- [21] D. MAROLF AND A. ORI, *Outgoing gravitational shock wave at the inner horizon: The late-time limit of black hole interiors*, Phys. Rev. D, 86 (2012), p. 124026.
- [22] A. MUMMERY, *The maximum mass of a black hole which can tidally disrupt a star: measuring black hole spins with tidal disruption events*, MNRAS, 527 (2024), pp. 6233–6252.
- [23] B. O’NEILL, *The geometry of Kerr black holes*, Dover Publications, 1995.
- [24] A. ORI, *Inner structure of a charged black hole: An exact mass-inflation solution*, Phys. Rev. Lett., 67 (1991), pp. 789–792.
- [25] F. ÖZEL, D. PSALTIS, R. NARAYAN, AND J. E. MCCLINTOCK, *The Black Hole Mass Distribution in the Galaxy*, ApJ, 725 (2010), pp. 1918–1927.
- [26] E. POISSON AND W. ISRAEL, *Inner-horizon instability and mass inflation in black holes*, Phys. Rev. Lett., 63 (1989), pp. 1663–1666.
- [27] E. POISSON AND W. ISRAEL, *Internal structure of black holes*, Phys. Rev. D, 41 (1990), pp. 1796–1809.
- [28] D. PSALTIS, L. MEDEIROS, P. CHRISTIAN, F. ÖZEL, ET AL, AND EHT COLLABORATION, *Gravitational Test beyond the First Post-Newtonian Order with the Shadow of the M87 Black Hole*, Phys. Rev. Lett., 125 (2020), p. 141104.
- [29] R. M. SANTOS, R. C. NUNES, AND J. C. N. DE ARAUJO, *Testing beyond-Kerr spacetimes with GWTC-3*, European Physical Journal C, 84 (2024), p. 302.
- [30] K. SCHWARZSCHILD, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, (1916), pp. 189–196.
- [31] M. SIMPSON AND R. PENROSE, *Internal Instability in a Reissner-Nordström Black Hole*, International Journal of Theoretical Physics, 7 (1973), pp. 183–197.
- [32] C. M. URRY AND P. PADOVANI, *Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei*, PASP, 107 (1995), p. 803.
- [33] M. VISSER, *The Kerr spacetime: A brief introduction*, arXiv e-prints, (2007), p. arXiv:0706.0622.
- [34] C. M. WILL, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Reviews in Relativity, 17 (2014), p. 4.
- [35] N. YUNES, X. SIEMENS, AND K. YAGI, *Gravitational-Wave Tests of General Relativity with Ground-Based Detectors and Pulsar-Timing Arrays*, arXiv e-prints, (2024), p. arXiv:2408.05240.