

TDK DOLGOZAT

Háromdimenziós femtoszkópiai korrelációk fenomenológiai vizsgálata nagyenergiás nehézion-ütközésekben

Árpási Emese

B4DEOX

Fizikus Msc

Témavezetők:

Kincses Dániel

Nagy Márton Imre

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2024.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Femtoszkópiai korrelációk	3
2.1. Lévy-alakú forrásfüggvény a femtoszkópiában	3
3. A térbeli páreloszlásfüggvény vizsgálata	6
3.1. A páreloszlásfüggvény rekonstruálása	6
3.2. Illesztés a 3D Lévy-eloszlással	8
4. Eredmények	9
4.1. Lévy-index	9
4.2. Lévy-skála	11
4.3. Átlagolt Lévy-skála	13
5. Összefoglalás	15

Kivonat

A nagyenergiás fizikán belül a femtométeres nagyságrendű tartományokban játszódó folyamatok téridőbeli képének vizsgálatát összefoglaló néven femtoszkópiának hívják. A femtoszkópia egyik eszköze az azonos részecskék impulzustérbeli korrelációs függvényeinek vizsgálata, amelyek segítségével a részecskekeletkezés forrásfüggvénye feltérképezhető. A dolgozatomban bemutatott munka célja az EPOS eseménygenerátor-programcsomag által szimulált 200 GeV tömegközépponti energiájú arany-arany ütközések vizsgálata. A fő motivációt az jelenti, hogy megértsük, hogy a kísérleti adatokban látott forrásfüggvény-alak, az úgynevezett Lévy-alak kiadódik-e a jól ismert alapvető fizikai folyamatokon alapuló ezen modern eseménygenerátor alapján. Ehhez az ilyen nagyenergiás atommag-ütközésekben létrejött azonos töltésű végállapotú pionpárok páreloszlásfüggvényét vizsgáltam, különös tekintettel a transzverz impulzustól és a centralitástól való függésre, illetve a kísérleti eredményekkel való összehasonlításra.

1. Bevezetés

Az anyagi világot felépítő atomok protonokból, elektronokból és neutronokból állnak, a neutronokat és protonokat pedig kvarkok építik fel. A kvarkokat a hadronokban (a bariónokban, például protonokban és neutronokban, illetve a mezonokban, például a pionokban és kaonokban) az erős kölcsönhatás tartja össze. Az erős kölcsönhatást a kvarkok, illetve a kölcsönhatást közvetítő részecskék, a gluonok szintjén leíró elmélet az úgynevezett kvantumszíndinamika (QCD), melynek neve az erős kölcsönhatás forrásának „színtöltésként” való elnevezésére utal. Ennek az elméletnek több jelentős következménye is van. Az egyik legfontosabb az, hogy normális körülmények között a természetben csak színtöltés szempontjából semleges részecskéket figyelhetünk meg (a kvarkoknak háromféle színe vagy antiszíne lehet), aminek következtében kvarkokat és gluonokat nem lehet szabad állapotban megfigyelni a természetben, csak hadronokba zárva. Ebből a kvark-bezárttsági állapotból csak extrém hőmérséklet hatására lehet kilépni; ilyen körülmények valósulnak meg például nagyenergiás nehézion-ütközésekben [1–8]. Az ütközések során az extrém nyomás és hőmérséklet hatására a protonok és neutronok szétesnek az őket felépítő kvarkokra és gluonokra, létrehozva ezzel az úgynevezett kvark-gluon plazmát, ami ezután tágul és hűl, végül (de még mindig rendkívül rövid idő, néhányszor 10^{-23} s alatt) „kifagy”, azaz létrejönnek belőle a detektorainkban is észlelhető különféle végállapotú részecskék.

A nehézion-fizika fő feladata tehát a nagyenergiás atommag-ütközések során létrejött erősen kölcsönható kvark-gluon-plazma (sQGP) vizsgálata. Ennek a halmazállapotnak a felfedezése a RHIC gyorsítónál mérési technikák és vizsgálati módszerek széles választékával valósult meg [1–6]. Az egyik ilyen módszer a femtoszkópia [9–11], ami többek között a részecskekeletkezés valószínűségi eloszlásainak (forrásfüggvények) rekonstrukciójával foglalkozik az azonos típusú részecskék impulzustérbeli korrelációs függvénye alapján. Ez lényegében majdnem az egyetlen módja annak, hogy femtométeres hosszúságskálán (és a fénysebességet is tudva a megfelelő időskálán) lefolyó események téridőbeli képét tanulmányozzuk.

A femtoszkópiai vizsgálatok során általában a forrásfüggvényt egy modellfüggvénnyel közelítik, és ennek rekonstruált paramétereit hasonlítják össze a mérésekre történő, elmélet alapján meghatározott korrelációs függvénynek az illesztésekből kapott paramétereivel. A leggyakrabban Gauss-függvényt használtak ilyen célra nagyon sokáig, azonban a későbbiekben a kísérleti eredmények azt mutatták, hogy a forrásfüggvény nagy távolságoknál lassabban, hatványfüggvény jellegű módon cseng le. Az utóbbi időben a Gauss-eloszlás egyfajta általánosításának tekinthető úgynevezett Lévy-alak feltételezése (aminek valóban hatványfüggvény-jellegű lecsengése van) sikeresnek bizonyult a kísérletek által megfigyelt forrásfüggvény rekonstrukciójában [12–16]. Ilyen eloszlások használata azonban (noha a kísérleti adatok fényében nyilvánvalóan szükség van erre) ellentmondásos érzéseket kelthet; kívánná az ember, hogy

valamilyen fizikai okot tudjunk mondani, ami alapján az ilyen Lévy-eloszlások várhatók (a „természetesebbnek” tűnő Gauss-alak helyett). Mindenképpen további bővebb vizsgálatokat igényel tehát a Lévy-eloszlások megjelenésének fizikai háttere [17]. Ennek egy lehetséges mód-szere szimulációkban generált ütközések során létrejött forrásfüggvényeket vizsgálni [18, 19], majd az eredményeket összevetni a kísérleti eredményekkel, így mélyebb betekintést nyerve abba, hogy pontosan milyen elméleti okai lehetnek a megfigyelt hosszútávú viselkedésnek.

A TDK dolgozatom során az azonos töltésű pionpárok páreloszlásfüggvényét vizsgáltam az EPOS szimulációs programcsomag segítségével, hogy szimulációkban is, illetve három dimenzióban is (azaz nem feltételezve a forrásfüggvény gömbszimmetriáját) megjelenik-e a kísérletekben megfigyelt Lévy-alak. A fő vizsgálati irányom az, hogy részletesen, kinematikai változók szerint differenciáltan feltérképezsem a szimulációkban megjelenő forrásfüggvényt. Mint látni fogjuk, a vizsgált modell valóban Lévy-eloszlások megjelenését mutatja. Összehasonlítottam azonban az általam kapottakat a PHENIX kísérlet legújabb méréseiből származó eredményekkel is [15]; ez alapján az derült ki, hogy nincs teljes egyezés a vizsgált modellel.

Jelen dolgozatom a 2024-es intézményi TDK dolgozatomon alapul; a munka maga azonban már korábban bemutatott eredményeket is tartalmaz; ezek leginkább előző évi intézményi TDK dolgozatomban (illetve BSc szakdolgozatomban) szerepelnek. Ebben a dolgozatban viszont nem fejtem ki az összes (ezen korábbi munkáimban szereplő, a munka mostani állásának megértéséhez kellő) részletszámolást és alapvetést, csak röviden foglalom össze őket. (Ilyenek többek között a Lévy-eloszlásoknak mint függvényalakoknak, a gömbszimmetrikus változatnak, illetve a háromtengelyű eloszlások projekcióinak numerikus kiszámolására alkalmas korábban kidolgozott módszerei.) Hivatkozom viszont az azóta már publikációként is elkészült, a munka korábbi fázisát mutató cikkemre [20]. Ezekre építem a mostani vizsgálatokat is. A korábbi eredményekhez képest újdonság egy új térbeli változó bevezetése (később részletezve a 3.2 alfejezetben), aminek segítségével az eredmények összevethetők a kísérleti eredményekkel. Ezen kívül a háromdimenziós (3D) Lévy-függvény egydimenziós (1D) projekcióinak egy, a korábbi eredményemhez képest numerikusan pontosabban kiszámolt alakját használtam, így az illesztések is pontosabbak lettek, ami lehetővé tette több m_T tartomány illetve centralitás függés vizsgálatát is. Ezen kívül az eredményeimet összevetettem a PHENIX kísérlet legújabb eredményeivel [15].

2. Femtoszkópiai korrelációk

Femtoszkópiának hívjuk a nagyenergiás fizikában a femtométer nagyságrendű folyamatok téridőbeli szerkezetének feltárására irányuló módszereket. Elsőre igen meglepő, hogy egyáltalán vannak olyan módszerek, amikkel képet kaphatunk az ezen a skálán végbemenő folyamatokról is. A fő ide tartozó mérési technikát, az azonos részecskék korrelációinak megfigyelését először a rádiócsillagászatban alkalmazták. Rádiótávcsövekkel vizsgálták csillagokból érkező intenzitásfluktuációk korrelációit, ezzel határozva meg a távoli égitestek látszólagos átmérőjét. Később bizonyították, hogy a jelenség fénnel is észlelhető. A jelenséget a mérést elvégző csillagász, Robert Hanbury Brown és matematikus csillagász, Richard Quintin Twiss után HBT-jelenségnek nevezték el [21].

Ettől függetlenül G. Goldhaber, S. Goldhaber, W-Y. Lee és A. Pais nagyenergiás ütközések során keletkezett azonos töltésű pionok korrelációit figyelték meg [22]. A jelenséget a részecskék hullámfüggvényének Bose-Einstein-szimmetriájából kiindulva magyarázták meg, a korrelációkat ezért a nehézion-fizikában GGLP- vagy Bose-Einstein-korrelációknak hívják.

2.1. Lévy-alakú forrásfüggvény a femtoszkópiában

A femtoszkópiai mérések egyik fő célja a térbeli forrásfüggvények vizsgálata Bose-Einstein-korrelációkon keresztül. A forrásfüggvényt a kísérletek során sok ideig Gauss-függvénnyel közelítették, azonban későbbi kísérleti eredmények hatványfüggvény-jellegű lecsengést mutattak nagy távolságokra, így Lévy-függvénnyel [23] is elkezdtek vizsgálni a forrásfüggvényt, ami sikeresebbnek bizonyult a forrásfüggvény rekonstrukciójában [17].

2.1.1. Femtoszkópia és korrelációs függvények

Két azonos típusú részecske korrelációs függvénye definíció alapján az alábbi:

$$C_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{N_1(\mathbf{p}_1)N_2(\mathbf{p}_2)} , \quad (1)$$

ahol $\mathbf{p}_1$ és $\mathbf{p}_2$ a két részecske impulzusa, $N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ a részecskepárok impulzuseloszlása, $N_1(\mathbf{p}_1)$ és $N_2(\mathbf{p}_2)$ pedig az egyrészecskés impulzuseloszlás értékei.

A Bose-Einstein-korrelációk leírására bevezetjük az $S(x, \mathbf{p})$ forrásfüggvényt, ami megadja az adott négyeskoordináta és impulzus mellett várhatóan keletkező részecskék számát. Ezzel felírhatjuk az egyrészecskés impulzuseloszlást:

$$N_1(\mathbf{p}) = \int d^4x S(x, \mathbf{p}), \quad (2)$$

a kétrészecske-eloszlás pedig

$$N_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int d^4x_1 d^4x_2 S(x_1, \mathbf{p}_1) S(x_2, \mathbf{p}_2) |\Psi_{k_1, k_2}(x_1, x_2)|^2 . \quad (3)$$

A Bose-Einstein-statisztikából adódóan a kétrészecskét leíró $\Psi_{k_1, k_2}(x_1, x_2)$ hullámfüggvény szimmetrizált, a $|\Psi_{k_1, k_2}(x_1, x_2)|^2$ pedig a kétrészecske sűrűségfüggvénye. Amennyiben elhanyagoljuk a keletkezett (és megfigyelt) részecskék végállapotú kölcsönhatásait, akkor az alábbi alakra jutunk:

$$\Psi_{k_1, k_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} + e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_1}) . \quad (4)$$

Ezt felhasználva a korrelációs függvény kifejezése az alábbi alakra hozható:

$$C(q) = 1 + \text{Re} \left\{ \frac{\tilde{S}(q, \mathbf{p}_1) \tilde{S}^*(q, \mathbf{p}_2)}{\tilde{S}(0, \mathbf{p}_1) \tilde{S}^*(0, \mathbf{p}_2)} \right\} , \quad (5)$$

ahol $q = p_1 - p_2$ a két részecske relatív négyesimpulzusa, $\tilde{S}(q, \mathbf{p})$ pedig a forrásfüggvény térváltozó szerinti Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{S}(q, \mathbf{p}) = \int S(x, \mathbf{p}) e^{iqx} d^4x . \quad (6)$$

Egy gyakran alkalmazott közelítés az úgynevezett simasági közelítés: eszerint a részecskék impulzusát közel azonosnak lehet tekinteni a forrásfüggvény második változójában (tehát a Fourier-transzformált függvény második változójában is): vagyis $p_1 \approx p_2 \approx K$ írható oda. Ennek segítségével a korrelációs függvény alakja még tovább egyszerűsödik:

$$C(\mathbf{q}) = 1 + \frac{|\tilde{S}(\mathbf{q}, \mathbf{K})|^2}{|\tilde{S}(0, \mathbf{K})|^2} . \quad (7)$$

A vizsgálatok során érdemes áttérni az x_1, x_2 koordináták helyett tömegközépponti (X) és relatív (x) koordinátákra:

$$\begin{aligned} x &= x_1 - x_2 , \\ X &= \frac{x_1 + x_2}{2} . \end{aligned} \quad (8)$$

Ezek segítségével definiálható az úgynevezett páreloszlásfüggvény, ami lényegében a forrásfüggvény autokonvolúciója:

$$D(x, \mathbf{K}) = \int d^4X S(X + \frac{x}{2}, \mathbf{K}) S(X - \frac{x}{2}, \mathbf{K}) . \quad (9)$$

Ez a függvény a fentebbi megfontolások alapján a következő módon van kapcsolatban a korrelációs függvénnyel:

$$C(\mathbf{q}) = \frac{\int d^4x D(x, \mathbf{K}) |\Psi_{k_1, k_2}(x_1, x_2)|^2}{\int d^4x D(x, \mathbf{K})} \quad (10)$$

A kísérletekben az ilyen korrelációs függvények azok, amik mérhetők, ezekkel keresztül válik vizsgálhatóvá a páreloszlásfüggvény is. A forrásfüggvény alakjáról is tehát ezen páreloszlás alapján szerezhetünk információt. Ezzel szemben szimulációs programcsomagok segítségével a végállapotban megfigyelhető részecskék keletkezési négyeskoordinátái is ismertnek vehetők, így a páreloszlásfüggvény közvetlenül is vizsgálható, anélkül, hogy közelítéseket tennénk a részecskepár hullámfüggvényének alakjára.

2.1.2. Lévy-függvény

A forrásfüggvény alakjára vonatkozó vizsgálataimban az elliptikus kontúrral rendelkező háromdimenziós Lévy-stabil eloszlást használtam, melynek definíciója az alábbi [24]:

$$\mathcal{L}^{(3D)}(\mathbf{r}, R_x, R_y, R_z, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-\frac{1}{2}|q_x^2 R_x^2 + q_y^2 R_y^2 + q_z^2 R_z^2|^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad (11)$$

ahol az $R_{x,y,z}$ paraméterek (az úgynevezett Lévy-skálák) az eloszlás térbeli kiterjedésének tulajdonságaival hozható összefüggésbe (bár nem ugyanolyan egyszerűen, mint például egy Gauss-eloszlás sugara); az α paraméter pedig az úgynevezett Lévy-index, ami a $0 < \alpha \leq 2$ tartományon értelmezett. Az $\alpha = 2$ esetben a felírt Lévy-eloszlás egy Gauss-eloszlással egyezik meg.

Gömbszimmetrikus esetben

$$\mathcal{L}^{(3D)}(r, R, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{iqr} e^{-\frac{1}{2}|qR|^\alpha}. \quad (12)$$

A háromdimenziós eset egydimenziós projekciója (ez megkönnyíti a numerikus implementálást):

$$\mathcal{L}^{1D}(r_x, R_x, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{r_x q} e^{-\frac{1}{2}q_x R_x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dq \cos(qr) e^{-\frac{1}{2}qR}. \quad (13)$$

A Lévy-skála kiemelhető az alábbi összefüggés alapján:

$$\mathcal{L}^{(1D)}(r, R, \alpha) = \frac{1}{R} \mathcal{L}^{(1D)}\left(\frac{r}{R}, 1, \alpha\right). \quad (14)$$

Mivel a Lévy-eloszlás stabil konvolúció alatt, így ha a forrásfüggvény Lévy-függvénnyel írható le, akkor a páreloszlásfüggvény, ami a forrásfüggvény autokonvolúciója, szintén Lévy-eloszlással írható le, azonos α paraméter mellett, az alábbi korrekcióval a Lévy-skála értékében:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, 2^{\frac{1}{\alpha}} R, \alpha). \quad (15)$$

Az eseménygenerátorból származó páreloszlás-függvényeket tehát ilyen Lévy-eloszlásokkal illesztettem. Nem triviális kérdés az sem, hogy (az $\alpha = 2$ esetnek megfelelő Gauss-eloszlástól eltekintve) hogyan lehet konkrétan numerikusan kiértékelni a Lévy-eloszlásfüggvény értékeit; a használt módszerekről a korábbi TDK dolgozatomban, illetve a [20] cikkünkben található összefoglaló.

3. A térbeli páreloszlásfüggvény vizsgálata

Munkám során az EPOS esemény-generáló szimulációs programcsomagot használtam [25]. Az EPOS betűszó egy hosszadalmas név rövidítése; a teljes feloldás: „Energy conserving quantum mechanical multiple scattering approach, based on Partons (parton ladders), Off-shell remnants, and Saturation of parton ladders”. Ez egy relatíve friss fejlesztésű nehézion-fizikai eseménygenerátor (vagyis nagyenergiás mag-mag-ütközések végállapotait véletlenszerűen produkáló programcsomag). Szinte az összes, a nehézion-ütközések elméleti leírásában fontos ismert fizikai elvet figyelembe veszi. Ehhez külön „szakaszokra” osztja az ütközés időfejlődését. A kezdő állapot leírását egy bonyolult, jelen munka keretein túlmutató módszertannal közvetlenül az erősen kölcsönható részecskék parton-modelljére vezeti vissza, majd a partonok (kvarkok és gluonok) kölcsönhatását az úgynevezett húr-modell (Lund String Model) alapján tárgyalja. Ezután egy viszkózus hidrodinamikai tágulás következik (a húrmodell-szakasz kimeneteleként kapott, eseményenként különböző kezdőfeltételből kiindulva). A kvark-gluon-plazma hadronizációját a kvarkon hadronokba való átalakulását leíró ismert úgynevezett fragmentációs függvényeknek, illetve a statisztikus eloszlású részecskeprodukciónak az összjátékával modellezi. Legvégül még figyelembe veszi, hogy a keletkezett hadronok is még sűrű közegben vannak, ahol még lehetségesek az egymáson való (akár a részecsketípust is megváltoztató) szórásfolyamatok; ezek elmúltával viszont már azok a hadronok jönnek létre, amelyek a detektorba érhetnek.

A páreloszlásfüggvények vizsgálatához tehát ezt az eseménygenerátort (szimulációs programcsomagot) használtam, korábbi hasonló munkák folytatásaként [18, 19, 26]. A program által generált $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiás arany-arany ütközések során keletkezett azonos töltésű pion párok 3 dimenziós páreloszlásfüggvényét vizsgáltam eseményenként. A páreloszlásfüggvényt Lévy-függvénnyel illesztettem és megvizsgáltam az illesztésekkel kapott paramétereket. Ehhez hasonló, Lévy-eloszlást használó vizsgálatokat mások korábban csak szögátlagolt esetben végeztek, illetve a publikált kísérleti eredmények is mind szögátlagolt egydimenziós mérések. Háromdimenziós mérésekből egyelőre csak előzetes (preliminary) eredmények lettek bemutatva a PHENIX és STAR kísérletek által, a fenomenológiai oldalról pedig szintén rendkívül kevés vizsgálat áll rendelkezésre, így a dolgozatom fontos új eredményekkel szolgálhat a témában.

3.1. A páreloszlásfüggvény rekonstruálása

A páreloszlások rekonstruálása eseményenként történt, a keletkezett részecskéket transzverz tömeg (m_T) szerint külön tartományokban vizsgálva. Ezen (gyakran használt) kinematikai változó definíciója

$$m_T = \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}, \quad (16)$$

ahol K_T a részecskepár átlagos transzverz impulzusa, m_π pedig a pion tömege.

Első lépésként centralitásozttályokba osztottam az eseményeket (ez később a centralitás-függés szempontjából érdekes), majd az eseményeken belül különböző vágásokat végeztem el a keletkezett töltött pionokon, hogy valóban csak a valódi kísérleti elrendezésekben mérhető kinematikájú részecskékkel foglalkozzak itt is. Ezután az átlagos transzverz tömeg, m_T szerint is csoportosítottam őket, elvégeztem a szükséges koordináta-transzformációkat és vettem a páreloszlásukat.

Minden részecske pár esetén áttértem a Bertsch-Pratt-koordinátákra, ahol a "long" irány megegyezik a nyaláb irányával, az "out" irány a kétrészecske átlagos transzverz impulzusának a nyalábiránnyal merőleges síkra vett vetülete irányával, a "side" irány pedig a két korábban merőleges irány. Az EPOS szimulációs programcsomagban az eseményekben a keletkezési koordináták úgy vannak elmentve, hogy a z irány megegyezik a nyaláb irányával. A Bertsch-Pratt-koordinátákra való áttérés az alábbi összefüggések segítségével lehet:

$$\begin{aligned} r_{out} &= \frac{|r_x K_x + r_y K_y|}{K_T}, \\ r_{side} &= \frac{|r_x K_x - r_y K_y|}{K_T}, \\ r_{long} &= r_z. \end{aligned} \tag{17}$$

A korábbi hasonló munkákhoz képest fontos újítás (és pontosítás) volt az jelen dolgozatban bemutatott munkámban, hogy az egyszerű $\vec{r}$ térkoordináta-különbség helyett a $\vec{\rho} := \vec{r} - \vec{\beta}t$ új változót vezettem be [26–28], ahol $\vec{\beta} = \vec{K}/K_0$, és persze $\vec{r}$ a relatív koordinátavektor, t pedig a relatív kifagyási idő. Így az eredmények jobban összevethetőek lesznek a kísérletek során végzett mérésekkel. Kiderül ugyanis (részben például a [29] hivatkozásban is olvasható módon), hogy olyan esetben, amikor a kifagyás, azaz a végső megfigyelt részecskék keletkezése nem az egész térben egyidejűleg történik (amint az minden bizonnyal a valós helyzet is), akkor nem az $\vec{r}$, hanem ezen $\vec{\rho}$ változónak az eloszlása az, aminek a háromdimenziós Fourier-transzformáltja lesz a megfigyelt korrelációs függvény. Tehát mivel a kísérletileg rekonstruált forrásfüggvény a megfigyelt korreláció háromdimenziós (inverz) Fourier-transzformáltjaként adódik, mindenképpen ezen $\vec{\rho}$ változó használata indokolt, ha a kísérleti eredményekkel akarjuk a közvetlenül az eseménygenerátorból nyert páreloszlást összehasonlítani.

Továbbá a laborrendszerből eltranszformáltam a változókat az LCMS (Longitudinally Co-moving System = longitudinálisan együttmozgó rendszer) koordinátarendszerbe, melyet a legtöbb kísérlet használt a korrelációsfüggvény-mérések közzléséhez. Az LCMS koordináta rendszerben a részecskepár átlagos impulzusa merőleges a nyalábirányra.

Mindezeket összefoglalva a használt változók az LCMS koordináta-rendszerben a következők:

$$\begin{aligned}\rho_{out}^{LCMS} &= r_x \cos \phi + r_y \sin \phi - \frac{K_T}{K_0^2 - K_z^2} (K_0 t - K_z r_z), \\ \rho_{side}^{LCMS} &= -r_x \sin \phi + r_y \cos \phi, \\ \rho_{long}^{LCMS} &= \frac{K_0 r_z - K_z t}{\sqrt{K_0^2 - K_z^2}},\end{aligned}\tag{18}$$

ahol

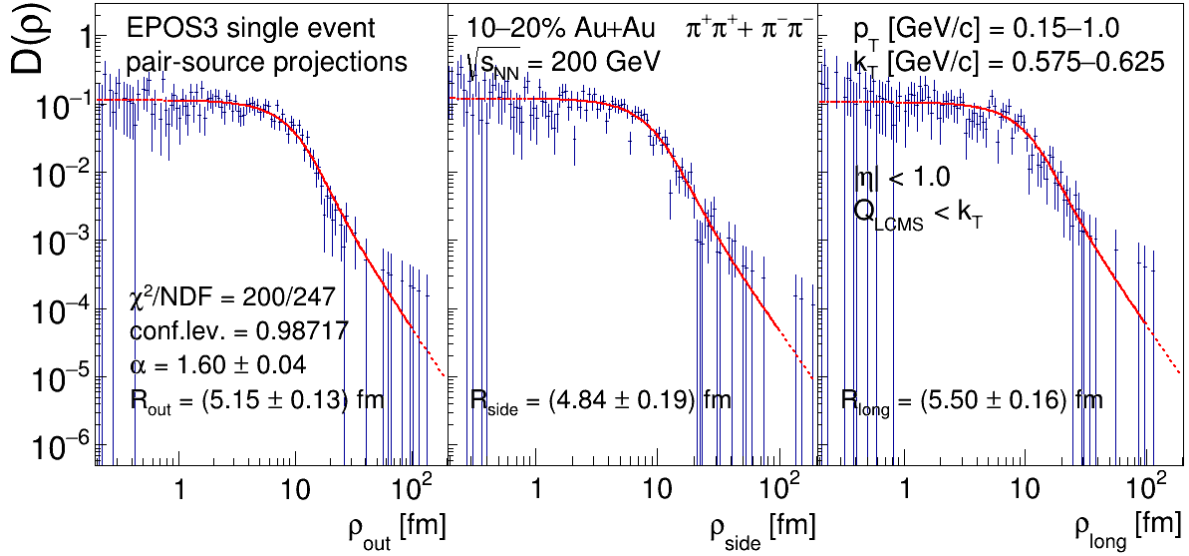
$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{K_x}{K_T}, \\ \sin \phi &= \frac{K_y}{K_T}, \\ K_T &= \sqrt{K_x^2 + K_y^2}.\end{aligned}\tag{19}$$

3.2. Illesztés a 3D Lévy-eloszlással

A kapott 3 dimenziós eloszlás egydimenziós projekcióira illesztettem az 1 dimenziós Lévy-függvényt (ami a 3 dimenziós Lévy-függvény 1 dimenziós projekciójával egyezik meg):

$$\mathcal{L}^{1D}(r, R_{osl}, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq \cos(qr) e^{-\frac{1}{2}qR_{osl}}.\tag{20}$$

A három projekciót a Bertsch-Pratt-koordináták alapján vettem, majd a három projekcióra szimultán illesztettem a Lévy-függvényt. Az illesztések alatt a 3 projekció esetén 4 szabad paraméterem volt: α , R_{out} , R_{side} és az R_{long} , azaz a Lévy-index és a Lévy-skála értékek (ha minden vetületre különböző α értékekkel illesztenék, akkor azok hibán belül egyeznének). Ez a módszer konzisztens azzal, mintha a 3D páreloszlásra illesztenénk a 3D Lévy-függvényt, de ez sokkal gyorsabb a projekciókra illeszteni, mint megilleszteni 3 dimenzióban. Egy példa illesztés a három projekcióra a 10-20% centralitás tartományra a 1. ábrán látható. Az illesztések alapján is látszik, hogy az eloszlás jól leírható az elliptikus kontúrú Lévy-eloszlással. Ehhez hasonló illesztéseket végeztem el több ezer eseményre, majd a kapott paramétereiből (centralitás és m_T szerint bontva) eseménysokaságra vett átlagot és szórást számoltam.



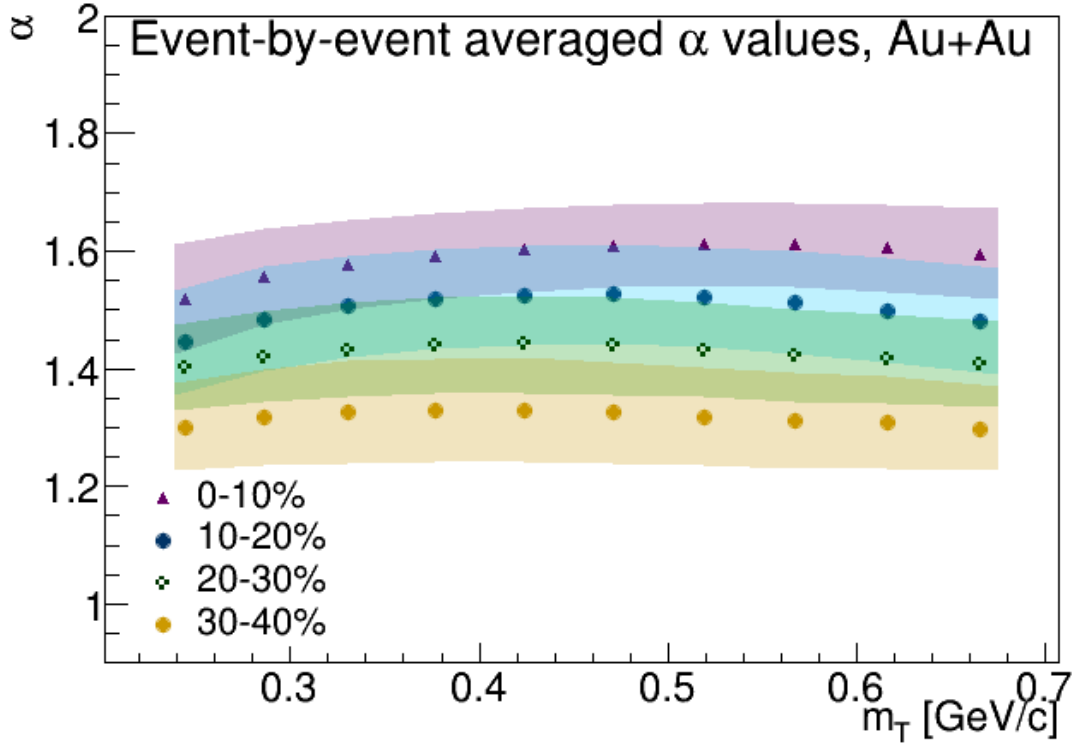
1. ábra. Az ábrán egy példaillesztés látható 3D eloszlás három vetületére, 10-20% centralitás esetén, egy eseményre. Az illesztések a három projekcióra az 1D Lévy-függvénnyel szimultán történtek, 4 illesztési paraméterrel. A vizsgálat során hasonló illesztések történtek több ezer eseményre, amik alapján a paraméterekből eseménysokaságra vett átlagot és szórást határoztam meg.

4. Eredmények

Az eseményenkénti illesztések elvégzése után (amik több ezer eseményre történtek), az illesztésekből kapott paraméterekből átlagot és szórást számoltam minden centralitás és m_T tartomány esetén. A kapott eredményeket összehasonlítottam a PHENIX kísérlet [15] cikkben publikált Lévy-eloszlást vizsgáló eredményeivel.

4.1. Lévy-index

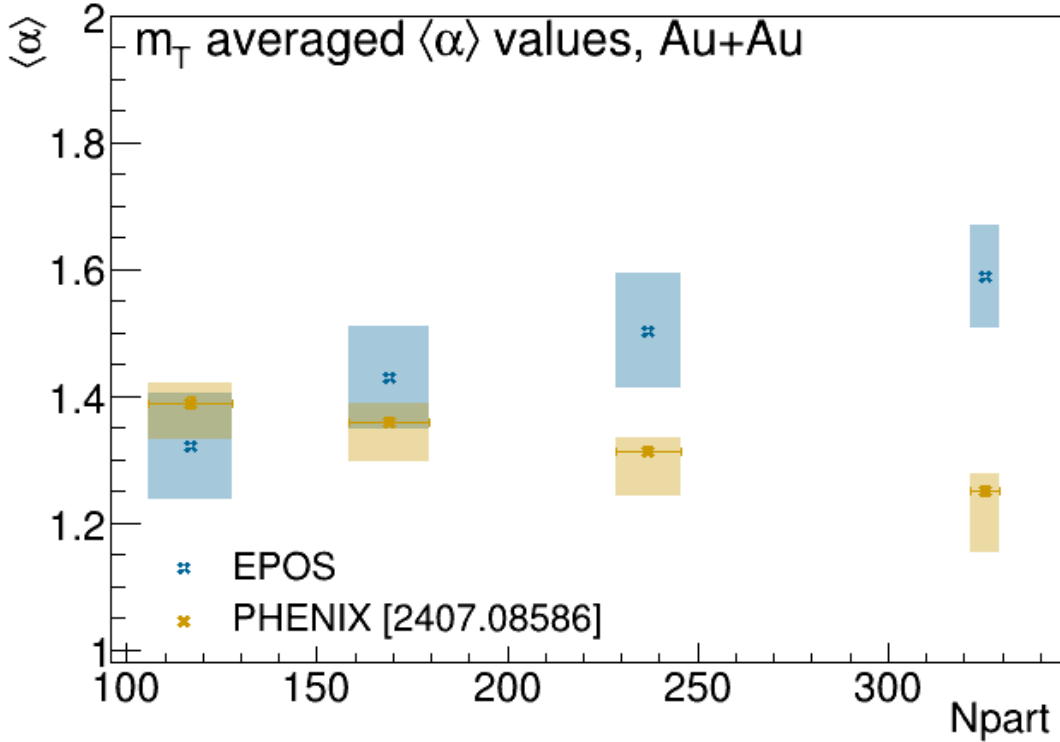
A Lévy-index esetén kapott eredmények a 2. ábrán láthatók. Az ábrán az α értékek 4 centralitás tartomány esetén vannak ábrázolva az átlagos transzverz tömeg m_T függvényében. Az ábrán jól látható, hogy az illesztések alapján a Lévy-indexre $\alpha = 1.2 - 1.7$ közötti értéket kaptam, ami jóval kisebb, mint $\alpha = 2$, azaz a Gauss-eloszlás esete, így megállapítható, hogy páreloszlás függvény nem Gauss-függvény alakú. Ezen kívül megfigyelhető, hogy az értékek m_T -tól csak kis mértékben függenek, viszont határozott centralitás függés látható, minél centrálisabb egy esemény, annál nagyobb α értéket kaptam. Ez a trend ellentétes a kísérletekben megfigyelhető trendekkel, mivel ott a periférikusabb ütközések esetén figyeltek meg nagyobb α értékeket [14, 15].



2. ábra. A kapott α értékek és szórásuk az illesztések alapján 4 centralitás tartományra m_T függvényében. Az ábrán a különböző színek a különböző centralitás tartományokat jelölik. Megfigyelhető, hogy a Lévy-index értéke a centralitástól határozottan függ: centrálisabb események esetén az értékek nagyobbak, illetve m_T értékétől csak kicsi függés figyelhető meg.

A kapott Lévy-index értékeket egy adott centralitás tartományon belül átlagoltam m_T szerint, hogy össze tudjam hasonlítani a [15] cikkben megjelent PHENIX eredményekkel. A kapott átlagos α értékek és a kísérleti eredmények a 3. ábrán láthatók. A centralitás értékről a könnyebb ábrázolhatóság kedvéért áttértem az N_{part} értékekre, ami összefüggésbe hozható a centralitással. Az N_{part} azoknak a nukleonoknak a számát jelöli, amik részt vettek az ütközésekben, tehát minél nagyobb az N_{part} értéke, annál több nukleon ütközött az adott esemény során, tehát annál centrálisabb az adott ütközés. A 3. ábrán is megfigyelhető az, hogy a szimuláció alapján kapott Lévy-index értékek (az ábrán a kék színnel jelölve) nőnek N_{part} növekedésével (ami annak felel meg, hogy centrálisabb eseményekre nagyobb az α értéke), és az is látható, hogy ez ellentétes a kísérleti eredményekkel (az ábrán a sárgával jelölve), ahol nagyobb N_{part} esetén kisebb α értékeket kaptak. Ezen kívül megfigyelhető, hogy a centrálisabb ütközések esetén az eltérés a szimulációból kapott adatok és a kísérleti eredmények között jelentős, míg periférikusabb ütközések esetén a kettő jobb egyezést mutat. Ennek egy lehetséges oka, hogy az EPOS esemény generátorból hiányzik a nagy távolságok esetén

fellépő Coulomb-kölcsönhatás, ami centrális ütközések esetén fontosabb szerepet játszhat, mint periférikusoknál. Hasonló jelenséget figyeltek meg egy anyagfizikai vizsgálatban [30] kétdimenziós táguló Coulomb-kölcsönható folyadék esetén, ahol a töltésdiffúzió anomálisnak bizonyult, és a lépéshossz eloszlás hatványfüggvény lecsengést mutatott.

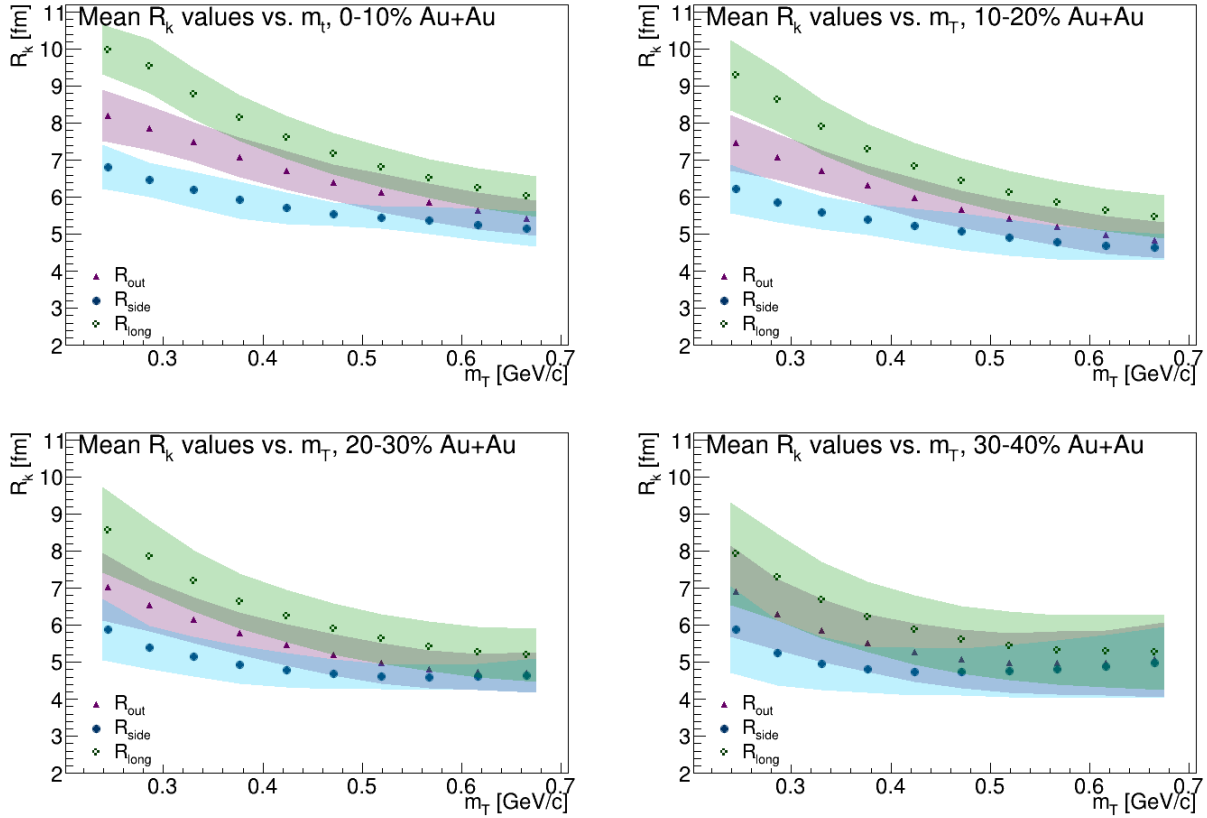


3. ábra. Az illesztések során kapott α értékek m_T szerint átlagolt értékei összehasonlítva a [15] cikkben kapott 1 dimenziós vizsgálat eredményeivel N_{part} függvényében. A nagyobb N_{part} értékek centrálisabb ütközéseket jelentenek. Megfigyelhető, hogy a kísérleti eredményekkel ellentétben a szimulációból kapott α értékek trendje, illetve centrális ütközések esetén nagy eltérés figyelhető meg, míg periférikusabb ütközések esetén jó egyezést mutatnak a kapott értékek. Ezek alapján levonható a következtetés, hogy az EPOS jobban rekonstruál periférikusabb ütközéseket.

4.2. Lévy-skála

A három Lévy-skálára kapott értékek a 4. ábrákon láthatók a négy centralitás tartomány esetén m_T függvényében. A három Lévy-skálára kapott értékeket három különböző színnel jelöltem: az R_{out} lila, az R_{side} kék, az R_{long} értékeit pedig zöld színnel jelöltem. Mind a négy ábrán látható, hogy a három projekció esetén a Lévy-skála értékek eltérnek egymástól. Ez azt jelenti, hogy a forrásfüggvény nem gömbszimmetrikus. Ezen kívül megfigyelhető, hogy

az R_{osl} értékek mindig egy adott nagyság szerinti sorrendben vannak: a legnagyobb minden esetben az R_{long} (nyaláb irányába eső vetület), utána jön az R_{out} és végül a R_{side} . Megfigyelhető m_T és centralitás függés is. Az m_T függvényében m_T növekedésével az R_{osl} értékek csökkennek, ami megegyezik a kísérletek alapján várt tendenciával. Centralitás függvényében elmondható, hogy a centrálisabb ütközések esetén nagyobb R_{osl} értékeket kaptam. Ezen kívül megfigyelhető, hogy az m_T értékének növekedésével a három R_{osl} érték egyre közelebb lesz egymáshoz, azaz a pár korrelációs függvény egyre gömbszimmetrikusabb lesz.



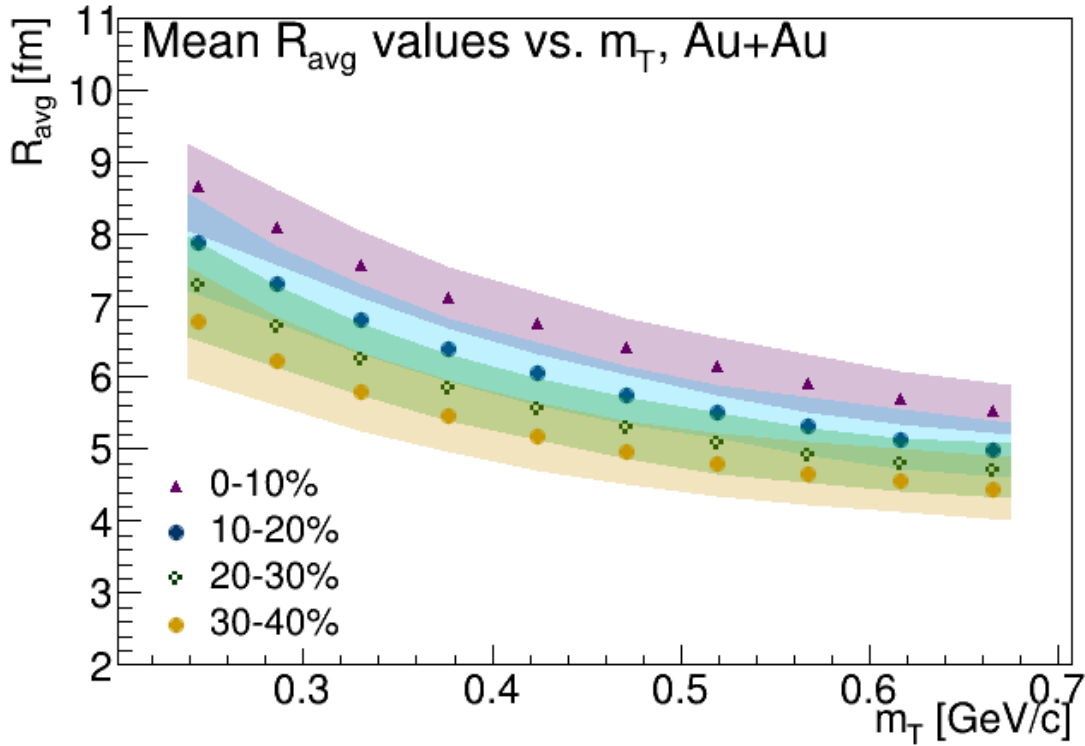
4. ábra. A három projekció esetén kapott Lévy-skálára kapott értékek különböző centralitás tartományok esetén m_T függvényében. Mindegyik centralitás tartomány esetén megállapítható, hogy a három R_{osl} érték közül az R_{long} (azaz nyaláb irányába mutató) értékek a legnagyobbak, majd következik az R_{out} és végül az R_{side} . Látható az is, hogy a centralitás függés mellett itt már sokkal jelentősebb m_T függés is megfigyelhető, mindhárom irány esetén elmondható, hogy a Lévy-skála értéke m_T növekedésével csökken. Ezen kívül még megállapítható, hogy mindegyik centralitás tartomány esetén m_T növekedésével a három Lévy-skála érték egyre közelebb kerül egymáshoz.

4.3. Átlagolt Lévy-skála

A három vetület esetén kapott R_{osl} értékeket kiátlagoltam, így kaptam egy R_{avg} értéket, ami összehasonlítható az 1 dimenziós gömb-szimmetrikus mérésekből származó értékekkel. Az R_{avg} értékét az alábbi képlet alapján határoztam meg:

$$R_{avg} = \sqrt{\frac{R_{out}^2 + R_{side}^2 + R_{long}^2}{3}}. \quad (21)$$

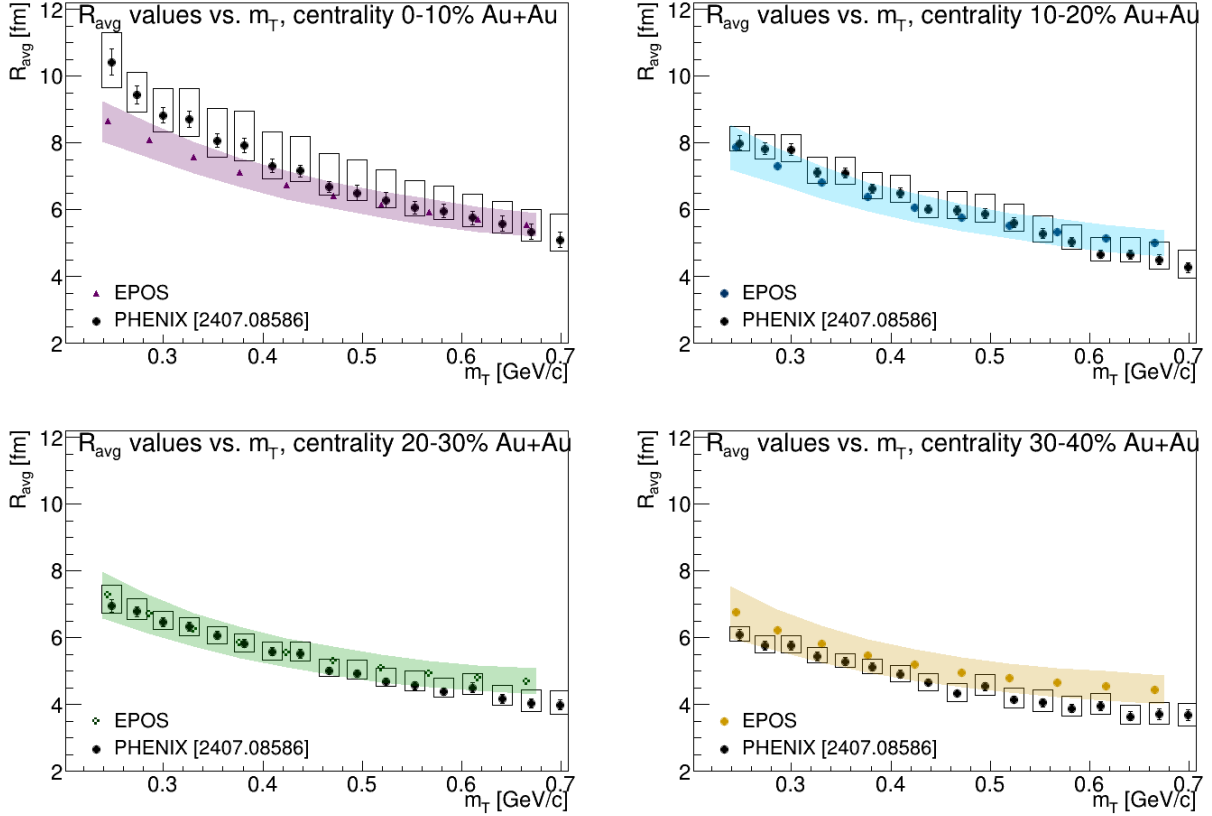
A kapott értékek a különböző centralitás tartományok esetén m_T függvényében a 5. ábrán láthatók. Itt is megfigyelhető az m_T növekedésével történő csökkenés. Illetve itt jobban látszik az átlagolás előtt megfigyelhető centralitás függés, azaz hogy a centrálisabb ütközések esetén nagyobb Lévy-skála értékeket kaptunk.



5. ábra. Az irányra átlagolt Lévy-skála értékek a különböző centralitás tartományokban m_T függvényében. Itt is megfigyelhető az m_T növekedésével történő csökkenés. Illetve itt jobban látszik az átlagolás előtt megfigyelhető centralitás függés, azaz hogy a centrálisabb ütközések esetén nagyobb Lévy-skála értékeket kaptunk.

Az átlagolt Lévy-skála értékeket összehasonlítottam a [15] cikkben publikált PHENIX eredményekkel. Az összehasonlítás eredményei a 6. ábrákon láthatók, egy adott ábrán az

adott centralitás tartományra kapott eredményekkel. A színes sávok a szimulációs eredményeket jelölik, a fekete keretek pedig a kísérleti eredményeket. Ahogy az az ábrákon is megfigyelhető, a szimulációs eredmények nagyon jó egyezést mutatnak a kísérleti eredményekkel. Ez azt jelenti, hogy az EPOS jól írja le a forrás skála értékeit.



6. ábra. Az irányra átlagolt Lévy-skála értékek összehasonlítva a 1D PHENIX kísérleti eredményeivel. Egy adott ábrán az adott centralitás tartományra kapott eredményekkel. A színes sávok a szimulációs eredményeket jelölik, a fekete keretek pedig a kísérleti eredményeket. Ahogy az az ábrákon is megfigyelhető, a szimulációs eredmények nagyon jó egyezést mutatnak a kísérleti eredményekkel. Ez azt jelenti, hogy az EPOS jól írja le a forrás skála értékeit.

5. Összefoglalás

Összességében tehát a TDK dolgozatom során azonos töltésű pionpárok páreloszlásfüggvényét vizsgáltam az EPOS nehézion-fizikai eseménygenerátor által szimulált nagyenergiás ütközésekben. Az EPOS által generált $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es arany-arany ütközések során keletkezett azonos töltésű pionpárok 3 dimenziós páreloszlását Lévy-függvénnyel illesztettem, majd a kapott paraméterek transzverztömeg- és centralitásfüggését vizsgáltam, illetve összehasonlítottam az eredményeimet a PHENIX kísérlet legújabb méréseivel [15]. Jelen dolgozat a korábbi TDK dolgozatom és diplomamunkám közvetlen folytatása. Korábbi munkáimhoz képest újdonság, hogy egy numerikusan pontosabban kiszámolt Lévy-függvényt használtam, ami lehetővé tette több centralitás és transzverz tömeg osztály vizsgálatát, illetve a kísérleti eredményekkel való összehasonlíthatóság érdekében egy megfelelőbb térbeli változót használtam. A páreloszlásfüggvényeket eseményenként illesztettem, szimultán a háromdimenziós eloszlás 1 dimenziós projekcióira, majd a kapott négy paraméternek (α , $R_{o,s,l}$) vettem az átlagát és szórását az egyes centralitás- és m_T -tartományokon belül. Ezeket már valóban össze lehetett hasonlítani a kísérleti mérésekkel.

A Lévy-index vonatkozásában azt találtam, hogy az értéke $\alpha = 1.2 - 1.7$ közé esik, ami jóval kisebb, mint az $\alpha = 2$ érték, ami a Gauss-esetnek felelne meg. A paraméter kis mértékben függ a transzverz tömeg értékétől, viszont sokkal jelentősebb centralitásfüggés figyelhető meg. Minél centrálisabb egy adott esemény, annál nagyobb α értéket kaptam. A Lévy-skálára azt találtam, hogy a három projekció esetén az értékei eltértek, minden centralitás és m_T tartomány esetén az adott sorrendben $R_{long} > R_{out} > R_{side}$. Minden centralitás tartomány esetén megfigyelhető, hogy az m_T növekedésével csökken a Lévy-skála értéke, ami megegyezik a kísérletek alapján várt függéssel. Ezen kívül azt találtam, hogy az m_T növekedésével a csökkenő tendencián kívül megfigyelhető egy összetartás is a három irányba vett skála esetén. Megfigyelhető centralitás függés is, centrálisabb ütközések nagyobb R_{osl} értékekhez vezettek. A centralitás függés jobban megfigyelhető az irányra átlagolt átlagos Lévy-skála esetén, amit szintén meghatároztam az illesztési paraméterek alapján, és vizsgáltam a centralitás és m_T függését.

A kapott paramétereket összehasonlítottam a fent említett kísérleti eredményekkel. Az α esetében m_T szerint átlagoltam az eredményeket és N_{part} szerint ábrázoltam őket, ami egy centralitással összefüggésbe hozható mennyiség. Az összehasonlítás alapján azt találtam, hogy a tendencia ellentétes a kísérletben megfigyelt centralitás-függéshez képest. Ezen kívül megállapítható, hogy centrális ütközések esetén nagy az eltérés a kísérleti adatok és az általam kapott adatok között, míg periférikusabb ütközések esetén jobb egyezést kaptam. Ezek alapján megállapítható, hogy centrálisabb ütközésekben a modell kevésbé egyezik kísérletekkel. Ennek egyik lehetséges oka, hogy az EPOS-ban nincsen lekövetve a nagy távolságok

esetén fellépő Coulomb-kölcsönhatás, ami fontosabb centrálisabb ütközések esetén, ahol több részecske keletkezik, így jelentősebb a kölcsönhatás is, ami nagyobb módosulást eredményez, ha nem vesszük figyelembe a hatást. A kísérleti Lévy-skála paramétereiket az irányra átlagolt Lévy-skála értékekkel hasonlítottam össze. Itt minden centralitástartomány esetén jó egyezést kaptam a kísérleti eredményekkel.

Az elért eredmények alapján azt mondhatjuk, hogy a jelenleg ismert egyik legfejlettebb nehézion-fizikai eseménygenerátor, az EPOS részben jól rekonstruálja a pion-páreloszlásfüggvény geometriai tulajdonságait, azonban a Lévy-index tekintetében mindenképpen vannak olyan folyamatok, amelyeket még nem tartalmaz. A Lévy-eloszlásokon alapuló korrelációsfüggvény-mérések tehát minden bizonnyal további érdekes fizikai körülmények feltárásához, netán felfedezésekhez is vezethetnek majd.

Hivatkozások

- [1] Adcox, K., *et al.*: Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. Nucl. Phys. A **757**, 184–283 (2005) <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.03.086> arXiv:nucl-ex/0410003
- [2] Adams, J., *et al.*: Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions. Nucl. Phys. A **757**, 102–183 (2005) <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.03.085> arXiv:nucl-ex/0501009
- [3] Back, B.B., *et al.*: The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC. Nucl. Phys. A **757**, 28–101 (2005) <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.03.084> arXiv:nucl-ex/0410022
- [4] Arsene, I., *et al.*: Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment. Nucl. Phys. A **757**, 1–27 (2005) <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.02.130> arXiv:nucl-ex/0410020
- [5] Aamodt, K., *et al.*: Suppression of Charged Particle Production at Large Transverse Momentum in Central Pb-Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. Phys. Lett. B **696**, 30–39 (2011) <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.12.020> arXiv:1012.1004 [nucl-ex]
- [6] Aamodt, K., *et al.*: Elliptic flow of charged particles in Pb-Pb collisions at 2.76 TeV. Phys. Rev. Lett. **105**, 252302 (2010) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.252302> arXiv:1011.3914 [nucl-ex]
- [7] Chatrchyan, S., *et al.*: Study of High-pT Charged Particle Suppression in PbPb Compared to *pp* Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. Eur. Phys. J. C **72**, 1945 (2012) <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-1945-x> arXiv:1202.2554 [nucl-ex]
- [8] Chatrchyan, S., *et al.*: Measurement of the Elliptic Anisotropy of Charged Particles Produced in PbPb Collisions at $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ TeV. Phys. Rev. C **87**(1), 014902 (2013) <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.87.014902> arXiv:1204.1409 [nucl-ex]
- [9] Pratt, S.: Pion Interferometry for Exploding Sources. Phys. Rev. Lett. **53**, 1219–1221 (1984) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.1219>

- [10] Lisa, M.A., Pratt, S., Soltz, R., Wiedemann, U.: Femtoscopy in relativistic heavy ion collisions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **55**, 357–402 (2005) <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.55.090704.151533> arXiv:nucl-ex/0505014
- [11] Lacey, R.A.: Indications for a Critical End Point in the Phase Diagram for Hot and Dense Nuclear Matter. *Phys. Rev. Lett.* **114**(14), 142301 (2015) <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.142301> arXiv:1411.7931 [nucl-ex]
- [12] Adhikary, H., *et al.*: Two-pion femtoscopic correlations in Be+Be collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 16.84$ GeV measured by the NA61/SHINE at CERN. *Eur. Phys. J. C* **83**(10), 919 (2023) <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11997-8> arXiv:2302.04593 [nucl-ex]
- [13] Adare, A., *et al.*: Lévy-stable two-pion Bose-Einstein correlations in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions. *Phys. Rev. C* **97**(6), 064911 (2018) <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.97.064911> arXiv:1709.05649 [nucl-ex]. [Erratum: *Phys.Rev.C* 108, 049905 (2023)]
- [14] Kincses, D.: Pion Interferometry with Lévy-Stable Sources in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au + Au Collisions at STAR. *Universe* **10**(3), 102 (2024) <https://doi.org/10.3390/universe10030102> arXiv:2401.11169 [nucl-ex]
- [15] Abdulameer, N.J., *et al.*: Centrality dependence of Lévy-stable two-pion Bose-Einstein correlations in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions (2024) arXiv:2407.08586 [nucl-ex]
- [16] Tumasyan, A., *et al.*: Two-particle Bose-Einstein correlations and their Lévy parameters in PbPb collisions at $\sqrt{s_{NN}}=5.02$ TeV. *Phys. Rev. C* **109**(2), 024914 (2024) <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.109.024914> arXiv:2306.11574 [nucl-ex]
- [17] Csanád, M., Kincses, D.: Femtoscopy with Lévy Sources from SPS through RHIC to LHC. *Universe* **10**(2), 54 (2024) <https://doi.org/10.3390/universe10020054> arXiv:2401.01249 [hep-ph]
- [18] Kórodi, B., Kincses, D., Csanád, M.: Event-by-event investigation of the two-particle source function in $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ TeV PbPb collisions with EPOS. *Phys. Lett. B* **847**, 138295 (2023) <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2023.138295> arXiv:2212.02980 [nucl-th]
- [19] Kincses, D., Stefaniak, M., Csanád, M.: Event-by-Event Investigation of the Two-Particle Source Function in Heavy-Ion Collisions with EPOS. *Entropy* **24**(3), 308 (2022) <https://doi.org/10.3390/e24030308> arXiv:2201.07962 [hep-ph]

- [20] Árpási, E., Nagy, M.I.: Multi-dimensional investigation of the pion pair-source in heavy-ion collisions with epos (2024) [arXiv:2412.09309 \[hep-ph\]](#)
- [21] Hanbury Brown, R., Twiss, R.Q.: A Test of a new type of stellar interferometer on Sirius. *Nature* **178**, 1046–1048 (1956) <https://doi.org/10.1038/1781046a0>
- [22] Goldhaber, G., Goldhaber, S., Lee, W.-Y., Pais, A.: Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process. *Phys. Rev.* **120**, 300–312 (1960) <https://doi.org/10.1103/PhysRev.120.300>
- [23] Csörgő, T. and Hegyi, S. and Zajc, W. A.: Bose-Einstein correlations for Levy stable source distributions. *Eur. Phys. J. C* **36**, 67–78 (2004) <https://doi.org/10.1140/epjc/s2004-01870-9> [arXiv:nucl-th/0310042](#)
- [24] Nolan, J.P.: Multivariate elliptically contoured stable distributions: theory and estimation. *Computational Statistics* **28**(5), 2067–2089 (2013) <https://doi.org/10.1007/s00180-013-0396-7>
- [25] Werner, K., Karpenko, I., Pierog, T., Bleicher, M., Mikhailov, K.: Event-by-event simulation of the three-dimensional hydrodynamic evolution from flux tube initial conditions in ultrarelativistic heavy ion collisions. *Phys. Rev. C* **82**, 044904 (2010) <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.82.044904> [arXiv:1004.0805 \[nucl-th\]](#)
- [26] Kincses, D., Nagy, M., Csanád, M.: Lévy walk of pions in heavy-ion collisions (2024) [arXiv:2409.10373 \[nucl-th\]](#)
- [27] Cimerman, J., Tomasik, B., Csanád, M., Lökös, S.: Higher-order anisotropies in the Blast-Wave Model - disentangling flow and density field anisotropies. *Eur. Phys. J. A* **53**(8), 161 (2017) <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12349-7> [arXiv:1702.01735 \[nucl-th\]](#)
- [28] Lökös, S., Csanád, M., Tomášik, B., Csörgő, T.: Higher order anisotropies in the Buda-Lund model: Disentangling flow and density field anisotropies. *Eur. Phys. J. A* **52**(10), 311 (2016) <https://doi.org/10.1140/epja/i2016-16311-y> [arXiv:1604.07470 \[nucl-th\]](#)
- [29] Cooper, F., Frye, G.: Comment on the single particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production. *Phys. Rev. D* **10**, 186 (1974) <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.186>
- [30] Kiselev, E.I.: Universal superdiffusive modes in charged two dimensional liquids. *Phys. Rev. B* **103**, 235116 (2021) <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.235116>