

Félvezető spinkvantumbitek vezérlésének leírása g -tenzor modulációval

Országos Tudományos Diákköri Dolgozat

Készítette:

György Zoltán

Fizikus MSc II., ELTE TTK

Témavezetők:

Széchenyi Gábor¹, Pályi András²

¹ ELTE Fizikai Intézet, Anyagfizikai Tanszék

² BME Fizikai Intézet, Elméleti Fizika Tanszék



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

2025.01.03.

Kivonat

A szilícium-germánium nanostruktúrákban létrehozott spinkvantumbiteken alapuló kvantumprocesszorok gyors fejlődést mutattak az utóbbi néhány évben, kis méretük miatt pedig a spinkvantumbitek lehetnek a jövőben a sokmilliónyi kvantumbitet tartalmazó kvantumszámítógépek elemi építőkövei.

Ezekben a nanostruktúrákban végtelen sok energiaszintet találhatunk, amelyek közül a legalacsonyabb két állapotot használjuk kétállapotú rendszerként. A kvantumbitek vezérlésének leírásánál figyelembe kell venni a magasabb energiaszintek hatását, erre a bevett módszer az ún. g -tenzor modulációs rezonancia, röviden g -TMR [1]. A kvantumbitek létrehozása elektródákra adott DC feszültségekkel történik, ezek csapdázzák az elektront (vagy lyukat), a vezérlés pedig az egyik elektródára küldött AC feszültséggel lehetséges. A g -TMR mögé az a szemléletes kép tehető, hogy először figyelembe vesszük a DC feszültség hatását, a végtelen dimenziós Hamilton-operátorból pedig egy kétdimenziós effektív Hamilton-operátort származtatunk, amely a g -tenzort tartalmazza (a g -tenzor a giromágneses faktor általánosítása anizotróp esetre). A vezérlés úgy történik, hogy bekapcsoljuk az AC feszültséget, ez modulálja a g -tenzort, így pedig egy alacsonydimenziós, időfüggő Hamilton-operátort kapunk, amely a dinamikának egy kényelmes leírását teszi lehetővé.

Annak ellenére, hogy a g -TMR egy bevett módszer a spinkvantumbitek vezérlésének leírására, eddig csak a legegyszerűbb dinamika, a monokromatikus vezérlés esetén volt bebizonyítva, hogy alkalmazható a módszer, bonyolultabb dinamika esetén nem. A dolgozatban megmutatjuk, hogy az egy elektródával történő monokromatikus és bikromatikus vezérlés esetén a g -TMR jó közelítéssel az egzakt eredményre vezet, azonban két különböző elektródával történő bikromatikus vezérlés esetén a g -TMR leírás nem alkalmazható. Emellett általánosítjuk a g -TMR formalizmusból származó eredményeket a Rabi-frekvenciára és a Bloch-Siegert eltolódásra bikromatikus esetben. Végül egy konkrét modellt vizsgálunk, egy kétdimenziós parabolikus bezárópotenciállal csapdázott elektront Rashba spin-pálya kölcsönhatással, ahol az általános eredmények jól demonstrálhatóak.

1. Bevezetés

A kvantumszámítás egy új, nagyjából 30 éves területe a fizikának, mely az első kvantumalgoritmusok felfedezésével született meg [2–4]. A kvantumalgoritmusok felfedezése az erőfeszítéseket a kísérleti megvalósítások irányába terelte, így hamar különböző fizikai rendszereket használtak qubitként, például csapdázott ionokat [5, 6], szupravezető áramköröket [7, 8] vagy félvezető nanostruktúrákat [9, 10]. A Shor-algoritmus első demonstrálása már 2001-ben megtörtént magspineket használva [11], azonban ez egy olyan triviális alkalmazás volt, amely a 15-ös számot faktorizálta $15 = 3 \cdot 5$ formában. A Google 2019-ben mutatta be a kvantumfölény kísérletet [12], amely egy olyan problémát oldott meg, amire abban az időben, a rendelkezésre álló klasszikus algoritmusokkal egy klasszikus szuperszámítógép nem lett volna képes. Ez a probléma viszont nem egy hasznos probléma, arra a célra lett kitalálva, hogy a kvantumszámítógép meg tudja oldani a klasszikus számítógéppel szemben. Annak ellenére, hogy egyre közelebb kerülünk a hasznos alkalmazásokhoz [13, 14], az igazán érdekes eredményekhez várhatóan több millió kvantumbitre lesz szükség [15, 16]. Ehhez képest a jelenlegi kvantumszámítógépek a száz-as-ezres nagyságrendben vannak.

Felmerül tehát a kérdés, hogy hogyan lehet egy kvantumprocesszorba integrálni milliárdnyi qubitet. A jelenleg piacvezető szupravezető számítógépek qubitjei nagyméretűek (nagyjából $100 \mu\text{m}$ [17]), amiből egy millió darab 100 cm^2 területnek felel meg (nem számolva a vezérlő és a kiolvasó vezetékekkel). Ezzel szemben a félvezető nanostruktúrákban létrehozott spinqubitek sokkal kisebbek, nagyjából 100 nm nagyságúak [18], ebből egy millió csupán 100 mm^2 területen elfér. Fontos azonban megemlíteni, hogy jelenleg a félvezető kvantumprocesszorok erős lemaradásban vannak a szupravezető társaikhoz képest, de gyors fejlődést mutattak az utóbbi időben. Az első germánium lyukakra alapuló qubitet 2020-ban demonstráltak [19], ugyanabban az évben kétqubitese műveleteket [20], 2021-ben négyqubitese processzort [21], 2024-ben pedig tízqubitese processzort mutattak be [22]. Egyszerűbb algoritmusokat is futtattak már félvezető processzorokon, például háromqubitese Grover-algoritmust [23], vagy ismétléses (phase flip code) hibajavító algoritmusokat [24, 25].

A jövő félvezető-alapú kvantumszámítógépére az elképzelés az, hogy qubit regisztereket hoznak létre [26–28], amelyekben a qubiteket egyenként vezérelni tudják, illetve az egymás melletti qubitek között kétqubitese kapukat tudnak megvalósítani. Ha egy ilyen regiszterben nincs elegendő számú qubit, akkor több regisztert összekapcsolnának, például ún. *shuttling* műveletekkel, amely a qubit kvantumdotok közötti mozgatását jelenti, így a regiszterek közötti kapcsolatot egy mozgó qubit tenné lehetővé [29–31]. Egy másik elképzelés szerint hibrid félvezető-szupravezető technológiát használva szupravezető közvetíthet kapcsolatot a spinqubitek között [32].

Az állapotok kiolvasása általában *Pauli spin blockade* technikával történik [33, 34], amely szerint egy extra kvantumdotot használva lehetséges megmérni a qubit állapotát. A segédkvantumdot spinje ismert, míg a mérendő spin ismeretlen. DC feszültség segítségével az ismeretlen spint megpróbáljuk áttolni a másik kvantumdotba, ha a két spin különböző, akkor ez lehetséges, ha viszont megegyeznek, akkor a Pauli-féle kizárási elv alapján nem tudjuk ezt megtenni. Ezáltal a spin mérése helyett elég töltésállapotot mérni, amely kísérletileg egyszerűbb feladat.

1.1. Egyqubitese műveletek

A kvantumszámításhoz szükséges a megfelelő számú qubit, azok inicializálása, kiolvasása, illetve az egy- és kétqubitese műveletek végrehajtása [35]. Ezek a folyamatok mind

hibával terheltek, ezért az algoritmusok helyes futtatásához szükség lesz még kvantumos hibajavításra is [36, 37]. Ezen dolgozat témája az egyqubites műveletek megvalósítására korlátozódik.

A legtermészetesebb választás az egyqubites műveletek végrehajtására a rezonáns gerjesztés, vagyis mágneses térbe helyezett spin rezonáns gerjesztése például oszcilláló mágneses térrel [9], ezt nevezik elektronspin-rezonanciának, röviden ESR. Ehhez egy kis antennát kell a qubit mellé építeni, amelyen AC áramot folytatva létrejön az AC mágneses tér. Hátránya a szükséges extra komponens, emellett a mágneses teret nehéz fókuszálni, illetve a folyó áram melegedési problémákhoz is vezethet, hiszen a qubitek tipikusan 10-100 mK hőmérsékleten működnek. Ezeket a problémákat küszöböli ki az EDSR (*electric dipole spin resonance*), amely AC mágneses tér helyett AC elektromos teret használ [10, 38, 39]. Ebben az esetben használhatóak vezérlésre azok a kapuelektrodák, amelyek magát a kvantumdotot hozzák létre (ún. *plunger* elektrodák), vagy azok, amelyek a különböző kvantumdotok közötti kölcsönhatást vezérlik. A spin manipulációja csupán elektromos térrel nem lehetséges, ehhez szükséges valamilyen extra effektus, amely összekapcsolja a spin és hely szabadsági fokokat, ilyen például mesterségesen létrehozott mágneses tér gradiens [40] vagy a félvezető anyagban természetesen jelenlévő spin-pálya kölcsönhatás [41]. Manapság az előbbit szilícium nanostruktúrákban csapdázott elektronok, utóbbit germániumban csapdázott lyukak esetén használják [42, 43].

A legelterjedtebb vezérlési módszer, vagyis a rezonáns gerjesztés mellett más lehetőségek is léteznek, például nulla mágneses térben spin-pálya kölcsönhatás mellett mozgatva a spint, a nem-abeli Berry-fázisnak köszönhetően kaphatunk dinamikát [44, 45]. Egy másik ötlet már a Loss-Divincenzo kvantumszámítógépet megalapozó cikkben [46] megjelent, mely szerint azt kell kihasználni, hogy különböző kvantumdotokban különböző irányban állhatnak a spinek, vagyis a pszeudospin iránya eltérő. Ekkor ha egy spint egy másik kvantumdotba helyezünk, az eltérő pszeudospin irányok miatt a spin gyorsan precesszálni kezd, amely megvalósítja az egyqubites műveletet. Annak ellenére, hogy a javaslat már több, mint 25 éves, csak nemrég sikerült ezt kísérletileg megvalósítani, germánium lyukakat használva [22].

2. g -tenzor formalizmus

A kvantumszámításhoz szükséges qubitek kétállapotú rendszereket jelentenek, valódi kísérletekben viszont általában végtelen sok állapottal rendelkező rendszereket használnak. Szupravezető qubiteknél ez a Josephson-átmenet miatt anharmonikus kvantumoszillátor, spinqubiteknél pedig a csapdázás következményeként megjelenő végtelen sok energiaszint. Ha bizonyos feltételek teljesülnek a rendszer paramétereire vonatkozóan, akkor megvalósulhat egy effektív kétszintes dinamika, így a rendszer mégis qubiként működhet. Az elméleti leírás során kényelmes a rendszert egy kétdimenziós effektív Hamilton-operátorral jellemezni, amely figyelembe veszi a végtelen sok, magasabb energiájú állapot hatását.

A legegyszerűbb ilyen modell egy elektron spinje effektív z -irányú mágneses térben:

$$H = \frac{1}{2}g\mu_B B\sigma_z, \quad (1)$$

ahol g a g -faktor, μ_B a Bohr-magneton, B a külső mágneses tér és σ_z a harmadik Pauli-mátrix. A vezérléshez kapcsolhatunk egy x -irányú mágneses teret, így az időfüggő Hamilton-operátor:

$$H(t) = \frac{1}{2}g\mu_B B\sigma_z + \frac{1}{2}g\mu_B B_{ac} \sin \omega t \sigma_x, \quad (2)$$

ahol B_{ac} az x -irányú mágneses tér, ω pedig annak frekvenciája. Ha a gerjesztés rezonáns, vagyis ha a $\hbar\omega = g\mu_B B$ rezonanciafeltétel teljesül, akkor egyqubites művelet valósul

meg. Ez azt jelenti, hogy ha megmérjük a spint, akkor annak a valószínűsége, hogy a felállapotot mérjük Rabi-oszcillál:

$$P(t) = \sin^2 \left(\frac{\Omega_R t}{2} \right), \quad (3)$$

ahol Ω_R a Rabi-frekvencia:

$$\Omega_R = \frac{g\mu_B B_{ac}}{2\hbar}, \quad (4)$$

ha a $B_{ac} \ll B$ feltétel (ún. *weak-driving limit*) teljesül.

Félvezető heterostrukturákban jelenlévő egyéb hatások, például a spin-pálya kölcsönhatás miatt a rendszer nem írható le ilyen egyszerűen, hiszen a spin helyett pszeudospinről beszélhetünk, amely nem feltétlenül párhuzamos a külső mágneses térrel. Feltételezve, hogy az effektív Hamilton-operátor a mágneses térben lineáris, az effektív Hamilton-operátor a $\hat{g}$ g -tenzor segítségével írható fel [1, 47–49]:

$$H(V) = \frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(V) \cdot \mathbf{B}, \quad (5)$$

ahol megjelöltük, hogy a g -tenzor függ az elektródára adott V feszültségtől. Felmerül a kérdés, hogy ebben az esetben hogyan írható le a vezérlés. A [1, 47] cikkekben vizsgálták a kérdést, ahol a legegyszerűbb esetben, monokromatikus vezérlésre belátták, hogy érvényes a módszer, amit g -tenzor modulációnak (röviden g -TMR) nevezünk. A g -TMR szerint a sztatikus g -tenzor egy időfüggetlen transzformáció segítségével számolható a végtelen dimenziós Hamilton-operátorból. A dinamikát leíró időfüggő Hamilton-operátor egyszerűen úgy adódik, hogy a sztatikus V feszültség helyett a vezérlés miatt modulált $V(t)$ feszültséget írjuk be expliciten a g -tenzorba:

$$H(t) = H(V(t)) = \frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(V(t)) \cdot \mathbf{B}. \quad (6)$$

A [47] cikk szerint az így adódó Hamilton-operátor helyesen leírja a monokromatikus dinamikát. Monokromatikus vezérlés esetén a potenciál:

$$V(t) = V_0 + V_{ac} \cos \omega t, \quad (7)$$

illetve a rezonanciafeltétel:

$$\hbar\omega = g^* \mu_B B, \quad (8)$$

ahol $g^* = |\hat{g}\mathbf{b}|$ az effektív g -faktor, $\mathbf{b}$ pedig a mágneses tér irányába mutató egységvektor. A monokromatikus dinamikát megkaphatjuk, ha a sztatikus V_0 feszültség körül első rendben sorbafejtjük a Hamilton-operátort [47] felhasználva a g -tenzor kapufeszültség szerinti deriváltját:

$$H(t) = \frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} [\hat{g}(V_0) + \hat{g}'(V_0)\delta V(t)] \cdot \mathbf{B}, \quad (9)$$

ahol $\delta V(t) = V(t) - V_0 = V_{ac} \cos \omega t$. A Rabi-frekvencia meghatározható:

$$\Omega_R = \frac{\mu_B B V_{ac}}{2\hbar g^*} |(\hat{g}(V_0) \cdot \mathbf{b}) \times (\hat{g}'(V_0) \cdot \mathbf{b})|, \quad (10)$$

Szemléletesebb, ha bevezetjük a következő vektorokat:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mu_B}{2\hbar} \hat{g}(V_0) \cdot \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\Omega}' = \frac{\mu_B}{2\hbar} \hat{g}'(V_0) \cdot \mathbf{B}. \quad (11)$$

A Rabi-frekvenciába csak az $\boldsymbol{\Omega}'$ vektornak az $\boldsymbol{\Omega}$ vektorra vett merőleges $\boldsymbol{\Omega}'_{\perp}$ komponense ad járulékot, $\Omega_R = |\boldsymbol{\Omega}'_{\perp}| V_{ac}$, ezt fejezi ki a (10) egyenlet.

3. Floquet-elmélet

A g -tenzor formalizmus érvényességének vizsgálata során azt a kérdést is fel kell tennünk, hogy milyen folyamatokat szeretnénk leírni a g -TMR segítségével. Egy az előbb ismertett, a [1] cikkben leírt monokromatikus eseten kívül vizsgálható a bikromatikus vezérlés esete is. A bikromatikus vezérlés azt jelenti, hogy a modulált potenciál a következő alakban írható:

$$V(t) = V_{\text{ac},1} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + V_{\text{ac},2} \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (12)$$

A rezonanciafeltétel pedig:

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{g^* \mu_B B}{2\hbar} + \omega_{\text{BS}}, \quad (13)$$

ahol ω_{BS} az ún. Bloch-Siegert eltolódás, amely egy dinamikus korrekció, vagyis függ az AC feszültségek nagyságától. A bikromatikus vezérlést azért érdemes vizsgálni, mert lehetővé teheti spinqubit architektúrában a qubitek szelektív vezérlését és az egyqubites műveletek párhuzamos végrehajtását [50, 51]. Ahhoz, hogy a g -TMR módszert alkalmazzuk bikromatikus esetre, szükségünk lesz a Floquet-elméletre [52].

A Floquet-elmélet használható a Schrödinger-egyenlet megoldására abban az esetben, ha a Hamilton-operátor időben periodikus. Ez monokromatikus vezérlés esetén teljesül, bikromatikus esetben nem feltétlenül, itt először a monokromatikus esettel foglalkozunk. A periodicitás miatt a hullámfüggvény, illetve a Hamilton-operátor is Fourier-sorba fejthetőek, kiderül, hogy a Schrödinger-egyenlet egy végtelendimenziós időfüggetlen mátrix sajátértékproblémájaként írható, ezt nevezzük Floquet-mátrixnak. A $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ Floquet-mátrix mátrixelemei:

$$\langle \alpha n | \mathcal{H}_{\mathcal{F}} | \beta m \rangle = H_{\alpha\beta}^{(n-m)} + n\hbar\omega\delta_{\alpha\beta}\delta_{nm}, \quad (14)$$

ahol α és β az eredeti Hamilton-operátor állapotait indexelik, ω az eredeti Hamilton-operátor T periódusának megfelelő $\omega = 2\pi/T$ frekvencia, n és m pedig Fourier-indexek, vagyis egész számok, és $H^{(n-m)}$ az eredeti Hamilton-operátor $n - m$ Fourier-indexhez tartozó együtthatója (mátrixa). Shirley a [52] cikkben megmutatta, hogy a Floquet-elmélet valójában a kvantum-elektrodinamika szemiklasszikus, vagyis nagy fotonszámú határeset. Emiatt ezentúl a Fourier-indexekre fotonszámként fogunk hivatkozni, ez pedig egy szemléletes képet is ad a Floquet-elmülethez.

Az egy fotonszám esete vonatkozik a monokromatikus vezérlésre, a bikromatikus vezérlés leírásához két, különböző frekvenciához tartozó fotonszámra van szükség. Annak ellenére, hogy ekkor a Hamilton-operátor nem mindig periodikus, a Floquet-elmélet alkalmazható [53], ekkor a Floquet-mátrix:

$$\langle \alpha n_1 n_2 | \mathcal{H}_{\mathcal{F}} | \beta k_1 k_2 \rangle = H_{\alpha\beta}^{(n_1-k_1, n_2-k_2)} + (n_1\hbar\omega_1 + n_2\hbar\omega_2)\delta_{\alpha\beta}\delta_{n_1 k_1}\delta_{n_2 k_2}, \quad (15)$$

ahol $H^{(n_1-k_1, n_2-k_2)}$ az $n_1 - k_1$ és $n_2 - k_2$ fotonszámokhoz tartozó Fourier-koefficiens. Standard bikromatikus vezérlés esetén a Hamilton-operátor a következő alakban írható:

$$H = H_0 + V_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + V_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (16)$$

ahol H_0 az időfüggetlen rendszer Hamilton-operátora, V_1 és V_2 a gerjesztésekhez tartozó operátorok. Az ehhez tartozó Floquet-mátrix:

$$\begin{aligned} \langle \alpha n_1 n_2 | \mathcal{H}_{\mathcal{F}} | \beta k_1 k_2 \rangle &= H_{0,\alpha\beta}\delta_{n_1 k_1}\delta_{n_2 k_2} + (n_1\hbar\omega_1 + n_2\hbar\omega_2)\delta_{\alpha\beta}\delta_{n_1 k_1}\delta_{n_2 k_2} + \\ &+ \frac{V_{1,\alpha\beta}}{2}(e^{i\phi_1}\delta_{n_1-k_1,1} + e^{-i\phi_1}\delta_{n_1-k_1,-1})\delta_{n_2 k_2} + \frac{V_{2,\alpha\beta}}{2}(e^{i\phi_2}\delta_{n_2-k_2,1} + e^{-i\phi_2}\delta_{n_2-k_2,-1})\delta_{n_1 k_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

A Floquet-mátrix főátlójában megjelennek a perturbálatlan H_0 blokkok eltolva az ω_1 és ω_2 vezérlési frekvenciákkal, ezeket a blokkokat pedig elektromos tagokat tartalmazó blokkok csatolják össze, ha a két blokk csak egy fotonszámban különbözik.

Ahhoz, hogy a Floquet-mátrix segítségével Rabi-frekvenciát számoljunk, a végtelen dimenziós mátrixból egy effektív 2×2 -es $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}}$ mátrixot kell származtassunk. A rendszer rezonáns gerjesztése degenerációt idéz elő a Floquet-mátrixban, bikromatikus vezérlés esetén például a két degenerált Floquet-állapot az $|e00\rangle$ és $|g11\rangle$, ahol e jelöli a gerjesztett, a g pedig az alapállapotot. Schrieffer-Wolff transzformáció [54, 55] segítségével a végtelen dimenziós Floquet-mátrixot erre a degenerált altérre vetíthetjük úgy, hogy a Floquet-mátrixnak a diagonális részét tekintjük perturbálatlan résznek, a többit pedig perturbációnak. A transzformáció után rezonáns gerjesztés esetén az effektív Floquet-mátrix:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_{\text{BS},1} & \frac{\hbar\Omega_R}{2} \\ \frac{\hbar\Omega_R^*}{2} & \hbar\omega_{\text{BS},2} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

ahol a bázisállapotok sorrendben $|e00\rangle$ és $|g11\rangle$, Ω_R a komplex Rabi-frekvencia, $\omega_{\text{BS},1}$ és $\omega_{\text{BS},2}$ diagonális korrekciók. A Bloch-Siegert eltolódás ezekből egyszerűen megkapható:

$$\omega_{\text{BS}} = \omega_{\text{BS},1} - \omega_{\text{BS},2}. \quad (19)$$

4. g -tenzor formalizmus bikromatikus esetben

Tekintsünk el most attól a problémától, hogy nem ismert még, hogy a g -TMR érvényes-e vagy sem bikromatikus esetben, analóg módon kiszámoljuk a monokromatikus esethez hasonlóan a Rabi-frekvenciát bikromatikus esetre. Ekkor az effektív Hamilton-operátort nem elég első rendben sorfejtteni, másodrendig kell elmenni a sorfejtésben:

$$H(t) = \frac{1}{2}\mu_B\boldsymbol{\sigma} \left[\hat{g}(V_0) + \hat{g}'(V_0)\delta V(t) + \frac{\hat{g}''(V_0)}{2}\delta V(t)^2 \right] \mathbf{B}, \quad (20)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mu_B}{2\hbar}\hat{g}(V_0) \cdot \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\Omega}' = \frac{\mu_B}{2\hbar}\hat{g}'(V_0) \cdot \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\Omega}'' = \frac{\mu_B}{4\hbar}\hat{g}''(V_0) \cdot \mathbf{B}. \quad (21)$$

Ezekkel a Hamilton-operátor a következő alakban írható:

$$H = \hbar\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hbar\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\sigma}\delta V + \hbar\boldsymbol{\Omega}'' \cdot \boldsymbol{\sigma}\delta V^2. \quad (22)$$

A perturbálatlan Hamilton-operátor ebben az esetben $H_0 = \hbar\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma}$, ami nem diagonális, ezért végrehajtunk egy bázistranszformációt, hogy diagonalizáljuk. Paraméterezzük az $\boldsymbol{\Omega}$ vektort gömbi koordinátákkal:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \Omega\hat{\mathbf{r}} = \Omega\mathbf{b}, \quad (23)$$

ahol most a gömbi $\hat{\mathbf{r}}$ irány a mágneses tér $\mathbf{b}$ iránya. A perturbálatlan Hamilton-operátor sajátértékproblémája ismert:

$$H_0 |\Psi_{\pm}\rangle = E_{\pm} |\Psi_{\pm}\rangle, \quad (24)$$

ahol az energiák $E_{\pm} = \pm\hbar\Omega$, illetve a sajátvektorok:

$$|\Psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |\Psi_-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Ezek segítségével a bázistranszformáció elvégezhető. Bontsuk fel az Ω' és Ω'' vektorokat az Ω vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

$$\Omega' = \Omega'_{\parallel} + \Omega'_{\perp}, \quad \Omega'' = \Omega''_{\parallel} + \Omega''_{\perp}. \quad (26)$$

A párhuzamos komponensek az $\hat{r}$ vektorral párhuzamosak:

$$\Omega'_{\parallel} = \Omega'_{\parallel} \hat{r}, \quad \Omega''_{\parallel} = \Omega''_{\parallel} \hat{r}. \quad (27)$$

A merőleges komponensek pedig a $\hat{\theta}$ és $\hat{\varphi}$ vektorok lineárkombinációi lesznek:

$$\Omega'_{\perp} = \Omega'_{\perp} (\cos \chi_1 \hat{\theta} + \sin \chi_1 \hat{\varphi}), \quad \Omega''_{\perp} = \Omega''_{\perp} (\cos \chi_2 \hat{\theta} + \sin \chi_2 \hat{\varphi}), \quad (28)$$

ahol az egységvektorok:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Ha áttérünk a perturbálatlan Hamilton-operátor bázisára, a teljes Hamilton-operátor (22) a következő lesz:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \Omega + \Omega'_{\parallel} \delta V + \Omega''_{\parallel} \delta V^2 & \Omega'_{\perp} e^{-i(\chi_1 + \varphi)} \delta V + \Omega''_{\perp} e^{-i(\chi_2 + \varphi)} \delta V^2 \\ \Omega'_{\perp} e^{i(\chi_1 + \varphi)} \delta V + \Omega''_{\perp} e^{i(\chi_2 + \varphi)} \delta V^2 & -\Omega - \Omega'_{\parallel} \delta V - \Omega''_{\parallel} \delta V^2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

A δV egy bikromatikus moduláció:

$$\delta V = V_{ac,1} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + V_{ac,2} \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (31)$$

A moduláció négyzete:

$$\begin{aligned} \delta V^2 = & \frac{V_{ac,1}^2}{2} + \frac{V_{ac,2}^2}{2} + \frac{V_{ac,1}^2}{2} \cos(2\omega_1 t + 2\phi_1) + \frac{V_{ac,2}^2}{2} \cos(2\omega_2 t + 2\phi_2) + \\ & + V_{ac,1} V_{ac,2} (\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2]). \end{aligned} \quad (32)$$

Definiáljuk a V_1 és V_2 gerjesztéseket leíró mátrixokat:

$$V_1 = \hbar \begin{pmatrix} \Omega'_{\parallel} & \Omega'_{\perp} e^{-i(\chi_1 + \varphi)} \\ \Omega'_{\perp} e^{i(\chi_1 + \varphi)} & -\Omega'_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \hbar \begin{pmatrix} \Omega''_{\parallel} & \Omega''_{\perp} e^{-i(\chi_2 + \varphi)} \\ \Omega''_{\perp} e^{i(\chi_2 + \varphi)} & -\Omega''_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Ezek segítségével a Floquet-mátrix:

$$\begin{aligned} \langle \alpha n_1 n_2 | H_F | \beta k_1 k_2 \rangle = & (E_{\alpha} + n_1 \hbar \omega_1 + n_2 \hbar \omega_2) \delta_{\alpha\beta} \delta_{n_1 k_1} \delta_{n_2 k_2} + \\ & + \frac{V_{ac,1}}{2} (e^{i\phi_1} \delta_{n_1 - k_1, 1} + e^{-i\phi_1} \delta_{n_1 - k_1, -1}) \delta_{n_2 k_2} V_{1, \alpha\beta} + \\ & + \frac{V_{ac,2}}{2} (e^{i\phi_2} \delta_{n_2 - k_2, 1} + e^{-i\phi_2} \delta_{n_2 - k_2, -1}) \delta_{n_1 k_1} V_{1, \alpha\beta} + \\ & + \left(\frac{V_{ac,1}^2}{2} + \frac{V_{ac,2}^2}{2} \right) \delta_{n_1 k_1} \delta_{n_2 k_2} V_{2, \alpha\beta} + \frac{V_{ac,1}^2}{4} (e^{2i\phi_1} \delta_{n_1 - k_1, 2} + e^{-2i\phi_1} \delta_{n_1 - k_1, -2}) \delta_{n_2 k_2} V_{2, \alpha\beta} + \\ & + \frac{V_{ac,2}^2}{4} (e^{2i\phi_2} \delta_{n_2 - k_2, 2} + e^{-2i\phi_2} \delta_{n_2 - k_2, -2}) \delta_{n_1 k_1} V_{2, \alpha\beta} + \\ & + \frac{V_{ac,1} V_{ac,2}}{2} (e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \delta_{n_1 - k_1, 1} \delta_{n_2 - k_2, 1} + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} \delta_{n_1 - k_1, -1} \delta_{n_2 - k_2, -1}) V_{2, \alpha\beta} + \\ & + \frac{V_{ac,1} V_{ac,2}}{2} (e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \delta_{n_1 - k_1, 1} \delta_{n_2 - k_2, -1} + e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \delta_{n_1 - k_1, -1} \delta_{n_2 - k_2, 1}) V_{2, \alpha\beta}. \end{aligned} \quad (34)$$

A Floquet-mátrixból másodrendű Schrieffer-Wolff transzformációval számolható a Rabi-frekvencia, a komplex Rabi-frekvenciára a következő adódik:

$$\Omega_R = \Omega_{\perp}'' V_{ac,1} V_{ac,2} e^{i(\varphi+\phi_1+\phi_2+\chi_2)} - 2 \frac{\Omega \Omega_{\parallel}' \Omega_{\perp}' V_{ac,1} V_{ac,2}}{\omega_1 (2\Omega - \omega_1)} e^{i(\varphi+\phi_1+\phi_2+\chi_1)}. \quad (35)$$

Ennek az abszolút értéke:

$$\Omega_R = \left| \Omega_{\perp}'' - \frac{2\Omega \Omega_{\parallel}'}{\omega_1 (2\Omega - \omega_1)} \Omega_{\perp}' \right| V_{ac,1} V_{ac,2}. \quad (36)$$

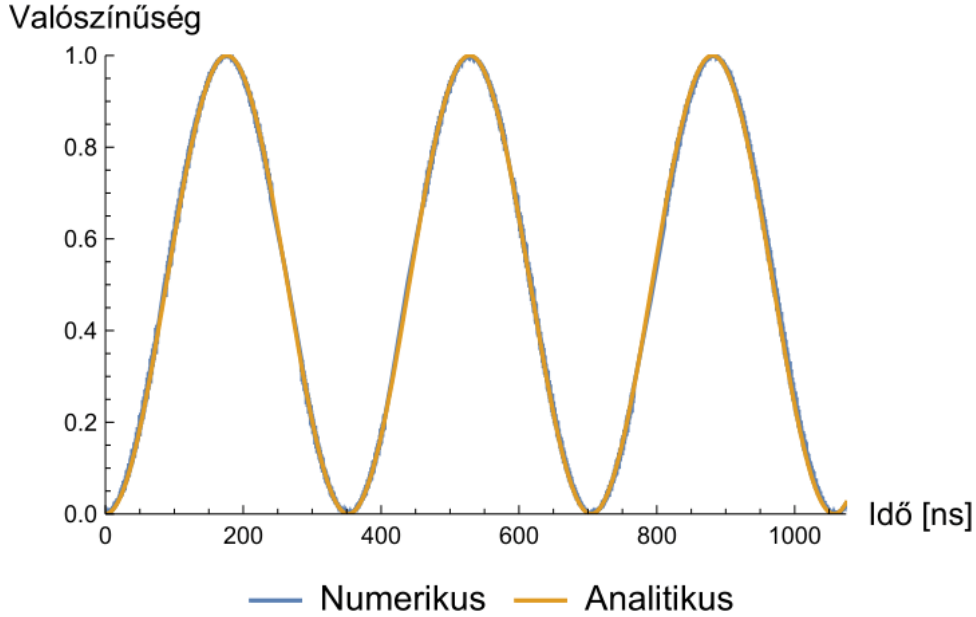
A Bloch-Siegert eltolódás pedig:

$$\omega_{BS} = \left(\Omega_{\parallel}'' + \frac{2\Omega \Omega_{\perp}^2}{4\Omega^2 - \omega_1^2} \right) V_{ac,1}^2 + \left(\Omega_{\parallel}'' + \frac{2\Omega \Omega_{\perp}^2}{4\Omega \omega_1 - \omega_1^2} \right) V_{ac,2}^2. \quad (37)$$

A számolások során feltételeztük, hogy a következő feltételek teljesülnek:

$$|\hat{g}(V_0) \cdot \mathbf{b}| \gg |\hat{g}'(V_0) \cdot \mathbf{b}| V_{ac,1} \sim |\hat{g}'(V_0) \cdot \mathbf{b}| V_{ac,2} \gg |\hat{g}''(V_0) \cdot \mathbf{b}| V_{ac,1}^2 \sim |\hat{g}''(V_0) \cdot \mathbf{b}| V_{ac,2}^2. \quad (38)$$

Az 1. ábra mutatja a numerikusan szimulált Rabi-oszcillációt összehasonlítva az analitikus, perturbatív eredménnyel (36). A vezérlő frekvenciák megválasztásánál figyelembe lett véve a Bloch-Siegert eltolódás, a kapott analitikus eredmény (37) volt használva.



1. ábra. A g -TMR bikromatikus analitikus formulájának (36) összehasonlítása a numerikus számolás eredményével. A paraméterek: $\hbar\Omega = 10 \mu\text{eV}$, $\hbar\omega_2 = 8 \mu\text{eV}$, $V_{ac,1} = 0.4 \mu\text{eV}$, $V_{ac,2} = 0.3 \mu\text{eV}$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $\chi_1 = 1.7$, $\chi_2 = 0.2$, $\hbar\Omega_{\parallel}' = 1$, $\hbar\Omega_{\parallel}'' = 0.06 \mu\text{eV}^{-1}$, $\hbar\Omega_{\perp}' = 0.7$, $\hbar\Omega_{\perp}'' = 0.04 \mu\text{eV}^{-1}$. Az ω_2 frekvencia az $\omega_1 + \omega_2 = 2\Omega + \omega_{BS}$ feltétel szerint lett megválasztva, ahol ω_{BS} a (37) formula alapján meghatározható, $\hbar\omega_{BS} = 0.02375 \mu\text{eV}$.

5. Időfüggő Schrieffer-Wolff transzformáció és g -TMR

Tekintsük át, hogy miért nem triviális, hogy a g -TMR formalizmus általában érvényes-e vagy sem. A g -TMR szerint az elektródára adott DC feszültség hozza létre a kvantumdotot, így az effektív Hamilton-operátor (amely a g -tenzorral írható fel) egy időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval (SW) kapható meg:

$$H^{(0)} + H_E(V) + H_B \xrightarrow{\text{SW}} \frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(V) \cdot \mathbf{B}, \quad (39)$$

ahol a $H^{(0)}$ jelöli a perturbálatlan Hamilton-operátort, $H_E(V)$ a DC feszültségtől függő elektromos tag, H_B pedig a Zeeman-tag. Az időfüggő Hamilton-operátor úgy kapható, hogy a sztatikus V helyett a modulált $V + \delta V(t)$ feszültséget írjuk be:

$$H_{g\text{-TMR}}(t) = \frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(V + \delta V(t)) \cdot \mathbf{B}. \quad (40)$$

Ezzel szemben a korrekt eljárás az, hogy a végtelen dimenziós Hamilton-operátorba írjuk be a modulációt, majd egy időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval (TDSW) származtatjuk az effektív időfüggő Hamilton-operátort:

$$H^{(0)} + H_E(V + \delta V(t)) + H_B \xrightarrow{\text{TDSW}} \frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(V + \delta V(t)) \cdot \mathbf{B}, \quad (41)$$

ahol az előző $\hat{g}$ -től különböző $\hat{g}$ g -tenzort kapunk. A fő kérdés tehát az, hogy a két esetben ugyanazt kapjuk-e legalább közelítőleg, vagyis:

$$\frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(V + \delta V(t)) \cdot \mathbf{B} \approx \frac{1}{2}\mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(V + \delta V(t)) \cdot \mathbf{B}. \quad (42)$$

A megoldáshoz az időfüggetlen és időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációk közötti különbséget kell vizsgálni, ezért röviden összefoglaljuk az időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációt, amelynek speciális esete az időfüggetlen. A részletek megtalálhatóak a [56] cikkben. A TDSW egy időfüggő $U(t)$ unitér operátorral leírható transzformációt jelent az időfüggő $H(t)$ Hamilton-operátoron:

$$H(t) \rightarrow U(t)H(t)U^\dagger(t) + i\hbar\dot{U}(t)U^\dagger(t). \quad (43)$$

A transzformáció után kapott Hamilton-operátor a perturbációban adott rendig blokkdiagonális lesz, ami azt jelenti, hogy véges sok állapot független lesz a perturbációban adott rendig az összes többi állapottól, így megkapjuk a kívánt effektív Hamilton-operátort. A TDSW során az $U(t)$ operátort exponenciális alakban keressük:

$$U(t) = e^{-S(t)}, \quad (44)$$

ahol S egy antihermitikus operátor. A $H(t)$ Hamilton-operátor egy $H^{(0)}$ perturbálatlan részből és H_P perturbációból áll:

$$H(t) = H^{(0)} + H_P, \quad (45)$$

ahol $H^{(0)}$ diagonális, tehát spektruma ismert. Érdemes a H_P perturbációt felírni egy blokkdiagonális H_1 és egy blokk-offdiagonális H_2 operátor összegeként:

$$H(t) = H^{(0)} + H_1 + H_2. \quad (46)$$

Ha a perturbáció kicsi, akkor az U operátor közel egységoperátor és az $S(t)$ operátor sor alakjában kereshető:

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) + \dots, \quad (47)$$

ahol S_1 a perturbációban elsőrendű, S_2 másodrendű és S_3 harmadrendű. Fontos kérdés az, hogy az időderiváltak tagok milyen rendűek. Feltételezzük, hogy rezonáns gerjesztés történik, monokromatikus esetben igaz lesz a következő:

$$\dot{S}_j \approx \omega S_j, \quad (48)$$

ahol S_j a j . rendű tag, ω pedig a gerjesztés frekvenciája. Rezonáns gerjesztés esetén $\hbar\omega$ a perturbáció nagyságrendjébe esik, ezért $\dot{S}_j$ nagyságrendje S_{j+1} nagyságrendjével egyezik meg. Ez az állítás bikromatikus esetben is igaz.

Ezeket figyelembe véve előírhatjuk, hogy a perturbációban adott rendig blokkdiagonális legyen az eltranszformált Hamilton-operátor, így pedig egyenleteket kapunk az S tagjaira. A későbbi számolásokhoz szükséges ötödrendű transzformációig az eredmények [56]:

$$[H^{(0)}, S_1] = -H_2, \quad (49a)$$

$$[H^{(0)}, S_2] = -[H_1, S_1] + i\hbar\dot{S}_1, \quad (49b)$$

$$[H^{(0)}, S_3] = -[H_1, S_2] - \frac{1}{3}[H_2, S_1]^{(2)} + i\hbar\dot{S}_2, \quad (49c)$$

$$[H^{(0)}, S_4] = -[H_1, S_3] - \frac{1}{3}[[H_2, S_1], S_2] - \frac{1}{3}[[H_2, S_2], S_1] + i\hbar\dot{S}_3, \quad (49d)$$

ahol $[H_2, S_1]^{(j)}$ többszörös kommutátort jelent, vagyis $[H_2, S_1]^{(j)} = [[H_2, S_1]^{(j-1)}, S_1]$ és $[H_2, S_1]^{(0)} = H_2$. Az S tagjainak ismeretében a $\tilde{H}$ effektív Hamilton-operátor tagjait is felírhatjuk:

$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)} + \tilde{H}^{(3)} + \tilde{H}^{(4)} + \tilde{H}^{(5)}, \quad (50)$$

ahol az egyes tagok:

$$\tilde{H}^{(0)} = H^{(0)}, \quad (51a)$$

$$\tilde{H}^{(1)} = H_1, \quad (51b)$$

$$\tilde{H}^{(2)} = \frac{1}{2}[H_2, S_1], \quad (51c)$$

$$\tilde{H}^{(3)} = \frac{1}{2}[H_2, S_2], \quad (51d)$$

$$\tilde{H}^{(4)} = \frac{1}{2}[H_2, S_3] - \frac{1}{4!}[H_2, S_1]^{(3)}, \quad (51e)$$

$$\tilde{H}^{(5)} = \frac{1}{2}[H_2, S_4] - \frac{1}{4!}[[[H_2, S_1], S_1], S_2] - \frac{1}{4!}[[[H_2, S_1], S_2], S_1] - \frac{1}{4!}[[[H_2, S_2], S_1], S_1]. \quad (51f)$$

6. Általános modell

Egy általános modell keretén belül megmutatjuk, hogy a g -TMR formalizmus valóban alkalmas a standard monokromatikus vezérlés leírására, továbbá belátjuk, hogy bikromatikus vezérlésnél is használható, ha az egy elektródával történik. Abban az esetben viszont, ha a bikromatikus vezérlés két elektródán keresztül történik, a g -TMR rossz eredményre vezet.

Tekintsük a következő végtelen dimenziós időfüggő Hamilton-operátort, amely már tartalmazza az elektromos vezérlést:

$$H(t) = H_{\text{kin}} + H_{\text{conf}} + H_{\text{SO}} + H_B + H_E(t), \quad (52)$$

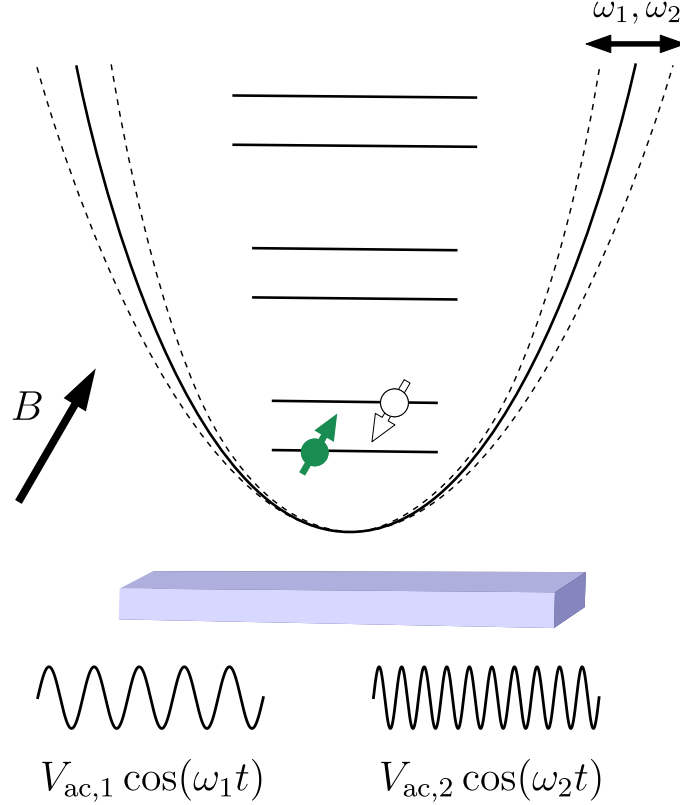
ahol H_{kin} a kinetikus tag, H_{conf} a bezáró potenciál, H_{SO} a spin-pálya kölcsönhatás, H_B a Zeeman-kölcsönhatás, illetve $H_E(t)$ az elektromos vezérlést leíró tag. Az általános állítások belátásához csupán azt tesszük fel, hogy az elektromos és mágneses terek perturbációként kezelhetők, vagyis a perturbálatlan $H^{(0)}$ Hamilton-operátor:

$$H^{(0)} = H_{\text{kin}} + H_{\text{conf}} + H_{\text{SO}}, \quad (53)$$

a H_P perturbáció pedig:

$$H_P = H_B + H_E. \quad (54)$$

Ez az effektív modell alkalmas szilícium kvantumdutokban csapdázott elektronok leírására, amelyeknél a spin-pálya kölcsönhatás gyenge (tehát perturbációként kezelhető), viszont az erős spin-pálya kölcsönhatást érzékelő germánium lyukakra is érvényes. A rendszert illusztrálja a 2. ábra, ahol a mágneses tér által felhasított, eredetileg Kramers-degenerált párok láthatóak egy elektródával történő bikromatikus vezérlés mellett.



2. ábra. Elektromosan csapdázott elektron (vagy lyuk) spin-pálya kölcsönhatás mellett, bikromatikus vezérléssel, egy elektróda által. Az elektródára adott váltakozó feszültség a bezárópotenciált bikromatikus modulálja, ezáltal a spinben dinamikát indukál a spin-pálya kölcsönhatás révén. A dinamika leírható a g -TMR formalizmussal.

Fontos, hogy a számolások során a perturbálatlan $H^{(0)}$ Hamilton-operátor sajátbázisán dolgozunk:

$$H^{(0)} |\Psi_{k\alpha}\rangle = E_{k\alpha} |\Psi_{k\alpha}\rangle, \quad (55)$$

ahol α a $H^{(0)}$ időtükrözési invarianciája miatti Kramers-degenerált párokban indexeli az állapotokat, míg k a különböző orbitálokat, vagyis $\alpha \in \{\uparrow, \downarrow\}$ és k nemnegatív egész szám ($k = 0$ felel meg a qubit állapotainak). Később látni fogjuk, hogy az időfüggő és időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációk közötti különbség függ attól, hogy milyen bázison dolgozunk. Vezessük be a következő jelölést a gerjesztett állapotok és a qubit állapotai közötti energiakülönbségre:

$$E_{k\alpha} - E_{0\beta} = \Delta_k. \quad (56)$$

A Hamilton-operátorban egyedül a mágneses tér töri meg az időtükrözési szimmetriát, az elektromos tér viszont időtükrözésre invariáns. Ennek a következménye az elektromos teret leíró H_E operátor mátrixelemeire vonatkozóan:

$$H_{E,k\alpha\beta} = -H_{E,l\alpha k\beta}, \quad H_{E,k\alpha\alpha} = H_{E,l\beta k\beta}, \quad (57)$$

ahol itt α és β különbözőek. A mátrixelemekre a következő jelölést használtuk (itt már α és β lehetnek azonosak is):

$$\langle \Psi_{k\alpha} | H_E | \Psi_{l\beta} \rangle = H_{E,k\alpha\beta}. \quad (58)$$

Az időtükrözési szimmetriának egy triviális következménye, hogy a Kramers-degenerált bázisállapotok között nincs direkt csatolás, emiatt legalább másodrendű perturbációs számítást kell alkalmazni, hogy dinamikát kapjunk. A másodrendű időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációból adódik a másodrendű korrekciója az effektív Hamilton-operátornak:

$$\tilde{H}_{\alpha\beta}^{(2)} = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{H_{P,0\alpha l\uparrow} H_{P,l\uparrow 0\beta} + H_{P,0\alpha l\downarrow} H_{P,l\downarrow 0\beta}}{\Delta_l}. \quad (59)$$

6.1. Monokromatikus vezérlés

A [47] cikkben már belátták, hogy monokromatikus esetben használható a g -TMR, mi ezt itt is megteesszük a mi módszerünkkel, az itt használt jelölésekkel, hogy a bizonyítás bikromatikus esetben érthetőbb legyen majd. Monokromatikus dinamika esetén egy elektromos térre van szükség, ehhez másodrendben egy mágneses tag társul, így a Rabi-frekvencia arányos lesz az elektromos és a mágneses tér szorzatával. Ahhoz, hogy ezt megkapjuk, a másodrendű effektív Hamilton-operátor offdiagonális mátrixelemét kell vizsgálnunk. Az időtükrözési szimmetriának a következménye, hogy két elektromos tér mágneses tér nélkül nem adhat offdiagonális mátrixelemet, vagyis a csupán elektromos járulékokat tartalmazó $\tilde{H}_{EE}^{(2)}$ offdiagonális tagok nullák:

$$\tilde{H}_{EE,\uparrow\downarrow}^{(2)} = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{H_{E,0\uparrow l\uparrow} H_{E,l\uparrow 0\downarrow} + H_{E,0\uparrow l\downarrow} H_{E,l\downarrow 0\downarrow}}{\Delta_l} = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{H_{E,l\uparrow 0\downarrow} (H_{E,0\uparrow l\uparrow} - H_{E,l\downarrow 0\downarrow})}{\Delta_l} = 0. \quad (60)$$

Azok a tagok, amelyek esetlegesen két mágneses járulékból tevődnek össze irrelevánsak lesznek a dinamikában, tehát csak azok maradnak, amelyek mind az elektromos térben, mind a mágneses térben lineárisak. Egy másik felmerülő kérdés az, hogy két elektromos járulékot tartalmazó tagok befolyásolják-e a rezonanciafeltételt vagy sem. A két elektromos teret tartalmazó diagonális mátrixelemek:

$$\tilde{H}_{\uparrow\uparrow}^{(2)} = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{H_{E,0\uparrow l\uparrow} H_{E,l\uparrow 0\uparrow} + H_{E,0\uparrow l\downarrow} H_{E,l\downarrow 0\uparrow}}{\Delta_l}, \quad (61)$$

illetve:

$$\tilde{H}_{\downarrow\downarrow}^{(2)} = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{H_{E,0\downarrow l\uparrow} H_{E,l\uparrow 0\downarrow} + H_{E,0\downarrow l\downarrow} H_{E,l\downarrow 0\downarrow}}{\Delta_l}. \quad (62)$$

Szintén az időtükrözési szimmetria következménye az, hogy a (61) egyenlet első (második) tagja egyenlő a (62) egyenlet második (első) tagjával, vagyis a két diagonális mátrixelem megegyezik, a rezonanciafeltételt nem befolyásolják a két elektromos teret tartalmazó tagok.

Másodrendben az időfüggő Schrieffer-Wolff transzformáció nem tartalmaz időderiváltas tagokat, ezért alkalmazható a g -TMR. Sztatikus elektromos teret feltételezve időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval (ami ebben az esetben megegyezik az időfüggővel) levezethető egy másodrendű effektív Hamilton-operátor. Ezután a sztatikus teret oszcilláló elektromos térre kicserélve megkapjuk a helyes időfüggő effektív Hamilton-operátort.

6.2. Bikromatikus vezérlés egy elektródával

Bikromatikus folyamatokhoz két elektromos tér járulékra van szükség, ezért a dinamika leírásához legalább másodrendű Schrieffer-Wolff transzformációt kell használni. Láttuk azonban, hogy a csupán két elektromos teret tartalmazó járulékok az időtükrözési invariancia miatt nem befolyásolják a dinamikát, vagyis a vezető bikromatikus járulékok harmadrendűek. A harmadrendű Schrieffer-Wolff transzformációból adódó $\tilde{H}^{(3)}$ korrekció:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\alpha\beta}^{(3)} = & \sum_{l,\delta,m,\gamma} \frac{H_{P,0\alpha l\delta} H_{P,l\delta m\gamma} H_{P,m\gamma 0\beta}}{\Delta_l \Delta_m} - \frac{1}{2} \sum_{l,\delta,\gamma} \frac{H_{P,0\alpha l\delta} H_{P,l\delta 0\gamma} H_{P,0\gamma 0\beta}}{\Delta_l^2} + \\ & - \frac{1}{2} \sum_{l,\delta,\gamma} \frac{H_{P,0\alpha 0\gamma} H_{P,0\gamma l\delta} H_{P,l\delta 0\beta}}{\Delta_l^2} + \frac{i\hbar}{2} \sum_{l,\delta} \frac{\dot{H}_{P,0\alpha l\delta} H_{P,l\delta 0\beta} - H_{P,0\alpha l\delta} \dot{H}_{P,l\delta 0\beta}}{\Delta_l^2}, \end{aligned} \quad (63)$$

ahol az l -re és m -re vonatkozó összegzések 1-től végtelenig, míg a δ -ra és γ -ra vonatkozó szummák $\uparrow$ és $\downarrow$ állapotokra értendők. Látható, hogy az utolsó szummában megjelennek időderiváltak, azokat kell vizsgálni. Egy elektróda segítségével történő vezérlés esetén a H_E operátor:

$$H_E = (\tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t) Q_E, \quad (64)$$

ahol Q_E dimenziótlan operátor. Az egy elektródával történő vezérlés eredménye az, hogy az időderivált operátor önmagával arányos:

$$\dot{H}_E \propto Q_E \propto H_E, \quad (65)$$

ahol az arányosság alatt nem az időfüggést, hanem az operátor alakját értjük. A bikromatikus dinamikába az időderiváltas tagok közül csak a két elektromos teret tartalmazó tagok tudnak járulékot adni, azok viszont nem befolyásolják a dinamikát az időtükrözési invariancia és a (65) egyenlet miatt, ezt láttuk a monokromatikus esetben is (ld. (60) egyenlet).

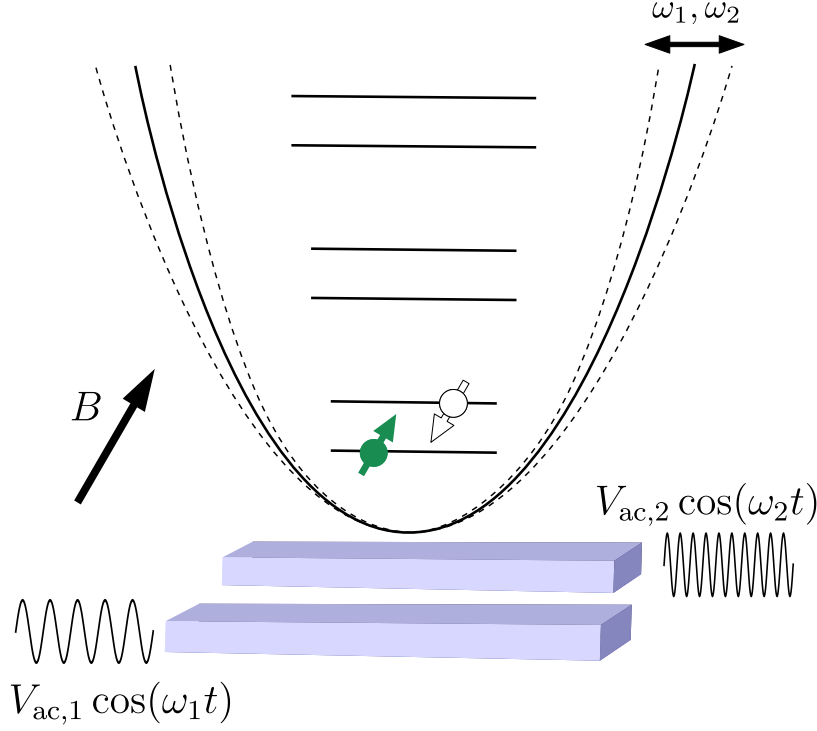
Azt kaptuk tehát, hogy az időderiváltas, a bikromatikus dinamikát befolyásoló tagok eltűnnek, a maradék releváns tagok pedig mágneses térben lineárisak (egy mágneses és két elektromos teret tartalmaznak), vagyis a monokromatikus esethez hasonlóan bikromatikus, egy elektródával történő vezérlés esetén is működik a g -TMR.

6.3. Bikromatikus vezérlés két elektródával

A 3. ábra mutatja a két elektróda által vezérelt qubitet. Két elektródával történő vezérlésnél a H_E operátor:

$$H_E = \tilde{E}_{ac1} \sin(\omega_1 t) Q_{E1} + \tilde{E}_{ac2} \sin(\omega_2 t) Q_{E2}, \quad (66)$$

ahol Q_{E1} és Q_{E2} különböző operátorok. Az előző esetben az időderiváltak amiatt tűntek el, hogy a H_E operátor deriváltja arányos volt önmagával, ebben az esetben viszont ez nem igaz. Az időtükrözési szimmetriára alapozva könnyen ellenőrizhető, hogy a (63) egyenletben megjelenő időderiváltakat tartalmazó szumma két tagja nem ejti ki egymást és különböző diagonális mátrixelemeket adnak, tehát mind a Bloch-Siegert eltolódáshoz, mind a Rabi-frekvenciához hozzájárulnak. Így sztatikus terekből kiindulva, időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációt alkalmazva ezek az időderiváltas járulékok nem kaphatóak meg, vagyis a g -TMR rossz eredményt ad.



3. ábra. **Elektromosan csapdázott elektron (vagy lyuk) spin-pálya kölcsönhatás mellett, bikromatikusan vezérelve, két elektróda által.** Az elektródákra adott váltakozó feszültség a bezárópotenciált bikromatikusan modulálja, ezáltal a spinben dinamikát indukál a spin-pálya kölcsönhatás révén. A dinamika nem írható le g -TMR segítségével.

Az időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációból származtatott effektív Hamilton-operátor helyesen leírja a dinamikát, ehhez definiálhatunk egy időfüggő g -tenzort. Az állítás az, hogy ez az időfüggő g -tenzor különbözik attól az időfüggő g -tenzortól, amit a sztatikus elektromos tér modulált térre való lecserélésével kapunk. Az időfüggő effektív Hamilton-operátor és az időfüggő g -tenzor kapcsolata:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \mu_B B \sigma_i g_{ij} b_j, \quad (67)$$

ahol az i -re és j -re való összegzést nem írtuk ki. Ebből kifejezhetjük a g -tenzort, ha megszorozzuk az egyenletet σ_k -val és vesszük a nyomatát:

$$\text{Tr}(\sigma_k \tilde{H}) = \frac{1}{2} \mu_B B g_{ij} b_j \text{Tr}(\delta_{ik} I + i \epsilon_{kil} \sigma_l) = \mu_B B g_{kj} b_j, \quad (68)$$

ahol kihasználtuk a $\sigma_k \sigma_i = \delta_{ik} I + i \epsilon_{kil} \sigma_l$ tulajdonságát a Pauli-mátrixoknak. A g -tenzor hatása a b vektorra:

$$g_{kj} b_j = \frac{1}{\mu_B B} \text{Tr}(\sigma_k \tilde{H}). \quad (69)$$

A (63) egyenletben megjelenő időderiváltas tagokat, mint korrekciókat hozzá kell adni ahhoz a g -tenzorhoz, amit a g -TMR formalizmusból kapunk:

$$g(t)_{ij} b_j = g_{ij}^{(g\text{-TMR})}(t) b_j + \frac{i \hbar}{2 \mu_B B} \sigma_{i,\beta\alpha} \sum_{l,\delta} \frac{\dot{H}_{E,0\alpha l \delta} H_{E,l \delta 0 \beta} - H_{E,0\alpha l \delta} \dot{H}_{E,l \delta 0 \beta}}{\Delta_l^2}, \quad (70)$$

ahol α -ra és β -ra is összegzünk. A g -TMR formalizmusból a $g^{(g-\text{TMR})}$ tenzor úgy adódik, hogy két sztatikus elektromos teret veszünk, amelyek különböző operátorral írhatóak le, időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval egy effektív Hamilton-operátort származtatunk, a sztatikus elektromos tereket lecseréljük modulált terekre, az így kapott effektív Hamilton-operátornak megfelelő g -tenzor a $g^{(g-\text{TMR})}$.

7. Parabolikus kvantumdot Rashba spin-pálya kölcsönhatással

Az előző részben általánosabb keretek között bemutatott, a g -TMR érvényességére vonatkozó eredményeket itt egy egyszerű, konkrét modellen demonstráljuk. A Hamilton-operátor:

$$H = H_0 + H_B + H_{\text{SO}}, \quad (71)$$

ahol a H_0 egy kétdimenziós, izotrop kvantumoszillátort ír le ω_0 frekvenciával:

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) = \hbar\omega_0(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1), \quad (72)$$

ahol bevezettük az x és y irányú oszcillátorokhoz tartozó keltő ($a_1^\dagger, a_2^\dagger$) és eltüntető (a_1, a_2) operátorokat.

H_B írja le a kölcsönhatást egy külső, tetszőleges irányú B mágneses térrel:

$$H_B = \frac{1}{2}g\mu_B B \mathbf{b} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\tilde{B} \mathbf{b} \boldsymbol{\sigma}, \quad (73)$$

ahol $\mathbf{b}$ a mágneses tér irányába mutató egységvektor, és bevezettük a $\tilde{B} = g\mu_B B$ energia dimenziójú mennyiséget.

A H_{SO} írja le az elektromos vezérléshez elengedhetetlen spin-pálya kölcsönhatást, amit itt Rashba-típusúnak feltételezünk:

$$H_{\text{SO}} = \alpha(p_x \sigma_y - p_y \sigma_x) = i\tilde{\alpha}[(a_1^\dagger - a_1)\sigma_y - (a_2^\dagger - a_2)\sigma_x], \quad (74)$$

ahol ismét megjelentek az x és y irányokhoz tartozó keltő és eltüntető operátorok, és bevezettük az $\tilde{\alpha} = \alpha\sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}$ energia dimenziójú mennyiséget.

A modell egyszerűsége lehetővé teszi, hogy analitikus eredményeket kapjunk a monokromatikus és bikromatikus folyamatokra. Általános mágneses tér irány esetén a Zeeman-tag (73) nem diagonális, ezért célszerű egy bázistranszformációt végrehajtani a spintéren. A bázistranszformációt leíró U mátrix:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi} \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi} & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (75)$$

ahol θ és ϕ a $\mathbf{b}$ irányhoz tartozó gömbi polárszögek. Ezzel a H_B diagonalizálása:

$$H_B \rightarrow U H_B U^\dagger = \frac{\tilde{B}}{2} \sigma_z. \quad (76)$$

A spin-pálya kölcsönhatást is el kell transzformálni:

$$H_{\text{SO}} \rightarrow U H_{\text{SO}} U^\dagger = \alpha(p_x \Sigma_x + p_y \Sigma_y), \quad (77)$$

ahol a Σ_x :

$$\Sigma_x = -\sin^2(\theta/2) \sin 2\phi \cdot \sigma_x + (\cos^2 \phi + \cos \theta \sin^2 \phi) \sigma_y + \sin \theta \sin \phi \cdot \sigma_z, \quad (78)$$

a Σ_y pedig:

$$\Sigma_y = (\sin^2(\theta/2) \cos 2\phi - \cos^2(\theta/2)) \sigma_x + \sin^2(\theta/2) \sin 2\phi \cdot \sigma_y - \cos \phi \sin \theta \cdot \sigma_z. \quad (79)$$

Így egy általános mágneses tér irány lehetővé teszi, hogy spinfordító (σ_x, σ_y) és spintartó (σ_z) spin-pálya tagok is megjelenjenek, ez pedig szükséges lesz a bikromatikus folyamatok megvalósításához.

7.1. Monokromatikus vezérlés

Monokromatikus folyamatokhoz alkalmazzunk egy x -irányú oszcilláló elektromos teret, az ezt leíró H_E tag a Hamilton-operátorban:

$$H_E = exE_{ac} \sin \omega t = \tilde{E}_{ac} \sin \omega t (a_1^\dagger + a_1), \quad (80)$$

ahol bevezettük az $\tilde{E}_{ac} = eE_{ac} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$ energia dimenziójú mennyiséget.

7.1.1. Analitikus számolás effektív Hamilton-operátor segítségével

A monokromatikus vezérlés leírására egy lehetőség, hogy harmadrendű TDSW segítségével egy időfüggő effektív Hamilton-operátort származtatunk. Kérdés, hogy miért van szükség harmadrendű perturbációszámításra, miért nem elégséges egy másodrendű, amely tartalmazza az elektromos teret és a spin-pálya kölcsönhatást. A válasz az, hogy mágneses tér hiányában az időtükrözési szimmetria miatt a másodrendű járulékok kiejtik egymást. Ha a H_P perturbáció csupán az elektromos tag és a spin-pálya kölcsönhatás összege, akkor:

$$H_P = H_E + H_{SO}, \quad (81)$$

ami időtükrözésre invariáns. A (60) egyenlet értelmében (itt H_E helyett H_P vehető) a járulékok kiejtik egymást, nem járulnak hozzá a Rabi-frekvenciához.

Fontos kiemelni, hogy az általános modellben igazolt eredmények a g -TMR érvényességére vonatkozóan csak akkor helytállóak, ha a spin-pálya kölcsönhatás a perturbálatlan Hamilton-operátor része. Ahhoz, hogy ebben a konkrét modellben az analitikus számolások elvégezhetőek legyenek, a spin-pálya kölcsönhatást perturbációnak kell tekinteni, emiatt eltérések lesznek az általános állításoktól. Később egy félig numerikus, félig analitikus számolással vizsgáljuk azt az esetet, amikor a spin-pálya kölcsönhatás nem perturbáció, ez feleltethető meg az általános modellben kapott eredményekkel.

A Schrieffer-Wolff transzformáció során a perturbálatlan Hamilton-operátor csupán a H_0 kétdimenziós oszcillátor, a perturbációk pedig a spin-pálya kölcsönhatás, az elektromos tér és a mágneses tér, ezáltal feltételezzük, hogy érvényesek a következők:

$$\epsilon \approx \frac{\tilde{E}_{ac}}{\hbar\omega_0} \approx \frac{\tilde{B}}{\hbar\omega_0} \approx \frac{\tilde{\alpha}}{\hbar\omega_0} \ll 1, \quad (82)$$

ahol ϵ a perturbációt jellemző kis dimenziótlan paraméter.

A TDSW-ból adódó effektív Hamilton-operátor megtalálható a Függelék A. részében. Az effektív Hamilton-operátorból adódó monokromatikus rezonanciafeltétel:

$$\hbar\omega = \tilde{B} - \frac{\tilde{B}\tilde{\alpha}^2(3 + \cos 2\theta)}{\hbar^2\omega_0^2}. \quad (83)$$

A Rabi-frekvencia pedig:

$$\Omega_R = \frac{2\tilde{B}\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}}{\hbar^3\omega_0^2} \sqrt{\cos^2\phi + \cos^2\theta \sin^2\phi}. \quad (84)$$

Az egyszerűség kedvéért mostantól a monokromatikus vezérlés során tekintsünk egy z -irányú mágneses teret, ekkor a Rabi-frekvencia (84) alapján:

$$\Omega_R = \frac{2\tilde{B}\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}}{\hbar^3\omega_0^2}. \quad (85)$$

Ezt az eredményt időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kaptuk. A 6. részben láttuk, hogy monokromatikus vezérlés esetén az időfüggő és időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációk ugyanarra az eredményre vezetnek, ha a spin-pálya kölcsönhatást nem kezeljük perturbációként, itt viszont a spin-pálya kölcsönhatás is perturbáció. Jelöljük a helyes, időfüggő transzformációból származó Rabi-frekvenciát $\Omega_{R,TDSW}$ -nek, míg az időfüggetlen transzformációból származó eredményt $\Omega_{R,SW}$ -nek. A helyes Ω_R Rabi-frekvencia:

$$\Omega_R = \Omega_{R,TDSW} = \frac{2\tilde{B}\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}}{\hbar^3\omega_0^2}. \quad (86)$$

Kiderül, hogy az időfüggetlen transzformációval adódó eredmény ettől egy kettes faktorban eltér:

$$\Omega_{R,SW} = \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}}{\hbar^3\omega_0^2} = \frac{\Omega_{R,TDSW}}{2}. \quad (87)$$

Ebből láthatjuk, hogy nem alkalmazhatjuk a g -TMR módszert, ha nem a qubit bázisán dolgozunk. Ha $\tilde{E}$ sztatikus elektromos teret feltételezünk, az ebből adódó effektív Hamilton-operátor:

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{B}}{2} - \frac{2\tilde{B}\tilde{\alpha}^2}{\hbar^2\omega_0^2} & \frac{\tilde{B}\tilde{E}\tilde{\alpha}}{\hbar^2\omega_0^2} \\ \frac{\tilde{B}\tilde{E}\tilde{\alpha}}{\hbar^2\omega_0^2} & -\frac{\tilde{B}}{2} + \frac{2\tilde{B}\tilde{\alpha}^2}{\hbar^2\omega_0^2} \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Ez kifejezve a megfelelő g -tenzorral:

$$H_{\text{eff}}(\tilde{E}) = \frac{1}{2}\mu_B\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{g}(\tilde{E}) \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_B}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad (89)$$

ahol a g -tenzor első két oszlopában nulla mátrixelemeket vettünk, hiszen azok irrelevánsak z -irányú mágneses tér esetén. A másik három mátrixelem:

$$g_{13} = \frac{2g\tilde{E}\tilde{\alpha}}{\hbar^2\omega_0^2}, \quad g_{23} = 0, \quad g_{33} = g - \frac{4g\tilde{\alpha}^2}{\hbar^2\omega_0^2}. \quad (90)$$

A monokromatikus g -TMR [1] szerint a Rabi-frekvencia meghatározható:

$$\hbar\Omega = \frac{\mu_B B \tilde{E}_{ac}}{2g^*} |(\hat{g}(\tilde{E}) \cdot \mathbf{b}) \times (\hat{g}'(\tilde{E}) \cdot \mathbf{b})|, \quad (91)$$

ahol $g^* = |\hat{g}(\tilde{E}) \cdot \mathbf{b}|$, ebben az esetben $g^* = g$. A sztatikus elektromos térnek nullát vehetünk, ekkor:

$$\hat{g}(\tilde{E} = 0) \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad \hat{g}'(\tilde{E} = 0) \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{2g\tilde{\alpha}}{\hbar^2\omega_0^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

A Rabi-frekvencia pedig:

$$\Omega = \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}}{\hbar^3\omega_0^2} = \Omega_{R,SW}. \quad (93)$$

Tehát a g -TMR valóban arra az eredményre vezet, amelyet időfüggetlen transzformációval kapunk, az időfüggő transzformációban megjelenő időderiváltas tagokat nem kapjuk meg, ha nem a qubit bázisán dolgozunk.

7.1.2. Analitikus számolások a Floquet-mátrix segítségével

Az előbb ismertetett, effektív Hamilton-operátort használó számolás két lépésből állt. Az első lépés az effektív Hamilton-operátor meghatározása, majd második lépésben Floquet-elmélet segítségével származtatható a Rabi-frekvencia az effektív Hamilton-operátorból. Monokromatikus esetben az utóbbi egyszerű feladat, hiszen a Floquet-elmélet alkalmazása megfelel a forgóhullámú közelítés [57] használatának (*rotating-wave approximation*).

Egy alternatív módszert jelent a Floquet-mátrix megkonstruálása az eredeti, végtelen dimenziós Hamilton-operátorból. Az így kapott időfüggetlen Floquet-mátrixból származtathatunk egy effektív mátrixot, ami leírja a monokromatikus dinamikát. Azt várjuk, hogy az így kapott eredmények megegyeznek az időfüggő transzformációval kapott helyes $\Omega_{R,TDSW}$ Rabi-frekvenciával.

A Floquet-mátrix a $|\alpha N_1 N_2 n\rangle$ Floquet-bázison írható fel, ahol α a spin, N_1 és N_2 az x és y irányú oszcillátorok kvantumszámai, míg n a fotonszám. A $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ Floquet-mátrix:

$$\langle \alpha N_1 N_2 n | \mathcal{H}_{\mathcal{F}} | \beta K_1 K_2 k \rangle = \langle \alpha N_1 N_2 n | \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_{SO} | \beta K_1 K_2 k \rangle, \quad (94)$$

ahol $\langle \alpha N_1 N_2 n | \mathcal{H}_0 | \beta K_1 K_2 k \rangle$:

$$\langle \alpha N_1 N_2 n | \mathcal{H}_0 | \beta K_1 K_2 k \rangle = [\hbar\omega_0(N_1 + N_2 + 1) + n\hbar\omega] \delta_{\alpha\beta} \delta_{N_1 K_1} \delta_{N_2 K_2} \delta_{nk}. \quad (95)$$

A Zeeman-tag:

$$\langle \alpha N_1 N_2 n | \mathcal{H}_B | \beta K_1 K_2 k \rangle = -\frac{\tilde{B}}{2} \langle \alpha | \sigma_z | \beta \rangle \delta_{N_1 K_1} \delta_{N_2 K_2} \delta_{nk}. \quad (96)$$

Az elektromos tér járuléka:

$$\begin{aligned} \langle \alpha N_1 N_2 n | \mathcal{H}_E | \beta K_1 K_2 k \rangle &= \frac{i\tilde{E}_{ac}}{2} \left(\sqrt{K_1 + 1} \cdot \delta_{N_1, K_1 + 1} + \sqrt{K_1} \cdot \delta_{N_1, K_1 - 1} \right) \times \\ &\times \delta_{N_2 K_2} \delta_{\alpha\beta} (\delta_{n-k, -1} - \delta_{n-k, 1}). \end{aligned} \quad (97)$$

A spin-pálya kölcsönhatás pedig:

$$\begin{aligned} \langle \alpha N_1 N_2 n | \mathcal{H}_{SO} | \beta K_1 K_2 k \rangle &= \\ &= i\tilde{\alpha} \left(\sqrt{K_1 + 1} \cdot \delta_{N_1, K_1 + 1} - \sqrt{K_1} \cdot \delta_{N_1, K_1 - 1} \right) \delta_{N_2 K_2} \langle \alpha | \sigma_y | \beta \rangle \delta_{nk} + \\ &- i\tilde{\alpha} \left(\sqrt{K_2 + 1} \cdot \delta_{N_2, K_2 + 1} - \sqrt{K_2} \cdot \delta_{N_2, K_2 - 1} \right) \delta_{N_1 K_1} \langle \alpha | \sigma_x | \beta \rangle \delta_{nk}. \end{aligned} \quad (98)$$

Mivel a végtelen dimenziós Floquet-mátrix sajátértékproblémája ekvivalens az időfüggő Schrödinger-egyenlettel, ezért elvárjuk, hogy helyesen visszaadja a monokromatikus Rabi-frekvenciát. A monokromatikus Rabi-frekvencia tartalmaz időderiváltas és nem időderiváltas tagokat, a Floquet-mátrix pedig időfüggetlen. Kérdés az, hogy hogyan kaphatjuk meg az időderiváltas tagokat az időfüggetlen Floquet-mátrixból.

A monokromatikus dinamika eddig is harmadrendű folyamat volt, ha alkalmazunk egy harmadrendű Schrieffer-Wolff transzformációt a Floquet-mátrixon, akkor megkaphatjuk

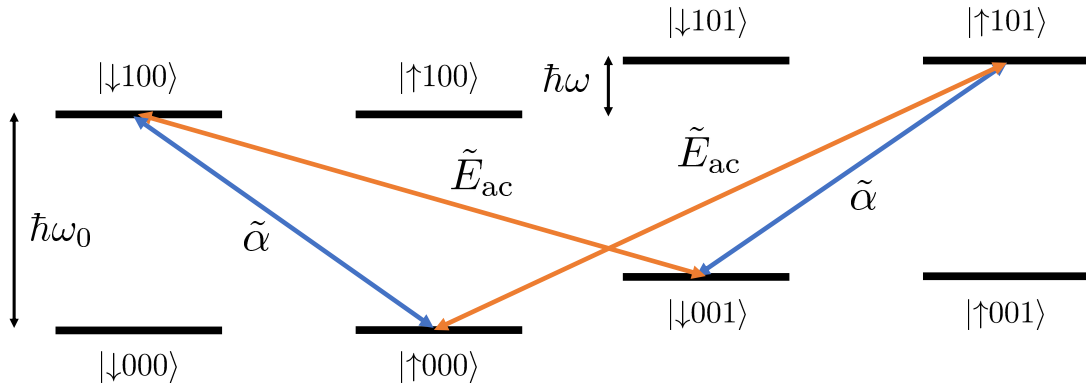
az időfüggetlen járulékokat. Az offdiagonális $\frac{\hbar\Omega_3}{2}$ mátrixelem a harmadrendű transzformációból:

$$\frac{\hbar\Omega_3}{2} = \frac{i\tilde{B}\tilde{E}\tilde{\alpha}}{2\hbar^2\omega_0^2}. \quad (99)$$

Kiderül, hogy az időderiváltas járulékokat másodrendű transzformációval kaphatjuk meg. Az előbb láttuk viszont (ld. (60,81) egyenletek), hogy a spin-pálya kölcsönhatást és elektromos tagot tartalmazó másodrendű járulékok nullák voltak az effektív Hamilton-operátoros leírás esetén. Abban az esetben a bizonyítás fontos része volt, hogy a dinamikában résztvevő két állapot egymás Kramers-degenerált párjai, vagyis ebben a modellben a $|00\uparrow\rangle$ és $|00\downarrow\rangle$ állapotok, ahol a két nulla az oszcillátorok kvantumszámait. A Floquet-leírásban azonban ez a feltétel nem teljesül, hiszen a két állapot $|\downarrow 001\rangle$ és $|\uparrow 000\rangle$, különböző fotonszámmal rendelkeznek. Így kaphatunk olyan másodrendű járulékokat, amelyek egy spin-pálya tagot és egy elektromos tagot tartalmaznak. Ezeket a másodrendű folyamatokat mutatja a 4. ábra. Az ezeknek megfelelő offdiagonális mátrixelem:

$$\frac{\hbar\Omega_2}{2} = \frac{i\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}}{4\hbar(\omega_0 - \omega)} - \frac{i\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}}{4\hbar(\omega_0 + \omega)} = \frac{i\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}\omega}{2\hbar(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (100)$$

Kihasználva, hogy a rezonanciafeltétel közelítőleg $\hbar\omega = \tilde{B}$, illetve, hogy $\omega \ll \omega_0$, megkapjuk, hogy $\Omega_2 = \Omega_3$, és a kettő összege pedig visszaadja a helyes Rabi-frekvenciát.



4. ábra. **Floquet-elméletből származó másodrendű folyamatok, amelyek az időderiváltas tagokat (100) adják.** A végtelen dimenziós Hamilton-operátorból legyártható a Floquet-mátrix, amelyből másodrendű Schrieffer-Wolff transzformációval adódnak az időderiváltas tagok. A Floquet-állapotok $|\alpha N_1 N_2 n\rangle$ alakban vannak írva, ahol α a spin, N_1 és N_2 az oszcillátor kvantumszámok, n pedig a foton-szám.

7.1.3. Számolások a qubit bázison

Láttuk, hogy ha a spin-pálya kölcsönhatást is perturbációként kezeljük, akkor TDSW használata szükséges, időfüggetlen transzformáció esetén rossz eredményre jutunk. Ahhoz, hogy demonstráljuk az általános modellben megmutatott állítást (6. rész), amely szerint a g -TMR működik, a qubit bázisán kell dolgoznunk. Ez annyit jelent, hogy a perturbálatlan Hamilton-operátorba beleértjük a spin-pálya kölcsönhatást is:

$$H^{(0)} = H_0 + H_{SO}, \quad (101)$$

míg az elektromos és mágneses tér perturbációként vannak kezelve:

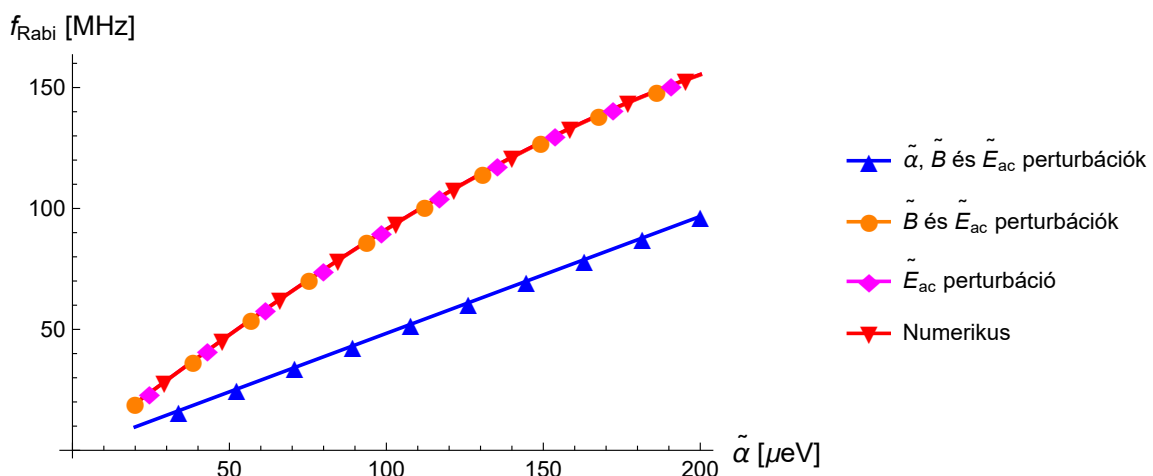
$$H_P = H_B + H_E. \quad (102)$$

Azt is mondhatjuk, hogy a g -TMR módszer definíciójába beleértjük azt, hogy csak a mágneses és elektromos teret tekintjük perturbációnak. Ez kísérleti szempontból is logikus,

hiszen adott a kísérletben a mágneses és elektromos tér nélküli eszköz, a külső elektromos és mágneses tér általunk hangolható perturbációk. A spin-pálya kölcsönhatás viszont adott, germánium lyukak esetében pedig jelentős, nem tekinthető perturbációnak.

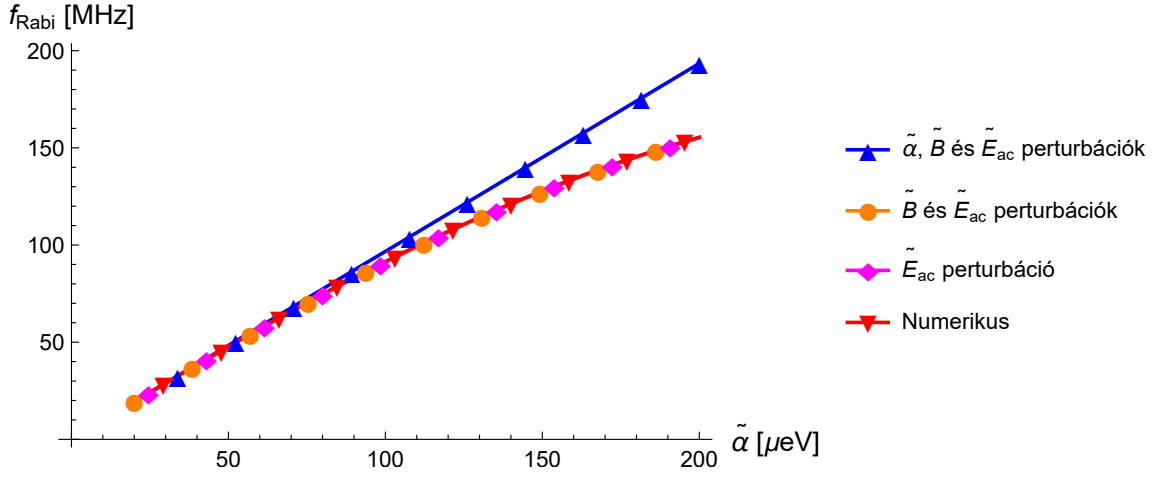
Egy másik lehetőség, amit vizsgálni fogunk az az, hogy csak az elektromos teret tekintjük perturbációnak, erre azonban nem hivatkozunk g -TMR módszerként.

Az oszcillátor H_0 Hamilton-operátora és a Rashba spin-pálya kölcsönhatás H_{SO} együtt nem diagonalizálhatóak egzaktul analitikusan, ezért konkrét paraméterekre numerikusan diagonalizáljuk a perturbálatlan Hamilton-operátort. A perturbációt azonban analitikusan kezeljük, tehát az elektromos és mágneses terek (vagy csak az elektromos tér) paraméterek lesznek. A perturbációt a diagonalizált qubit Hamilton-operátor $H^{(0)}$ bázisán írjuk fel, majd ezen végrehajtunk egy időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációt, amiből Floquet-elmélettel számolunk Rabi-frekvenciát, így megkapjuk a helyes eredményeket. A g -TMR érvényessége úgy vizsgálható, hogy az effektív Hamilton-operátort időfüggetlen transzformációval is származtatjuk, az így kapott eredményeket pedig összehasonlítjuk.



5. ábra. **Időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott monokromatikus Rabi-frekvenciák a spin-pálya kölcsönhatás függvényében.** A kék görbe ábrázolja az időfüggetlen transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (87), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses tér, vagy csak az elektromos tér van perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor 30 legalacsonyabb állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanez a 30 állapot volt használva. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{B} = 50 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac} = 40 \mu\text{eV}$, és a mágneses tér z irányú.

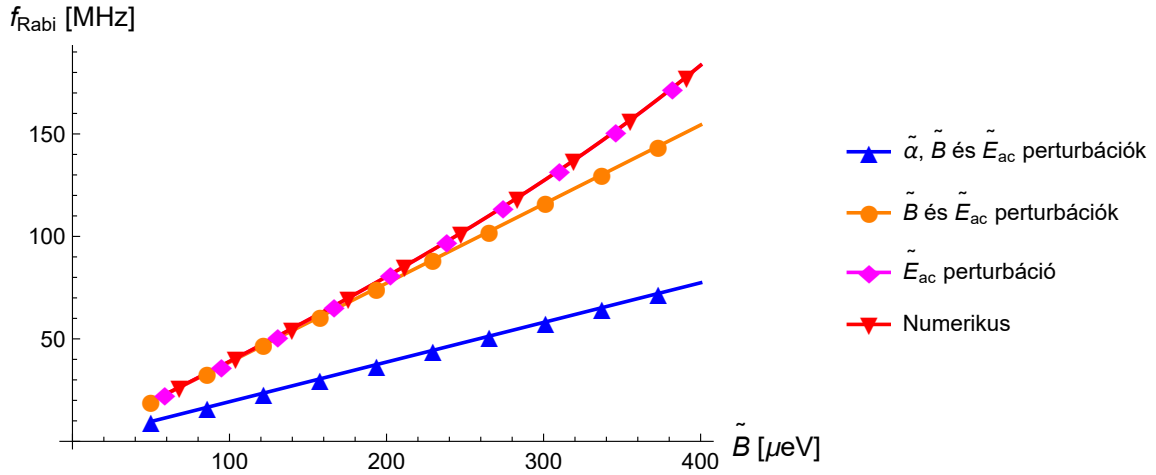
Az 5. ábra mutatja az időfüggetlen transzformációval számolt monokromatikus Rabi-frekvenciákat ($f_R = \Omega_R/(2\pi)$) a spin-pálya kölcsönhatás erősségének függvényében. Azt láthatjuk, hogy a kék görbe (87), amely a spin-pálya kölcsönhatást is perturbációként tekinti eltér az összes többitől, ahogy ezt vártuk is. A g -TMR módszer szerint számolt narancssárga görbe gyakorlatilag megegyezik a numerikus számolás eredményével, hiszen az alkalmazott mágneses és elektromos tér gyenge. A 6. ábra mutatja az időfüggő transzformációval kapott eredményeket, az egyedüli változás a kék görbében figyelhető meg, ebben az esetben a helyes formula (86) lett alkalmazva. Így már gyenge spin-pálya kölcsönhatás mellett mind a négy görbe közelítőleg ugyanazt az eredményt adja, csak nagyobb spin-pálya kölcsönhatás esetén jelentős az eltérés a kék görbe és a többi között. Tehát sikeresen visszakaptuk az általános eredményt, miszerint a g -TMR működik, feltéve, hogy a qubit bázisán dolgozunk.



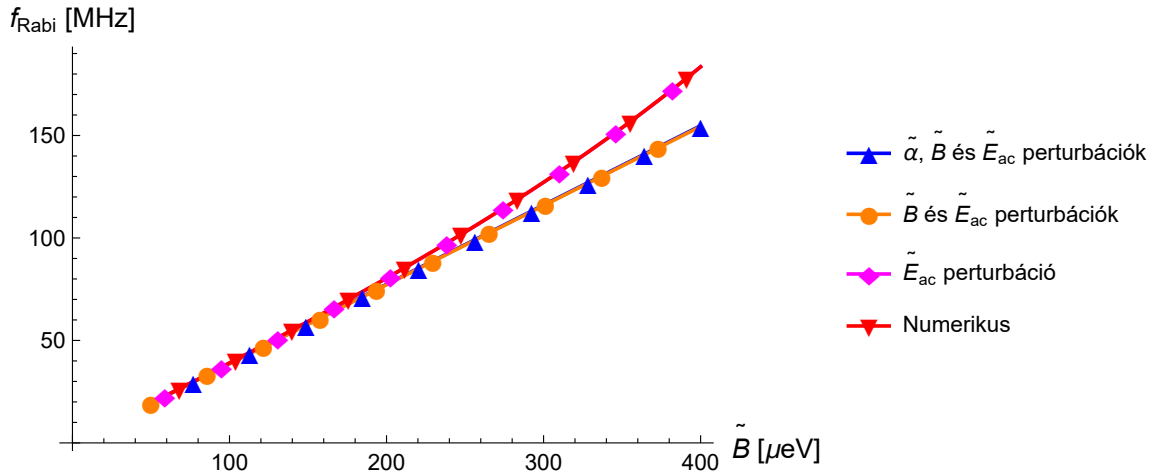
6. ábra. **Időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott monokromatikus Rabi-frekvenciák a spin-pálya kölcsönhatás függvényében.** A kék görbe ábrázolja az időfüggő transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (86), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses tér, vagy csak az elektromos tér van perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor 30 legalacsonyabb állapota volt figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanez a 30 állapot volt használva. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{B} = 50 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac} = 40 \mu\text{eV}$, és a mágneses tér z irányú.

Hasonlítsuk össze az 5. ábrán látható kék és narancssárga görbéket. Elsőre szokatlan lehet, hogy a két görbe nulla spin-pálya kölcsönhatáshoz közeledve sem egyezik meg, a kettő aránya nem egyhez, hanem kettőhöz tart. Ezt megmagyarázhatjuk azzal, hogy a helyes (időfüggő) Schrieffer-Wolff transzformációban az időderiváltas és a nem időderiváltas tagok megkülönböztetése, vagyis az időderiváltat nem tartalmazó tagok kitüntetése a g -TMR módszerben önkényes, vagyis nem kell meglepődnünk azon, hogy különböző számolási módszerekkel különböző eredményeket kapunk a Rabi-frekvenciára. Felmerül azonban itt egy másik probléma is. Ha az oszcilláló elektromos tér helyett egy sztatikus teret alkalmazunk, akkor a kék és narancssárga görbéknek megfelelő időfüggetlen perturbációszámítások különböző effektív Hamilton-operátorokat adnak, annak ellenére, hogy ugyanaz a sztatikus elektromos tér mindkét esetben. A probléma feloldása egyrészt az, hogy ebben a konkrét modellben egy sztatikus elektromos térnek nincsen hatása a dinamikára, hiszen az csak eltolja a harmonikus bezárópotenciál minimumát. Általános esetben pedig a két Schrieffer-Wolff transzformáció eredménye azért különbözhet, mert a sztatikus elektromos terek nem a perturbációszámítás adott rendjében (itt másod- vagy harmadrend) módosítják a kapott spektrumot, hanem csak magasabb rendben. Tehát különböző effektív Hamilton-operátorokat kapunk, de a fizikai tartalmuk közötti különbség, vagyis a kapott spektrumok közötti különbség vezető rendben nulla.

A 7. és 8. ábrák mutatják az időfüggetlen, illetve időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációkkal kapott monokromatikus Rabi-frekvenciákat a mágneses tér függvényében. Nagyobb mágneses tér esetén itt kijön a narancssárga és magenta görbék közötti különbség, hiszen utóbbi egzaktul kezeli a mágneses teret, míg az előbbi perturbatíván.



7. ábra. **Időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott monokromatikus Rabi-frekvenciák a mágneses tér függvényében.** A kék görbe ábrázolja az időfüggetlen transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (87), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses tér, vagy csak az elektromos tér van perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor 30 legalacsonyabb energiájú állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanez a 30 állapot volt használva. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{\alpha} = 20 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac} = 40 \mu\text{eV}$, és a mágneses tér z irányú.



8. ábra. **Időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott monokromatikus Rabi-frekvenciák a mágneses tér függvényében.** A kék görbe ábrázolja az időfüggő transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (86), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses tér, vagy csak az elektromos tér van perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor 30 legalacsonyabb energiájú állapota volt figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanez a 30 állapot volt használva. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{\alpha} = 20 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac} = 40 \mu\text{eV}$, és a mágneses tér z irányú.

7.2. Bikromatikus vezérlés egy elektródával

Bikromatikus, egy elektródával történő vezérlés esetén két oszcilláló elektromos teret kapcsolunk ugyanabban az x irányban, az ezt leíró H_E Hamilton-operátor:

$$H_E = ex(E_{ac_1} \sin \omega_1 t + E_{ac_2} \sin \omega_2 t) = (\tilde{E}_{ac_1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac_2} \sin \omega_2 t)(a_1^\dagger + a_1), \quad (103)$$

ahol bevezettük a $\tilde{E}_{ac_1} = eE_{ac_1}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$ és $\tilde{E}_{ac_2} = eE_{ac_2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$ energia dimenziójú mennyiségeket. A vezérléshez tartozó rezonanciafeltétel:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_{\text{split}} + \omega_{\text{BS}}, \quad (104)$$

ahol ω_{split} a qubit felhasadása, ω_{BS} pedig a gerjesztések $\tilde{E}_{ac_1}$ és $\tilde{E}_{ac_2}$ erősségeitől függő Bloch-Siegert eltolódás.

Bikromatikus vezérlés nem lehetséges z -irányú homogén mágneses térrel, hiszen a qubitet síkban mozgatva a Rashba spin-pálya kölcsönhatás által generált oszcilláló effektív mágneses tér szintén z -irányú, ami nem tesz lehetővé spinfordítást. Emiatt síkbeli mágneses teret alkalmazunk, tehát $\theta = \frac{\pi}{2}$ esetet vesszük, a mágneses tér síkbeli irányát a ϕ polárszög írja le.

A bikromatikus vezérlés analitikus leírásához ötödrendű időfüggő Schrieffer-Wolff transzformáció szükséges. Az effektív Hamilton-operátorból Floquet-elmélettel megkapható a Rabi-frekvencia és a Bloch-Siegert eltolódás. A Schrieffer-Wolff transzformációból kapott effektív Hamilton-operátor, illetve további részletek megtalálhatóak a függelék A.2. részében. A qubit felhasadási frekvenciája ötödrendig:

$$\omega_{\text{split}} = \frac{\tilde{B}}{\hbar} - \frac{2\tilde{B}\tilde{\alpha}^2}{\hbar^3\omega_0^2} + \frac{8\tilde{B}\tilde{\alpha}^4 - 2\tilde{B}^3\tilde{\alpha}^2}{\hbar^5\omega_0^4}. \quad (105)$$

A Rabi-frekvencia:

$$\Omega_R = \Omega_{\text{R,TDSW}} = \frac{2\tilde{B}\tilde{E}_{ac_1}\tilde{E}_{ac_2}\tilde{\alpha}^2 \sin 2\phi}{\hbar^5\omega_0^4}. \quad (106)$$

A Bloch-Siegert eltolódás pedig:

$$\omega_{\text{BS}} = \frac{4\tilde{B}\tilde{\alpha}^2\omega_1^2 \cos^2 \phi}{\hbar^3\omega_0^4(\tilde{B}^2 - \hbar^2\omega_1^2)}\tilde{E}_{ac_1}^2 + \frac{4\tilde{B}\tilde{\alpha}^2(\tilde{B} - \hbar\omega_1)^2 \cos^2 \phi}{\hbar^6\omega_0^4\omega_1(2\tilde{B} - \hbar\omega_1)}\tilde{E}_{ac_2}^2. \quad (107)$$

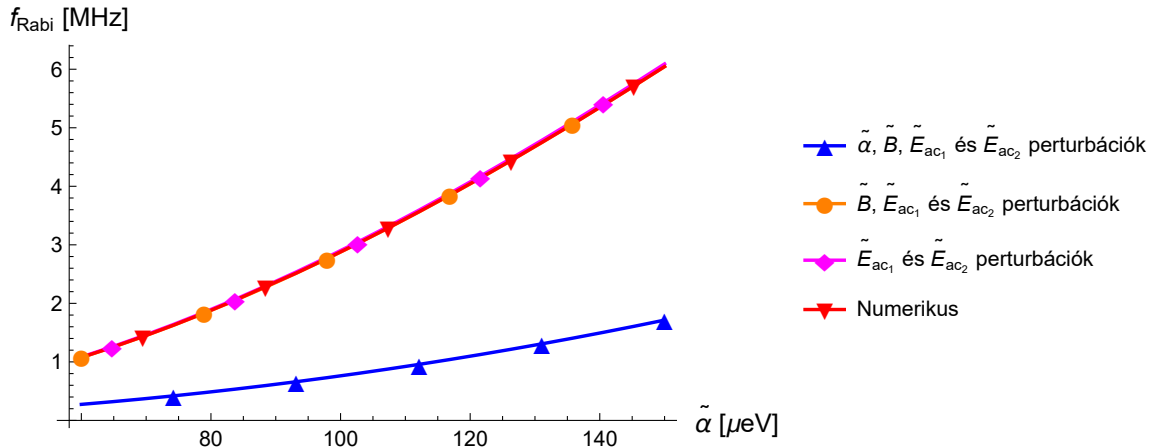
Ha időfüggő transzformáció helyett időfüggetlen transzformációt használunk, akkor a helyes Ω_R érték negyedét kapjuk meg:

$$\Omega_{\text{R,SW}} = \frac{\Omega_{\text{R,TDSW}}}{4} = \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac_1}\tilde{E}_{ac_2}\tilde{\alpha}^2 \sin 2\phi}{2\hbar^5\omega_0^4}. \quad (108)$$

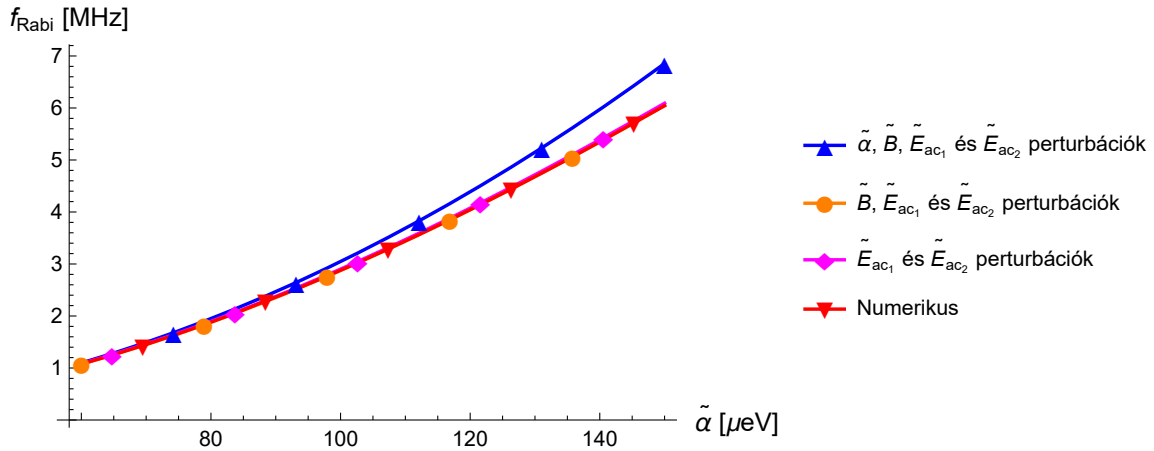
A monokromatikus esetben megvizsgáltuk, hogy hogyan lehet ezekre az eredményekre jutni effektív Hamilton-operátor nélkül, a végtelen dimenziós Hamilton-operátorból származó Floquet-mátrix segítségével. Ezt bikromatikus esetben nem tesszük meg, mivel ez bonyolultabb lenne, célszerűbb az effektív Hamilton-operátoros leírást alkalmazni.

7.2.1. Számolások a qubit bázison

Ahhoz, hogy a g -TMR érvényességét vizsgálni tudjuk az oszcillátor bázisa helyett az oszcillátor és a spin-pálya kölcsönhatás bázisán kell dolgozni, a monokromatikus vezérléshez hasonlóan (ld. (101,102) egyenletek). Ez ismét azt jelenti, hogy konkrét paraméterekre numerikusan diagonalizáljuk a perturbálatlan Hamilton-operátort, a perturbációnak pedig mindig a mágneses és elektromos tereket tekintjük (vagy csak az elektromos tereket, ekkor a mágneses tag is része a diagonalizálásnak). A perturbációt analitikusan, perturbatíván vesszük figyelembe, Floquet-elmélet segítségével.



9. ábra. Időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a spin-pálya kölcsönhatás függvényében, egy elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggetlen transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (108), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{B} = 100 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{\text{ac}_1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{\text{ac}_2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = \pi/4$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a (104) rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.

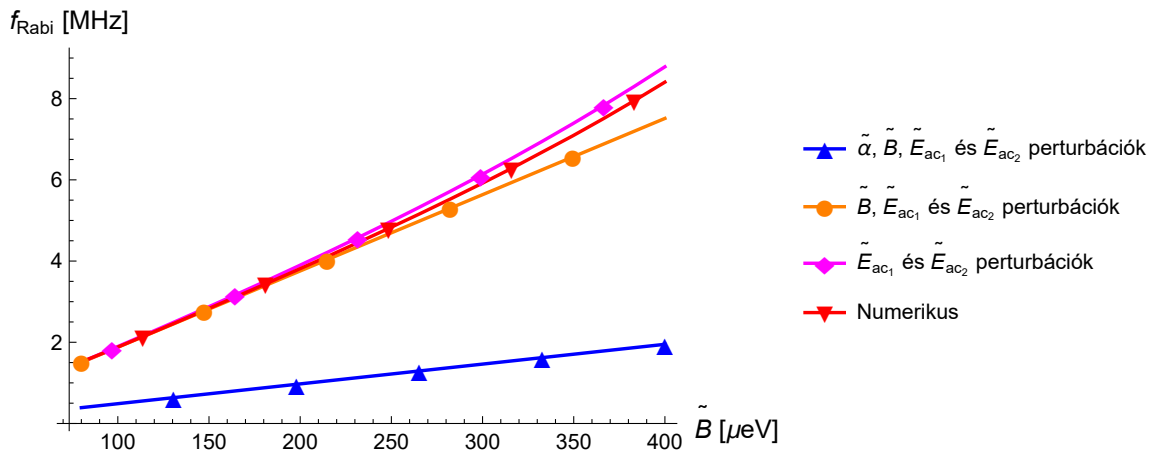


10. ábra. Időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a spin-pálya kölcsönhatás függvényében, egy elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggő transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (106), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{B} = 100 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{\text{ac}_1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{\text{ac}_2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = \pi/4$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a (104) rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.

A 9. ábra mutatja a bikromatikus, egy operátorral történő vezérlés Rabi-frekvenciáját a spin-pálya kölcsönhatás függvényében. A numerikus eredményt leszámítva időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformáció volt használva a számolásoknál. Látható, hogy itt is rossz eredményt kapunk, ha a spin-pálya kölcsönhatást perturbációnak tekintjük (kék görbe).

Ha viszont a perturbálatlan Hamilton-operátor része a spin-pálya kölcsönhatás, akkor időfüggetlen transzformációval is a jó eredményre jutunk (narancssárga és magenta görbék). Ez azt jelenti, hogy a g -TMR működik, ezt általánosan is láttuk.

A 10. ábra mutatja ugyanezeket a Rabi-frekvenciákat, viszont időfüggetlen transzformáció helyett időfüggő transzformációval történtek a számolások. Ez csak a kék görbét befolyásolja, ebben az esetben a teljesen analitikus számolás is helyes, csupán nagy spin-pálya kölcsönhatás mellett jelentős az eltérés a többi számolási módszerhez képest, hiszen a többi módszer a spin-pálya kölcsönhatást egzaktul kezeli a teljesen analitikus számolással ellentétben.

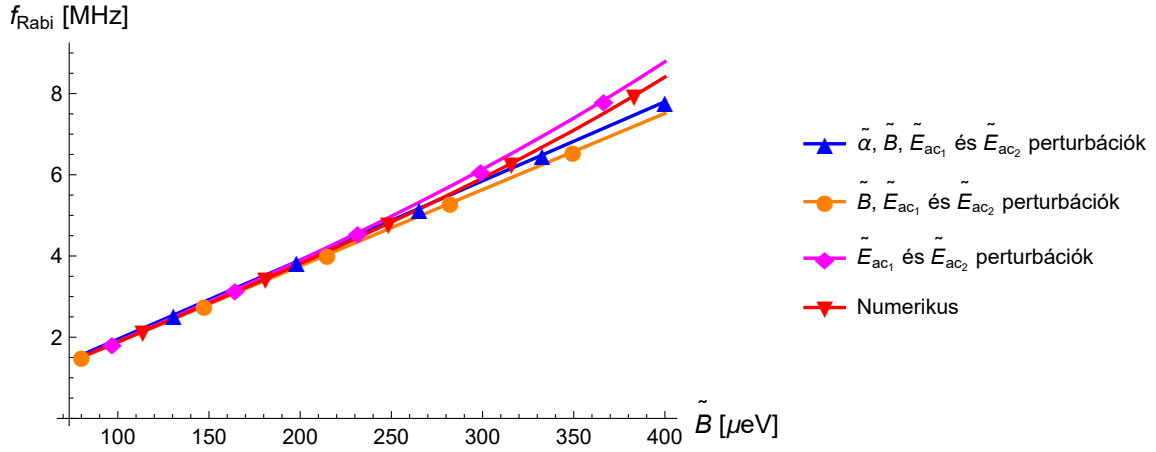


11. ábra. Időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a mágneses tér erősségének függvényében, egy elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggetlen transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (108), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{\alpha} = 80 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = \pi/4$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a (104) rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.

A 11. és 12. ábrák mutatják a Rabi-frekvenciát a mágneses tér függvényében. Ismét azt látjuk, hogy az időfüggetlen transzformációból származó analitikus eredmény (11. ábra kék görbe) helytelen. Nagy mágneses tér esetén a narancssárga és magenta görbék eltérnek egymástól, hiszen előbbi perturbatíván, utóbbi egzaktul kezeli a mágneses teret. Érdekes viszont azt is megfigyelni, hogy a magenta és a piros görbék is eltérnek, pedig mindkettő egzaktul kezeli a mágneses teret. Az eltérés oka az, hogy a magenta görbe esetén az elektromos tér perturbatíván van figyelembe véve, a perturbáció erőssége pedig a mágneses térrel nő, annak ellenére, hogy az elektromos tér erőssége konstans. Ez azért van, mert a perturbáció nagyságát jellemző ϵ paraméter:

$$\epsilon \approx \frac{\tilde{E}_{ac1}}{\hbar\omega_0 - \tilde{B}} \approx \frac{\tilde{E}_{ac2}}{\hbar\omega_0 - \tilde{B}}, \quad (109)$$

a mágneses tér növelésével nő, tehát a perturbációszámítás pontatlanabb lesz.



12. ábra. Időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a mágneses tér erősségének függvényében, egy elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggő transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (106), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{\alpha} = 80 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = \pi/4$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a (104) rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.

7.3. Bikromatikus vezérlés két elektródával

Két elektródával történő vezérlést modellezhetünk úgy, mint két különböző irányban bekapcsolt oszcilláló elektromos teret:

$$H_E = exE_{ac1} \sin \omega_1 t + eyE_{ac2} \sin \omega_2 t = \tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t (a_1^\dagger + a_1) + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t (a_2^\dagger + a_2). \quad (110)$$

Az ötödrendű időfüggő transzformációból adódó Rabi-frekvencia:

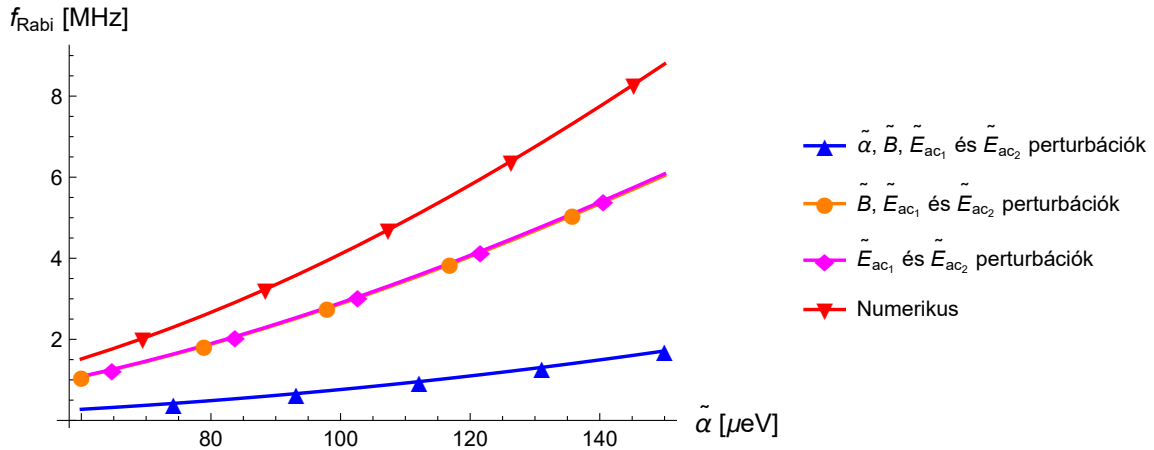
$$\Omega_R = \Omega_{R,TDSW} = \frac{4\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2|\hbar\omega_1 - \tilde{B}\sin^2\phi|}{\hbar^5\omega_0^4}, \quad (111)$$

ahol először kapunk a gerjesztési frekvenciától függő Rabi-frekvenciát. A formulát úgy kell érteni, hogy a frekvencia ω_1 -től függ, ω_2 pedig a rezonanciafeltételt szerint van megválasztva. Az időfüggetlen transzformációval a következő eredményre jutunk:

$$\Omega_{R,SW} = \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2\cos 2\phi}{2\hbar^5\omega_0^4}. \quad (112)$$

Az időfüggő transzformációból adódó Bloch-Siegert eltolódás:

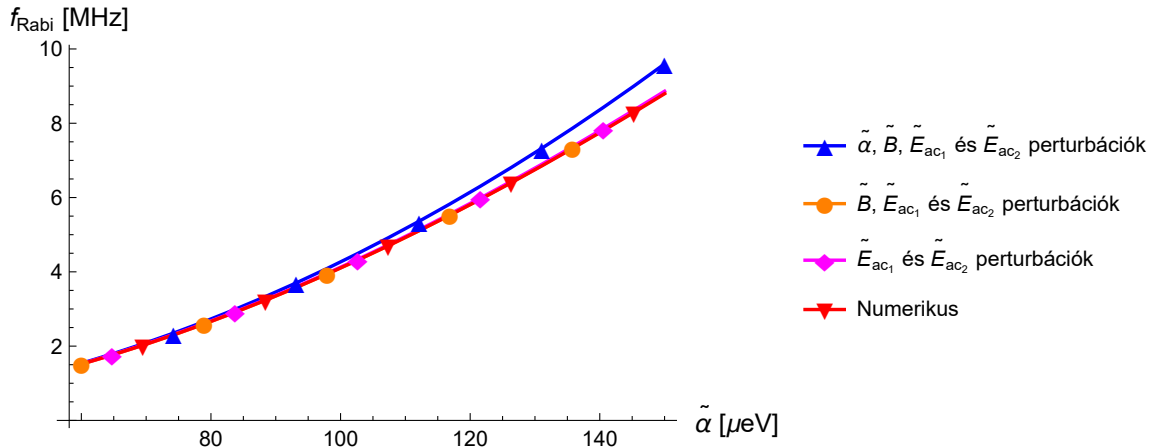
$$\omega_{BS} = \frac{4\tilde{B}\tilde{\alpha}^2\omega_1^2\cos^2\phi}{\hbar^3\omega_0^4(\tilde{B}^2 - \hbar^2\omega_1^2)}\tilde{E}_{ac1}^2 + \frac{4\tilde{B}\tilde{\alpha}^2(\tilde{B} - \hbar\omega_1)^2\sin^2\phi}{\hbar^6\omega_0^4\omega_1(2\tilde{B} - \hbar\omega_1)}\tilde{E}_{ac2}^2. \quad (113)$$



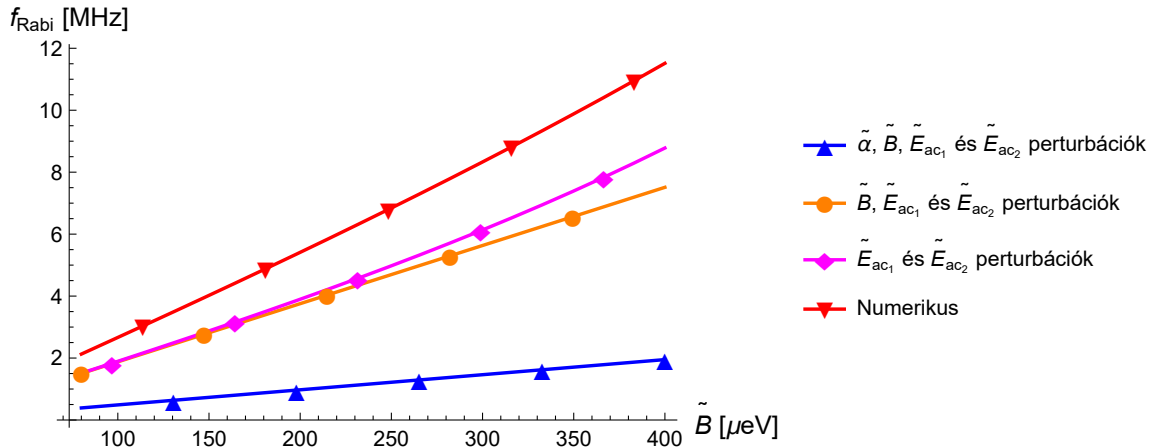
13. ábra. Időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a spin-pálya kölcsönhatás függvényében, két elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggetlen transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (112), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{B} = 100 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = 0$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.

A 13. ábra mutatja a két elektródával történő vezérléshez tartozó Rabi-frekvenciát a spin-pálya kölcsönhatás függvényében, az analitikus számolások során időfüggetlen transzformációt használva. A helyes frekvenciát a piros görbe mutatja, ami a numerikus szimuláció eredménye. A kék görbe a teljesen analitikus időfüggetlen perturbatív számolás (112) eredményét mutatja meg, ami különbözik a numerikus eredménytől, hiszen az időderiváltas tagokat nem tartalmazza. Az újdonság itt az, hogyha a spin-pálya kölcsönhatást a perturbálatlan Hamilton-operátor részeként tekintjük, akkor is rossz eredményt fogunk kapni (narancssárga és magenta görbék), ezt beláttuk az általános modellben. Azt kaptuk tehát, hogy a g -TMR (narancssárga görbe) rossz eredményre vezet.

Érdemes azt a kérdést feltenni, hogy a 13. ábrán a magenta görbe miért nem a jó eredményt adja. Ha csak az elektromos tereket tekintjük perturbációnak, akkor azt gondolnánk, hogy egy másodrendű Schrieffer-Wolff transzformációval leírhatjuk a bikromatikus vezérlést, másodrendű transzformáció esetén pedig az időfüggő és időfüggetlen transzformációk megegyeznek. Kiderül azonban, hogy az időderiváltas tagok fontosak, nem hagyhatjuk el azokat, így pedig egy harmadrendű időfüggő Schrieffer-Wolff transzformáció segítségével kaphatjuk meg a hiányzó időderiváltas járulékokat. Ez látható a 14. ábrán, ahol a Rabi-frekvencia időfüggő transzformációval lett meghatározva. Az összes számolási módszer a helyes eredményre vezet ekkor, egyedül a teljesen analitikus eredmény (kék görbe) lesz pontatlan nagy spin-pálya kölcsönhatás esetén, hiszen azt perturbatíván veszi figyelembe, az összes többi számolási módszer pedig egzaktul.



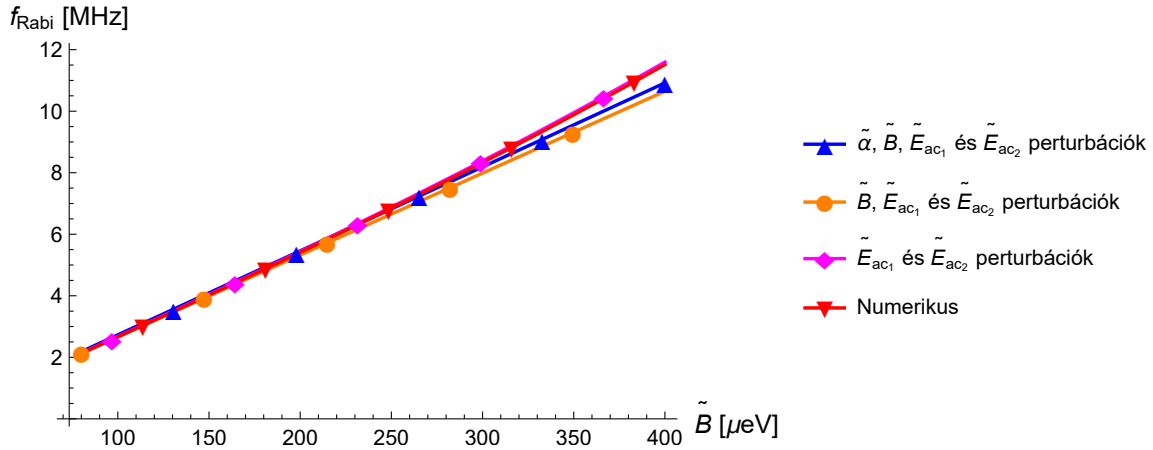
14. ábra. Időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a spin-pálya kölcsönhatás függvényében, két elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggő transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (111), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{B} = 100 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = 0$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.



15. ábra. Időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a mágneses tér függvényében, két elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggetlen transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (112), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{\alpha} = 80 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = 0$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.

A 15. ábra mutatja az időfüggetlen transzformációból adódó Rabi-frekvenciát a mágneses tér függvényében. Itt is az a konklúzió vonható le, hogy a g -TMR rossz eredményt ad (narancssárga görbe). Az is megfigyelhető, hogy a narancssárga és a magenta görbe elválik egymástól nagy mágneses tér esetén, hiszen előbbi perturbatíván, utóbbi egzaktul

veszi azt figyelembe. A 16. ábrán láthatóak az eredmények időfüggő transzformációkat használva, ekkor a különbözően számolt eredmények mind megegyeznek, csak nagy mágneses tér esetén térnek el egymástól. Először is a piros-magenta és kék-narancssárga párok térnek el, hiszen előbbiek egzaktul, utóbbiak perturbatíván kezelik a mágneses teret. Az is látható viszont, hogy az egyes párok is szétválnak nagy mágneses tér esetén (legfőképp a kék és narancssárga).



16. ábra. Időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott bikromatikus Rabi-frekvenciák a mágneses tér függvényében, két elektródával történő vezérlés esetén. A kék görbe ábrázolja az időfüggő transzformációval kapott teljesen analitikus eredményt (111), a narancssárga és magenta görbék mutatják a numerikusan diagonalizált Hamilton-operátor bázisán történő időfüggő Schrieffer-Wolff transzformációval kapott analitikus eredményeket, amikor az elektromos és mágneses terek, vagy csak az elektromos terek vannak perturbációként kezelve. A diagonalizálásnál a végtelen dimenziós Hamilton-operátor legalsó 20 állapota lett figyelembe véve. A numerikus számolás az időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldását jelenti, ott szintén ugyanezt a 20 állapotot használtuk. A paraméterek: $\hbar\omega_0 = 1000 \mu\text{eV}$, $\tilde{\alpha} = 80 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac1} = 70 \mu\text{eV}$, $\tilde{E}_{ac2} = 90 \mu\text{eV}$, a mágneses teret leíró szögek pedig $\theta = \pi/2$ és $\phi = 0$. A gerjesztés frekvenciája $\omega_1 = 0.7\tilde{B}/\hbar$, ω_2 a rezonanciafeltételnek megfelelően lett megválasztva.

A két elektródával történő vezérlés egyik újdonsága, hogy a g -TMR módszer rossz eredményt ad, a másik újdonság pedig az, hogy a Rabi-frekvencia függ a gerjesztési frekvenciák megválasztásától. Ennek oka a Berry-fázis [58], hiszen két elektródás vezérlés esetén az elektron (lyuk) egy zárt görbén mozog. Ez azt jelenti, hogy nulla mágneses térben is lenne spindinamika, ha két dimenzióban mozgatjuk a spint, ez a nem-abeli Berry-fázisnak [59] köszönhető. Ebben a dolgozatban konkrétan a bikromatikus dinamikát, mint nem triviális dinamikát vizsgáltuk, azonban általánosan is felmerül a kérdés, hogy tetszőleges vezérlés leírható-e g -TMR módszerrel vagy sem. A válasz lehetséges, hogy a Berry-fázisban kerecsendő, azonban ehhez további vizsgálatok lennének szükségesek.

8. Diszkusszió

A dolgozatban a g -TMR módszer érvényességével foglalkoztunk, hiszen eddig csupán annyi volt ismert, hogy a g -TMR módszer alkalmazható a legegyszerűbb dinamika, a monokromatikus vezérlés leírására [47]. Megmutattuk, hogy általános dinamika esetén ez egyáltalán nem triviális kérdés, bikromatikus, egy elektródával történő vezérlés esetén érvényes, viszont két elektródánál már nem. Egy konkrét modell keretén belül is vizsgáltuk ezt a kérdést, egy kétdimenziós parabolikus bezáró potenciállal csapdázott elektron bikromatikus vezérlése során különböző módszerekkel kiszámoltuk a Rabi-frekvenciákat, a kapott eredmények jól tükrözték az általános állításokat. A jelenleg elérhető spin-alapú

kvantumprocesszorokban a több elektródával történő vezérlés lehetséges és releváns, ezért fontos érteni, hogy hogyan írható le a dinamika ebben az esetben. Az eddig elvégzett egyetlen kísérlet, amely során bikromatikus vezérlést használtak [51] azonban nem vizsgálható g -TMR módszerrel, hiszen nem egy spint, hanem két spint vezéreltek, emiatt a dinamika nem írható le egy kétdimenziós effektív Hamilton-operátorral, hanem legalább egy négydimenziós operátorra van szükség.

Az alapkérdés nem csak a spin-alapú kvantumszámításnál érdekes, hanem bármilyen vezérelt kvantumrendszerénél, ahol egy effektív leírást szeretnénk alkalmazni. A dolgozatban megmutattuk, hogy gyakran érvényes az a kényelmes eljárás, hogy a sztatikus effektív Hamilton-operátorba illesztjük be az időfüggést, de ez nem magától értetődő, a konkrét esetekben ezt meg kell vizsgálni. Akkor, amikor ez nem igaz, a teljes Hamilton-operátorban figyelembe kell venni a vezérlést, és annak segítségével kell egy effektív leírást készíteni.

9. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőimnek, **Széchenyi Gábornak** és **Pályi Andrásnak** a munkában nyújtott sok segítségükért, útmutatásukért, hasznos ötleteikért.

A kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium EKÖP-24 kódszámú Egyetemi Kiválósági Ösztöndíj Programjának a Nemzeti és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült. A kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a 2022-2.1.1-NL-2022-00004 számú projekt finanszírozásában valósult meg



10. Függelék

A. Effektív Hamilton-operátorok

A 7. részben bemutatottuk az analitikus perturbatív eredményeket a Rashba-modellben történő monokromatikus és bikromatikus vezérlésekről. Itt közöljük a TDSW-vel kapott effektív Hamilton-operátorokat, amelyek segítségével megkonstruálható a Floquet-mátrix, amellyel a Rabi-frekvenciák, illetve a Bloch-Siegert frekvenciák kiszámolhatóak.

A.1. Monokromatikus vezérlés

Monokromatikus vezérlés esetén elégséges egy harmadrendű TDSW alkalmazása, hiszen egy mágneses térre, egy elektromos térre, illetve egy spin-pálya tagra van szükség a vezet

rendű dinamikához. Az így kapott $\tilde{H}$ effektív Hamilton-operátor:

$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)} + \tilde{H}^{(3)}, \quad (114)$$

ahol a nulladrendű $\tilde{H}^{(0)} = \hbar\omega_0\sigma_0$ tag az egységoperátorral arányos, vagyis elhagyható. Az elsőrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(1)} = \frac{\tilde{B}}{2}\sigma_z. \quad (115)$$

A másodrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(2)} = -\frac{\tilde{E}_{ac}^2 + 4\tilde{\alpha}^2 - \tilde{E}_{ac}^2 \cos(2\omega t)}{2\hbar\omega_0}\sigma_0, \quad (116)$$

ami szintén egy konstans eltolás, tehát figyelmen kívül hagyható. A harmadrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(3)} = h_x^{(3)}\sigma_x + h_y^{(3)}\sigma_y + h_z^{(3)}\sigma_z, \quad (117)$$

ahol a három együttható:

$$\begin{aligned} h_x^{(3)} = & \frac{\tilde{B}\tilde{\alpha}^2 \cos\theta \sin\theta \cos\phi}{\hbar^2\omega_0^2} + \frac{\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}\omega \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin 2\phi}{\hbar\omega_0^2} \cos\omega t + \\ & + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}(\cos^2\phi + \cos\theta \sin^2\phi)}{\hbar^2\omega_0^2} \sin\omega t, \end{aligned} \quad (118a)$$

$$\begin{aligned} h_y^{(3)} = & \frac{\tilde{B}\tilde{\alpha}^2 \sin 2\theta \sin\phi}{2\hbar^2\omega_0^2} - \frac{\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}\omega(\cos^2\phi + \cos\theta \sin^2\phi)}{\hbar\omega_0^2} \cos\omega t + \\ & + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}(1 - \cos\theta) \sin 2\phi}{2\hbar^2\omega_0^2} \sin\omega t, \end{aligned} \quad (118b)$$

$$h_z^{(3)} = -\frac{\tilde{B}\tilde{\alpha}^2(3 + \cos 2\theta)}{2\hbar^2\omega_0^2} - \frac{\tilde{E}_{ac}\tilde{\alpha}\omega \sin\theta \sin\phi}{\hbar\omega_0^2} \cos\omega t. \quad (118c)$$

A harmadrendű effektív Hamilton-operátorból megkonstruálható a Floquet-mátrix, a monokromatikus Rabi-frekvencia pedig leolvasható a Floquet-mátrix $|0\uparrow\rangle$ és $|1\downarrow\rangle$ állapotai közötti mátrixeleméből.

A.2. Bikromatikus vezérlés egy elektródával

Bikromatikus vezérlés esetén ötödrendű TDSW használata szükséges, az ötödrendű effektív Hamilton-operátor:

$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)} + \tilde{H}^{(3)} + \tilde{H}^{(4)} + \tilde{H}^{(5)}. \quad (119)$$

A páros rendű tagok, vagyis $\tilde{H}^{(0)}$, $\tilde{H}^{(2)}$ és $\tilde{H}^{(4)}$ mind a σ_0 egységoperátorral arányosak, vagyis elhagyhatjuk őket, így itt ki sem írjuk a kapott formulákat. Az elsőrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(1)} = \frac{\tilde{B}}{2}\sigma_z. \quad (120)$$

A harmadrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(3)} = h_x^{(3)}\sigma_x + h_y^{(3)}\sigma_y + h_z^{(3)}\sigma_z, \quad (121)$$

ahol a három együttható:

$$h_x^{(3)} = \frac{\tilde{\alpha} \cos \phi \sin \phi}{\hbar \omega_0^2} (\tilde{E}_{ac1} \omega_1 \cos \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \omega_2 \cos \omega_2 t) + \frac{\tilde{B} \tilde{\alpha} \cos^2 \phi}{\hbar^2 \omega_0^2} (\tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t), \quad (122a)$$

$$h_y^{(3)} = -\frac{\tilde{\alpha} \cos^2 \phi}{\hbar \omega_0^2} (\tilde{E}_{ac1} \omega_1 \cos \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \omega_2 \cos \omega_2 t) + \frac{\tilde{B} \tilde{\alpha} \cos \phi \sin \phi}{\hbar^2 \omega_0^2} (\tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t), \quad (122b)$$

$$h_z^{(3)} = -\frac{\tilde{B} \tilde{\alpha}^2}{\hbar^2 \omega_0^2} - \frac{\tilde{\alpha} \sin \phi}{\hbar \omega_0^2} (\tilde{E}_{ac1} \omega_1 \cos \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \omega_2 \cos \omega_2 t). \quad (122c)$$

Az ötödrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(5)} = h_x^{(5)} \sigma_x + h_y^{(5)} \sigma_y + h_z^{(5)} \sigma_z, \quad (123)$$

ahol az együtthatók:

$$\begin{aligned} h_x^{(5)} = & \frac{\tilde{E}_{ac1} \tilde{\alpha} \omega_1 (\hbar^2 \omega_1^2 - 3\tilde{\alpha}^2) \sin 2\phi}{2\hbar^3 \omega_0^4} \cos \omega_1 t + \frac{\tilde{E}_{ac2} \tilde{\alpha} \omega_2 (\hbar^2 \omega_2^2 - 3\tilde{\alpha}^2) \sin 2\phi}{2\hbar^3 \omega_0^4} \cos \omega_2 t + \\ & + \frac{\tilde{B} \tilde{\alpha} (\tilde{B}^2 - 3\tilde{\alpha}^2) \cos^2 \phi}{\hbar^4 \omega_0^4} (\tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t) + \\ & - \frac{\tilde{B} \tilde{\alpha}^2 \cos \phi \sin^2 \phi}{\hbar^4 \omega_0^4} (\tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t)^2, \end{aligned} \quad (124a)$$

$$\begin{aligned} h_y^{(5)} = & \frac{\tilde{E}_{ac1} \tilde{\alpha} \omega_1 (3\tilde{\alpha}^2 - \hbar^2 \omega_1^2) \cos^2 \phi}{\hbar^3 \omega_0^4} \cos \omega_1 t + \frac{\tilde{E}_{ac2} \tilde{\alpha} \omega_2 (3\tilde{\alpha}^2 - \hbar^2 \omega_2^2) \cos^2 \phi}{\hbar^3 \omega_0^4} \cos \omega_2 t + \\ & + \frac{\tilde{B} \tilde{\alpha} (\tilde{B}^2 - 3\tilde{\alpha}^2) \cos \phi \sin \phi}{\hbar^4 \omega_0^4} (\tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t) + \\ & + \frac{\tilde{B} \tilde{\alpha}^2 \cos^2 \phi \sin \phi}{\hbar^4 \omega_0^4} (\tilde{E}_{ac1} \sin \omega_1 t + \tilde{E}_{ac2} \sin \omega_2 t)^2, \end{aligned} \quad (124b)$$

$$\begin{aligned} h_z^{(5)} = & -\frac{\tilde{B} \tilde{\alpha}^2 (4\tilde{B}^2 + \tilde{E}_{ac1}^2 + \tilde{E}_{ac2}^2 - 16\tilde{\alpha}^2)}{4\hbar^4 \omega_0^4} - \frac{\tilde{B} (\tilde{E}_{ac1}^2 + \tilde{E}_{ac2}^2) \tilde{\alpha}^2 \cos 2\phi}{4\hbar^4 \omega_0^4} + \\ & + \frac{\tilde{B} \tilde{E}_{ac1}^2 \tilde{\alpha}^2 \cos^2 \phi}{2\hbar^4 \omega_0^4} \cos (2\omega_1 t) + \frac{\tilde{B} \tilde{E}_{ac2}^2 \tilde{\alpha}^2 \cos^2 \phi}{2\hbar^4 \omega_0^4} \cos (2\omega_2 t) + \\ & + \frac{\tilde{E}_{ac1} \tilde{\alpha} \omega_1 (3\tilde{\alpha}^2 - \hbar^2 \omega_1^2) \sin \phi}{\hbar^3 \omega_0^4} \cos \omega_1 t + \frac{\tilde{E}_{ac2} \tilde{\alpha} \omega_2 (3\tilde{\alpha}^2 - \hbar^2 \omega_2^2) \sin \phi}{\hbar^3 \omega_0^4} \cos \omega_2 t + \\ & - \frac{2\tilde{B} \tilde{E}_{ac1} \tilde{E}_{ac2} \tilde{\alpha}^2 \cos^2 \phi}{\hbar^4 \omega_0^4} \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (124c)$$

A monokromatikus esethez hasonlóan itt is az effektív Hamilton-operátor segítségével felépítjük a Floquet-mátrixot. Ebben az esetben viszont a Floquet-mátrixon egy másodrendű időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformációt is végre kell hajtani. Ennek az az oka, hogy az ötödrendű Rabi-frekvenciához és Bloch-Siegert eltolódáshoz kétféleképpen kaphatunk járulékokat. Az egyik lehetőség, hogy a Floquet-mátrixban direkt mátrixelemet kapunk a $|00\uparrow\rangle$ és $|11\downarrow\rangle$ állapotok között, ehhez vezetnek az ötödrendű korrekciókban megjelenő $\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$ -vel arányos tagok. Ezek a járulékok így triviálisan, a Floquet-mátrixból elsőrendű Schrieffer-Wolff transzformációval kaphatóak meg.

A másik lehetőség az, hogy a harmadrendű effektív Hamilton-operátor kapcsolja össze közvetetten, a Floquet-mátrixban másodrendben a $|00\uparrow\rangle$ és $|11\downarrow\rangle$ állapotokat, emiatt szükséges a másodrendű időfüggetlen Schrieffer-Wolff transzformáció végrehajtása a Floquet-mátrixon. A Rabi-frekvencia és a Bloch-Siegert eltolódás akkor kapható meg, ha ezeket a különböző járulékokat összeadjuk, és csak az ötödrendű tagokat tartjuk meg (megjelennek hetedrendű és kilencedrendű tagok is a Floquet-mátrix másodrendű transzformációja során, azokat elhanyagoljuk).

A.3. Bikromatikus vezérlés két elektródával

A két elektródával történő vezérlés számolási lépései megegyeznek az egy elektródával történő vezérlésnél használt eljárással, csak az eredmények lesznek különbözőek. Az ötödrendű effektív Hamilton-operátor:

$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)} + \tilde{H}^{(3)} + \tilde{H}^{(4)} + \tilde{H}^{(5)}, \quad (125)$$

ahol $\tilde{H}^{(0)}$, $\tilde{H}^{(2)}$ és $\tilde{H}^{(4)}$ a σ_0 egységoperátorral arányosak. Az elsőrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(1)} = \frac{\tilde{B}}{2}\sigma_z. \quad (126)$$

A harmadrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(3)} = h_x^{(3)}\sigma_x + h_y^{(3)}\sigma_y + h_z^{(3)}\sigma_z, \quad (127)$$

az együtthatók pedig:

$$h_x^{(3)} = \frac{\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\omega_2\sin^2\phi}{\hbar\omega_0^2}\cos\omega_2t + \frac{\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\omega_1\sin 2\phi}{2\hbar\omega_0^2}\cos\omega_1t + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\cos^2\phi}{\hbar^2\omega_0^2}\sin\omega_1t + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\sin 2\phi}{2\hbar^2\omega_0^2}\sin\omega_2t, \quad (128a)$$

$$h_y^{(3)} = -\frac{\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\omega_1\cos^2\phi}{\hbar\omega_0^2}\cos\omega_1t - \frac{\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\omega_2\sin 2\phi}{2\hbar\omega_0^2}\cos\omega_2t + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\sin 2\phi}{2\hbar^2\omega_0^2}\sin\omega_1t + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\sin^2\phi}{\hbar^2\omega_0^2}\sin\omega_2t, \quad (128b)$$

$$h_z^{(3)} = -\frac{\tilde{B}\tilde{\alpha}^2}{\hbar^2\omega_0^2} + \frac{\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\omega_2\cos\phi}{\hbar\omega_0^2}\cos\omega_2t - \frac{\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\omega_1\sin\phi}{\hbar\omega_0^2}\cos\omega_1t. \quad (128c)$$

Az ötödrendű korrekció:

$$\tilde{H}^{(5)} = h_x^{(5)}\sigma_x + h_y^{(5)}\sigma_y + h_z^{(5)}\sigma_z, \quad (129)$$

és az együtthatók:

$$h_x^{(5)} = -\frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}^2\tilde{\alpha}^2\cos\phi\sin^2\phi}{2\hbar^4\omega_0^4} + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}^2\tilde{\alpha}^2\cos\phi\sin^2\phi}{2\hbar^4\omega_0^4} + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}^2\tilde{\alpha}^2\cos\phi\sin^2\phi}{2\hbar^4\omega_0^4}\cos(2\omega_1t) + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}^2\tilde{\alpha}^2\cos\phi\sin^2\phi}{2\hbar^4\omega_0^4}\cos(2\omega_2t) + \frac{\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\omega_2(\hbar^2\omega_2^2 - 3\tilde{\alpha}^2)\sin^2\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\cos\omega_2t + \frac{\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\omega_1(\hbar^2\omega_1^2 - 3\tilde{\alpha}^2)\sin\phi\cos\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\cos\omega_1t + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}(\tilde{B}^2 - 3\tilde{\alpha}^2)\cos^2\phi}{\hbar^4\omega_0^4}\sin\omega_1t +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2\omega_2\cos\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\sin\omega_1t\cos\omega_2t - \frac{3\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2\omega_1\cos\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\sin\omega_2t\cos\omega_1t + \\
& + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}(\tilde{B}^2 - 3\tilde{\alpha}^2)\cos\phi\sin\phi}{\hbar^4\omega_0^4}\sin\omega_2t + \frac{\tilde{B}\tilde{\alpha}^2\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}}{2\hbar^4\omega_0^4}(\sin 3\phi - \sin\phi)\sin\omega_1t\sin\omega_2t,
\end{aligned} \tag{130a}$$

$$\begin{aligned}
h_y^{(5)} = & \frac{\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\omega_1(3\tilde{\alpha}^2 - \hbar^2\omega_1^2)\cos^2\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\cos\omega_1t + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}^2\tilde{\alpha}^2\cos^2\phi\sin\phi}{2\hbar^4\omega_0^4} - \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}^2\tilde{\alpha}^2\cos^2\phi\sin\phi}{2\hbar^4\omega_0^4} + \\
& - \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}^2\tilde{\alpha}^2\cos^2\phi\sin\phi}{2\hbar^4\omega_0^4}\cos(2\omega_1t) + \frac{\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\omega_2(3\tilde{\alpha}^2 - \hbar^2\omega_2^2)\cos\phi\sin\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\cos\omega_2t + \\
& + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}^2\tilde{\alpha}^2\cos^2\phi\sin\phi}{2\hbar^4\omega_0^4}\cos(2\omega_2t) + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}(\tilde{B}^2 - 3\tilde{\alpha}^2)\sin\phi\cos\phi}{\hbar^4\omega_0^4}\sin\omega_1t + \\
& + \frac{3\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2\omega_2\sin\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\sin\omega_1t\cos\omega_2t - \frac{3\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2\omega_1\sin\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\sin\omega_2t\cos\omega_1t + \\
& + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}(\tilde{B}^2 - 3\tilde{\alpha}^2)\sin^2\phi}{\hbar^4\omega_0^4}\sin\omega_2t - \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2(\cos\phi + \cos 3\phi)}{2\hbar^4\omega_0^4}\sin\omega_1t\sin\omega_2t,
\end{aligned} \tag{130b}$$

$$\begin{aligned}
h_z^{(5)} = & - \frac{\tilde{B}\tilde{\alpha}^2(4\tilde{B}^2 + \tilde{E}_{ac1}^2 + \tilde{E}_{ac2}^2 - 16\tilde{\alpha}^2 + \tilde{E}_{ac1}^2\cos 2\phi - \tilde{E}_{ac2}^2\cos 2\phi)}{4\hbar^4\omega_0^4} + \\
& + \frac{\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}\omega_2(\hbar^2\omega_2^2 - 3\tilde{\alpha}^2)\cos\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\cos\omega_2t + \frac{\tilde{E}_{ac1}\tilde{\alpha}\omega_1(3\tilde{\alpha}^2 - \hbar^2\omega_1^2)\sin\phi}{\hbar^3\omega_0^4}\cos\omega_1t + \\
& + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac2}^2\tilde{\alpha}^2\sin^2\phi}{2\hbar^4\omega_0^4}\cos 2\omega_2t - \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}\tilde{E}_{ac2}\tilde{\alpha}^2\sin 2\phi}{\hbar^4\omega_0^4}\sin\omega_1t\sin\omega_2t + \\
& + \frac{\tilde{B}\tilde{E}_{ac1}^2\tilde{\alpha}^2\cos^2\phi}{2\hbar^4\omega_0^4}\cos 2\omega_1t.
\end{aligned} \tag{130c}$$

Hivatkozások

- [1] Alessandro Crippa, Romain Maurand, Léo Bourdet, Dharmraj Kotekar-Patil, Anthony Amissé, Xavier Jehl, Marc Sanquer, Romain Laviéville, Heorhii Bohuslavskyi, Louis Hutin, et al. Electrical spin driving by g-matrix modulation in spin-orbit qubits. *Physical review letters*, 120(13):137702, 2018.
- [2] David Deutsch and Richard Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 439(1907):553–558, 1992.
- [3] Lov K Grover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Physical review letters*, 79(2):325, 1997.
- [4] Peter W Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review*, 41(2):303–332, 1999.
- [5] Hartmut Häffner, Christian F Roos, and Rainer Blatt. Quantum computing with trapped ions. *Physics reports*, 469(4):155–203, 2008.
- [6] Jan Benhelm, Gerhard Kirchmair, Christian F Roos, and Rainer Blatt. Towards fault-tolerant quantum computing with trapped ions. *Nature Physics*, 4(6):463–466, 2008.

- [7] Andreas Wallraff, David I Schuster, Alexandre Blais, Luigi Frunzio, R-S Huang, Johannes Majer, Sameer Kumar, Steven M Girvin, and Robert J Schoelkopf. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature*, 431(7005):162–167, 2004.
- [8] Chad Rigetti, Jay M Gambetta, Stefano Poletto, Britton LT Plourde, Jerry M Chow, Antonio D Córcoles, John A Smolin, Seth T Merkel, Jim R Rozen, George A Keefe, et al. Superconducting qubit in a waveguide cavity with a coherence time approaching 0.1 ms. *Physical Review B*, 86(10):100506, 2012.
- [9] M Veldhorst, JCC Hwang, CH Yang, AW Leenstra, Bob de Ronde, JP Dehollain, JT Muhonen, FE Hudson, Kohei M Itoh, A Morello, et al. An addressable quantum dot qubit with fault-tolerant control-fidelity. *Nature nanotechnology*, 9(12):981–985, 2014.
- [10] TF Watson, SGJ Philips, Erika Kawakami, DR Ward, Pasquale Scarlino, Menno Veldhorst, DE Savage, MG Lagally, Mark Friesen, SN Coppersmith, et al. A programmable two-qubit quantum processor in silicon. *nature*, 555(7698):633–637, 2018.
- [11] Lieven MK Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta, Costantino S Yannoni, Mark H Sherwood, and Isaac L Chuang. Experimental realization of shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 414(6866):883–887, 2001.
- [12] Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C Bardin, Rami Barends, Rupak Biswas, Sergio Boixo, Fernando GSL Brandao, David A Buell, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779):505–510, 2019.
- [13] Youngseok Kim, Andrew Eddins, Sajant Anand, Ken Xuan Wei, Ewout Van Den Berg, Sami Rosenblatt, Hasan Nayfeh, Yantao Wu, Michael Zaletel, Kristan Temme, et al. Evidence for the utility of quantum computing before fault tolerance. *Nature*, 618(7965):500–505, 2023.
- [14] Andrew D King, Alberto Nocera, Marek M Rams, Jacek Dziarmaga, Roeland Wiersema, William Bernoudy, Jack Raymond, Nitin Kaushal, Niclas Heinsdorf, Richard Harris, et al. Computational supremacy in quantum simulation. *arXiv preprint arXiv:2403.00910*, 2024.
- [15] Élie Gouzien and Nicolas Sangouard. Factoring 2048-bit rsa integers in 177 days with 13 436 qubits and a multimode memory. *Physical review letters*, 127(14):140503, 2021.
- [16] Andrew J Daley, Immanuel Bloch, Christian Kokail, Stuart Flannigan, Natalie Pearson, Matthias Troyer, and Peter Zoller. Practical quantum advantage in quantum simulation. *Nature*, 607(7920):667–676, 2022.
- [17] Zhiguang Yan, Yu-Ran Zhang, Ming Gong, Yulin Wu, Yarui Zheng, Shaowei Li, Can Wang, Futian Liang, Jin Lin, Yu Xu, et al. Strongly correlated quantum walks with a 12-qubit superconducting processor. *Science*, 364(6442):753–756, 2019.
- [18] Daniel Jirovec, Philipp M Mutter, Andrea Hofmann, Alessandro Crippa, Marek Rychetsky, David L Craig, Josip Kukucka, Frederico Martins, Andrea Ballabio, Natalia Ares, et al. Dynamics of hole singlet-triplet qubits with large g-factor differences. *Physical Review Letters*, 128(12):126803, 2022.

- [19] NW Hendrickx, WIL Lawrie, L Petit, A Sammak, G Scappucci, and M Veldhorst. A single-hole spin qubit. *Nature communications*, 11(1):3478, 2020.
- [20] NW Hendrickx, DP Franke, A Sammak, G Scappucci, and M Veldhorst. Fast two-qubit logic with holes in germanium. *Nature*, 577(7791):487–491, 2020.
- [21] Nico W Hendrickx, William IL Lawrie, Maximilian Russ, Floor van Riggelen, Sander L de Snoo, Raymond N Schouten, Amir Sammak, Giordano Scappucci, and Menno Veldhorst. A four-qubit germanium quantum processor. *Nature*, 591(7851):580–585, 2021.
- [22] Chien-An Wang, Valentin John, Hanifa Tidjani, Cécile X Yu, Alexander S Ivlev, Corentin Déprez, Floor van Riggelen-Doelman, Benjamin D Woods, Nico W Hendrickx, William IL Lawrie, et al. Operating semiconductor quantum processors with hopping spins. *Science*, 385(6707):447–452, 2024.
- [23] Ian Thorvaldson, Dean Poulos, Christian M Moehle, Saiful H Misha, Hermann Edlbauer, Jonathan Reiner, Helen Geng, Benoit Voisin, Michael T Jones, Matthew B Donnelly, et al. Grover’s algorithm in a four-qubit silicon processor above the fault-tolerant threshold. *arXiv preprint arXiv:2404.08741*, 2024.
- [24] F Van Riggelen, WIL Lawrie, M Russ, NW Hendrickx, A Sammak, M Rispler, BM Terhal, G Scappucci, and M Veldhorst. Phase flip code with semiconductor spin qubits. *npj Quantum Information*, 8(1):124, 2022.
- [25] Kenta Takeda, Akito Noiri, Takashi Nakajima, Takashi Kobayashi, and Seigo Tarucha. Quantum error correction with silicon spin qubits. *Nature*, 608(7924):682–686, 2022.
- [26] Ruoyu Li, Luca Petit, David P Franke, Juan Pablo Dehollain, Jonas Helsen, Mark Steudtner, Nicole K Thomas, Zachary R Yoscovits, Kanwal J Singh, Stephanie Wehner, et al. A crossbar network for silicon quantum dot qubits. *Science advances*, 4(7):eaar3960, 2018.
- [27] JM Taylor, H-A Engel, W Dür, Amnon Yacoby, CM Marcus, P Zoller, and MD Lukin. Fault-tolerant architecture for quantum computation using electrically controlled semiconductor spins. *Nature Physics*, 1(3):177–183, 2005.
- [28] Jelmer M Boter, Juan P Dehollain, Jeroen PG Van Dijk, Yuanxing Xu, Toivo Hensgens, Richard Versluis, Henricus WL Naus, James S Clarke, Menno Veldhorst, Fabio Sebastiano, et al. Spiderweb array: a sparse spin-qubit array. *Physical review applied*, 18(2):024053, 2022.
- [29] Matthias Künne, Alexander Willmes, Max Oberländer, Christian Gorjaew, Julian D Teske, Harsh Bhardwaj, Max Beer, Eugen Kammerloher, René Otten, Inga Seidler, et al. The spinbus architecture for scaling spin qubits with electron shuttling. *Nature Communications*, 15(1):4977, 2024.
- [30] Takafumi Fujita, Timothy Alexander Baart, Christian Reichl, Werner Wegscheider, and Lieven Mark Koenraad Vandersypen. Coherent shuttle of electron-spin states. *npj Quantum Information*, 3(1):22, 2017.

- [31] Floor van Riggelen-Doelman, Chien-An Wang, Sander L de Snoo, William IL Lawrie, Nico W Hendrickx, Maximilian Rimbach-Russ, Amir Sammak, Giordano Scappucci, Corentin Déprez, and Menno Veldhorst. Coherent spin qubit shuttling through germanium quantum dots. *Nature Communications*, 15(1):5716, 2024.
- [32] Maria Spethmann, Stefano Bosco, Andrea Hofmann, Jelena Klinovaja, and Daniel Loss. High-fidelity two-qubit gates of hybrid superconducting-semiconducting singlet-triplet qubits. *Physical Review B*, 109(8):085303, 2024.
- [33] HW Liu, T Fujisawa, Y Ono, H Inokawa, A Fujiwara, Kei Takashina, and Y Hirayama. Pauli-spin-blockade transport through a silicon double quantum dot. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 77(7):073310, 2008.
- [34] Amanda E Seedhouse, Tuomo Tanttu, Ross CC Leon, Ruichen Zhao, Kuan Yen Tan, Bas Hensen, Fay E Hudson, Kohei M Itoh, Jun Yoneda, Chih Hwan Yang, et al. Pauli blockade in silicon quantum dots with spin-orbit control. *PRX quantum*, 2(1):010303, 2021.
- [35] David P DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, 48(9-11):771–783, 2000.
- [36] Julian Kelly, Rami Barends, Austin G Fowler, Anthony Megrant, Evan Jeffrey, Theodore C White, Daniel Sank, Josh Y Mutus, Brooks Campbell, Yu Chen, et al. State preservation by repetitive error detection in a superconducting quantum circuit. *Nature*, 519(7541):66–69, 2015.
- [37] Rajeev Acharya, Laleh Aghababaie-Beni, Igor Aleiner, Trond I Andersen, Markus Ansmann, Frank Arute, Kunal Arya, Abraham Asfaw, Nikita Astrakhantsev, Juan Atalaya, et al. Quantum error correction below the surface code threshold. *arXiv preprint arXiv:2408.13687*, 2024.
- [38] Denis V Bulaev and Daniel Loss. Electric dipole spin resonance for heavy holes in quantum dots. *Physical review letters*, 98(9):097202, 2007.
- [39] Vitaly N Golovach, Massoud Borhani, and Daniel Loss. Electric-dipole-induced spin resonance in quantum dots. *Physical Review B*, 74(16):165319, 2006.
- [40] Yasuhiro Tokura, Wilfred G van der Wiel, Toshiaki Obata, and Seigo Tarucha. Coherent single electron spin control in a slanting Zeeman field. *Physical review letters*, 96(4):047202, 2006.
- [41] Katja C Nowack, FHL Koppens, Yu V Nazarov, and LMK Vandersypen. Coherent control of a single electron spin with electric fields. *Science*, 318(5855):1430–1433, 2007.
- [42] Guido Burkard, Thaddeus D Ladd, Andrew Pan, John M Nichol, and Jason R Petta. Semiconductor spin qubits. *Reviews of Modern Physics*, 95(2):025003, 2023.
- [43] Giordano Scappucci, Christoph Kloeffel, Floris A Zwanenburg, Daniel Loss, Maksym Myronov, Jian-Jun Zhang, Silvano De Franceschi, Georgios Katsaros, and Menno Veldhorst. The germanium quantum information route. *Nature Reviews Materials*, 6(10):926–943, 2021.

- [44] Pablo San-Jose, Burkhard Scharfenberger, Gerd Schön, Alexander Shnirman, and Gergely Zarand. Geometric phases in semiconductor spin qubits: Manipulations and decoherence. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 77(4):045305, 2008.
- [45] Baksa Kolok and András Pályi. Protocols to measure the non-abelian berry phase by pumping a spin qubit through a quantum-dot loop. *Physical Review B*, 109(4):045438, 2024.
- [46] Daniel Loss and David P DiVincenzo. Quantum computation with quantum dots. *Physical Review A*, 57(1):120, 1998.
- [47] Benjamin Venitucci, Léo Bourdet, Daniel Pouzada, and Yann-Michel Niquet. Electrical manipulation of semiconductor spin qubits within the g-matrix formalism. *Physical Review B*, 98(15):155319, 2018.
- [48] SD Liles, Frederico Martins, DS Miserev, AA Kiselev, ID Thorvaldson, MJ Rendell, IK Jin, FE Hudson, Menno Veldhorst, KM Itoh, et al. Electrical control of the g tensor of the first hole in a silicon mos quantum dot. *Physical Review B*, 104(23):235303, 2021.
- [49] NW Hendrickx, L Massai, M Mergenthaler, FJ Schupp, S Paredes, SW Bedell, G Sallis, and A Fuhrer. Sweet-spot operation of a germanium hole spin qubit with highly anisotropic noise sensitivity. *Nature Materials*, pages 1–8, 2024.
- [50] Zoltán György, András Pályi, and Gábor Széchenyi. Electrically driven spin resonance with bichromatic driving. *Physical Review B*, 106(15):155412, 2022.
- [51] Valentin John, Francesco Borsoi, Zoltán György, Chien-An Wang, Gábor Széchenyi, Floor van Riggelen-Doelman, William IL Lawrie, Nico W Hendrickx, Amir Sammak, Giordano Scappucci, et al. Bichromatic rabi control of semiconductor qubits. *Physical review letters*, 132(6):067001, 2024.
- [52] Jon H Shirley. Solution of the schrödinger equation with a hamiltonian periodic in time. *Physical Review*, 138(4B):B979, 1965.
- [53] Tak-San Ho, Shih-I Chu, and James V Tietz. Semiclassical many-mode floquet theory. *Chemical Physics Letters*, 96(4):464–471, 1983.
- [54] John R Schrieffer and Peter A Wolff. Relation between the anderson and kondo hamiltonians. *Physical Review*, 149(2):491, 1966.
- [55] R Winkler, S Papadakis, E De Poortere, and M Shayegan. *Spin-orbit coupling in two-dimensional electron and hole systems*, volume 41. Springer, 2003.
- [56] Judit Romhányi, Guido Burkard, and András Pályi. Subharmonic transitions and bloch-siegert shift in electrically driven spin resonance. *Physical Review B*, 92(5):054422, 2015.
- [57] F Bloch and A Siegert. Magnetic resonance for nonrotating fields. *Physical Review*, 57(6):522, 1940.
- [58] Michael Victor Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.

- [59] Frank Wilczek and Anthony Zee. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Physical Review Letters*, 52(24):2111, 1984.