

Nemlineáris kvantumprotokollok vizsgálata

Tudományos Diákköri Konferencia Dolgozat

Kinyó András

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizika BSc III. évfolyam



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
UNIVERSITY

**HUN
REN**



Témavezetők:

Dr. Kálmán Orsolya

tudományos főmunkatárs

HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont

kalman.orsolya@wigner.hu

Portik Attila

PhD hallgató

ELTE Fizika Doktori Iskola

tudományos segédmunkatárs

HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont

portik.attila@wigner.hu

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Budapest
2024

Tartalomjegyzék

Kivonat	3
1. Bevezetés	4
2. A kvantumbit paraméterezései	5
2.1. A Riemann-féle paraméterezés	5
2.2. Sűrűségmátrix, u, v, w -reprezentáció	5
2.3. Qubitállapotok tisztasága	6
2.4. A Bloch-gömb, sztereografikus leképezés	6
3. A vizsgált protokoll bemutatása	7
3.1. Tiszta állapotok	8
3.2. Kevert állapotok	10
3.3. A $p \in \mathbb{R}$ eset	11
3.4. A kétféle dinamika megfeleltetése	11
4. A komplex (tisza) dinamika vizsgálata	13
4.1. A dinamikai rendszerekről általában	13
4.1.1. Komplex, diszkrét idejű dinamika	13
4.1.2. Diszkrét idejű dinamika $\mathbb{R}^3$ -ban	13
4.2. Fixpontok száma	14
4.3. A Julia-halmaz	15
4.4. A Julia-halmaz pontjainak meghatározása direkt módszerrel	16
4.5. A Julia-halmaz pontjainak meghatározása visszaiterálással	16
5. A kevert dinamika, az invariáns sík vizsgálata	18
5.1. A dinamika vizsgálata az invariáns síkon, két vonzó tiszta fixpont esetén	18
5.2. A dinamika vizsgálata az invariáns síkon, egy vonzó tiszta fixpont esetén	19
5.3. A dinamika tulajdonságai $p > p_3$ paraméterek mellett	22
6. Vonzástartományok vizsgálata az invariáns síkon	24
6.1. Vonzástartományok kettő vonzó fixpont esetén	24
6.2. Taszító fixpontok vonzástartományának vizsgálata	24
6.3. Vonzástartományok kettő vagy három taszító fixpont esetén	26
6.4. Az invariáns sík vizsgálata: összefoglalás	28
7. A dinamika vizsgálata a teljes Bloch-gömbben	29
8. Összefoglalás és kitekintés	31
9. Köszönetnyilvánítás	31
A. Függelék: a kétféle dinamika megfeleltetése - bizonyítás	32
Hivatkozások	34

Kivonat

A kapualapú kvantumszámítógépek kvázispinállapotokkal, úgynevezett qubitekkel operálnak. Az egyes algoritmusok futtatásához a qubitek pontos állapotának ismerete elengedhetetlen, azonban a legtöbb fizikai kvantumprocesszor esetében a qubit-preparáció nagymértékben hibával terhelt.

A kvantuminformatikában a qubitek időfejlődése unitér operátorokkal írható le, így alapesetben lineáris. Megmutatható, hogy ha két azonos qubitre hattatunk egy "Controlled NOT" kaput (ez a kvantumállapotok között összefonódást hoz létre), majd az egyik állapotot megmérjük, és a mérési eredmény függvényében a másik qubitet megtartjuk, utóbbi időfejlődése összességében nemlineáris lesz. Ha a qubiteket ún. Riemann-paraméterezéssel reprezentáljuk (egyetlen komplex számmal), ez az időfejlődés egy komplex racionális törtfüggvénnyel írható le. A fent leírt műveletet iterálva, a megjelenő komplex dinamika érdekes tulajdonságokat mutat, például bizonyos tartományokon kaotikus viselkedést, illetve vonzó vagy taszító fixpontokat.

Kutatásomban az ilyen típusú protokollok egy osztályát vizsgáltam, melyben az összefonás, mérés és poszt-selekció után egy valós paramétertől függő operátor hat a megtartott qubitre. A bemeneti állapotokat sűrűségoperátorokkal ábrázoltam - így igen általánosan modellezve a preparációs zajt. A sűrűségoperátorokat három valós számmal feleltethetjük meg, így itt egy komplex függvény helyett egy $\mathbb{R}^3$ -beli leképezés generálja a dinamikát.

Fő motivációm az volt, hogy egy olyan paraméterhalmazt találjak, mely mellett a dinamikának egyetlen vonzó, tiszta állapotnak megfelelő fixpontja van, így az ezen paraméterekhez tartozó protokollok lehetőséget adnak a kevert állapotok "desztillációjára", vagyis a preparációs zaj szűrésére.

A fent leírt dinamikát numerikus és analitikus eszközökkel vizsgáltam, köztük olyan megközelítésekkel, melyeket eddig még nem használtak a szakirodalomban. A Bloch-gömb egészére vonatkozó leképezés összes fixpontját meghatároztam. A fixpontok különböző osztályokba sorolhatóak aszerint, hogy a környezetükben levő pontok hogyan viselkednek. Ez alapján a paramétertartományban meg tudtam különböztetni olyan részeket, amelyekre vonatkozóan a leképezésnek kettő vagy egy vonzó fixpontja, illetve egy vonzó, két hosszú ciklusa van. A fixpontok vonzástartományát numerikusan meghatároztam, és találtam a paramétertartományon olyan intervallumot, melyre nézve a leképezésnek egyetlen vonzó fixpontja van, vonzástartománya pedig a teljes Bloch-gömb. Ezt azt jelenti, hogy ilyen paraméter mellett a protokoll potenciálisan alkalmas lehet arra, hogy tetszőleg mértékű kezdeti zaj esetén is kitisztítsa a bemeneti qubit állapotát.

Konstruáltam egy módszert annak vizsgálatára, hogy a tiszta állapotok között minden irányból taszító fixpontoknak lehet-e vonzó sajátiránya a kevert állapotokra vonatkozóan. Ez a módszer hasznos eszközt jelent a különböző dinamikák vizsgálata során arra vonatkozóan, hogy a kaotikus állapotok kevert előképeit meghatározhatjuk.

1. Bevezetés

A kvantuminformatika napjainkban fontos kutatási terület, mely amellett, hogy a kvantummechanika alapvető sajátosságainak (például szuperpozíció, összefonódás, mérés) mélyebb megértéséhez vezethet, a jövőben technikai alkalmazásokra is lehetőséget adhat.

A terület egyik nagy ága az ún. kapualapú kvantumszámítógépekkel foglalkozik. Ezek olyan eszközök, melyek kvantumbitekkel (qubitekkel) operálnak. A különböző kvantumos algoritmusok megfelelő működésének sok alapvető feltétele van, ilyen például a qubitek megfelelő preparációja, a különböző zajforrások csökkentése, a kvantumbitek közötti megfelelő összeköttetés, stb. A felsorolt feltételek egy fizikai kvantumprocesszor esetében tipikusan nem tökéletesek; így a kvantumalgoritmusok eredménye zajjal terhelt [1]. Ennek vizsgálatára alkalmasak az ún. benchmark algoritmusok, melyekkel beazonosíthatóak a hibaforrások, és általában számszerűsíthető a kvantumprocesszorok teljesítőképessége.

Mára sokféle benchmark protokoll létezik, egyesek célja a kvantumszámítógépek működésének minél általánosabb jellemzése (valamilyen módon átlagolva a különböző hibaforrások járulékait) [2; 3; 4]; míg mások a processzorokat alkotó komponensek (qubitek preparálása, a chip topológiája, a kvantumkapuk pontossága [5]) valamelyikét vizsgálják részletesebben. A benchmarkolás tágabb értelemben vett célja, hogy visszajelzést adjon arra vonatkozóan, hogy az adott hardver milyen további fejlesztésre, tökéletesítésre szorul. Ugyanakkor a fizikai rendszer továbbfejlesztésén túl, érdemes lehet olyan algoritmikus megoldásokat is kidolgozni, amelyek a hibák hatását képesek lehetnek kiküszöbölni [6].

Kutatásomban kvantumprotokollok egy olyan osztályával foglalkoztam, mely megfelelően hangolva alkalmassá tehető a qubitpreparációs hibák csökkentésére.

A preparációs zajt modellezhetjük úgy, hogy tiszta kvantumállapotok helyett kevert állapotokat veszünk a bemeneti regiszteren. Célunk egy olyan protokoll kifejlesztése, mely széles tartományon képes a preparációs zaj eliminálására. Erre lehetőséget ad, ha egy megfelelő műveletet iterálva a regiszteren lévő állapotok tisztaságát fokozatosan növeljük. Másrészt az eljárásunk arra is alkalmas lehet, hogy tesztelje a kvantumszámítógép alapvető műveleteinek pontosságát, hiszen az alkalmazott unitér műveletek, valamint áramkörközi mérések tökéletességétől nagyban függ az eredmény.

Az általam vizsgált algoritmus méréshez kötött posztszelekció segítségével nemlineáris időfejlődést generál a bemeneti állapotokon (így a hagyományos lineáris dinamikától egészen eltérő viselkedést eredményez) [7; 8; 9; 10; 11]. Ezt a dinamikát igyekeztem minél jobban feltérképezni, numerikus és analitikus módszerek segítségével. A fent említett művelet tartalmaz egy unitér forgatást, melyet egy valós számmal paraméterezhetünk, ezt változtatva hangolhatjuk a protokollt.

Dolgozatom fő motivációja egy olyan paraméter - vagy paraméterhalmaz - megtalálása, melyhez tartozó dinamika a bemenetre érkező kevert kvantumállapotok (sűrűségoperátorok) minél nagyobb részét - elegendő iteráció után - tiszta állapotokba transzformálja. Egy ilyen, jól finomhangolt protokoll izgalmas alkalmazásokkal rendelkezhet a kvantumállapot-preparáció és a kvantumos benchmarkok területén.

2. A kvantumbit paraméterezései

2.1. A Riemann-féle paraméterezés

A kapualapú kvantumszámítógépek úgynevezett qubitekkel operálnak. Ezek olyan fizikai rendszerek, melyeknek van két, egymástól és a többbitől jól elkülöníthető állapota. Egy kvantumbit konkrét fizikai realizációja lehet például egy foton, kétféle polarizációval, egy csapdázott ion, két jól beazonosítható energiaszinttel, szupravezető transzmon, stb.

Ezeket az állapotokat szokás $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ -el jelölni, melyek - mivel valamely fizikai mennyiség Hermitikus operátorának sajátvektorai - ortonormáltak: $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. A $|0\rangle, |1\rangle$ állapotok a $\mathcal{H}^{(2)}$ kétdimenziós komplex Hilbert-téren bázist alkotnak (ún. számítási bázis), így a kétállapotú rendszer minden állapota előáll a következő lineárkombinációként:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

A Hilbert-teret faktorizáljuk, úgy, hogy két állapotot ekvivalensnek tekintünk, ha egyik a másiknak számszorosa: $|\psi_1\rangle \equiv \lambda |\psi_2\rangle$. Ez azért hasznos, mert az "azonos irányú", vagyis azonos Hilbert-térbeli sugárban lévő vektorok egyazon fizikai állapotnak felelnek meg. A valószínűségi értelmezés miatt az állapotvektorokat egységnyire normáljuk, vagyis a fenti jelöléssel:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.2)$$

Mindezek alapján (2.1) átírható az alábbi módon:

$$|\psi\rangle = \alpha \cdot \left(|0\rangle + \frac{\beta}{\alpha} |1\rangle \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \cdot (1 |0\rangle + z |1\rangle). \quad (2.3)$$

Vagyis a $|\psi\rangle$ állapotot egyértelműen megfeleltethetjük egy $z = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{C}^\infty$ komplex számnak ($\mathbb{C}^\infty$ a komplex számtest lezártja, az úgynevezett Riemann-gömb, mely a komplex számok mellett tartalmazza a ∞ szimbólumot, az algebrai alapműveletek kiterjesztésével a végtelenre nézve). Ezt nevezzük Riemann-féle paraméterezésnek.

2.2. Sűrűségmátrix, u, v, w -reprezentáció

Vannak olyan esetek, amikor nem ismerjük bizonyosan egy qubit állapotát, csak azt tudjuk megmondani, hogy bizonyos állapotokban milyen valószínűséggel található. Ilyenkor a $|\psi_k\rangle$ állapotokból és a hozzájuk tartozó p_k valószínűségekből elkészíthetjük az ún. sűrűségoperátort, mely minden információt tartalmaz a qubitról:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (2.4)$$

Mivel a p_k valószínűségek összege 1, ezért $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$ (minden bázisban), valamint $\hat{\rho}$ önadjungált.

Belátható, hogy kétállapotú rendszer esetén bármilyen sűrűségoperátor felírható az identitás és a három Pauli-mátrix lineárkombinációjaként:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.5)$$

ahol $\alpha = (u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3$ és $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^T$. Komponensenként kiírva a mátrixelemeket:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -iv \\ iv & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+w & u-iv \\ u+iv & 1-w \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Ily módon egy tetszőleges sűrűségmátrixot megfeleltethetünk egy $\mathbb{R}^3$ -beli vektornak, ezt nevezzük u, v, w -paraméterezésnek. Fontos, hogy mivel a sűrűségoperátor pozitív szemidefinit, ezért $\|\alpha\| \leq 1$, azaz $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. Tehát a fizikailag értelmes állapotok az origó körüli egységgömbben (és annak felszínén) reprezentálhatóak.

2.3. Qubitállapotok tisztasága

Gyakran használt fogalom a qubitállapotok tisztasága, melyet a következőképpen definiálhatunk:

$$P = \frac{1 + u^2 + v^2 + w^2}{2} = \text{Tr } \hat{\rho}^2, \quad (2.7)$$

vagyis minél közelebb van egy pont az origóhoz, annál kisebb a tisztasága, és fordítva. A tiszta állapotok (azaz olyan állapotok, melyek $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ alakúak) esetén $P = 1$; a teljesen kevert állapotra pedig $P = 1/2$.

2.4. A Bloch-gömb, sztereografikus leképezés

A sűrűségmátrixok 2.2. bekezdésben bevezetett paraméterezéséhez sokszor hasznos geometriai képet is rendelni. Erre alkalmas a Bloch-gömb, mely egy egységgömb a háromdimenziós térben:

$$S^2 = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 : \|\alpha\| \leq 1\}. \quad (2.8)$$

A tiszta qubitállapotok a Bloch-gömb felszínén helyezkednek el, érdemes őket polárkoordinátákkal megadni:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle. \quad (2.9)$$

Ennek segítségével egyszerűen beazonosíthatjuk a Bloch-gömb legfontosabb pontjait: z irányú pólusai felelnek meg a bázisállapotoknak, x és y irányban pedig rendre a $\hat{\sigma}_x$ és $\hat{\sigma}_y$ Pauli-mátrixok sajátállapotok találhatók (ld. 1. ábra).

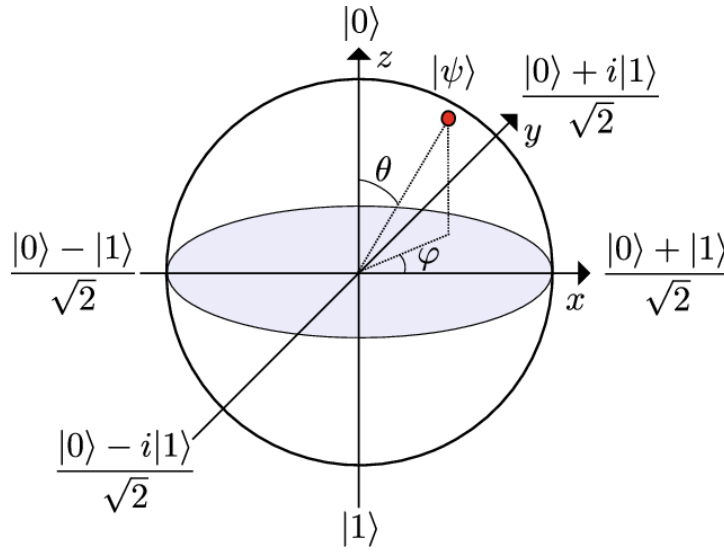
Könnyű ellenőrizni, hogy a tiszta állapotokból képzett $|\psi\rangle\langle\psi|$ diádok az u, v, w paraméterezéssel ugyanoda kerülnek, mint a (2.9) egyenletben definiált polárkoordináták szerint, vagyis a kevert állapotok természetes módon beágyazhatóak a Bloch-gömbbe.

Emellett a Riemann-féle paraméterezésnek is igen szemléletes geometriai jelentése van. A Bloch-gömbbeli polárkoordinátákkal (2.3) átírható az alábbi módon:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) (|0\rangle + \tan(\theta/2)e^{i\phi} |1\rangle), \quad (2.10)$$

ebből az állapotot reprezentáló $z \in \hat{\mathbb{C}}$ is felírható polárkoordinátákkal:

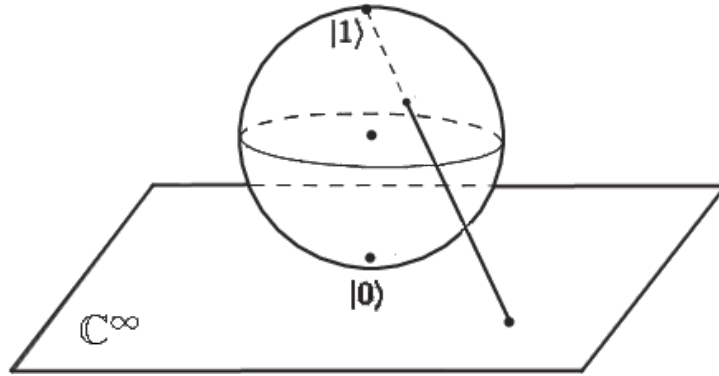
$$z = \tan(\theta/2) \cos \phi + i \tan(\theta/2) \sin \phi \equiv a + ib. \quad (2.11)$$


 1. ábra. A Bloch-gömb ábrázolása, és a Pauli-mátrixok sajátállapotai. [\[forrás\]](#)

Ezt a Bloch-gömbre egy ún. sztereografikus leképezéssel vihetjük át:

$$u = \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \quad v = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \quad w = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}. \quad (2.12)$$

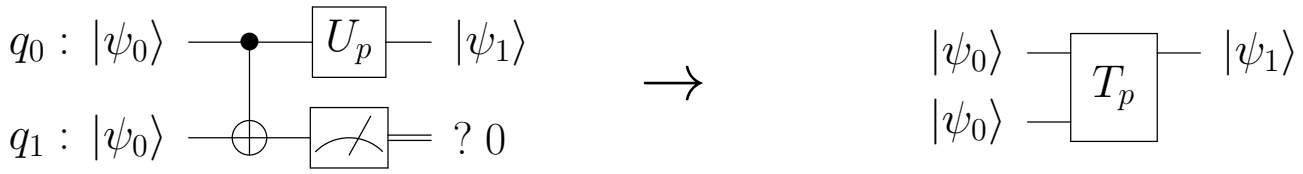
Ennek geometriai jelentése a következő: a Bloch-gömb $u = 1, v = w = 0$ pontjában vegyünk egy érintőt. Az érintési ponttal átellenes (azaz az $u = -1, v = w = 0$) pontból elindítva egy félegyenest, ez kimetsz egy pontot a gömbből és a síkból (ld. 2. ábra). Ezt a két pontot feleltetjük meg egymásnak, melyet éppen a (2.12) egyenletek írnak le.


 2. ábra. A sztereografikus leképezés szemléltetése. [\[forrás\]](#)

3. A vizsgált protokoll bemutatása

Az általam vizsgált kvantumprotokoll egy lépése egy kétbites kvantumáramkörön alapul. Vegyünk két, azonos állapotban lévő qubitet. Ezekre haddassuk a 3. ábrán látható áramkört. Ez a következő műveleteket tartalmazza: először egy CNOT kapuval összefonódást hozunk létre a két qubit között. Ezután a második qubitet megmérjük. Ha a mérési eredmény 0, az első qubitre haddajuk az $\hat{U}_p$ operátort, mely a következő alakú:

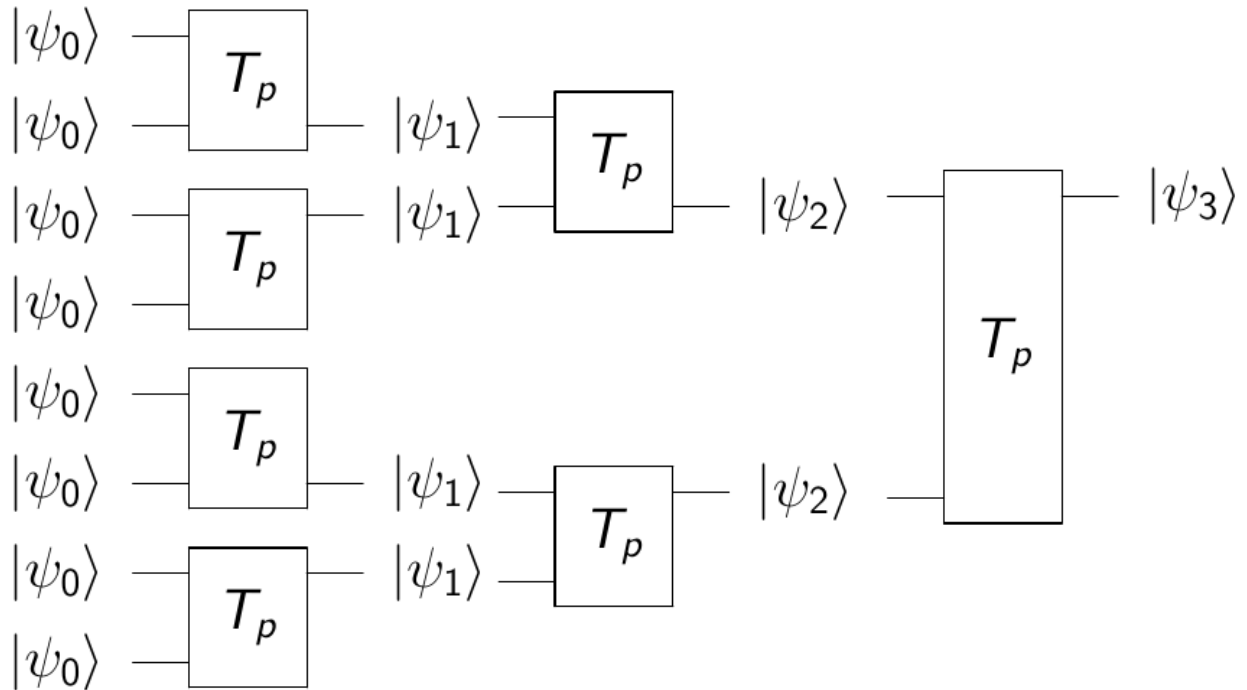
$$\hat{U}_p = \frac{1}{\sqrt{1 + |p|^2}} \begin{pmatrix} 1 & p \\ -\bar{p} & 1 \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$



3. ábra. A protokoll alapjául szolgáló két qubites áramkör. A bemeneti regiszter két azonosan preparált qubitet tartalmaz, jelöljük őket $|\psi_0\rangle$ -val. Ezekre hattatunk egy CNOT kaput, mellyel összefonódást hozunk létre, majd a második qubitet megmérjük. A mérés eredményétől függően az első qubitet (q_0) vagy eldobjuk, vagy hattatunk rá egy egyqubites unitér operátort. Az ábra jobb oldalán látható az iterációs lépés áramkörére bevezetett egyszerűsítő jelölés.

Az áramkör kimenetén egy kvantumbit és egy klasszikus bit lesz. Ha a klasszikus bit értéke 1, a kvantumbit eldobjuk, ellenkező esetben pedig megtartjuk, nevezzük ezt az állapotot $|\psi_1\rangle$ -nek.

Tegyük fel, hogy két regiszteren futtatjuk le ezt az áramkört, és mindkettő kimenetén a $(0, |\psi_1\rangle)$ bit-qubit párt kapjuk. Ekkor a két $|\psi_1\rangle$ állapotot újra futtathatjuk az áramkört. Így a protokoll iterálható lesz, ideális esetben (ha mindig 0-t kapunk a klasszikus biten) 2^n darab azonosan preparált qubiten n iteráció végezhető el. Ezt szemlélteti a 4. ábra.



4. ábra. Három iterációs lépés áramköri rajza. A T_p műveletek a 3. ábrán bevezetett módon értendők.

3.1. Tiszta állapotok

Számoljuk ki, hogy egy tetszőleges $|\psi_0\rangle$ állapot milyen $|\psi_1\rangle$ állapotba kerül egy iteráció után! Ehhez érdemes a kvantumbiteket az ún. Riemann-féle paraméterezésben reprezentálni (ld. 2. fejezet). Legyen a kiindulási

állapotunk

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

módon a $z \in \mathbb{C}^\infty$ komplex számmal jellemezve.

A kétqubites regiszter állapotát a qubitállapotok tenzorszorzataként kapjuk:

$$|\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle = \frac{1}{1+|z|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z \\ z^2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Erre hat a CNOT kapu, ezt a következőképpen írhatjuk:

$$\hat{U}_{\text{CNOT}}(|\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle) = |\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle = \frac{1}{1+|z|^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z \\ z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+|z|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Ezután megmérjük a második qubitet. Ha 0 az eredmény, az első qubit a mérés után a következő állapotban lesz:

$$(\mathbb{1} \otimes \langle 0|) \hat{U}_{\text{CNOT}}(|\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^4}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

(A mérés után az állapotot újrannormáltuk.)

Erre az állapotra hat végül a (3.1) egyenletben definiált operátor:

$$|\psi_1\rangle = \hat{U}_p \left[(\mathbb{1} \otimes \langle 0|) \hat{U}_{\text{CNOT}}(|\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle) \right] = \frac{1}{|z|^2 \cdot \sqrt{1+|p|^2}} \begin{pmatrix} 1+pz^2 \\ z^2-\bar{p} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Írjuk fel a $|\psi_1\rangle$ állapotot is Riemann-reprezentációban:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \end{pmatrix}, \quad f(z) = \frac{z^2-\bar{p}}{1+pz^2}. \quad (3.7)$$

Azt kaptuk, hogy ha a protokoll során előforduló állapotokat a Riemann-paraméterezéssel követjük le, egy iterációt egy komplex racionális törtfüggvény, az időfejlődést pedig egyszerűen ennek önmagával vett kompozíciói írják le:

$$z_0 \rightarrow f(z_0) = z_1 \rightarrow (f \circ f)(z_0) = z_2 \rightarrow \dots \rightarrow f^{\text{on}}(z_0) = z_n,$$

Azaz

$$z_n = f^{\text{on}}(z_0). \quad (3.8)$$

Az ezekhez tartozó állapotok pedig:

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|f^{\text{on}}(z)|^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f^{\text{on}}(z) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

3.2. Kevert állapotok

Ezt és más, ehhez hasonló protokollokat sokan és sokféleképpen vizsgáltak tiszta állapotok esetén. Érdekes azonban megnézni, mi történik, ha a fent bemutatott protokoll bemeneti regiszterén nem tiszta állapotban lévő qubiteket preparálunk, hanem valamilyen sűrűségoperátorral jellemzett kevert állapotokat. Tudjuk, hogy a sűrűségoperátorok hermitikusak és nyomuk 1. Belátható, hogy 2 dimenzióban bármely ilyen mátrix előáll az identitás és a három Pauli-mátrix lineárkombinációjaként:

$$\hat{\rho} = \mathbb{1} + u\hat{\sigma}_x + v\hat{\sigma}_y + w\hat{\sigma}_z = \mathbb{1} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.10)$$

Ezt mátrixos alakban is írhatjuk:

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+w & u-iv \\ u+iv & 1-w \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Ha a bemeneti regiszteren két azonos sűrűségoperátort preparálunk, az együttes állapotuk a két sűrűségoperátor tenzorszorzata, mely mátrixos alakban a Kronecker-szorzatuknak felel meg:

$$\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\rho}_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+w)^2 & (1+w)(u-iv) & (1+w)(u-iv) & (u-iv)^2 \\ (1+w)(u+iv) & 1-w^2 & u^2+v^2 & (1-w)(u-iv) \\ (1+w)(u+iv) & u^2+v^2 & 1-w^2 & (1-w)(u-iv) \\ (u+iv)^2 & (1-w)(u+iv) & (1-w)(u+iv) & (1-w)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

A CNOT kapu hatása:

$$\hat{U}_{\text{CNOT}}(\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\rho}_0)\hat{U}_{\text{CNOT}}^\dagger. \quad (3.13)$$

A mérés és a posztszelekció az állapotok terén a következő műveletnek felel meg:

$$(\mathbb{1} \otimes \langle 0|) \left[\hat{U}_{\text{CNOT}}(\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\rho}_0)\hat{U}_{\text{CNOT}}^\dagger \right] (\mathbb{1} \otimes |0\rangle) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+w)^2 & (u-iv)^2 \\ (u+iv)^2 & (1-w)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Látható, hogy itt is megjelent a nemlinearitás, hasonlóan a tiszta állapotok esetéhez. Ezután már csak a paraméteres $\hat{U}_p$ forgatás van hátra:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_1 &= \hat{U}_p \left\{ (\mathbb{1} \otimes \langle 0|) \left[\hat{U}_{\text{CNOT}}(\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\rho}_0)\hat{U}_{\text{CNOT}}^\dagger \right] (\mathbb{1} \otimes |0\rangle) \right\} \hat{U}_p^\dagger = \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+w^2)(1+|p|^2) + 2w(1-|p|^2) + & (1-p^2)(u^2-v^2) - 4pw \\ +2(u^2-v^2)\text{Re}(p) - 4uv\text{Im}(p) & -2uv(1+p^2)i \\ (1-\bar{p}^2)(u^2-v^2) - 4\bar{p}w & (1+w^2)(1+|p|^2) - 2w(1-|p|^2) \\ +2uv(1+\bar{p}^2)i & -2(u^2-v^2)\text{Re}(p) + 4uv\text{Im}(p) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Megmutatható, hogy a kapott eredmény megfelel egy sűrűségmátrixszal szemben támasztott minden követelménynek, a normálástól eltekintve. Osszuk el tehát a nyomával:

$$\text{Tr } \hat{\rho}'_1 = (1+w^2)(1+|p|^2). \quad (3.16)$$

A normálás után $\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\rho}'_1}{\text{Tr } \hat{\rho}'_1}$ szintén paraméterezhető (3.11) szerint. Ez három egyenletet jelent, vagyis

megadhatjuk a $\hat{\rho}_1$ -hez tartozó u, v, w paramétereiket:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{W} & \mathcal{U} - i\mathcal{V} \\ \mathcal{U} + i\mathcal{V} & 1 - \mathcal{W} \end{bmatrix} \implies \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} [\hat{\rho}_1]_{11} - [\hat{\rho}_1]_{22} = \mathcal{W} \implies \mathcal{W} = \frac{2w(1 - |p|^2) + 2(u^2 - v^2) \operatorname{Re}(p) - 4uv \operatorname{Im}(p)}{(1 + w^2)(1 + |p|^2)}, \end{cases} \quad (3.18.a)$$

$$\begin{cases} [\hat{\rho}_1]_{12} + [\hat{\rho}_1]_{21} = \mathcal{U} \implies \mathcal{U} = \frac{(u^2 - v^2) \operatorname{Re}(1 - p^2) + 2uv \operatorname{Im}(1 + p^2) - 4w \operatorname{Re}(p)}{(1 + w^2)(1 + |p|^2)}, \end{cases} \quad (3.18.b)$$

$$\begin{cases} [\hat{\rho}_1]_{12} - [\hat{\rho}_1]_{21} = -i\mathcal{V} \implies \mathcal{V} = \frac{-(u^2 - v^2) \operatorname{Im}(1 - p^2) + 4w \operatorname{Im}(p) + 2uv \operatorname{Re}(1 + p^2)}{(1 + w^2)(1 + |p|^2)}. \end{cases} \quad (3.18.c)$$

3.3. A $p \in \mathbb{R}$ eset

A fent levezetett transzformációs szabály igen bonyolult, és - mint azt látni fogjuk - ennek speciális esete is elég érdekes és változatos dinamikákat tud generálni. Foglalkozzunk tehát a $p \in \mathbb{R}$ esettel, amikor a transzformációs formulák a következőképpen egyszerűsödnek:

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \frac{(u^2 - v^2)(1 - p^2) - 4wp}{(1 + w^2)(1 + p^2)}, \end{cases} \quad (3.19.a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \frac{2uv}{1 + w^2}, \end{cases} \quad (3.19.b)$$

$$\begin{cases} \mathcal{W} = \frac{2w(1 - p^2) + 2(u^2 - v^2)p}{(1 + w^2)(1 + p^2)}. \end{cases} \quad (3.19.c)$$

Ebben az esetben tehát egy iteráció a fenti leképezést hajtja végre. Vezessük be a következő jelölést:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{U}(u, v, w) \\ \mathcal{V}(u, v, w) \\ \mathcal{W}(u, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathcal{V}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathcal{W}(\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}). \quad (3.20)$$

Vagyis a protokoll vezérelte időfejlődést a paramétertéren a következő dinamika írja le:

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{F}^{\text{on}}(\boldsymbol{\alpha}_0). \quad (3.21)$$

3.4. A kétféle dinamika megfeleltetése

Láthattuk, hogy a tiszta állapotokon (3.8) szerint, míg a kevert állapotok esetében (3.21) szerint folyik az időfejlődés. Azt is tudjuk, hogy a tiszta állapotok is reprezentálhatóak sűrűségoperátorként, az önmagukkal

vett diádjukkal:

$$\hat{\rho}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (3.22)$$

A sűrűségoperátorokkal vett protokoll vizsgálatakor fontos, hogy az egyes eredményeket ellenőrizni tudjuk a tiszta állapotok határesetében, így kézenfekvő, hogy szeretnénk egy leképezést a két paraméterter, vagyis $\mathbb{C}^\infty$ és $\mathbb{R}^3$ között, "dinamikatartó" módon, vagyis a következő megszorításokkal:

- $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \mapsto z_{|\psi\rangle} \in \mathbb{C}^\infty$,
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \mapsto \hat{\rho}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle \langle \psi| \in \text{Lin}\mathcal{H} \mapsto \alpha_{|\psi\rangle} \in \mathbb{R}^3$,
- $z_{|\psi\rangle} \mapsto \mathbf{t}[z_{|\psi\rangle}] = \alpha_{|\psi\rangle} : \quad \mathbf{t}[f(z_{|\psi\rangle})] = \mathbf{F}(\mathbf{t}[z_{|\psi\rangle}])$.

Számoljuk ki, hogy a $\hat{\rho}_{|\psi\rangle}$ sűrűségoperátorhoz milyen $\alpha_{|\psi\rangle}$ számhármast tartozik:

$$|\psi\rangle \langle \psi| = \frac{1}{1+|z|^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & |z|^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+w & u-iv \\ u+iv & 1-w \end{pmatrix} \implies \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_z = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \end{array} \right. \quad (3.24.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z = \frac{-i(z - \bar{z})}{1 + |z|^2}, \end{array} \right. \quad (3.24.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_z = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}. \end{array} \right. \quad (3.24.c)$$

Belátható, hogy a fenti egyenletekkel definiált $\mathbf{t} : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény valóban dinamikatartó, azaz:

$$\mathbf{t}[f(z)] = \mathbf{F}(\mathbf{t}[z]) \quad (3.25)$$

teljesül minden $z \in \mathbb{C}^\infty$ -re. Ennek bizonyítása megtalálható az A. függelékben. Innen valóban következik (teljes indukcióval), hogy az f függvényt iterálva, majd a $\mathbf{t}$ leképezéssel áttérve az u, v, w térbe, ugyanazt kapjuk, mint az $\mathbf{F}$ függvényt iterálva a kezdeti z paraméter képére:

$$\mathbf{F}^{on}(\mathbf{t}[z]) = \mathbf{t}[f^{on}(z)]. \quad (3.26)$$

Valamint egy másik fontos következmény, hogy a két dinamika fixpontjai is megegyeznek; vagyis ha z_f fixpontja f -nek, akkor $\mathbf{t}[z_f]$ is fixpontja $\mathbf{F}$ -nek, mert:

$$f(z_f) = z_f \implies \mathbf{F}(\mathbf{t}[z_f]) = \mathbf{t}[f(z_f)] = \mathbf{t}[z_f]. \quad (3.27)$$

Ezeket az eredményeket a későbbiekben igen sokszor felhasználjuk.

Azt mondhatjuk tehát, hogy a kevert állapotokra vonatkozó dinamika egy természetes kiterjesztése a tiszta állapotokra vonatkozó dinamikának; vagyis $\mathbf{F}$ ugyanúgy mozgatja a pontokat a Bloch-gömb felszínén, mint f .

4. A komplex (tisztá) dinamika vizsgálata

4.1. A dinamikai rendszerekről általában

Kutatásom központi részét képezi a diszkrét idejű dinamikus rendszerek vizsgálata. Egy dinamikai rendszer egy állapottérből (a rendszer lehetséges állapotainak halmaza, S), a megengedett időpontok halmazából (T), és egy folytonos függvényből (Φ) áll. Esetünkben két speciális dinamikai rendszerrel foglalkozunk:

1. $S = \mathbb{C}$, $T = \mathbb{N}$, $\Phi = f$,
2. $S = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 : |\alpha|^2 \leq 1\}$, $T = \mathbb{N}$, $\Phi = \mathbf{F}$.

Előbbi a tisztá, utóbbi a kevert állapotok reprezentációira vonatkozik. A diszkrét idejűség azt jelenti, hogy T mindkét esetben megszámlálható.

A dinamikai rendszerek vizsgálatának fő tárgya a pályák geometriai jellemzése. Egy $p \in S$ pont pályája a

$$\{\Phi(t, p) : t \in T\}$$

halmaz, mely diszkrét esetben egy pontsorozat a fázistérben [12].

A különböző pályák közül számunkra a fixpontok, illetve a ciklusok a legérdekesebbek. Azt mondjuk, hogy a $p \in S$ pont a Φ leképezésnek fixpontja (egyensúlyi pontja), ha $\Phi(p) = p$. A fixpontokat osztályozhatjuk aszerint, hogy egy kis környezetükben lévő fázistérbeli pontok hogyan propagálnak. Ez alapján beszélhetünk taszító-, semleges- és vonzó fixpontokról (utóbbiakat szokás attraktornak is nevezni).

4.1.1. Komplex, diszkrét idejű dinamika

Ha a fent bevezetett jelölések mellett $\Phi : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, akkor komplex dinamikáról beszélünk. Az ilyen dinamikai rendszereket széleskörűen vizsgálták, és sok, számunkra hasznos tétel ismert velük kapcsolatban [13].

Legyen egy $z_f \in \mathbb{C}^\infty$ pont fixpontja egy $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ függvénynek. Legyen $\lambda_{z_f} = |f'(z_f)|$. Belátható, hogy igazak az alábbiak:

- z_f vonzó fixpont, ha $0 < \lambda_{z_f} < 1$, ekkor létezik olyan környezete, mely pontjaiból indított minden pálya z_f -be konvergál.
- z_f semleges fixpont, ha $\lambda_{z_f} = 1$.
- z_f taszító fixpont, ha $\lambda_{z_f} > 1$, ekkor semelyik, z_f kis környezetéből indított pálya nem konvergál z_f -be.

4.1.2. Diszkrét idejű dinamika $\mathbb{R}^3$ -ban

Ha $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, akkor bonyolultabb a fixpontok osztályozása. A dinamikát generáló függvény ekkor is sorbafejthető a fixpont körül, a lineáris rendet egy 3×3 mátrixszal, a Jacobi-mátrixszal írhatjuk le. Ennek van 3 sajátvektora, hozzájuk tartozó sajátértékekkel. Egy fixpontot úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk a függvény e pontban felvett Jacobi mátrixának sajátvektorait (sajátirányait), és az ezen irányokhoz tartozó sajátértékek töltik be λ szerepét.

4.2. Fixpontok száma

Keressük meg a 3.1. bekezdésben levezetett

$$f(z) = \frac{z^2 - p}{1 + pz^2}, \quad p \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}^\infty \quad (4.1)$$

függvény fixpontjait. Ehhez a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$f(z) = z \implies pz^3 - z^2 + z + p = 0. \quad (4.2)$$

Melyhez felhasználhatjuk a Cardano-képletet. Vezessük be a következő helyettesítést:

$$y = z - \frac{1}{3p}. \quad (4.3)$$

Ekkor az eredeti harmadfokú egyenletünk a következő alakú lesz:

$$y^3 + \frac{3p-1}{3p^2}y + \frac{9p-2}{27p^3} + 1 = 0. \quad (4.4)$$

Legyen:

$$A = \frac{3p-1}{3p^2}, \quad (4.5)$$

$$B = \frac{9p-2}{27p^3} + 1. \quad (4.6)$$

A harmadfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$\Delta = \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6p^2} - \frac{1}{108p^4}. \quad (4.7)$$

Ennek előjele határozza meg, hogy milyen típusú gyökei vannak a polinomnak:

- Ha $\Delta \geq 0$, az egyenletnek egy valós és két konjugált komplex megoldása lesz,
- Ha pedig $\Delta < 0$, az egyenletnek három valós megoldása lesz.

Vizsgáljuk meg a $\Delta(p)$ függvényt (ld. 5. ábra). Zérushelyeit a következő egyenlet adja meg:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{27p^4 + 18p^2 - 1}{108p^4} = 0. \quad (4.8)$$

Ennek megoldásai:

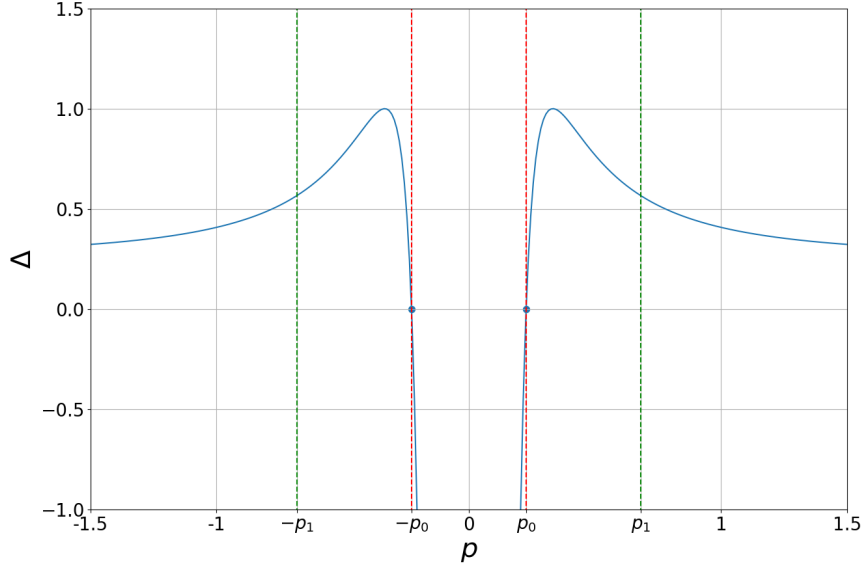
$$p^2 = \frac{-18 \pm \sqrt{432}}{54}. \quad (4.9)$$

Közelítőleg:

$$p_0 = \sqrt{\frac{-18 + \sqrt{432}}{54}} \approx 0,22708. \quad (4.10)$$

Tehát:

- $\Delta \geq 0$, ha $p \in [-\infty, -p_0] \cup [p_0, \infty]$,
- $\Delta < 0$, ha $p \in [-p_0, p_0]$.



5. ábra. A fixpontokat megadó harmafokú egyenlet diszkriminánsa, a protokoll paraméterének függvényében. $\pm p_0$ a függvény két zérushelye, p_1 értékét a 6. ábrán definiáljuk.

Vizsgáljuk meg most azt hogy a három fixpont milyen tulajdonságú. Ezt analitikusan nehéz vizsgálni, hiszen a Cardano-képletet kellene behelyettesíteni a függvény deriváltjába. Numerikusan azonban könnyedén elvégezhető az analízis, a következő lépéseket követve:

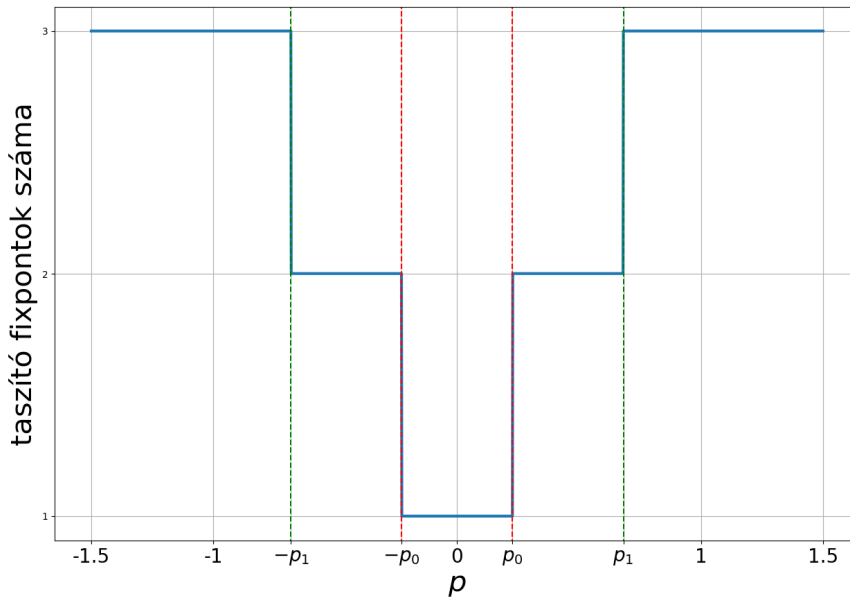
1. Mintavételezzünk egy $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ intervallumot: $\{p_i \in \mathcal{I} : i \in [0, n] \cap \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Ezen minden p_i értékre helyettesítsünk be a Cardano-képletbe, így kapunk három fixpontot.
3. Számítsuk ki ezekre az $\lambda_k = |f'(z_k)|$ értéket.

A fenti lépéseket elvégeztem, az eredmény a 6. ábrán látható.

Látható, hogy p szerint szimmetrikusan, 5 tartomány különül el. Ezek közül minket leginkább azok érdekelnek, ahol pontosan 2 taszító (és egy vonzó) fixpont található. A középső intervallum (ahol 1 taszító, és két vonzó fixpont van) éppen a fent kiszámolt intervallummal egyezik meg, ahol tehát a harmadfokú egyenlet diszkriminánsa negatív. Azt, hogy mely p_1 paraméternél válik mindhárom fixpont taszítóvá, analitikusan nem lehet csak a diszkrimináns vizsgálatával meghatározni, mint az 5. ábrán láthatjuk, a $\Delta(p)$ függvénynek nem kitüntetett pontja p_1 . Értékét numerikusan meghatároztam: $p_1 \approx 0.68169$.

4.3. A Julia-halmaz

Komplex dinamikák tárgyalásakor fontos az ún. Julia- és Fatou-halmazok vizsgálata. A dinamikát generáló függvény Fatou-halmaza azon pontok halmaza, melyek reguláris viselkedést mutatnak a függvény egymás utáni iterációja során, vagyis a kezdetben közeli pontok sok iteráció után is közel maradnak. Ezzel szemben a Julia-halmaz olyan pontokat tartalmaz, melyek bizonyos értelemben kaotikus viselkedést mutatnak,



6. ábra. A tasztító fixpontok száma a paraméter függvényében, $p_0 \approx 0.22708$, $p_1 \approx 0.68169$.

vagyis a kezdetben hozzájuk közeli pontok a függvényt iterálva merőben más orbitokon mozognak. Mivel a leképezés nem vezet ki sem a Julia-, sem a Fatou-halmazból, ezen halmazok uniója kiadja a dinamika teljes alaphalmazát.

A Julia-halmaz pontjainak felderítésére többféle megközelítés is létezik, én ezek közül kétféle módszert használtam.

4.4. A Julia-halmaz pontjainak meghatározása direkt módszerrel

A Julia- és a Fatou-halmaz egymás komplementerei, így előbbit megkaphatjuk úgy is, hogy feltérképezzük, a komplex sík mely tartományain viselkedik a dinamika regulárisan, és a kapott halmaznak vesszük a komplementerét. Ez numerikusan költséges, hiszen a síkon fel kell vennünk egy elegendően finom rácsot a megfelelő felbontás elérése érdekében.

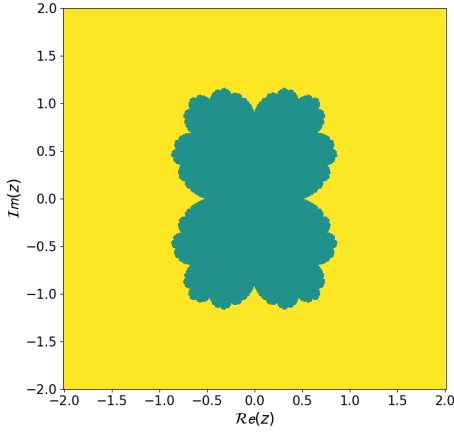
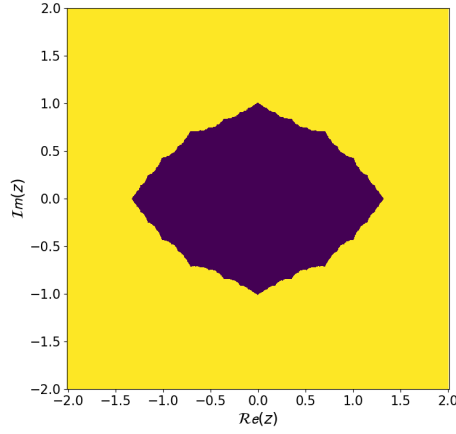
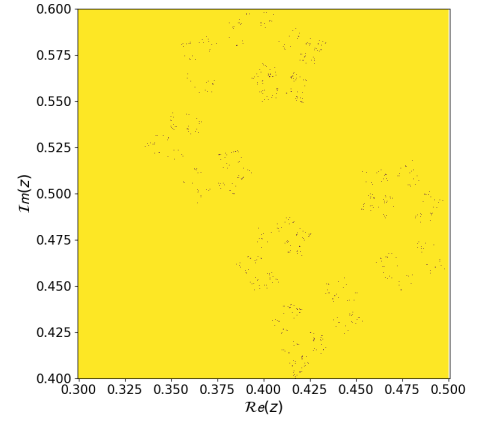
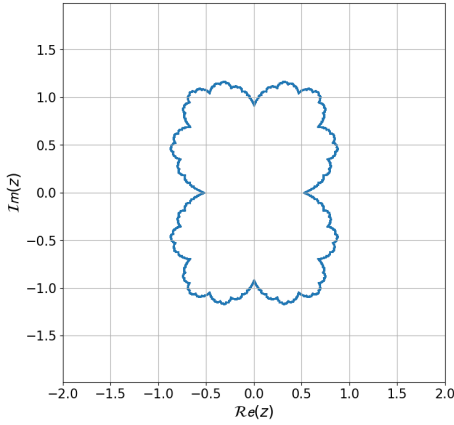
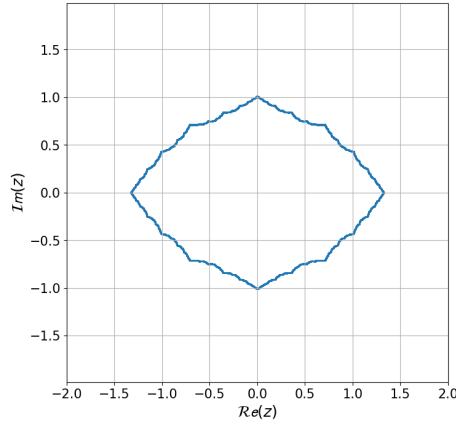
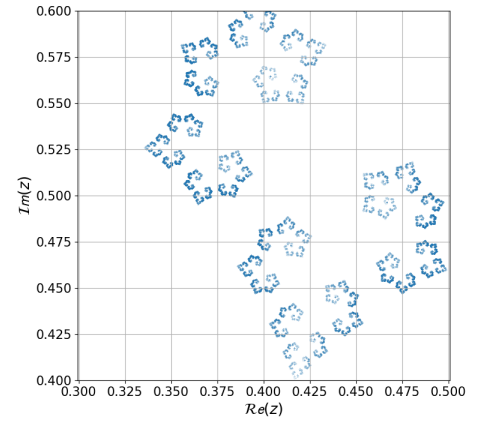
Azokra az esetekre próbáltam ki a módszert, ahol a dinamikának volt legalább 1 vonzó fixpontja, ugyanis az ebbe konvergáló pontok biztosan a Fatou-halmazban vannak.

Egyetlen vonzó fixpont esetén a rácson megnéztem, hogy az egyes rácpontok ide konvergálnak-e, vagy sem, és ez alapján színeztem őket. Mivel ilyen esetben a Julia-halmaz porszerű, igen nehéz "beletalálni", vagyis nagyon nagy felbontású rácsra van szükség, ezért a $[0.3, 0.5] + i \cdot [0.4, 0.6]$ négyzeten, 4000×4000 -es ráccsal számoltam. A 7. (c) ábrán látszik, hogy ez a módszer porszerű Julia-halmaz esetén aligha alkalmas annak feltérképezésére.

Két vonzó fixpont esetében egyszerűbb dolgunk van, hiszen ilyenkor a két fixpontba konvergáló orbitok kezdőpontjait kétféle színnel színezve, a határvonal épp a Julia-halmaz lesz. Itt a $[-2, 2] + i \cdot [-2, 2]$ négyzeten számoltam, szintén 4000×4000 -es felbontással. Az eredmények a 7. (a) és (b) ábrán láthatóak.

4.5. A Julia-halmaz pontjainak meghatározása visszaiterálással

A második módszer abból az állításból indul ki, hogy a Julia-halmaz a dinamika tasztító fixpontjainak lezártja. Ha tehát kiindulunk egy tasztító fixpontból, a függvényt "visszafele iteráljuk", azaz egy pontnak megkeressük az ősképeit, az így kapott pontoknak ismét, és ezt az eljárást ismétljük, mindig Julia-

(a) $p = -0.22$, direkt módszer(b) $p = 0.13$, direkt módszer(c) $p = 0.5$, direkt módszer(d) $p = -0.22$, visszaiterálás(e) $p = 0.13$, visszaiterálás(f) $p = 0.5$, visszaiterálás

7. ábra. A Julia-halmaz különböző p értékek esetén. A felső sorban [(a), (b), (c)] a direkt módszerrel, az alsóban [(d), (e), (f)] a visszaiterálással kapott eredmények láthatóak.

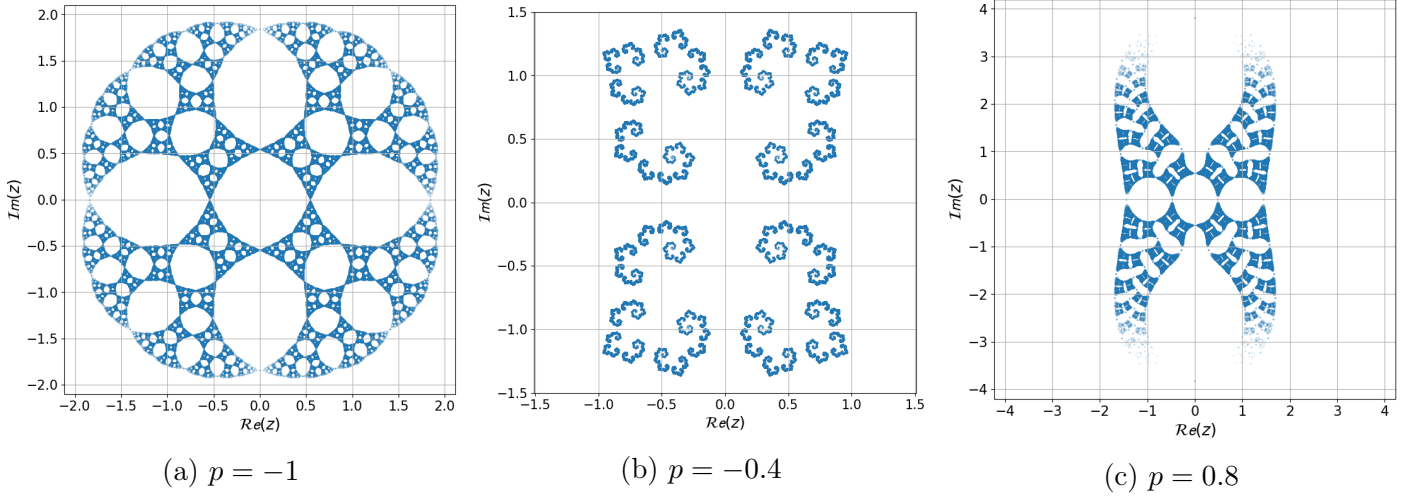
halmazbeli pontokat kapunk.

Egy $z \in \hat{\mathbb{C}}$ pont $y_{\pm} \in \hat{\mathbb{C}}$ ősképeit a következőképpen kaphatjuk meg:

$$z = f(y_{\pm}) = \frac{y_{\pm}^2 - p}{1 + py_{\pm}^2} \implies \quad (4.11)$$

$$y_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{p+z}{1-pz}}. \quad (4.12)$$

Ezen képlet segítségével meghatározhatjuk a Julia-halmaz pontjait. A 6. ábra öt tartományából választottam egy-egy p paramétert, mindre elvégeztem az (4.12) egyenlettel adott "fordított" iterációt, 18 lépésben. A kapott eredményeket a 8. és a 7. (d), (e), (f) ábrán láthatjuk.



8. ábra. A Julia-halmaz különböző p értékek esetén, visszaiterálással meghatározva. Minden ábra elkészítésekor 18 lépést végeztem. Az (a) és (c) ábrákon összefüggő Julia-halmazt láthatunk, míg a (b) ábrán a Julia-halmaz porszerű.

5. A kevert dinamika, az invariáns sík vizsgálata

Miután megismerkedtünk a tiszta állapotok dinamikájával, térjünk át a kevert állapotokra, melyekre a 3.2. bekezdésben levezetett (3.19.a)-(3.19.c) egyenletek érvényesek. Látható, hogy a $v = 0$ sík invariáns, tetszőleges valós p mellett. Ez a komplex síkon a valós egyenesnek felel meg. Érdekes először ezen az ún. invariáns síkon megvizsgálni a dinamika tulajdonságait, mert az itt megszerzett ismeretekből fontos következtetések vonhatók majd le a teljes dinamikára vonatkozóan.

Észrevehető, hogy az $\alpha = (0, 0, 0)^T$ pont minden p esetén fixpont, ezt később külön megvizsgáljuk.

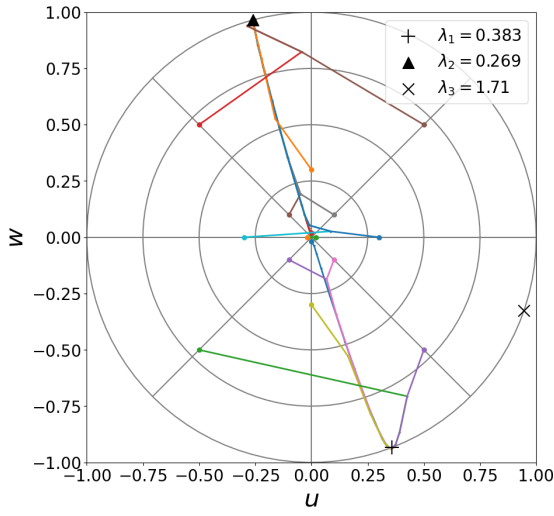
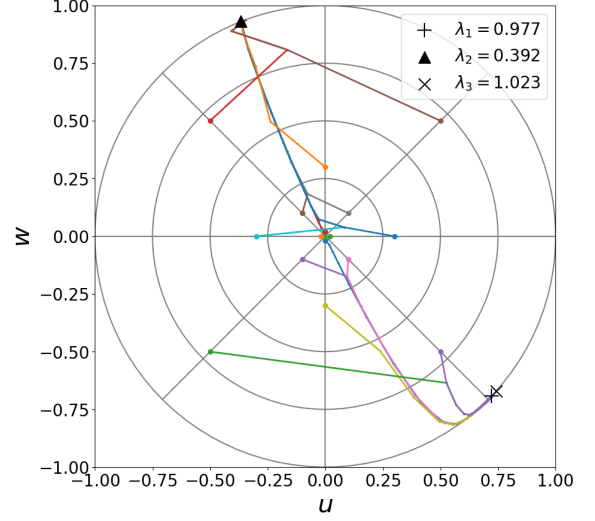
Láttuk, hogy a tiszta dinamika fixpontjai biztosan fixpontjai a kevert dinamikának is, ezek a Bloch-gömb felszínén találhatóak, és más tiszta fixpont nincs; azonban semmi nem garantálja, hogy nincsenek más kevert egyensúlyi pontok (a Bloch-gömb középpontján kívül). Erre fókuszálva térképezzük fel tehát a dinamika viselkedését, p értékét változtatva. Megjegyzendő, hogy az egyes példákban, ábrákon szereplő paraméterértékeket úgy választottam meg, hogy a dinamika viselkedését a lehető legjobban tudjam szemléltetni az adott tartományokon; más fizikai relevanciája a konkrét értékeknek nincs.

5.1. A dinamika vizsgálata az invariáns síkon, két vonzó tiszta fixpont esetén

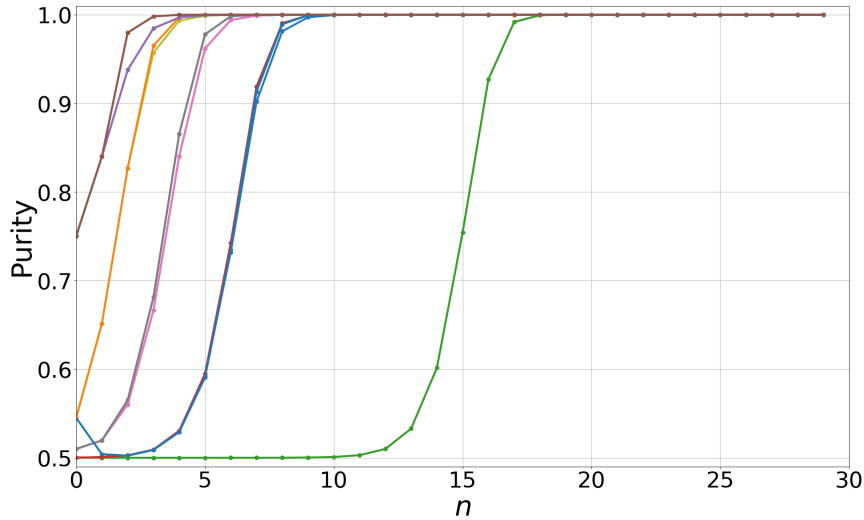
Láthattuk hogy a $[-p_0, p_0]$ tartományon 1 taszító, és két vonzó fixpontja van a tiszta dinamikának. Legyen a tiszta dinamika három fixpontja $z_f^{(1)}, z_f^{(2)}$ és $z_f^{(3)}$. A síkbeli koordinátáikat a $\alpha_f^{(i)} = \mathbf{t}[z_f^{(i)}]$ képlettel számíthatjuk ki, a (3.24.a)-(3.24.c) egyenletek szerint. Mivel ezen a tartományon $\Delta(p) < 0$, mindhárom fixpont valós, vagyis mindegyik a $v = 0$ síkon helyezkedik el.

Ahhoz, hogy a többi kezdőállapot viselkedésére vonatkozóan is tehessünk megállapításokat, első lépésként választottam néhány pontot a síkról, és megvizsgáltam, milyen orbitok indulnak ki belőlük. Az eredmények a 9. ábrán láthatóak. Érdekes megfigyelni, hogy a taszító fixpont p -t növelve egyre közeledik az egyik vonzó fixponthoz. A $p = p_0$ esetben $\Delta(p) = 0$, tehát az egyik gyök degenerált, ilyenkor a taszító és az egyik vonzó fixpont egybeesik (valójában ekkor mindkettő taszítóvá válik).

A pontok tisztaságát is nyomon követtem a folyamat során. Ezt csak egyetlen p érték esetén mutatom be (10. ábra), mivel az egész tartományon nagyon hasonló viselkedést tapasztaltam.

(a) $p = 0.15$ (b) $p = 0.227$

9. ábra. Néhány véletlenszerűen választott pontból induló orbit, különböző $p \in [-p_0, p_0]$ értékek esetén az invariáns síkon. A fekete pontok a tiszta leképezés fixpontjait jelölik, $\lambda_i = |f'(z_f^{(i)})|$ a vonzási tényezőjük.



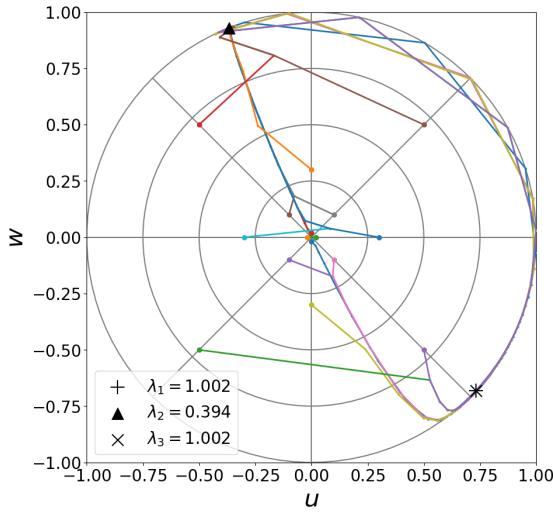
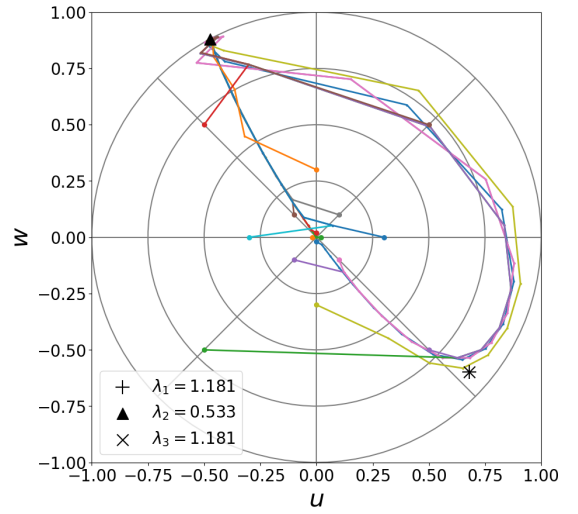
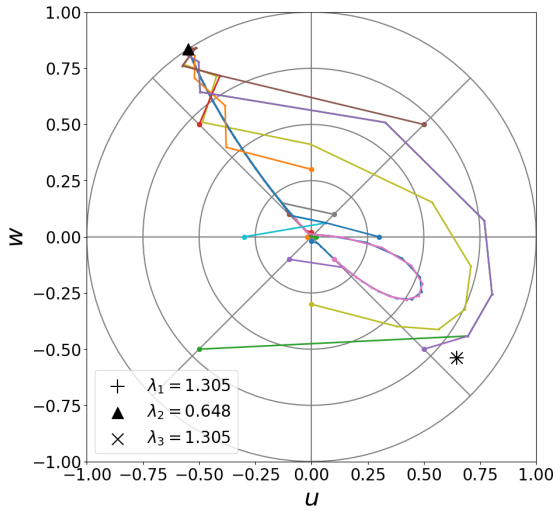
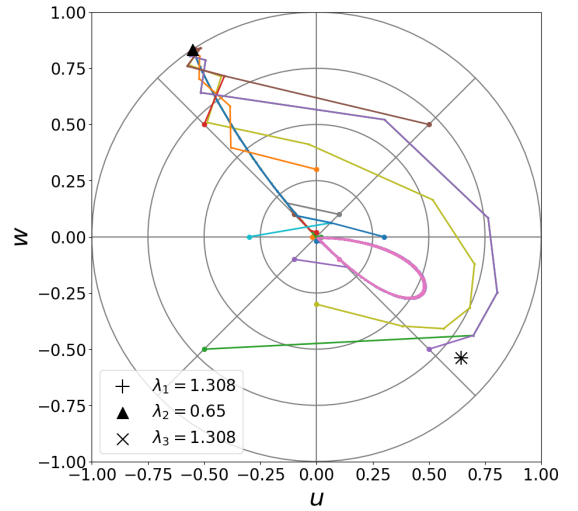
10. ábra. Az egyes pontok tisztasága a függvény iterációi során, $p = 0.2$ paraméter mellett.

5.2. A dinamika vizsgálata az invariáns síkon, egy vonzó tiszta fixpont esetén

Láttuk, hogy a tiszta dinamikának $p \in [-p_1, -p_0] \cup [p_0, p_1]$ esetén egyetlen vonzó fixpontja van. Az előző, 5.1. bekezdéshez hasonlóan vizsgáltam ezt a tartományt. A tiszta fixpontok közül ilyenkor kettő komplex (nincsenek a $v = 0$ síkon), ezek egymás konjugáltjai, de u és w koordinátáik megegyeznek, ezért az ábrákon egy pontba vetítődnek. A következő alfejezetekben látni fogjuk, hogy ezen a tartományon igen változatos viselkedés figyelhető meg a dinamikában.

Érdekes a $[p_0, p_1]$ tartományt további részekre bontani, ugyanis érdekes jelenségek mutatkoznak $p_2 \approx 0.4$ környékén. A 11. ábrán látható, hogy p értékét fokozatosan növelve milyen orbitok jelennek meg.

A taszító fixpontok $(\alpha_f^{(1)}, \alpha_f^{(3)})$ vetületei egyre beljebb mozognak az egységkörön. Látható az is, hogy $p \approx p_2$ környékén még minden pont bekonvergál a vonzó fixpontba $(\alpha_f^{(2)})$, de az origó közeléből indított

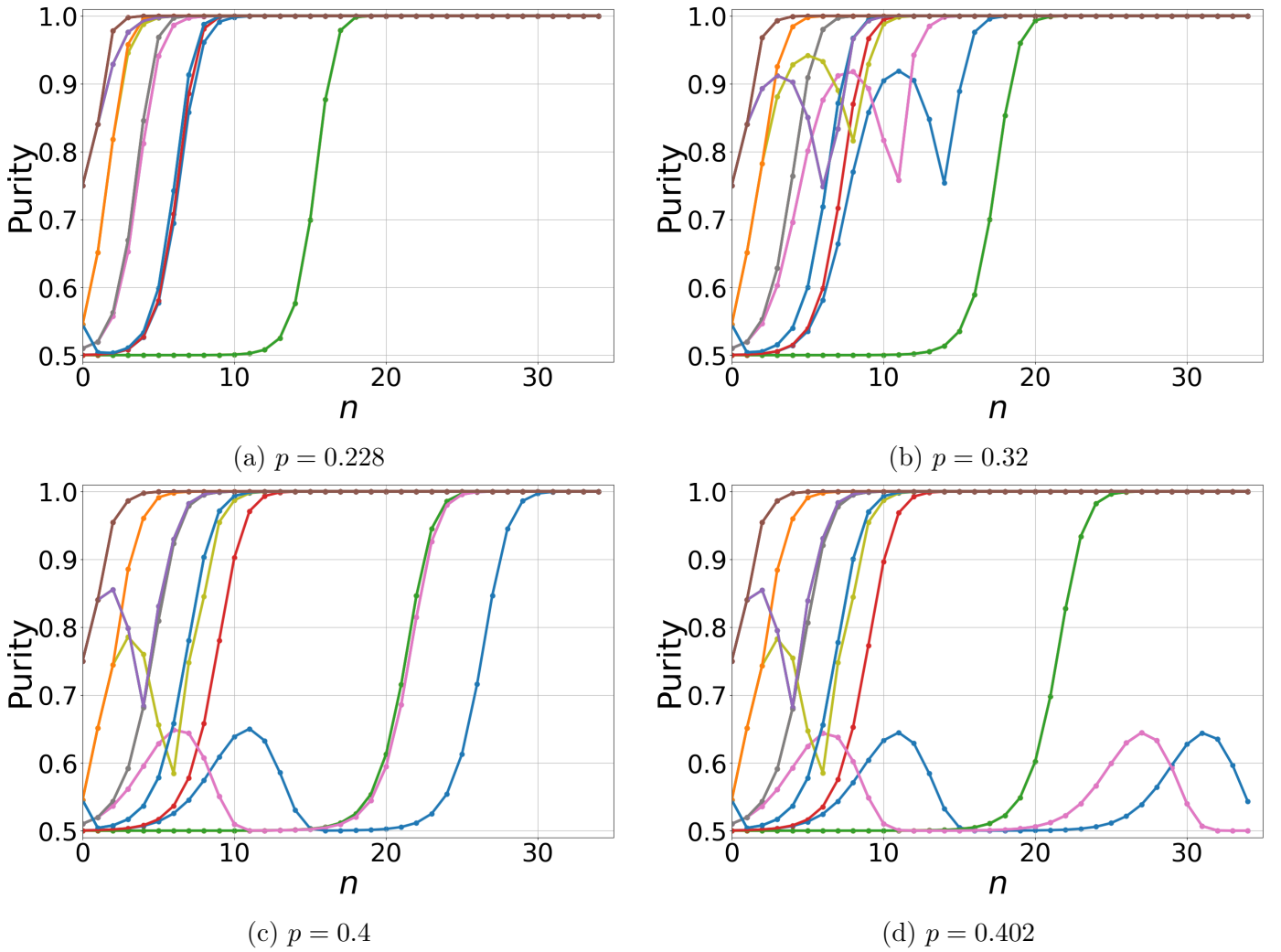
(a) $p = 0.228$ (b) $p = 0.32$ (c) $p = 0.4$ (d) $p = 0.402$

11. ábra. Néhány pontból induló orbit, különböző $p \in [0.228, p_2]$ értékek esetén. A fekete pontok a tiszta leképezés fixpontjait jelölik, $\lambda_i = |f'(z_f^{(i)})|$ a vonzási tényezőjük.

orbitok jellegzetes, hurokszerű görbe mentén közelítik meg $\alpha_f^{(2)}$ -t (11c ábra). Ez a hurok $p_2 = 0.402$ értéknél "lecsatolódik", egy vonzó ciklust kapunk (11d ábra).

A 12. ábrán az orbitok pontjainak tisztaságát vizsgáltam a $p \in [p_0, p_2]$ tartományon. A 12a. ábrán azt láthatjuk, hogy bizonyos pontok (melyek az előző szakaszban ahhoz a fixpontok konvergáltak, mely most tasztítóvá vált, $\alpha_f^{(1)}$) lassabban tisztulnak ki, mint eddig. A 12b. és 12c. ábrákon megjelennek olyan pontok, melyek tisztasága visszaesik (ekkor kerülnek arra a görbére, ami a 11c és 11d ábrákon kirajzolódik). Végül a 12d. ábrán látszik, hogy azon pontok tisztasága, melyek a vonzó ciklushoz konvergálnak, periodikusan változnak, ahogy az említett görbe mentén "végighaladnak".

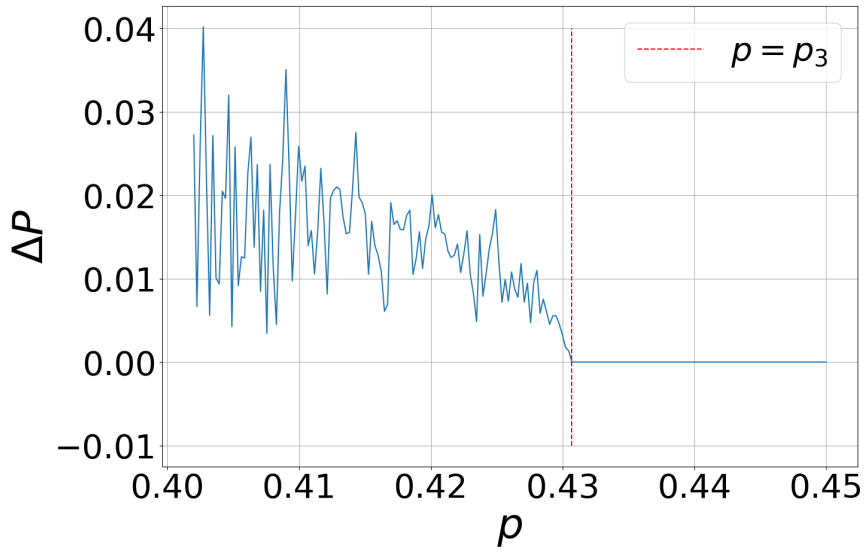
Ahhoz, hogy felderítsem, mely p paraméterek mellett jelenik meg vonzó ciklus, illetve, hogy a ciklus nem "omlik-e össze", azaz nem egy vonzó fixpontról van-e szó, ahova a pontok nagyon lassan konvergálnak; első lépésként választottam 10 tetszőleges pontot a $[-0.1, -0.12] \times [-0.07, 0.07]$ téglalapról, és kiszámoltam az pályájukat $n = 50000$ iterációra. Azokat, melyek kitisztultak (vagyis nem voltak benne a ciklus



12. ábra. A 11. ábrán látható orbitok pontjainak tisztasága.

vonzási tartományában), eldobtam, hiszen csak a ciklusba konvergáló orbitokat szerettem volna vizsgálni. Megnéztem, hogy egyáltalán valódi ciklusról van-e szó: ehhez $n = 10^7$ iteráció után kiszámoltam az utolsó 2 pont távolságát. Ez numerikus hibán belül sem adódott 0-nak, tehát feltételezhetjük, hogy valóban egy vonzó ciklusról beszélünk, és nem egy vonzó fixpontról. p -t tovább növelve azt tapasztaltam, hogy ez a ciklus egyre kisebb átmérőjű, és folytonosan átmegy egy vonzó fixpontba.

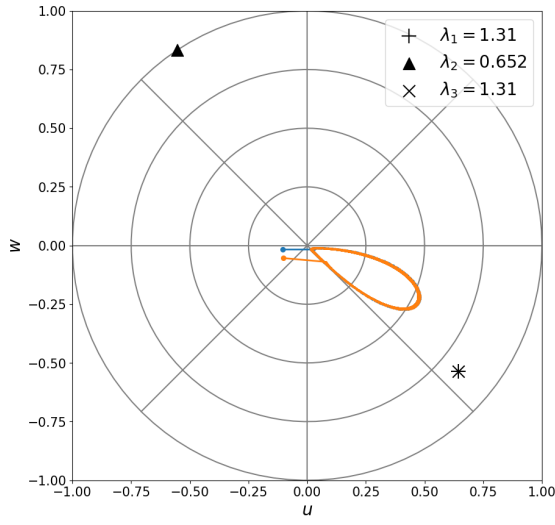
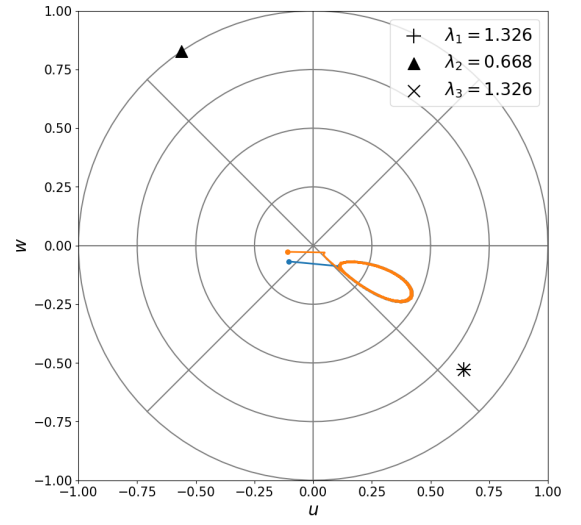
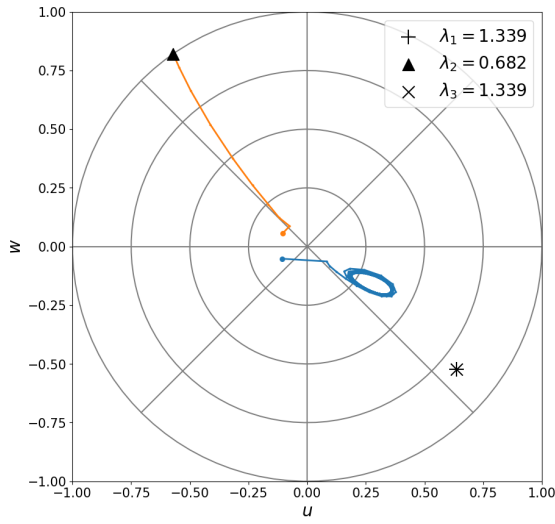
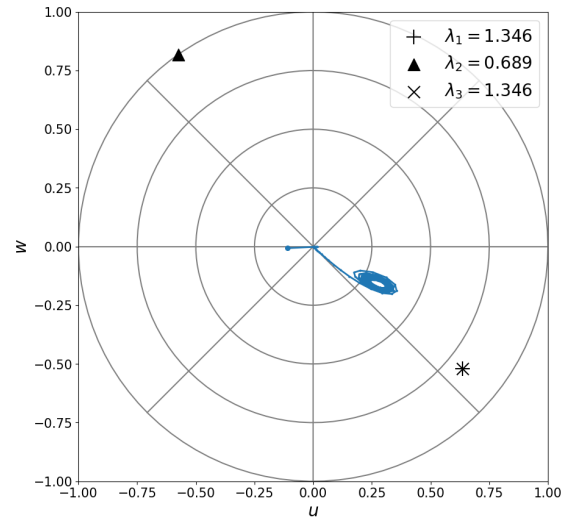
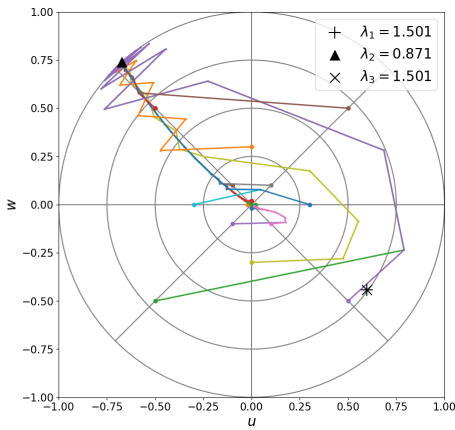
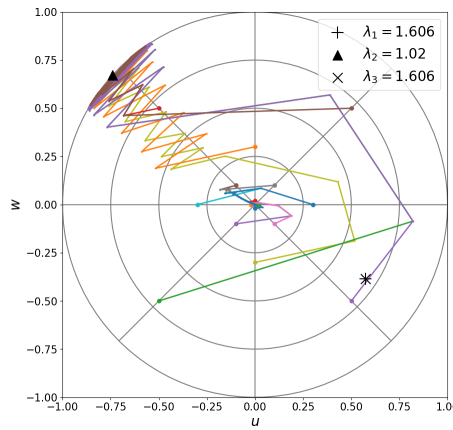
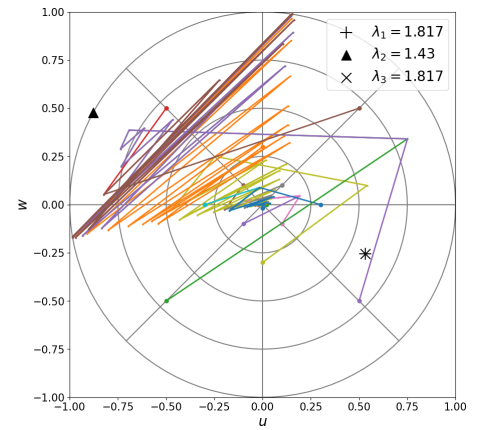
Annak megbecsléséhez, hogy hol történik ez az átmenet, megvizsgáltam, hogy p -től hogyan függ a tisztaságok alakulása. Minden orbit utolsó két pontja tisztaságának különbségét átlagoltam (ΔP). A $\Delta P(p)$ függvény zérushelye megadja, hogy mely paraméterig lép fel vonzó ciklus, és mikor jelenik meg a vonzó kevert fixpont. Ezt láthatjuk a 13. ábrán. A függvény zérushelyére $p_3 = 0.4307 \pm 0.0005$ adódott. A becslés bizonytalanságának két fő forrása van: egyrészt a paramétertartomány finomságának pontossága, másrészt az elindított orbitok hossza. Mindkettőt igyekeztem finomhangolni, és a kapott eredmények alapján kijelenthetjük, hogy 10^{-3} nagyságrendig pontos a becslés. A 14. ábra néhány, a vonzó ciklusba konvergáló orbitot mutat be, különböző p paraméterek esetén.



13. ábra. A $\Delta P(p)$ függvény és zérushelye, $p_3 = 0.4307$.

5.3. A dinamika tulajdonságai $p > p_3$ paraméterek mellett

A teljesség igénye végett (bár a kutatásunkban főként a $[p_0, p_2]$ tartományra vagyunk kíváncsiak) érdemes kvalitatíve megvizsgálni, mi történik, ha a paramétert tovább növeljük. Néhány ilyen orbit látható a 15. ábrán. Amíg $p < p_1$, vagyis van vonzó tiszta fixpont, addig bizonyos pontok ide konvergálnak, míg mások egy kevert fixpontba (melynek tisztasága p -t növelve egyre csökken). Azon a tartományon, ahol a tiszta dinamikában nincs vonzó fixpont ($p > p_1$), a legtöbb pont vagy bekonvergál a kevert fixpontba, vagy az egységkör peremén kezd mozogni. Ez a viselkedés arra utal, hogy a dinamikában ilyenkor egy tiszta, 2 hosszú vonzó ciklus van jelen [10]. A $p = 1$ esetet vizsgálták meg [7]-ben.

(a) $p = 0.403$ (b) $p = 0.415$ (c) $p = 0.425$ (d) $p = 0.43$ 14. ábra. Vonzó ciklusba konvergáló orbitok, különböző $p \in [p_2, p_3]$ paraméterek esetén.(a) $p = 0.57$ (b) $p = 0.7$ (c) $p = 1.2$ 15. ábra. Különböző kezdőpontokból induló orbitok $p > p_3$ paraméter esetén.

6. Vonzástartományok vizsgálata az invariáns síkon

Az előzőekben kvalitatíve megvizsgáltuk, hogy a különböző paramétertartományokon milyen pályák alakulnak ki, azonban nem tudjuk, adott esetben az egyes kezdőpontok hova propagálnak. Határozzuk meg tehát, hogy adott p mellett az egyes fixpontoknak mi a vonzástartománya. Ehhez a $v = 0$ síkon felvesszünk egy rácsot, minden rácspontról indítunk egy orbitot, és a végpont helyzetétől függően színezzük az adott pontot. Az így kapott ábrákról leolvashatóak a különböző vonzástartományok.

6.1. Vonzástartományok kettő vonzó fixpont esetén

A vonzási tartományok vizsgálatakor talán a legkritikusabb paraméter a rács felbontása. Az előző szakaszban láttuk, hogy az orbitok tipikusan 20-30 iteráció után bekonvergálnak a fixpontba (ld. 10. ábra). Emiatt az iterációszámot elegendő $n = 200$ -ban maximalizálni. A számítási idő a felbontással négyzetesen nő, ezért érdemes először nagyjából felmérni a vonzási tartományokat (alacsonyabb felbontással), majd a számunkra érdekes részeken (pl. a fixpontok kis környezetében) egy kisebb téglalapon, nagyobb felbontásban megnézni, mi történik. A 16. ábrán látható, hogy $p < p_0$ esetén a $v = 0$ síkon az egységkör feloszlik két részre: a két vonzó fixpont vonzástartományai lefedik az egész kört. Érdemes kihangsúlyozni, hogy a taszító fixpont épp a két tartomány határának és az egységkörnek a metszéspontjában helyezkedik el. Érdemes jelenség figyelhető meg azonban $p = 0.227$ környékén, ahol a két tartomány határán bizonyos pontok nem konvergálnak, míg mások a taszító fixpontba tartanak. Ezt nézzük meg nagyobb felbontásban is.

A 16b. ábra taszító fixpontja körüli ± 0.1 , majd ± 0.01 méretű négyzetet szintén felosztottam 2000×2000 rácspontra, majd elkészítettem ugyanezeket az ábrákat (ld. 17. ábra). Megfigyelhető, hogy a tiszta dinamika taszító fixpontja a kevert állapotok között vonzó, a két vonzó fixpont vonzási tartományának határvonalán, ahonnan a pontok a taszító fixpontba konvergálnak. Ez igen érdekes, és eddig nem vizsgált eredmény, próbáljuk meg megfelelő eszközökkel körüljárni.

6.2. Taszító fixpontok vonzástartományának vizsgálata

Az előzőekben láthattunk egy érdekes szituációt: egy a tiszta dinamikában taszító fixpont képe a kevert állapotok között vonzóvá válhat. Vizsgáljuk meg ezt, speciálisan a $p = 0.227$ paraméter mellett.

Legyen a taszító fixpont α_0 (tehát $\mathbf{F}(\alpha_0) = \alpha_0$), és vegyünk egy χ pontot α_0 egy kis környezetéből. Ekkor χ felírható

$$\chi = \alpha_0 + \varepsilon \cdot \mathbf{n}, \quad \varepsilon \ll 1, |\mathbf{n}| = 1 \quad (6.1)$$

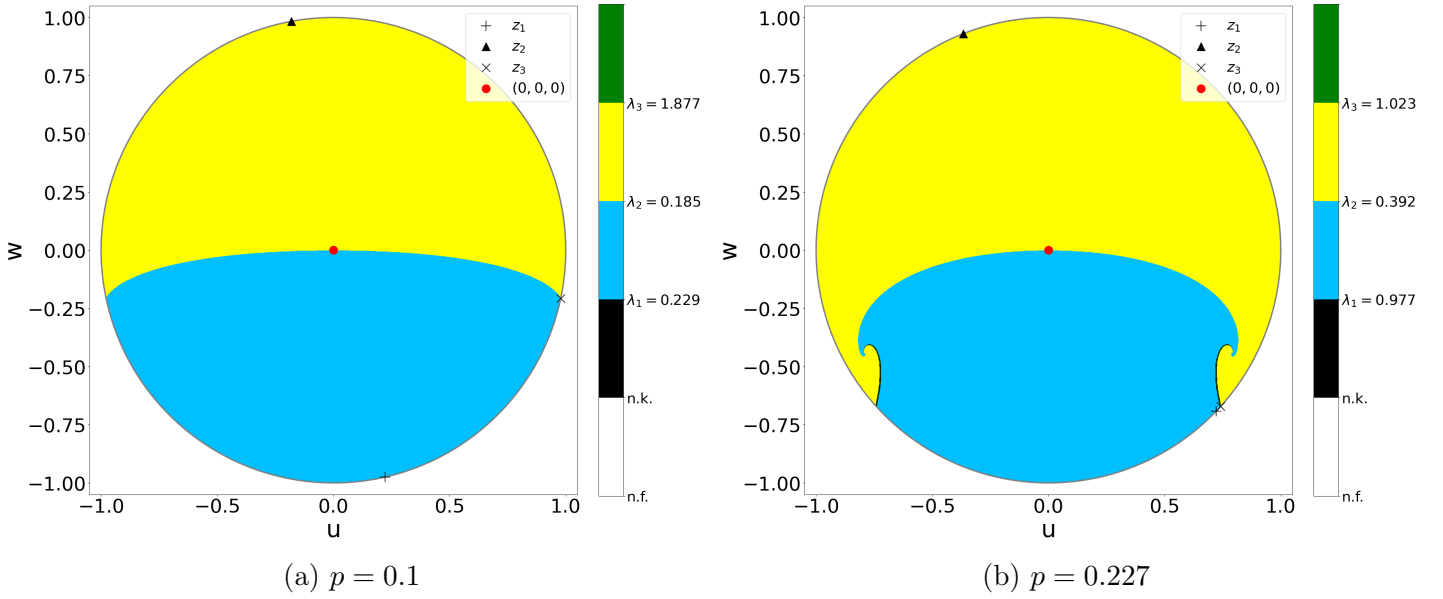
alakban. Fejtsük sorba a leképezést lineáris rendig, és írjuk fel $\mathbf{F}(\chi)$ -t, vagyis a kiválasztott pont helyét egy iterációs lépés után:

$$\mathbf{F}(\chi) = \mathbf{F}(\alpha_0 + \varepsilon \cdot \mathbf{n}) = \alpha_0 + \varepsilon \cdot \hat{\mathbf{J}}(\alpha_0) \cdot \mathbf{n} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.2)$$

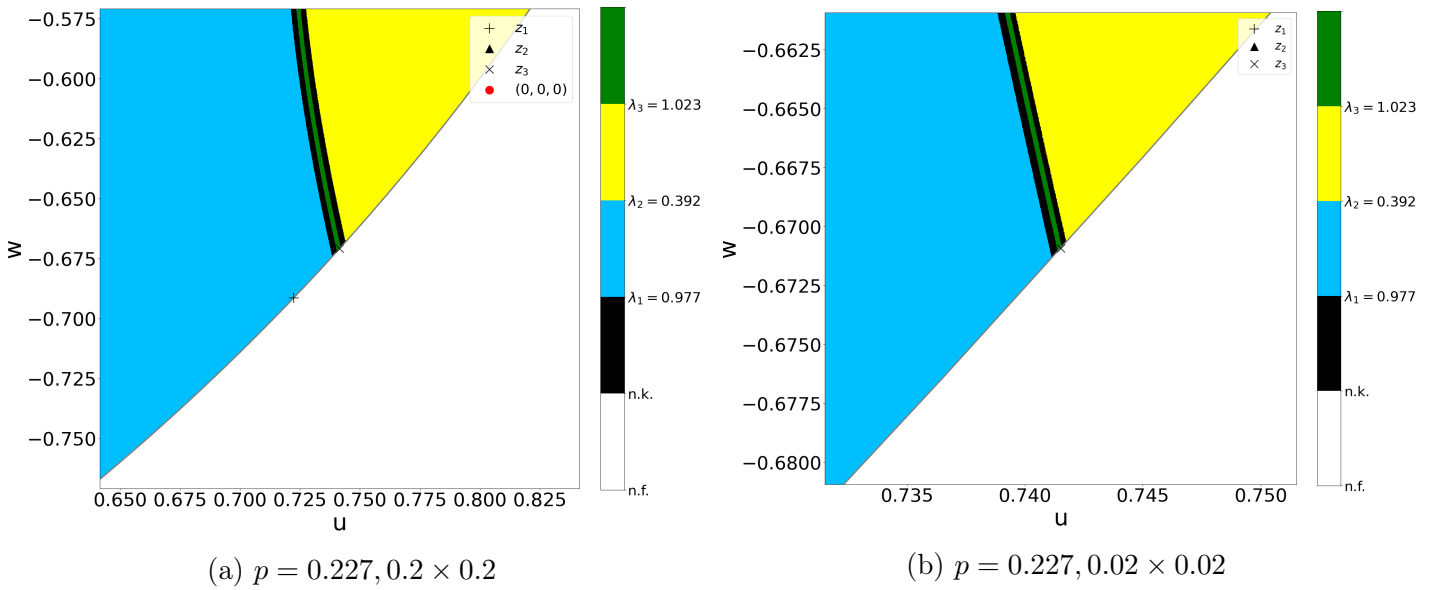
Most számítsuk ki, hogyan függ $\mathbf{n}$ -től, hogy a kiválasztott pont közeledik, vagy távolodik a fixponttól.

$$\mu(\alpha_0, \mathbf{n}) \equiv \frac{|\mathbf{F}(\chi) - \alpha_0|}{|\chi - \alpha_0|} = \frac{|\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{J}}(\alpha_0) \cdot \mathbf{n}|}{|\varepsilon \cdot \mathbf{n}|} = |\hat{\mathbf{J}}(\alpha_0) \cdot \mathbf{n}| = \sqrt{\tilde{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{J}}(\alpha_0) \hat{\mathbf{J}}(\alpha_0) \mathbf{n}}, \quad (6.3)$$

ahol $\hat{\mathbf{J}}(\alpha_0)$ az $\mathbf{F}$ leképezés Jacobi-mátrixa az α_0 pontban, $\tilde{\mathbf{J}}$ ennek a transzponáltja, $\mathbf{n}$ pedig egy egységvektor. Ha $\mu(\alpha_0, \mathbf{n})$ kisebb, mint 1, akkor azt mondhatjuk, hogy $\mathbf{n}$ irányban a leképezés vonzó, ellenkező esetben taszító. $\mu(\alpha_0, \mathbf{n})$ nagyon hasonló az ún. Lyapunov-exponenshez [\[link\]](#).



16. ábra. Vonzástartományok 2 vonzó tiszta fixpont esetén. Minden orbit $n = 100$ hosszú, a rács 2000×2000 felbontású. A kék, sárga és zöld színek rendre a két vonzó ($\lambda_1, \lambda_2 < 1$) és a tasztító ($\lambda_3 > 1$) fixpontok vonzástartományait jelölik, míg a fekete pontok nem konvergálnak egyik fixpontba sem ("n.k."), ezek a Julia-halmaz kevert megfelelőjének vetületét rajzolják ki. A szürke vonal az egységgömb vetületét mutatja, míg az ezen kívüli pontoknak nincs fizikai jelentése ("n.f."), ezeket fehérre színezttem. Pirossal tüntettem fel a $(0, 0, 0)^T$ fixpontot.



17. ábra. A 16b. ábra tasztító fixpontjának környezetei. Az (a) ábrán 0.2×0.2 méretű, míg a (b) ábrán 0.02×0.02 méretű négyzetet számoltunk. Mindkét rács 1000×1000 felbontású.

Írjuk fel az $\mathbf{F}$ leképezés Jacobi-mátrixát:

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{2u(1-p^2)}{(1+w^2)(1+p^2)} & \frac{2v}{1+w^2} & \frac{4up}{(1+w^2)(1+p^2)} \\ \frac{-2v(1-p^2)}{(1+w^2)(1+p^2)} & \frac{2u}{1+w^2} & \frac{-4vp}{(1+w^2)(1+p^2)} \\ \frac{-2(u^2-v^2)w(1-p^2)-4p(1-w^2)}{(1+w^2)^2(1+p^2)} & \frac{-4uvw}{(1+w^2)^2} & \frac{2(1-p^2)(1-w^2)-4p(u^2-v^2)w}{(1+w^2)^2(1+p^2)} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Mivel α_0 a $v = 0$ síkon található, a Jacobi-mátrix alakja jelentősen egyszerűsödik:

$$\hat{\mathbf{J}}_{v=0} = \begin{bmatrix} \frac{2u(1-p^2)}{(1+w^2)(1+p^2)} & 0 & \frac{4up}{(1+w^2)(1+p^2)} \\ 0 & \frac{2u}{1+w^2} & 0 \\ \frac{-2(u^2-v^2)w(1-p^2)-4p(1-w^2)}{(1+w^2)^2(1+p^2)} & 0 & \frac{2(1-p^2)(1-w^2)-4p(u^2-v^2)w}{(1+w^2)^2(1+p^2)} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Belátható, hogy egy ilyen alakú mátrixnak van egy az u, v síkra merőleges sajátvektora:

$$\mu_1 = \frac{2u}{1+w^2}, \quad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

valamint a másik két sajátvektora az u, v síkban van. Jelöljük ezeket $\chi^{(2)}$ -vel és $\chi^{(3)}$ -mal, a hozzájuk tartozó sajátértékeket pedig rendre μ_2 -vel és μ_3 -mal. Ekkor a fenti jelölést konzisztensen használhatjuk, mint a "sajátértékek természetes kiterjesztése":

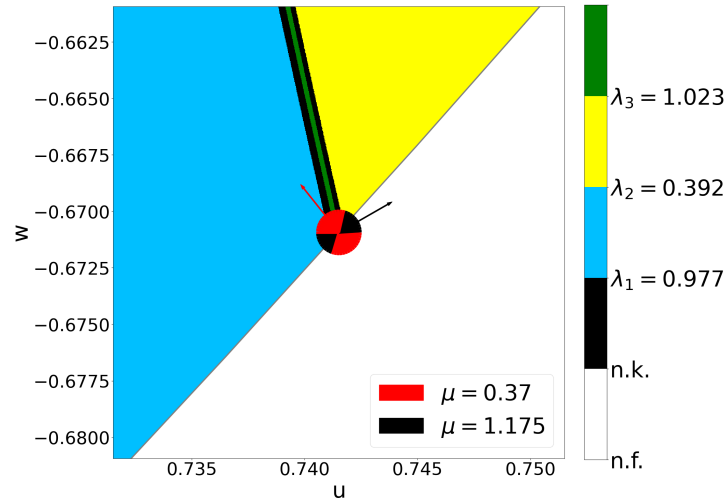
$$|\mu_k| = \mu \left(\alpha_0, \frac{\chi^{(k)}}{|\chi^{(k)}|} \right). \quad (6.7)$$

Megjegyzés: látható, hogy a $\chi^{(1)}$ sajátirány akkor vonzó, ha $2u < 1 + w^2$, ez már a (3.19.b). egyenletből is látszik.

Számítsuk ki $\mu(\alpha_0, \mathbf{n})$ -t különböző $\mathbf{n}$ irányok esetén a fixpontban. Az eredmény a 18. ábrán látható. A fixpont körüli kiszínezett korongon pirossal jelöltem azokat az irányokat, melyekre $\mu(\alpha_0, \mathbf{n}) < 1$ (vonzó irányok), és feketével azokat, melyekre $\mu(\alpha_0, \mathbf{n}) > 1$ (taszító irányok). Megfigyelhetjük, hogy az egységgömb vetülete a taszító tartományon metsz át, ez összhangban van azzal, hogy α_0 a tiszta dinamikában taszító fixpont. A két vonzó fixpont vonzástartományának határvonala (melynek pontjait zöld színnel jelöltem) pedig egy vonzó irány mentén halad, amely szintén alátámasztja a tapasztalatainkat.

6.3. Vonzástartományok kettő vagy három taszító fixpont esetén

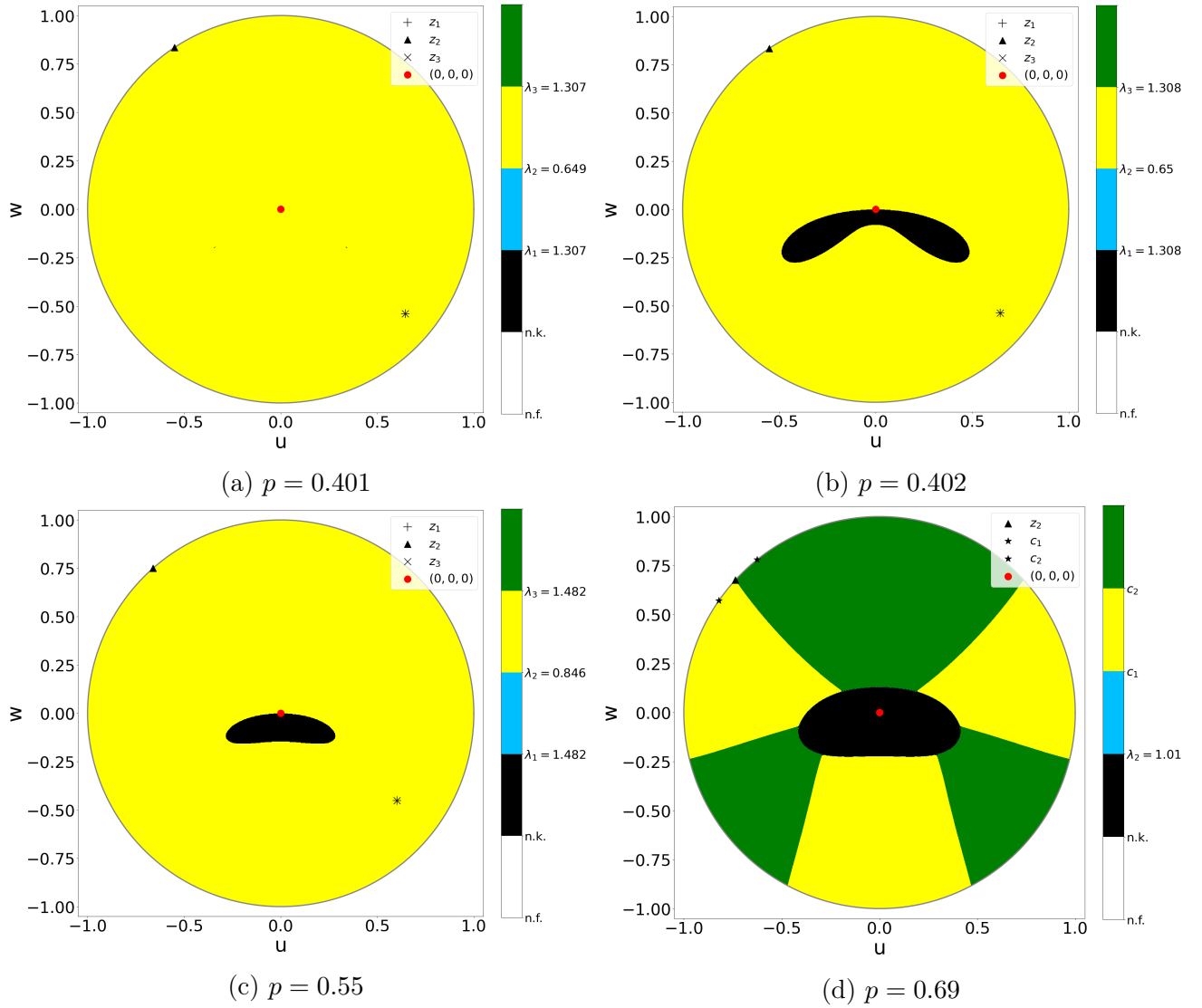
Számunkra a legérdekesebb eset az, amikor egyetlen vonzó fixpont van a tiszta dinamikában, mint láttuk, ez a $p \in [p_0, p_1]$ tartományon igaz. Az előzőekhez hasonlóan itt is derítsük fel a fixpont vonzástartományát, olyan paramétereket keresve, ahol az egész $v = 0$ sík (kivéve persze a teljesen kevert állapotot) a vonzó,



18. ábra. A $p = 0.227$ paraméterű leképezés taszító fixpontjának 0.002×0.002 méretű környezete, 200×200 felbontású felosztással. A sárga és kék tartományok pontjai a dinamika vonzó fixpontjaihoz konvergálnak ($\lambda_1, \lambda_2 < 1$). A fekete pontok nem konvergálnak egyik fixponthoz sem ("n.k."), míg a zöld pontok a taszító fixpontba ($\lambda_3 > 1$) tartanak. A szürke vonal az egységkört jelöli, az ezen kívüli pontoknak nincs fizikai jelentése ("n.f."), ezért fehérre színeztem őket. A piros és a fekete nyíl a fixponthoz tartozó Jacobi-mátrix sajátvektorait jelölik, melyekhez a jelmagyarázatban szereplő sajátértékek (μ_1, μ_2) tartoznak. A fekete és piros színnel színezett kör azt ábrázolja, hogy az egyes irányokban a fent bevezetett $\mu(\alpha_0, \mathbf{n})$ mennyiség milyen értéket vesz fel: piros, ha kisebb, mint 1 és fekete egyébként.

tiszta fixpontba konvergál.

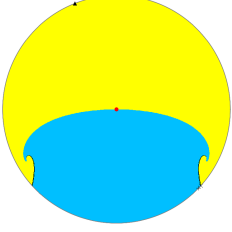
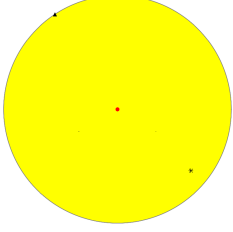
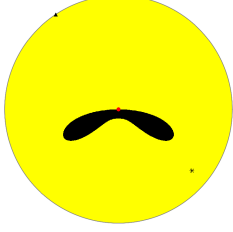
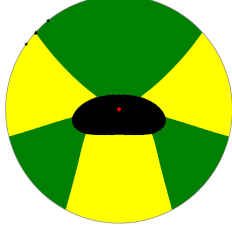
A síkon 2000×2000 felbontású rácsot vettem, $n = 100$ iterációt végeztem minden pontban, és elkészítettem az előzőekhez hasonló ábrákat (19. ábra). A $p < p_2 = 0.402$ paraméterek esetén (19a. ábra) a várakozásainknak megfelelően minden pont kitisztult, a vonzó tiszta fixpont vonzástartománya a teljes invariáns sík. Ha $p_2 < p < p_1$ (19b. és 19c. ábra), megjelenik egy összefüggő tartomány, ahonnan a sík pontjai nem a vonzó fixpontba tartanak. A p_3 környékén megfigyelhető érdekes viselkedés nem mutat látványos különbségeket a vonzástartományok tekintetében, akár ciklusról, akár kevert fixpontról van szó. Végül $p > p_1$ esetén (19d. ábra) megjelenik egy c_1, c_2 elemekből álló két hosszú vonzó ciklus. Ennek vonzástartományát sárgával és zölddel tüntettem fel. A zöld- és sárga tartományokban lévő pontok mind a ciklusba konvergálnak, csak eltérő "paritással": páros iteráció után a sárga tartományból induló orbitok végpontja a c_1 pontban, míg a zöld tartományból induló orbitok végpontja a c_2 pontban van (páratlan számú iteráció után épp fordítva). Megjegyzendő, hogy az utolsó ábránál $n = 1400$ iterációig számoltam, mivel a fix ciklusba tartó pontok igen lassan konvergálnak.



19. ábra. Vonzástartományok $p > p_1$ paraméterek esetén. A $p_1 < p < p_2$ értékekre az (a) ábrán látható szituáció jelenik meg, ilyenkor a teljes invariáns sík a vonzó tiszta fixpont vonzástartományába esik. $p_2 < p < p_1$ értékek esetén a (b) és (c) ábrához hasonló vonzástartományok fordulnak elő, a kevert vonzó fixpont (esetenként ciklus, ld. 5.3. fejezet) egyre közelebb kerül a teljesen kevert ponthoz. Végül a (d) ábrán látható, mi történik $p > p_1$ értékeknél: a pontok nagyrésze egy két hosszú, vonzó ciklushoz (c_1, c_2) konvergál.

6.4. Az invariáns sík vizsgálata: összefoglalás

Az eddigiekben felderítettük, hogy a tiszta dinamikának p függvényében hány fixpontja van, valamint ezek milyen típusúak, ez alapján a paramétertartományt 5 részre bontottuk. Ezután megvizsgáltuk a kevert dinamika viselkedését a $v = 0$ síkon, és az eddig behatárolt 5 tartományt további részekre osztottuk. Tapasztalatainkat az 1. táblázatban foglaljuk össze. A számunkra érdekes paraméterek a $[p_0, p_2]$ tartományba esnek, ekkor egyetlen vonzó tiszta fixpont van. A Riemann-paraméterezéssel hozzá rendelt szám valós, így az (u, v, w) -térbeli képe a $v = 0$ síkon van, vonzástartománya pedig a teljes invariáns sík.

p	$[0, p_0]$	$[p_0, p_2]$	$[p_2, p_3]$	$[p_3, p_1]$	$[p_1, \infty)$
Vonzó tiszta fixpontok száma	2	1	1	1	0
Vonzó kevert fixpontok száma	0	0	ciklus	1	1
Vonzástartományok					
	p_i	p_0	p_2	p_3	p_1
		0.227	0.402	0.4307	0.681

1. táblázat. Összefoglaló táblázat. Az egyes p -tartományok, a megjelenő fixpontok száma és tulajdonságai, valamint a vonzástartományok vázlatai.

7. A dinamika vizsgálata a teljes Bloch-gömbben

Az eddigiekben megvizsgáltuk a tiszta állapotokra vonatkozó komplex dinamikát, valamint a kevert állapotokra vonatkozó $\mathbb{R}^3$ -dinamika viselkedését az invariáns $v = 0$ síkon. Természetesen ezzel még nem zárhatjuk ki, hogy létezik egy vonzó kevert fixpont vagy fix ciklus az invariáns síkon kívüli tartományban, ezért meg kell néznünk, milyen orbitok jelennek meg adott p mellett a Bloch-gömb belsejében. Ehhez a Bloch-gömbben véletlenszerűen választottam 2000 pontot, és kiszámítottam az ezekből induló $n = 200$ hosszú orbitok végpontjait. Ezek kivétel nélkül mindig az invariáns síkon voltak, az előző fejezetben meghatározott fixpontokban vagy ciklusokban. Ebből arra következtethetünk, hogy a belső pontok először bevonzódnak az invariáns síkra, ahol ezután a paramétertől függően a fent leírt pályákon mozognak. Olyan p paramétert keresünk, mely esetén a Bloch-gömb minden pontja kitisztul, és lehetőleg minden orbit végpontja azonos, hiszen ilyenkor pontosan meg tudjuk mondani, hogy kellően sok iteráció után a kimeneti qubit milyen állapotban van. Ennek számszerűsítéséhez tekintsük a következőket.

- Vegyünk egy $A^0 = \{\alpha^{i0}\}_{i=1}^N$, $N \in \mathbb{N}$ pontfelhőt a Bloch-gömbben.
- Legyen egy pont képe j iteráció után

$$\alpha^{ij} = \mathbf{F}^{\circ j}(\alpha^{i0}), \quad \forall i.$$

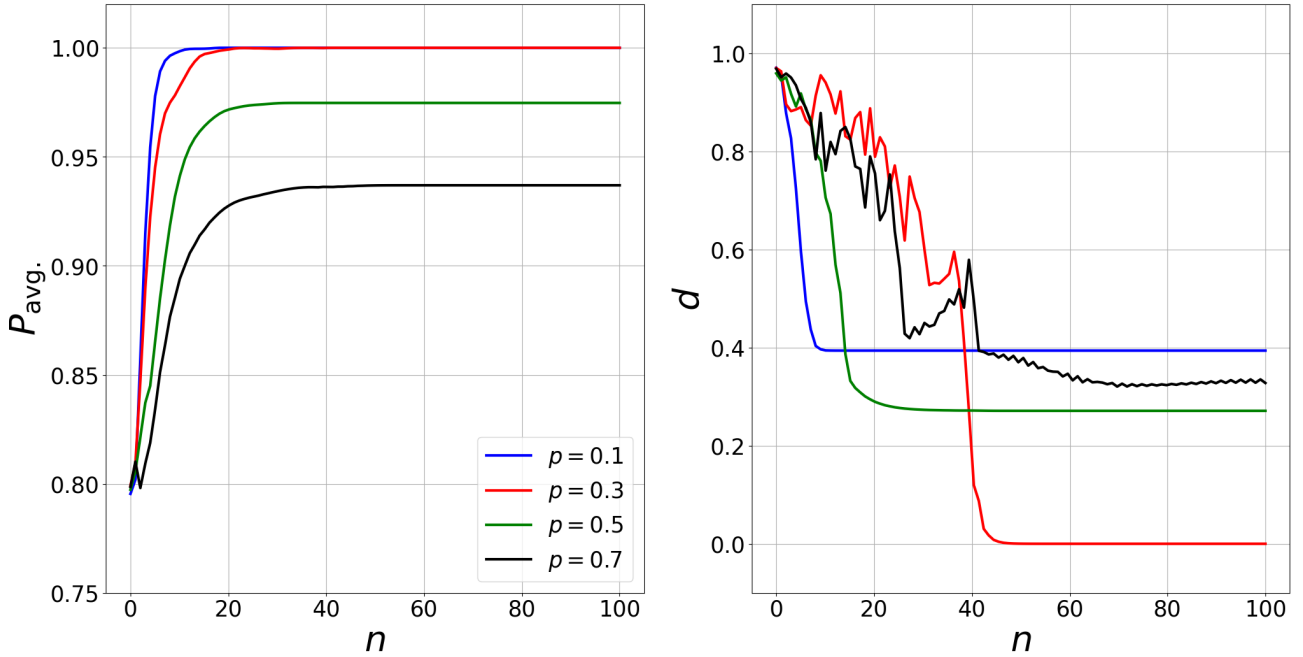
- A pontfelhő tisztaságának átlaga a j . lépésben:

$$P_{\text{avg.}}^j = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left(1 + \sum_{k=1}^3 (u_k^{ij})^2 \right).$$

- A pontfelhő méretét pedig jellemezhetjük az u, v, w irányokban vett kiterjedésének átlagával:

$$d^j = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^3 \left(\max_i \{u_k^{ij}\} - \min_i \{u_k^{ij}\} \right).$$

Ezen mennyiségek segítségével könnyedén beazonosíthatjuk az előző fejezetekben megjelenő szituációkat. Látható, hogy $P_{\text{avg.}}^j \in [0.5, 1]$ és $d^j \in [0, 1]$ minden esetben. Ha $P_{\text{avg.}}^j = 1$, az azt jelenti, hogy minden pont kitisztult j iteráció után. Ha $d^j = 0$, akkor a pontfelhő kiterjedése minden irányban 0, vagyis az összes pont egy fixpontba konvergált. Ábrázoljuk ezeket a mennyiségeket különböző p értékek esetén (ld. 20. ábra). Minden görbepár ($P_{\text{avg.}}, d$) elkészítésekor új pontfelhőt generáltam. Látható, hogy általánosságban



20. ábra. Véletlenszerűen generált pontfelhők átlagos tisztasága ($P_{\text{avg.}}$) és kiterjedése (d), maximum 100 iterációra (n), különböző paraméterek (p) esetén. Az egyes p értékekhez tartozó görbéket különböző színnel ábrázoltam.

a konvergencia lassabb, mint az invariáns síkon, ennek az az oka, hogy a pontok először eljutnak a $v = 0$ síkra, és azután futják be ugyanazokat a pályákat, melyeket az előző fejezetben jellemeztünk. A kék görbe ($p = 0.1$) esetén minden pont kitisztul, de az átlagos távolság nem 0. Ez összhangban van az elvárásainkkal, hiszen $p = 0.1$ értéknél a két vonzó fixpont

$$\alpha_f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.223 \\ 0 \\ -0.975 \end{pmatrix}, \quad \alpha_f^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.182 \\ 0 \\ 0.983 \end{pmatrix}.$$

Ha feltételezzük, hogy a pontfelhő minden pontjából indított orbit végpontja ezen fixpontok valamelyike, az átlagos kiterjedésre $d^{100} = 0.394$ adódik, ezt olvashatjuk le a 20. ábra kék görbéjéről is.

Leolvashatjuk azt is, hogy a $p = 0.5$ és $p = 0.7$ értékeknél vannak kevert fixpontok (vagy ciklusok) is, hiszen az átlagos tisztaság nem 1-hez tart. Valamint látható, hogy a $p = 0.7 > p_1$ paraméterű protokoll esetében a pontok egy része kitisztul, míg vannak olyan pontok, melyek egy vonzó kevert fixponthoz tartanak ($P_{\text{avg.}}$ nem egyhez konvergál). Emellett megfigyelhetjük, hogy a kitisztult pontok igen lassan konvergálnak a tiszta ciklusba ($n = 100$ iteráció alatt még nem konstans a pontfelhő d átlagos kiterjedése.)

Összefoglalva: numerikus szimulációink alapján feltételezhetjük, hogy az 5. és 6. fejezetekben tárgyaltak érvényesek a teljes Bloch-gömbre, és a $[p_0, p_2]$ tartományon belül hangolva a protokollt, tetszőleges kevert állapot (kivéve persze a teljesen kevert állapotot, mely ilyenkor taszító fixpont) egy jól meghatározott, tiszta állapotba konvergál, azaz ilyen protokollt alkalmazva tetszőleges preparációs zaj eliminálható (feltételezve,

hogy a posztszelekcióra használt mérések és az unitér műveletek ideálisak).

8. Összefoglalás és kitekintés

Dolgozatomban azt vizsgáltam, hogy nemlineáris kvantumprotokollok egy konkrét osztálya alkalmas lehet-e tiszta qubitállapotok desztillálására, vagyis a preparációs zaj csökkentésére. A zajos állapotokat sűrűség-operátorokkal reprezentálhatjuk, és feltesszük, hogy ezekből tetszőlegesen sok azonosat tudunk létrehozni. Az algoritmus iteratív módon működik, mérés és posztszelekció alkalmazásával, így nemlineáris időfejlődést eredményez.

Ennek dinamikáját vizsgáltam először a tiszta állapotok között, majd a kevert állapotok paraméterterének egy invariáns síkján, végül a teljes Bloch-gömbön. A protokollt jellemző valós paraméter szerint négy intervallumot¹ azonosítottam be, melyeken különböző dinamikai viselkedés tapasztalható. Megtaláltam a paraméterek egy olyan tartományát, melyre nézve tetszőleges kevert állapot (kivéve a teljesen kevert állapotot) véges számú iteráció után kitisztul, és a kimeneti állapotot egyértelműen meg tudjuk határozni. Így a konklúzió az, hogy ez a protokoll - megfelelően hangolva - valóban alkalmas lehet a preparációs zaj kiküszöbölésére.

A kutatás folytatásaként érdekes lehet megvizsgálni, hogy a beazonosított tartományon mely esetben leggyorsabb a konvergencia, valamint a protokollokat megvalósíthatjuk fizikai kvantumszámítógépeken is. További vizsgálatainkban az alkalmazott unitér műveletek, valamint a mérések hibáinak figyelembe vételét is célul tűztük ki, hogy még realisztikusabb képet kaphassunk a protokoll zaj-eliminációs képességére vonatkozóan.

A kevert állapotok vizsgálata során találtam egy érdekes szituációt amelyet ugyan sejtettek már korábban [7; 9; 10] is, de amelynek eddig nem létezett megfelelő matematikai leírása a szakirodalomban: a tiszta állapotok között taszító fixpontoknak valóban lehetnek kevert előképei a kevert dinamikában. Az általam kidolgozott leírás (6.2. fejezet) alkalmas lehet arra, hogy a kaotikus állapotok kevert előképeit egzaktul meghatározhassuk.

9. Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt köszönettel tartozom témavezetőimnek, Dr. Kálmán Orsolyának és Portik Attilának, akik fáradhatatlan munkájukkal, építő kritikáikkal, tanácsaikkal és ötleteikkel lehetővé tették e dolgozat elkészülését.

Ezúton szeretném megköszönni Dr. Kiss Tamásnak a lehetőséget, hogy a kutatócsoport² munkájába bekapcsolódhattam; az elmúlt másfél évben rengeteg szakmai tudást és tapasztalatot szerezhettem.

¹Valójában négy pár intervallumot, melyek a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.

²HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Kvantumoptika és Kvantuminformatika osztály, Kvantuminformatika és Komplex Rendszerek Kutatócsoport. [\[honlap\]](#)

A. Függelék: a kétféle dinamika megfeleltetése - bizonyítás

Bizonyítandó, hogy a 3.4. bekezdésben definiált $\mathbf{t}$, a 3.2 bekezdésben bevezetett $\mathbf{F}$ függvényekre, valamint a 3.1. bekezdésben bevezetett f függvényre igaz, hogy

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}[z]) = \mathbf{t}[f(z)]. \quad (\text{A.1})$$

Számítsuk ki először a bal oldalt.

$$\mathbf{t}[z] = \frac{1}{1 + |z|^2} \cdot \begin{pmatrix} z + \bar{z} \\ -i(z - \bar{z}) \\ 1 - |z|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{(1 - p^2)(u^2 - v^2) - 4wp}{(1 + p^2)(1 + w^2)} \\ \frac{2uv}{(1 + w^2)} \\ \frac{2w(1 - p^2) + 2(u^2 - v^2)p}{(1 + p^2)(1 + w^2)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

$$f(z) = \frac{z^2 - p}{1 + pz^2}. \quad (\text{A.4})$$

Behelyettesítve, komponensenként:

$$F_u(\mathbf{t}[z]) = \frac{(1 - p^2) \left(\left[\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \right]^2 + \left[\frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2} \right]^2 \right) - 4p \left[\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right]}{(1 + p^2) \cdot \left(1 + \left[\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right]^2 \right)} = \frac{(1 - p^2)(z^2 + \bar{z}^2) - 2p(1 - |z|^4)}{(1 + p^2)(1 + |z|^4)}, \quad (\text{A.5})$$

$$F_v(\mathbf{t}[z]) = \frac{2 \cdot \left[\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \right] \cdot \left[-i \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2} \right]}{1 + \left[\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right]^2} = -i \frac{z^2 - \bar{z}^2}{1 + |z|^4}, \quad (\text{A.6})$$

$$F_w(\mathbf{t}[z]) = \frac{2(1 - p^2) \left[\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right] + 2p \left(\left[\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \right]^2 + \left[\frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2} \right]^2 \right)}{(1 + p^2) \cdot \left(1 + \left[\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right]^2 \right)} = \frac{(1 - p^2)(1 - |z|^4) + 2p(z^2 + \bar{z}^2)}{(1 + p^2)(1 + |z|^4)}. \quad (\text{A.7})$$

Most hasonlóképpen írjuk fel a jobb oldalt is:

$$t_u[z] = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{1 + |f(z)|^2} = \frac{\frac{z^2 - p}{1 + pz^2} + \frac{\bar{z}^2 - p}{1 + p\bar{z}^2}}{1 + \left[\frac{z^2 - p}{1 + pz^2} \right] \cdot \left[\frac{\bar{z}^2 - p}{1 + p\bar{z}^2} \right]} = \frac{(1 - p^2)(z^2 + \bar{z}^2) - 2p(1 - |z|^4)}{(1 + p^2)(1 + |z|^4)}, \quad (\text{A.8})$$

$$t_v[z] = -i \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{1 + |f(z)|^2} = -i \frac{\frac{z^2 - p}{1 + pz^2} - \frac{\bar{z}^2 - p}{1 + p\bar{z}^2}}{1 + \left[\frac{z^2 - p}{1 + pz^2} \right] \cdot \left[\frac{\bar{z}^2 - p}{1 + p\bar{z}^2} \right]} = -i \frac{z^2 - \bar{z}^2}{1 + |z|^4}, \quad (\text{A.9})$$

$$t_w[z] = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 + |f(z)|^2} = \frac{1 - \left[\frac{z^2 - p}{1 + pz^2} \right] \cdot \left[\frac{\bar{z}^2 - p}{1 + p\bar{z}^2} \right]}{1 + \left[\frac{z^2 - p}{1 + pz^2} \right] \cdot \left[\frac{\bar{z}^2 - p}{1 + p\bar{z}^2} \right]} = \frac{(1 - p^2)(1 - |z|^4) + 2p(z^2 + \bar{z}^2)}{(1 + p^2)(1 + |z|^4)}. \quad (\text{A.10})$$

Láthatólag a két oldal komponensenként megegyezik, ezzel kész vagyunk.

Hivatkozások

- [1] John Preskill. Quantum Computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, 2:79, August 2018.
- [2] Andrew W. Cross, Lev S. Bishop, Sarah Sheldon, Paul D. Nation, and Jay M. Gambetta. Validating quantum computers using randomized model circuits. *Phys. Rev. A*, 100:032328, Sep 2019.
- [3] Timothy Proctor, Kenneth Rudinger, Kevin Young, Erik Nielsen, and Robin Blume-Kohout. Measuring the capabilities of quantum computers. *Nature Physics*, 18(1):75–79, Jan 2022.
- [4] Erik Nielsen, John King Gamble, Kenneth Rudinger, Travis Scholten, Kevin Young, and Robin Blume-Kohout. Gate Set Tomography. *Quantum*, 5:557, October 2021.
- [5] Adrian Ortega, Orsolya Kálmán, and Tamás Kiss. Towards a benchmark for quantum computers based on an iterated post-selective protocol, 2024.
- [6] Raymond Laflamme, Junan Lin, and Tal Mor. Algorithmic cooling for resolving state preparation and measurement errors in quantum computing. *Physical Review A*, 106(1), July 2022.
- [7] Martin Malachov, Igor Jex, Orsolya Kálmán, and Tamás Kiss. Phase transition in iterated quantum protocols for noisy inputs. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(3), March 2019.
- [8] Orsolya Kálmán and Tamás Kiss. Quantum state matching of qubits via measurement-induced nonlinear transformations. *Phys. Rev. A*, 97:032125, Mar 2018.
- [9] Attila Portik, Orsolya Kálmán, Igor Jex, and Tamás Kiss. Iterated nth order nonlinear quantum dynamics with mixed initial states. *Physics Letters A*, 431:127999, 2022.
- [10] Attila Portik, Orsolya Kálmán, Igor Jex, and Tamás Kiss. Robustness of chaotic behavior in iterated quantum protocols. *Phys. Rev. A*, 109:042410, Apr 2024.
- [11] A. Gilyén. Egy qubit-es káosz és kapcsolata a komplex dinamikus rendszerekhez, 2013.
- [12] Simon L. Péter. Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek, 2012. Egyetemi jegyzet.
- [13] John W. Milnor. Dynamics in one complex variable: Introductory lectures, 1990. Preprint, available on arXiv.