

Szigeti Boldizsár László

(Fizika Bsc, 3. év)

W-ÁLLAPOTOK DESZTILLÁCIÓJA
NEMLINEÁRIS ITERATÍV PROTOKOLL
SEGÍTSÉGÉVEL



ELTE

EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Témavezető: Dr. Széchenyi Gábor

Tartalomjegyzék

Absztrakt	3
I. Bevezetés	4
II. Elméleti háttér	5
A. Desztilláció a kvantumkommunikációban	5
B. Nemlineáris protokoll működési elve	6
C. Variációs algoritmusok, VQA és VQE	7
D. Különböző hibák és az állapothoz tartozó hűség	8
E. Betanítások különböző típusai	9
III. Numerikus kiértékelés	10
A. Tiszta állapotú hibák vizsgálata	10
a. Egylépéses maximalizáció	10
b. Kétlépéses maximalizáció	13
B. Kevert állapotú hibák vizsgálata	16
C. Kettős javítás kivitelezése	21
a. Egyoperátoros megközelítés	21
b. Alternáló megközelítés	25
IV. Analitikus kitekintés	28
A. Unitér és fixmátrix feltételek	28
B. Koherens hibák vizsgálata	30
V. Eredmények összefoglalása	31
Függelék	33
Hivatkozások	34

Absztrakt

A többrészecskés kvantum-összefonódott állapotok, mint például a Greenberger–Horne–Zeilinger (GHZ) és W állapotok különleges figyelmet kapnak a kvantum-információelméletben. Az információs protokollok sikeres működéséhez elengedhetetlenek a jó minőségű, tisztított (zajmentes) kvantumállapotok.

Pontosan ezt a célt szolgálja az általunk vizsgált desztillációs módszer, amely során több zajos állapotból egy tisztább kvantumállapotot hozunk létre. Kutatásunkban a háromrészecskés W -állapotok desztillálását egy nemlineáris protokoll segítségével valósítjuk meg, amelyhez lokális műveleteket és klasszikus kommunikációs csatornákat (LOCC) alkalmazunk. Így a megfelelő operációk elvégzését követően a kommunikáló felek klasszikus módon hitelesítik eredményüket.

A legnagyobb hűséghez tartozó lokális operátor keresését variációs kvantum algoritmussal (VQA) végezzük. A maximalizálást több különböző iterációszámmal is elvégezve, jelentősen eltérő eredményekre jutunk. Legfontosabb eredményként megmutatjuk, hogy alternáló kétlépéses protokoll segítségével hatékonyan desztillálható a W -állapot koherens és fehérzajjal terhelt hibák esetében is.

I. Bevezetés

A kvantuminformatika és kvantumkommunikáció [1] egyik központi kérdése a megbízható kvantumállapotok előállítása és megőrzése. A több részecskés összefonódott állapotok, mint például a GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) és W állapotok, jelentősek számos kvantuminformációs protokoll számára, mivel lehetővé teszik a biztonságos információmegosztást és nagy távolságokon keresztül történő kommunikációt. A valós rendszerek azonban elkerülhetetlenül zajt és hibákat hordoznak, amelyek torzítják ezeket az összefonódott állapotokat, veszélyeztetve az általuk biztosított előnyöket. Ezért alapvető fontosságú olyan eljárások kidolgozása, amelyek képesek zajos kvantumállapotok javítására.

A GHZ és W állapotok között fontos különbségek vannak, amelyek befolyásolják azok használhatóságát. A GHZ állapot, például a három-qubites $|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ egy szimmetrikus, maximálisan összefonódott állapot, ahol az egyes qubitek állapota szorosan függ a többi qubittól. Ez nagy érzékenységgel jár a hibákkal szemben, hiszen egyetlen qubit állapotának megváltoztatására és megmérésére is érzékeny. Ezzel szemben a W-állapot, például a három-qubites $|\text{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ robusztusabb a qubitek egyedi hibáival szemben, mivel egy qubit mérését követően az állapot továbbra is összefonódott maradhat. Ezért a W-állapotok különösen előnyösek a több résztvevős kvantumhálózatokban és a csoportos kvantumkulcs-megosztásban, mivel ellenállóbbak több típusú környezeti zajjal szemben [2, 3].

A kvantumállapotok desztillációja egy olyan módszer, amely lehetővé teszi, hogy több zajos kvantumállapotból tisztább, nagyobb hűségű állapotot állítsunk elő [4]. Ez a folyamat kiemelten fontos olyan esetekben, ahol az összefonódás minősége alapvetően meghatározza a kvantumkommunikációs rendszer hatékonyságát és biztonságát. A desztilláció során az összefonódott kvantumállapotok hibáit fokozatosan korrigáljuk, és iteratív lépések révén egyre tisztább állapotot hozunk létre.

A dolgozatban olyan desztillációs protokollt vizsgálunk, mellyel Rozgonyi et al. [5] cikkében sikeresen desztilláltak GHZ-állapotokat. Fő célunk ezen munkának W-állapotokra történő általánosítása. Ezen protokoll egy iteratív, nemlineáris módszeren alapszik, amelyhez a résztvevők lokális műveleteket és klasszikus kommunikációt (LOCC) alkalmaznak. A folyamat elején a résztvevők megosztanak egymás között egy zajos W-állapotot és annak másolatát, majd mindhárom fél lokális unitér műveleteket hajt végre saját qubitjein. A mérések eredményeit klasszikus kommunikációval osztják meg egymással, majd a mérési eredmények ismeretében elvetik vagy megtartják az állapotot.

A kvantumkapuk optimalizálására variációs kvantum algoritmust (VQA) [6, 7] használunk, amely ötvözi a kvantum- és klasszikus számítástechnikai módszereket. Ennek egyik legismertebb típusa a variációs kvantum eigensolver (VQE) [8, 9], ami kvantumrendszerek alapállapot energiájának meghatározására szolgál. Ez az algoritmus különösen hasznos a kvantumkémia és szilárdtestfizika problémákra, mivel nagy méretű komplex rendszerek energiaállapotainak meghatározására

is hatékonyan alkalmazható [10]. Esetünkben az algoritmust a kvantumkapuk paramétereinek finomhangolására használjuk, ezzel iteratív módon megközelítve a legnagyobb hűséget eredményező megoldást. Az algoritmus minden iteráció során kiértékeli a generált kvantumállapotot, majd a gradiens alapján módosítja a kvantumkapuk paramétereit, ezzel maximalizálva a hűséget.

A desztillációs protokoll optimalizálásakor figyelembe kell vennünk a protokoll lépésszámát is, vagyis hogy hány alkalommal ismétljük meg a módszert. Mivel túl kevés hattatás esetén a hűség nem éri el az általunk kívánt szintet, viszont túl sok hattatás akár a hűség csökkenéséhez vezethet. Az optimális egyensúly eléréséhez különböző iterációszámokat, illetve azok kombinációit vizsgáljuk. Az így kapott eredmények nemcsak a W-állapotok desztillálásában lehetnek hasznosak, hanem szélesebb körben alkalmazhatók más típusú kvantumállapotok javítására és tisztítására is.

A desztillációs protokollok fontossága jóval túlmutat a W-állapotok tisztításán, mivel más általánosabb összefonódott kvantumállapotok javítására is alkalmazható. A megfelelően optimalizált protokollok segítségével jelentősen növelhető az állapotok tisztasága, ami alapvető követelmény a kvantumhálózatok és kvantumtitkosítási rendszerek megfelelő működéséhez. Az ilyen iteratív protokollok alkalmazása lehetőséget nyújt, hogy a kvantumkommunikáció biztonságosabbá és megbízhatóbbá váljon, akár nagy zajszintek mellett is.

II. Elméleti háttér

A. Desztilláció a kvantumkommunikációban

A vizsgált protokollunk legfőbb célja a zajos kvantumállapotok desztillálása, avagy megtisztítása. A kommunikáció során alkalmazott qubitek létrehozása során keletkező bizonytalanságok, kvantumcsatornáknak fellépő hibák, valamint a környezettel való folyamatos kölcsönhatás miatt a vizsgált állapotok zajossá válnak, amelyek csökkentik az összefonódás mértékét és az állapot torzul. Mindezen jelenségek természetesen csökkentik a kommunikációs rendszer hatékonyságát, ezért az állapot tisztító protokollok elengedhetetlenek a kvantumkommunikációban.

A desztilláció pontosan ezt a problémát oldja meg: helyreállítja a kvantumállapotok koherenciáját, ami kulcsfontosságú például kvantumkulcs-megosztási rendszerek (QKD) [11] és egyéb kvantumhálózatok hosszú távú, biztonságos működéséhez. A legegyszerűbb QKD rendszer hagyományosan két fél közötti biztonságos kommunikációra alkalmas, amely nem feltétlen elegendő modern hálózatok kialakítására. Ez a hiány vezet el a Quantum Conference Key Agreement (QCKA) protokollhoz [12], amely több szereplő között is képes közös kulcs létesítésére. Ez lehetővé teszi, egy konferencia vagy egy csoport résztvevői közötti egyetlen kvantumkulcs megosztását, amely csoportos titkosított kommunikációra használható. Ilyen kvantuminformatikai protokollok pedig megkövetelik a több részecskés összefonódott állapotokat, mint például a GHZ és W állapotok.

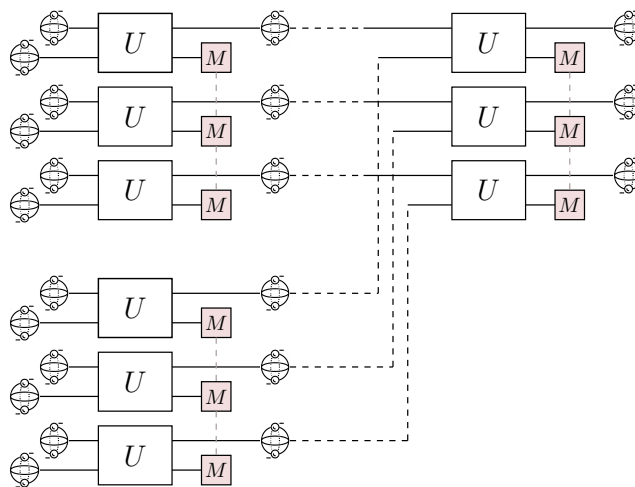
B. Nemlineáris protokoll működési elve

Ahogy azt már megfogalmaztuk, a protokollunk során zajos háromrészesekés W-állapotokat desztillálunk egy iteratív eljárással, mely során helyi műveleteket és klasszikus kommunikációt (LOCC) használunk. A rendszer kiindulópontja egy zajos háromrészesekés W-állapot, amely qubitjeit három különböző helyen lévő fél között osztunk szét. A hibamentes W-állapot összefüggése:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (1)$$

Az iteratív desztillációs lényege, hogy a W-állapot hibáit korrigálja és a végén tisztább, nagyobb hűségű W-állapotot hoz létre. A protokoll lépései a következők:

- (1) **Kezdeti állapot megosztása:** A három távoli fél megoszt egymás között két másolatot a zajos W-állapotból. Az egyik másolat qubitjei „jelzőként” szolgálnak, amivel az állapot sikerességét ellenőrzik.
- (2) **Lokális unitér műveletek:** Mindhárom fél azonos helyi, unitér műveleteket hajt végre a nála lévő két qubiten.
- (3) **Mérések:** Miután a felek elvégezték a lokális műveleteket, mindannyian megméri a jelző qubitjüket. Eredményeiket a felek klasszikus kommunikáció segítségével megosztják egymással, majd eredményeiket összevetve ha minden fél mérési eredménye nulla, konszenzus alapján megtartják vagy elvetik a másik másolatot.
- (4) **Iteráció:** A folyamat ismétlődik, ahol a protokoll minden egyes iterációt követően tovább optimalizálhatók. Az iterációk célja, hogy egyre jobb minőségű, nagyobb hűségű W-állapotokat eredményezzenek.

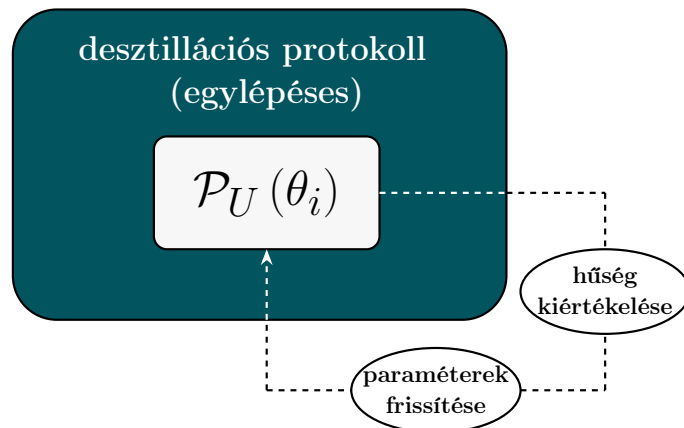


1. ábra. Kétlépéses nemlineáris protokoll vázlatos elve. A három fél U unitér műveletet hajt végre saját qubitjein, majd azt követően M mérést végeznek. A klasszikus kommunikációt követően mérési eredményektől függően a protokollt megismétlik.

A desztilláció hatékonyságát az határozza meg, hogy a kimenő állapot és hibátlan W -állapot között mekkora az átfedés. A betanítási lépések számának növelésével a rendszer egyre inkább megközelítheti a tiszta W -állapotot, azonban túl sok lépés esetén az átfedés csökkenésének kockázata is fennáll. Így fontos az iterációk számának optimális megválasztása. Éppen ezért célunk a lokális U művelet optimalizálása is, hogy a protokoll néhány lépése után a kimenet magas hűséggel közelítse meg a kívánt W -állapotot. Ezt a lentebbi C. fejezetben részletezett algoritmussal valósíthatjuk meg.

C. Variációs algoritmusok, VQA és VQE

Egy variációs kvantum algoritmus (VQA) [6, 7] a kvantum-számítástechnika és klasszikus optimalizáció kombinációján alapszik. Célja, hogy hatékonyan megoldjon összetett numerikus problémákat, amelyekhez a kvantumszámítás jelentős előnyöket nyújt. Vizsgált protokollunkhoz egy paraméterezett kvantumáramkört használunk, amelyet klasszikus algoritmus segítségével optimalizálunk. Az áramkör lefutása után a klasszikus algoritmus kiértékeli a mérési eredményt, majd visszacsatolás alapján módosítja a paramétereket, ezzel iteratíván közelítve a megoldást.



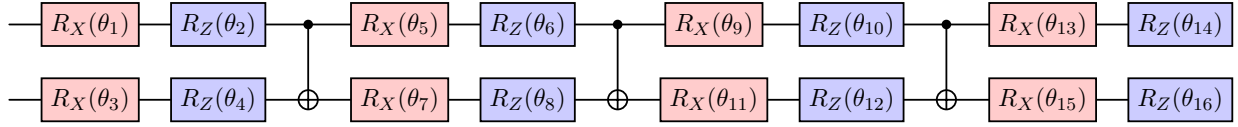
2. ábra. Variációs algoritmus vázlatos működése: Kvantum áramkör kiértékelését követően a klasszikus algoritmus az eredmény függvényében frissíti az áramkör paramétereit, majd a folyamat megismétlődik.

Ennek egy gyakran használatos példája a variációs kvantum eigensolver (VQE), amelyet kvantum-rendszerek alapállapot energiájának meghatározására használnak [8, 9]. A korábbiakhoz hasonló módon egy paraméterezett kvantumáramkörrel egy olyan kvantumállapotot hozunk létre, amely a vizsgált Hamilton-operátor alapállapotának jó közelítése. Ezután variációs módszer alapján, a mért energia klasszikus minimalizálásával az állapotenergia közelítő értéke meghatározható.

$$h_0 \leq \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \quad (2)$$

A VQE különösen hasznos a kvantumkémiai és szilárdtestfizikai problémák megoldásában, mivel hatékonyan képes meghatározni nagy méretű rendszerek Hamilton-operátorainak sajátértékeit is [10]. A protokoll numerikus vizsgálatának esetében a legnagyobb hűséghez tartozó U mátrix meg-

határozásához egy általános $SU(4)$ mátrixot kívánunk paraméterezni. Ehhez belátható, hogy egy tetszőleges két-qubites unitér operátor kapufelbontása három CNOT kapuval és tizenhat egy-qubites forgatással megvalósítható [13].



3. ábra. Általános $SU(4)$ mátrix megvalósítása egy kvantumáramkörrel (az egyrészesecsés forgatások szögparamétereit θ_i változók jelölik)

A vizsgálatunk során ezt a paraméterezett áramkört alkalmazzuk az 1. ábrán látható protokoll egyszeres (vagy többszörös) lépéseinek megvalósítására. Ahol a 3. ábrán látható kapuk reprezentációi egy $(|0\rangle, |1\rangle)$, illetve két-qubites $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$ számítási bázisokban:

$$R_X(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}X\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad R_Z(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}Z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A kezdeti állapothoz ezen áramkör különböző θ_i paramétereit minden alkalommal a $\theta_i \in [0, 2\pi]$ intervallumról véletlenszerűen választjuk.

D. Különböző hibák és az állapothoz tartozó hűség

Az állapotok tisztítását két különböző hibatípus esetén vizsgáljuk, ezek a tiszta (koherens) és a kevert (inkoherens, speciálisan fehérzaj) hibák. Tiszta esetben az állapotok kis mértékű komponensenkénti variációját vizsgáljuk. Például:

$$|\psi_0\rangle = \mathcal{N}(|W\rangle + \varepsilon|000\rangle) \quad (4)$$

A zaj erősségét jellemző ε paraméter véletlenszerű megválasztása minden komponens esetén a $\varepsilon \in [0, 0.4]$ valós intervallumról történik, hogy különböző zajszintek esetében is működjön a desztilláció. Az algoritmusunk célja, hogy a kimenő állapot minél nagyobb hasonlóságot mutasson a zajmentes W -állapothoz. Ezen hasonlóság jellemzéséhez bevezetünk egy hűség (avagy fidelity) mennyiséget, amellyel az állapotok közötti átfedés jellemezhető.

$$\mathcal{F} = |\langle W|\psi_0\rangle|^2 \quad (5)$$

A kezdeti állapot véletlenszerűen megválasztott paramétereinek javításához a hűség gradienseit határozzuk meg. Vagyis vizsgáljuk, hogy a különböző paraméterek változtatása a hűség értékére milyen

hatást gyakorol. Ennek becslésére egy különbségi hányadost alkalmazunk, amelyben tetszőleges apró δ mértékben módosítjuk az unitér operátor felbontásában szereplő egy-qubites műveletek forgási szögét.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta_i} \approx \frac{\mathcal{F}(\theta_i + \delta) - \mathcal{F}(\theta_i)}{\delta} \quad (6)$$

Ahol δ értékét a módszer során adaptív módon változtatjuk. Ezután pedig a kapott gradienssek alapján módosítjuk az eredeti paramétereket. A hűség maximalizálásának érdekében gradiensnövelési algoritmust (gradient ascent) alkalmazunk. Ez a megközelítés éppen ellenkezője a gyakran alkalmazott gradienscsökkentésnek (gradient descent) [14], amelyet költségfüggvény minimalizálására használunk.

$$\theta'_i = \theta_i + \alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta_i} \quad (7)$$

Ahol α a változtatás mértékét jellemző tanulási ráta (learning rate). Ennek megválasztásához egy olyan módszert alkalmazunk, amely szintén adaptív módon módosítja ennek értékét is. Ezen lépéseket minden komponens esetében, azonos súlyozással tekintjük.

Kevert bementi állapotok esetében is vizsgáljuk a protokoll desztillációs hatékonyságát. Ilyenkor az állapotokat azok sűrűségmátrixszával adjuk meg [15], amely tökéletesen tiszta állapot esetén éppen az állapotvektor diádjával definiálható.

$$\rho_W = |W\rangle \langle W| \quad (8)$$

A dolgozatban kevert állapotként speciálisan a fehérzajjal kevert, izotróp W -állapotot vizsgáljuk.

$$\rho_0 = (1 - \varepsilon)\rho_W + \frac{\varepsilon}{8}I_8 \quad (9)$$

Ahol ε a zaj erősségét jellemzi, I_8 pedig a három-qubites Hilbert-tér identitása. Sűrűségmátrix esetén pedig a hűséget jellemző mennyiség az alábbiak szerint definiálható.

$$\mathcal{F} = \langle W | \rho_0 | W \rangle \quad (10)$$

Célunk, hogy a fejezetben felsorolt különböző jellegű (koherens és inkoherens) hibák esetében is desztillálni tudjuk a W -állapotot, így későbbiekben ezen hibák együttes hatását is vizsgáljuk.

E. Betanítások különböző típusai

Természetesen az állapot hűsége, valamint a protokoll hatékonysága mellett a klasszikus optimalizálás számítási ideje sem elhanyagolható. Gyakorlati alkalmazás esetén elengedhetetlen, hogy egy kommunikációs rendszer nem csak hatékony, de annak betanítása megfelelően gyors is legyen. Azonban az eltérő hibatípusok mellett az algoritmus betanításának módjából is adódhatnak eltérő

hatékonyságú és stabilitású módszerek, amelyek különböző mértékben képesek fenntartani, illetve javítani az állapot hűségét.

Dolgozatunkban a különböző hibatípusok mellett a betanításhoz használt lépésszám hatását is vizsgáljuk. Ehhez a két legegyszerűbb esetet alkalmazzuk, az egy-, illetve kétlépéses protokollokat. Azaz minden maximalizációs lépésnél az esettől függően egy, vagy két protokoll végrehajtását követően vizsgáljuk a kimenő állapot W-állapottal vett átfedését. Ezek minden hibatípusnál teljesen eltérő eredményességű és stabilitású megoldásokat mutatnak. Dolgozatunk felépítésében a modellek különböző, egyre összetettebb példáit mutatjuk be, a több lépést követő stabil eredmények érdekében. Emellett későbbi fejezetekben több hibatípus együttes desztillációjának érdekében más, alternáló kétlépéses protokollokkal is foglalkozunk, amelyekkel két különböző operátor váltakozó hatását vizsgáljuk.

III. Numerikus kiértékelés

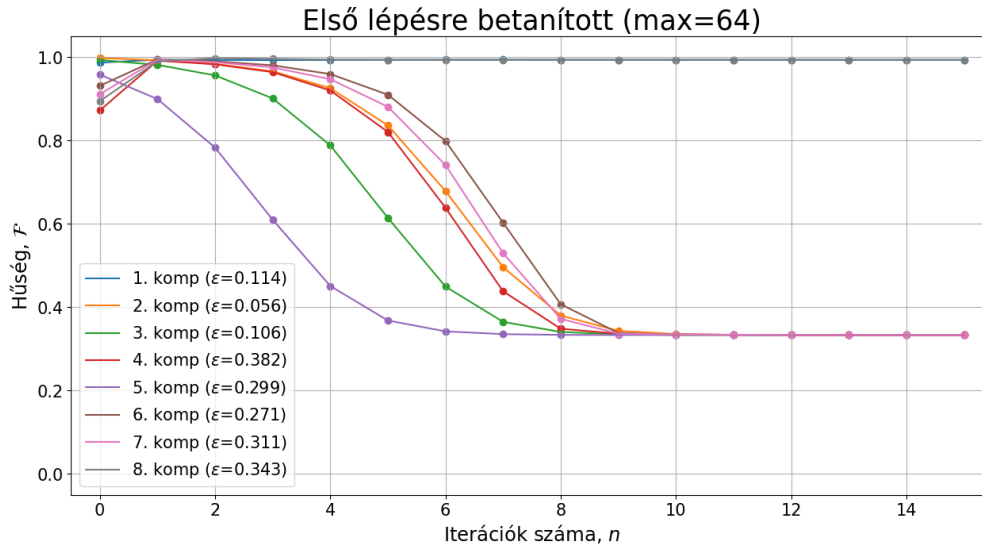
A. Tiszta állapotú hibák vizsgálata

Koherens hibákra való betanításhoz minden állapotkomponens esetét a 4. egyenletben részletezett variáció szerint külön vizsgáljuk, majd a betanításhoz szükséges végső költségértékként a 8 hűség együttes összegét tekintjük.

a. Eglépéses maximalizáció

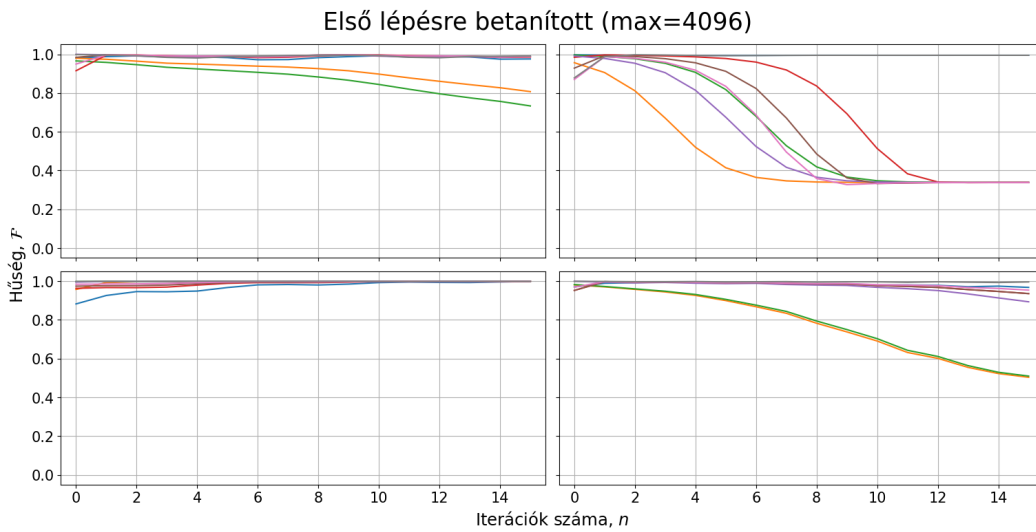
Kezdetként tekintsük a legegyszerűbb esetet, ahol az első lépésre maximalizáljuk a hűség költségfüggvényét. Ehhez elsőként véletlenszerűen kiválasztjuk mind a 16 szögparaméter kezdeti értékét a korábban említett $\theta_i \in [0, 2\pi]$ uniform intervallumról. Emellett minden állapotkomponenshez választunk egy véletlenszerű zajértéket az $\varepsilon \in [0, 0.4]$ intervallumról. Ezután ezen kezdeti értékekkel elvégezzük a variációs algoritmus maximalizálási lépéseit. A számítási idő csökkentésének érdekében először limitáljuk a betanítási iterációszámot, vagyis hogy hány alkalommal frissítjük a szögparaméterek értékeit. Tekintsünk ehhez elsőként egy kisebb értéket, például limitáljuk 64-re.

A betanítást követően 16 szögparamétert kapunk eredményként, amelyekkel definiált operátor remélhetőleg az első lépésben maximalizálja az eredetileg zajos kimeneti állapot hűségét. Az eredmény szemléltetésének érdekében ezután a választott zajértékekkel, valamint a meghatározott szögparaméterekkel definiált operátorral végrehajtjuk a desztillációs protokollt, több lépéssel megismételve. Ezzel tudjuk majd ellenőrizni, hogy az eredményünk több lépést követően is képes-e stabilan fenntartani a megtisztított állapotot. A koherens hibák desztillációjának vizsgálatát az állapot mind a 8 komponensének esetében, különböző hibaértékek mellett végeztük. Végezetül pedig a különböző komponensekhez tartozó szimulációk eredményeit egy közös ábrán szemléltetjük, amely a 4. ábrán látható.



4. ábra. Első lépésre betanított, kevés betanítási iterációs számú szimulációk eredménye (az adatokat összekötő vonalak a szemmel követés megkönnyebbítését szolgálják)

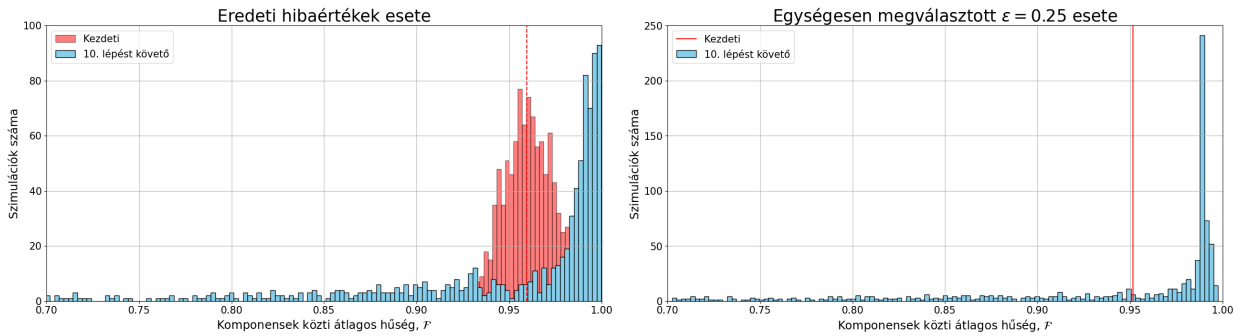
Az ábráról leolvasható, hogy az első lépésben a hűség valóban megemelkedik közel mindegyik komponens esetében (hisz éppen ezen feltételre tanítottuk be), azonban további lépéseket követően kevesebb mint felére zuhan. Lehetséges, hogy ez a bizonytalanság a korlátozott betanítási iterációs számból is adódik. Így tekintsünk egy jelentősen nagyobb, 4096 betanítási lépésszámot is. A lehetséges megoldások nagyobb lefedéséhez pedig ezen megnövelt iterációs számmal 1000 különböző kezdeti szögparaméterrel és zajkombinációval végeztünk első lépésre betanított szimulációkat. Ezután mindegyik szimuláció esetében az eredményként kapott paraméterekkel, valamint a betanításukhoz használt saját zajértékeikkel végrehajtottuk a protokoll lépéseit 15 alkalommal. Tekintsük ezeknek néhány szemléletes példáját, amelyek a 5. ábrán láthatók.



5. ábra. Első lépésre betanított, magas betanítási iterációs számú szimulációk négy példája, minden részában az adott szimuláció nyolc komponensének eredményei láthatók

Minden részábrán egy különböző kezdeti szögparaméterekből kiinduló és eltérő zajkombinációkkal végzett szimuláció 8 végeredménye látható. Megfigyelhető, hogy különböző kezdeti feltételek mellett teljesen eltérő eredményekhez jutunk. Pontosan ezért törekedtünk a lehetséges állapotok lehető legnagyobb lefedésére, hogy a lokális maximumokat a lehető legjobban kiküszöböljük. Így viszont már sokkal 'stabilabb' megoldásokat is kapunk, amelyek több lépést követően is közel megtartják hűségüket. Vagyis valóban érdemes hosszabb számítási idő mellett, nagyobb betanítási iterációszámmal dolgoznunk. Azonban ezeket egyelőre csak egy komponensenkénti hibaértékre vizsgáltuk, amelyekkel maga a betanításuk zajlott. Ennek tudatában tekintsük az elvégzett szimulációk stabilitását más hibák mellett is.

Ehhez vizsgáljunk egy általánosan megválasztott $\varepsilon = 0.25$ zajértéket minden állapotkomponens esetében. Ezután vizsgáljuk az 1000 betanításból eredményezett operátorok hatását ezen egységes hibaérték mellett. Egy ilyen eredmény több lépést követő 'stabilitásának' jellemzésére használjuk például a 10. lépés utáni, 8 komponens közt eloszló átlagos hűséget. Emellett hasonló módon tekintjük ezt a stabilitást az eredeti hibaértékek esetében is. Mindkét hibaérték esetében meghatároztuk a szimulációk átlagos kezdeti hűségét, amelyek $\mathcal{F}_0 \approx 0.95957$ és $\mathcal{F}_0^{(0.25)} \approx 0.95167$ értékeknek adódtak, amelyeket a 6. ábrán vörös vonalakkal szemléltettünk. Ezen értékeket tekintve a hűségeket tényleg csak kis mértékben módosítottuk.



6. ábra. Eglépéses szimulációk eredeti és általánosan megválasztott $\varepsilon = 0.25$ hibaértékkel vizsgált kezdeti és 10. lépést követő hűségeloszlása, $\overline{\mathcal{F}}_{10} \approx 0.87489$ és $\overline{\mathcal{F}}_{10}^{(0.25)} \approx 0.85440$ átlagértékekkel

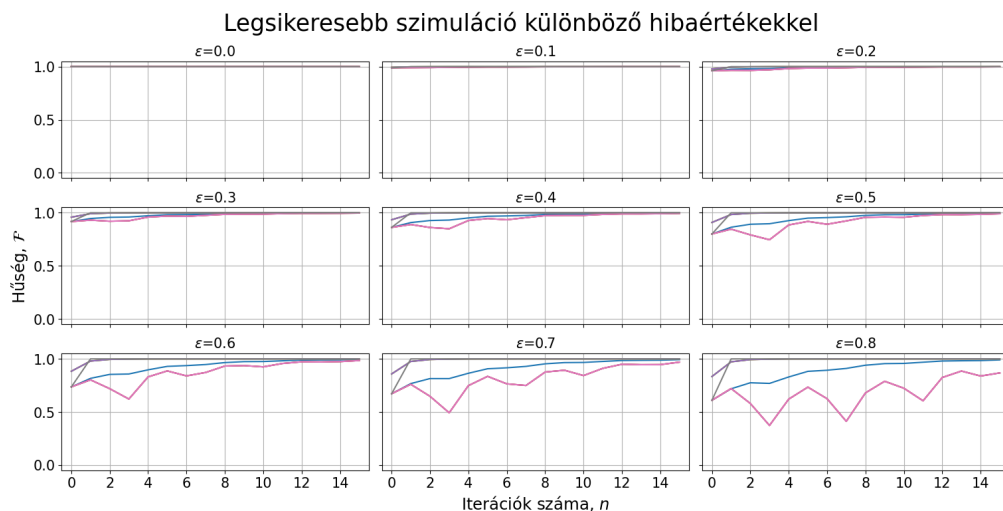
Az ábrákat tekintve látható, hogy a minták nagyobb hányadában a protokoll sikeresnek tekinthető. Ez a tiszta állapotú hiba természetéből is adódik, hiszen egy komponens esetében általánosan csak kis mértékben képes az állapot torzítására. Emellett megfigyelhető, hogy egységesen választott hiba esetén az adatok csúcsa kissé visszábbtolódik, viszont a hűségek szórása jelentősen csökken és központosulnak. Vagyis a sikeresnek vélhető szimulációk egységes hibaérték esetén közel azonos eredményt mutatnak. Eredeti hibáikat tekintve a szimulációk 55.4%-a, egységes hiba esetében pedig 53.1%-a javított a saját kezdeti állapotához képest. Mindkét feltételt együttesen tekintve pedig ez az arány 51.7%-nak adódott. Az arányokat tekintve tehát általánosságban az ilyen módon betanított operátorok többszörös alkalmazása nem feltétlen javasolt.

Ezután a sikeres szimulációk közül emeljük ki a három legmagasabb hűséghez tartozót. Ezek paraméterei az 1. táblázatban találhatók.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$U_{te}^{(1)}$	1.735	1.260	6.061	2.865	2.713	3.212	3.202	2.443
$U_{te}^{(2)}$	2.110	3.821	3.673	4.208	0.900	1.916	0.000	4.674
$U_{te}^{(3)}$	0.481	3.511	6.281	6.278	1.574	5.278	3.603	3.141
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$U_{te}^{(1)}$	1.498	4.113	6.037	5.940	2.078	1.092	1.400	3.446
$U_{te}^{(2)}$	4.712	0.020	6.259	3.963	5.409	2.033	1.304	4.923
$U_{te}^{(3)}$	6.283	2.534	4.277	4.768	4.714	5.800	3.202	3.597

1. táblázat. Három legnagyobb hűséghez tartozó, első lépésre betanított szimuláció operátorának paraméterei (3 tizedesjegyre kerekítve)

Ezen eredményeket a kevert állapotok későbbi B. alfejezetében tovább vizsgáljuk. Végezetül pedig tekintsük csak a legnagyobb hűséghez tartozó $U_{te}^{(1)}$ operátort, és vizsgáljuk ennek hatását különböző nagyságú hibák esetében. Ehhez kilenc különböző hibaérték mellett tekintettük a desztillációs protokoll első 15 lépésének eredményét.



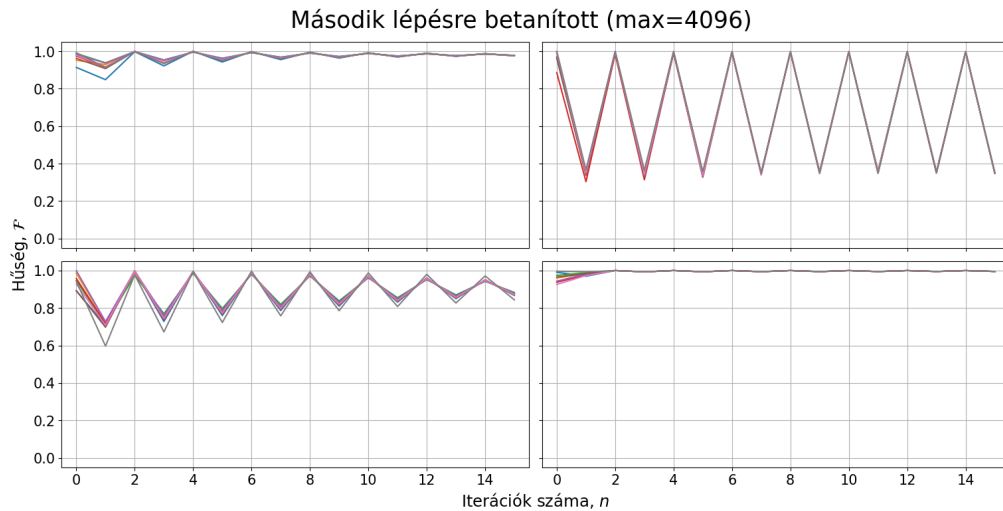
7. ábra. Legnagyobb hűséghez tartozó, első lépésre betanított szimuláció hatása különböző erősségű koherens hibák esetében

Az ábrán látható, hogy a desztilláció minősége csakis nagyobb hibák esetén kezd jelentősebben romlani, de több lépést követően is képes a javított állapot stabil megtartására, akár nagyobb koherens zaj esetén is. Emellett a protokoll tiszta W-állapotot ($\varepsilon = 0$) is képes variáció mentesen fenntartani.

b. Kétlépéses maximalizáció

A következőkben tekintsük a költségfüggvény második lépésre betanított maximalizálását is. Tehát a korábbiakkal ellentétben most minden betanítási iteráció során a kimeneti állapotot két desztillációs lépést követően vizsgáljuk. Bár ennek szimulációja akár jóval hosszabb időt vehet igénybe,

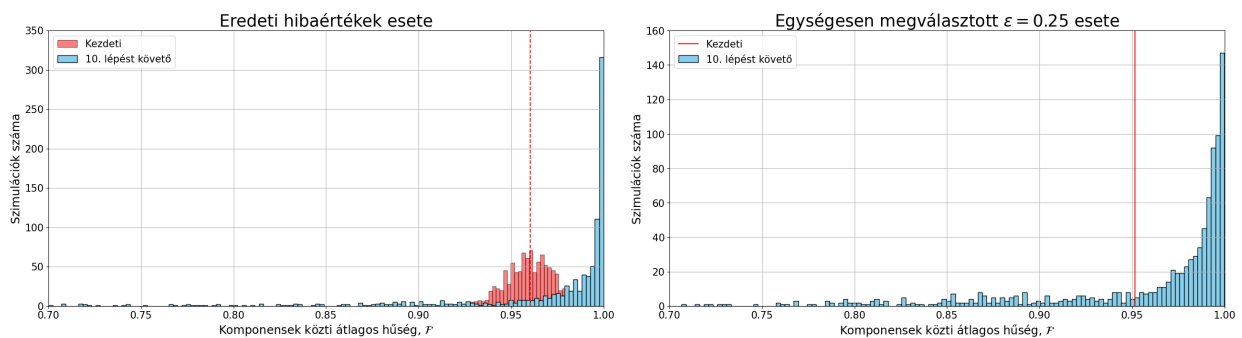
a protokoll többszöri lépését követő hatékony desztilláció érdekében érdemes lehet tekinteni ennek lehetőségét is. Ezen módszerrel ismételten 1000 különböző szögparaméterrel és hibakombinációval végeztünk szimulációkat, ebben az esetben a második lépésre betanítva. Ezután az eredmények saját hibaértékeikkel tekintett desztillációs hatását vizsgáltuk több lépést követően is. Ezen szemléltetések néhány példája a 8. ábrán látható.



8. ábra. Második lépésre betanított szimulációk négy példája

A korábbi eredmények mellett, kis és nagyobb léptekben oszcilláló eredményeket is kapunk, amelyek fokozatosan növelik, illetve több lépést követően is stabilan fenntartják a hűséget. Ez a váltakozó tulajdonság a kétlépéses betanítás természetéből adódik, hisz a módszer első (illetve további páratlan) lépésében megengedőek vagyunk az állapot jelentősebb eltérésére is. Így a protokoll általánosságban csak páros lépésszám esetén képes megfelelően desztillálni az állapotot.

Ezután az 1000 db eredményt hasonló módon kiértékeljük saját és egy általánosan megválasztott $\varepsilon = 0.25$ hibaérték esetében is. Ehhez ismételten tekintsük a 10. desztillációs lépést követő átlagos hűséget. Mindkét hibaérték figyelembevételével az eredmények több mint 67.3%-a javított kezdeti hűségén, ami az eddigiekhez képest valóban egy jóval nagyobb arányt jelent. Az átlagos kezdeti hűségek pedig $\mathcal{F}_0 \approx 0.96043$ és a már ismert $\mathcal{F}_0^{(0.25)} \approx 0.95167$ értékeknek adódtak.



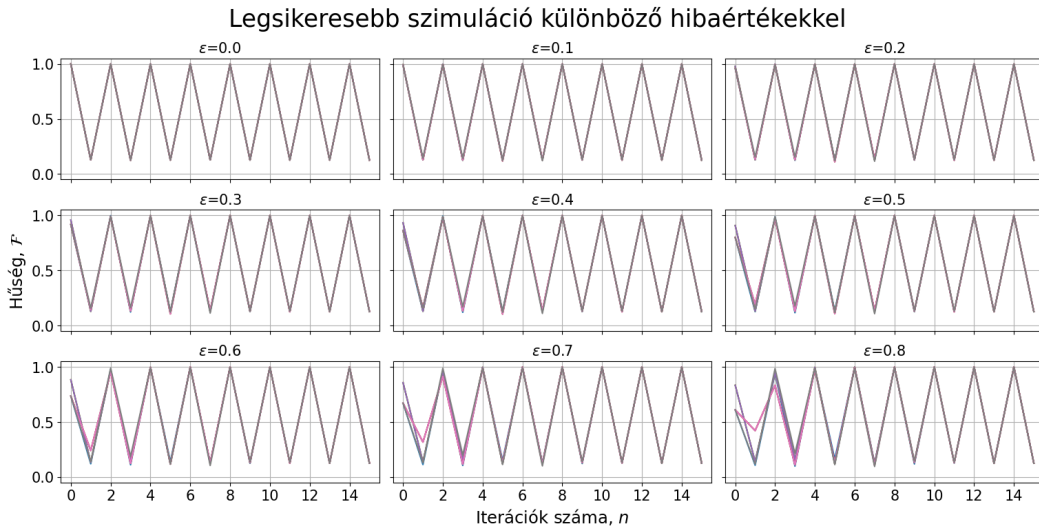
9. ábra. Kétlépéses szimulációk eredeti és általánosan megválasztott $\varepsilon = 0.25$ hibaértékkel vizsgált kezdeti és 10. lépést követő hűségeloszlása, $\overline{\mathcal{F}}_{10} \approx 0.94118$ és $\overline{\mathcal{F}}_{10}^{(0.25)} \approx 0.92388$ átlagértékekkel

Ezek szerint a második lépésre betanított protokoll valóban hatásosnak bizonyulhat. Bár a kirívó eredményeket is tartalmazó átlagértékek továbbra sem lépték túl a kezdeti hűségértékeket, a kétlépéses protokoll esetében ezek jelentősen javultak és az egyéni javítások aránya is lényegesen megemelkedett. Emellett a hiba egységesítésével a maximum csúcs sem tolódott el, csak kissé lelapult. Emeljük ki ezek közül is a három legsikeresebb eredményt.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$U_{tk}^{(1)}$	0.634	2.075	5.197	6.188	4.710	2.324	0.960	4.120
$U_{tk}^{(2)}$	1.425	5.958	1.430	3.680	5.371	0.756	1.073	5.380
$U_{tk}^{(3)}$	3.933	4.010	0.042	5.910	6.116	5.881	4.091	2.001
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$U_{tk}^{(1)}$	0.091	5.091	0.678	2.656	1.797	2.707	0.230	5.833
$U_{tk}^{(2)}$	1.653	4.606	2.985	6.280	2.500	0.910	1.428	1.762
$U_{tk}^{(3)}$	3.721	3.374	2.031	1.785	1.596	4.427	5.313	4.784

2. táblázat. Három legnagyobb hűséghez tartozó, második lépésre betanított szimuláció operátorának paraméterei (3 tizedesjegyre kerekítve)

Végezetül pedig tekintsük a legnagyobb hűséghez tartozó $U_{tk}^{(1)}$ operátor hatását különböző nagyságú hibaértékek esetében. Ehhez a már korábbiakban használt hibaértékek mellett vizsgáljuk több lépést követő hatását.



10. ábra. Legnagyobb hűséghez tartozó, második lépésre betanított szimuláció hatása különböző erősségű koherens hibák esetében

Szembetűnő, hogy a 7. ábrán látottakhoz képest egy sokkal stabilabb, nagyobb hibákra is közel tökéletes megoldást tapasztalunk, illetve ez a megoldás is képes stabilan fenntartani a tiszta W-állapotot páros lépésszámok esetén. Azonban eddigiekben még szigorúan csak tiszta állapotú hibákat vettünk figyelembe, amelyek a betanításhoz használt intervallumon ($\varepsilon \in [0, 0.4]$) csak kis mértékben módosítják az állapot kezdeti hűségét. Így a teljesség érdekében következőleg a fehér zajjal kevert állapotokat tekintjük.

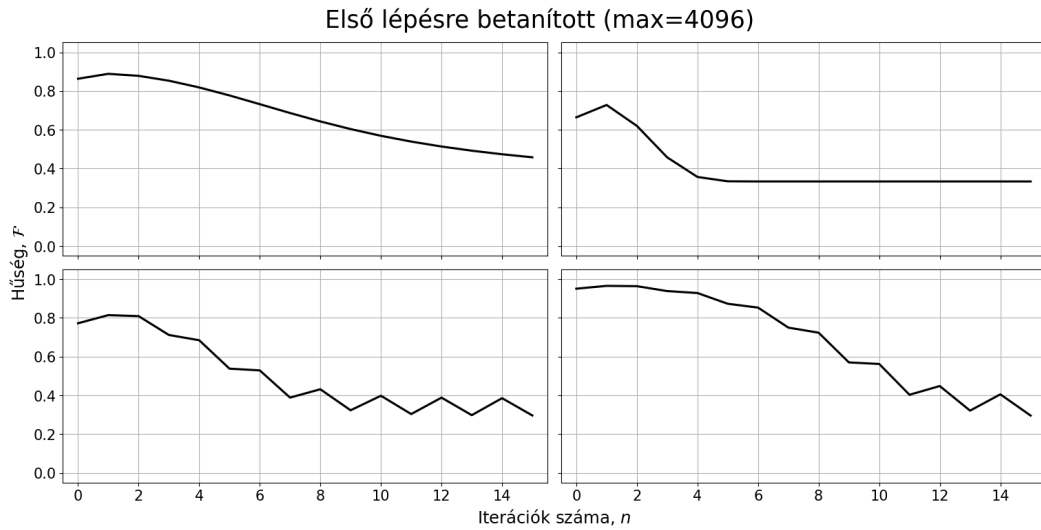
B. Kevert állapotú hibák vizsgálata

Korábban láthattuk, hogy a koherens hibákra betanított operátorok tiszta állapotokat hatékonyan tudtak desztillálni, akár nagyobb zajértékek esetén is. Így elsőként tekintsük az eddigi sikeres eredményeinket kevert bemeneti állapotokra is. Ehhez egységesen egy $\varepsilon = 0.25$ hibaértéket választva határozzuk meg az 1. és 2. táblázatok első soraiban található legsikeresebb eredmények desztillációs hatását több lépésen keresztül tiszta és a 9. egyenletben részletezett, fehér zajjal kevert hibák esetében is.



11. ábra. Koherens hibákra betanított, egylépéses (bal) és kétlépéses (jobb) eredmények tesztelése tiszta (fent) és kevert (lent) hibák esetén, a vastag fekete vonalak a kevert állapotot jelképezik

Természetesen már a kezdeti állapotokon is látható, hogy egy adott zajérték a két hibatípus esetében teljesen más mértékű torzulást eredményez. Emellett viszont az is egyértelmű, hogy az eddigiekben sikeresnek vélt eredményeink kevert állapotú hibák desztillációjára nem hatásosak, hiszen az állapotok hűsége mindkét betanítási módszer esetében néhány lépést követően teljesen leromlik. Ebből adódóan következőleg vizsgáljunk kevert állapotú hibákra betanított protokollokat. Bementi állapotként most a 9. egyenletben felírt, fehérzajjal kevert W-állapotot vesszük, így ennek hűségét tekintsük teljes költség értéként. Mint a tiszta állapotoknál, elsőként vizsgáljuk a kevesebb számítást igénylő, egy lépésre betanított protokollt, illetve annak tulajdonságait. A koherens állapottal ellentétben a kevert állapotra történő betanításhoz szimulációként elegendő egyetlen hibaérték kiválasztása, amit továbbra is az uniform $\varepsilon \in [0, 0.4]$ intervallumról választunk. A legtöbb lehetséges állapot lefedéséhez ismételten 1000 különböző szögparaméterekkel és fehérzaj értékkel végeztünk szimulációt. Ezután pedig hasonló módon vizsgáljuk ezen eredmények saját, betanításhoz használt hibaértékekkel desztillációs hatását több lépésszámot követően. Szemléltetésként néhány eredmény a 12. ábrán látható.



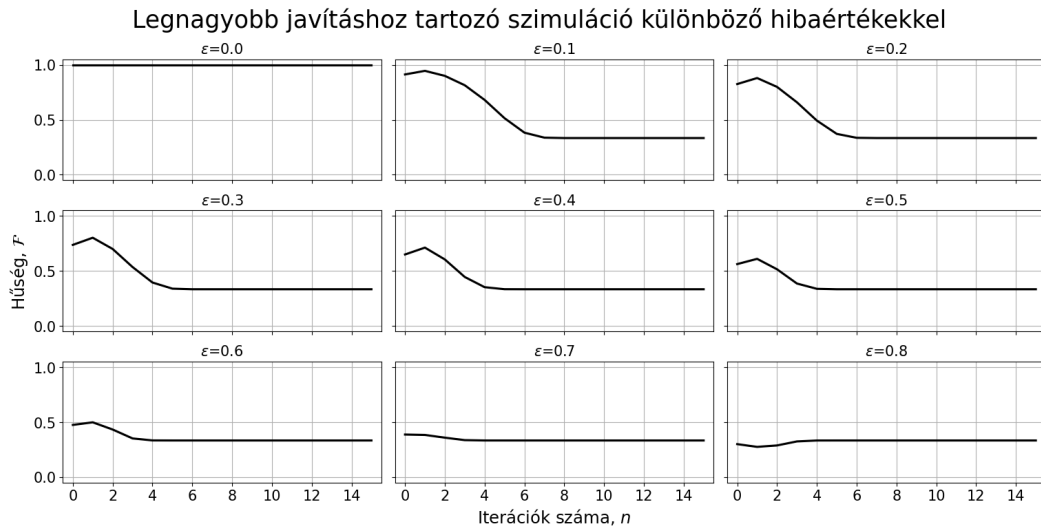
12. ábra. Első lépés és kevert állapotra betanított szimulációk négy példája

Bár az eredmények között kis mértékben oszcilláló eredmények is fellelhetők, ez egyik esetben sem befolyásolta a görbe összesített alakját. Megfigyelhető, hogy az eredmények első lépést követően jó arányban javítanak a kezdeti állapotukon (hiszen erre lettek betanítva), azonban több lépést követően a hűség egységesen kevesebb mint felére csökken. Ezen állítás az 1000 szimuláció összességét tekintve is kijelenthető. Vagyis egyetlen az eddigiekben keresett 'stabil' megoldást sem sikerült találnunk, amely több lépést követően is képes lenne fenntartani kezdeti állapotát. A tekintett szimulációk első lépésükben 97.8%-os sikerességgel javítottak kezdeti állapotukhoz képest, viszont általánosságban ez csakis apró mértékben történt (a legnagyobb emelkedés $\Delta\mathcal{F} \approx 0.06561$ értékű volt). Ezen maximális eltéréshez tartozó eredmény paramétereit a 3. táblázatban rögzítettük.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$U_{ke}^{(1)}$	3.142	3.077	2.548	2.280	0.000	2.022	5.510	0.000
$U_{ke}^{(2)}$	3.529	2.138	3.142	1.739	2.758	3.349	3.142	6.283
$U_{ke}^{(3)}$	4.989	1.597	1.258	4.842	3.888	1.374	6.146	4.685
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$U_{ke}^{(1)}$	3.142	4.224	4.824	4.621	6.283	3.191	3.402	1.785
$U_{ke}^{(2)}$	5.572	1.106	6.283	4.158	0.210	4.712	5.922	1.633
$U_{ke}^{(3)}$	4.725	4.712	4.623	3.417	1.672	1.571	4.394	3.690

3. táblázat. Maximális javításhoz tartozó szimuláció paramétereit (3 tizedesjegyre kerekítve)

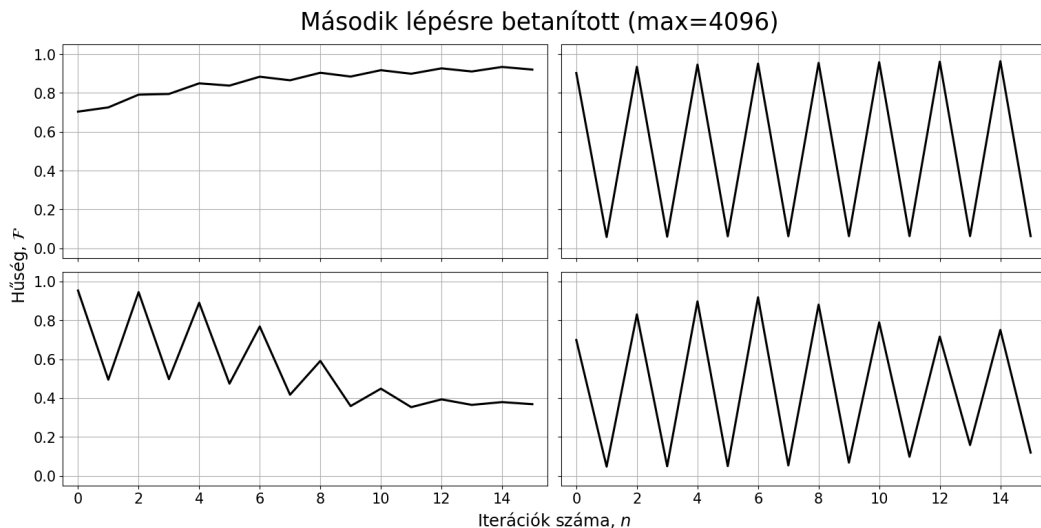
Érdekességképp pedig tekintsük a táblázat első sorában rögzített $U_{ke}^{(1)}$ operátor hatását különböző erősségű fehérzajjal kevert állapotok esetében. Ezek szemléltetése a 13. ábrán látható.



13. ábra. Legnagyobb javításhoz tartozó, első lépésre betanított szimuláció különböző erősségű kevert állapotú hibák esetében

Látható, hogy sajnálatosan több lépést követően ez a szimuláció is bármely zajérték esetén egy $\mathcal{F} \approx 0.33333$ körüli értékhez tart. Ezen speciális érték abból adódott, hogy a kezdeti állapot éppen az 1. egyenletben definiált W-állapot összegében szereplő egyik taghoz konvergált.

Korábban láthattuk, hogy a koherens állapotokra betanított eredmények kevert állapotú hibákat nem tudták megfelelően desztillálni. A fordított eset vizsgálatához további 1000 betanítást végeztünk a protokoll második lépésére is, természetesen minden szimuláció esetében eltérő kezdeti szögparaméterekkel és zajértékekkel. A 14. ábrán tekintsük néhány példa több desztillációs lépést követő hatását saját, betanításra használt hibaértékekkel.



14. ábra. Második lépés és kevert állapotra betanított szimulációk négy példája

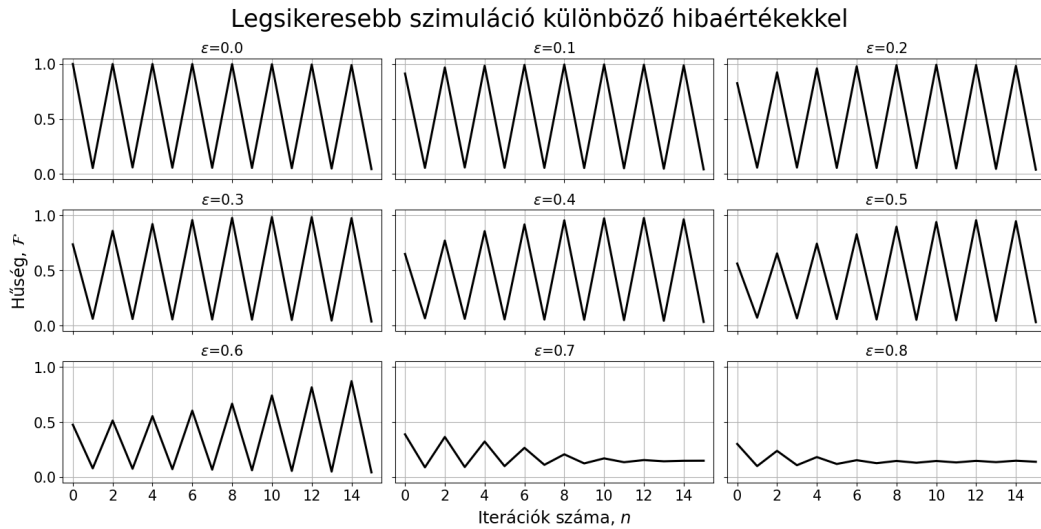
Ezen eredmények már sokkal inkább hasonlítanak a 8. ábrán tapasztalt kis és nagy mértékben oszcilláló, stabil megoldásokra. A kevert állapotú zaj mértékéből adódóan viszont olyan eredményeket is tapasztalhatunk, amelyek húsége a protokoll több lépését követően csökkenni kezd, vagy akár

teljesen lecseng. Összességében az elvégzett szimulációk 67.8%-a javított kezdeti állapotán a 10. lépést követően is. Amennyiben a betanításokhoz használt hibaértékek helyett egy általánosított ($\varepsilon = 0.25$) hibát tekintünk, ez az arány 68.0%-ra emelkedik. Mindkét hibaértéket figyelembe véve pedig a szimulált megoldások 64.9%-a tekinthető stabilnak, ami a hiba természete mellett egy nagyszerű arány. Ezen szimulációk három legstabilabb megoldását a 4. táblázatban rögzítettük.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$U_{kk}^{(1)}$	0.067	2.725	4.689	5.258	1.980	1.877	4.688	4.401
$U_{kk}^{(2)}$	3.126	3.462	4.534	0.726	1.174	4.249	4.783	4.627
$U_{kk}^{(3)}$	0.546	1.091	2.404	2.979	2.243	1.483	3.251	1.013
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$U_{kk}^{(1)}$	2.389	5.324	4.937	3.298	0.304	4.403	3.253	4.708
$U_{kk}^{(2)}$	0.886	0.604	5.197	0.006	2.841	2.760	1.567	2.567
$U_{kk}^{(3)}$	5.219	1.628	1.165	0.652	4.473	2.872	2.188	4.560

4. táblázat. Három legnagyobb hűséghez tartozó, kevert állapotú hibára betanított kétlépéses szimuláció paraméterei (3 tizedesjegyre kerekítve)

Ezután tekintsük a legsikeresebb $U_{kk}^{(1)}$ operátorhoz tartozó desztillációs protokoll több lépést követő hatását különböző kevert állapotú fehérzajértékek esetében. Ezen tapasztalatokat a 15. ábrán szemléltettük.



15. ábra. Legnagyobb hűséghez tartozó, második lépésre betanított szimuláció hatása különböző erősségű kevert állapotú hibák esetében

Látható, hogy a megoldás egészen $\varepsilon = 0.6$ értékig bár csökkenő hatékonysággal, de stabilan képes desztillálni zajos kevert állapotokat. Természetesen ezek olyan magas hibaértékek, amelyeket már a betanításnál sem tekintettünk, hisz megfelelő kivitelezéssel valódi kommunikáció esetén sem fordulhatna elő ilyen nagy mértékű zaj.

Pontosan úgy ahogy ezt a fejezetet is kezdtük, végezzünk keresztellenőrzést. Tehát vizsgáljuk meg újonnan kapott eredményeinket egy egységesen megválasztott (továbbra is $\varepsilon = 0.25$) koherens hibával. Ehhez tekintsük a legnagyobb javításhoz tartozó 3. táblázatban is megtalálható egylépéses szimulációt, valamint az előbbi 4. táblázat első sorában rögzített legsikeresebb kétlépéses megoldást. Ezek több desztillációs lépést követő hatása mindkét hibatípus esetében a 16. ábrán látható.



16. ábra. Fehérzajjal végzett betanítás során legsikeresebb (baloldalon egylépéses, jobboldalt kétlépéses) szimulációk tesztelése mindkét hibatípus (fent inkoherens, lent koherens) esetében

Elsőnek tekintsük az egylépéses protokollnál tapasztaltakat. Megfigyelhető, hogy a tiszta állapot esetében a különböző komponensek váratlan mértékben egybeesnek és két különböző tulajdonságú csoportra bonthatók. Ezek éppen a tiszta W-állapot nulla (számítási bázisban $|000\rangle$, $|011\rangle$, $|101\rangle$, $|110\rangle$, $|111\rangle$) és nemnulla ($|001\rangle$, $|010\rangle$, $|100\rangle$) komponenseinek adódtak. Meglepő módon az ilyen módszerrel betanított megoldásunk csakis az állapot 'nemnulla' komponenseinek stabil desztillációjára képes, egyéb komponensek esetében pedig a hűség gyorsan csökken. Ilyen speciális tulajdonságú megoldással majd a későbbi analitikus kitekintés IV. fejezetében is foglalkozunk.

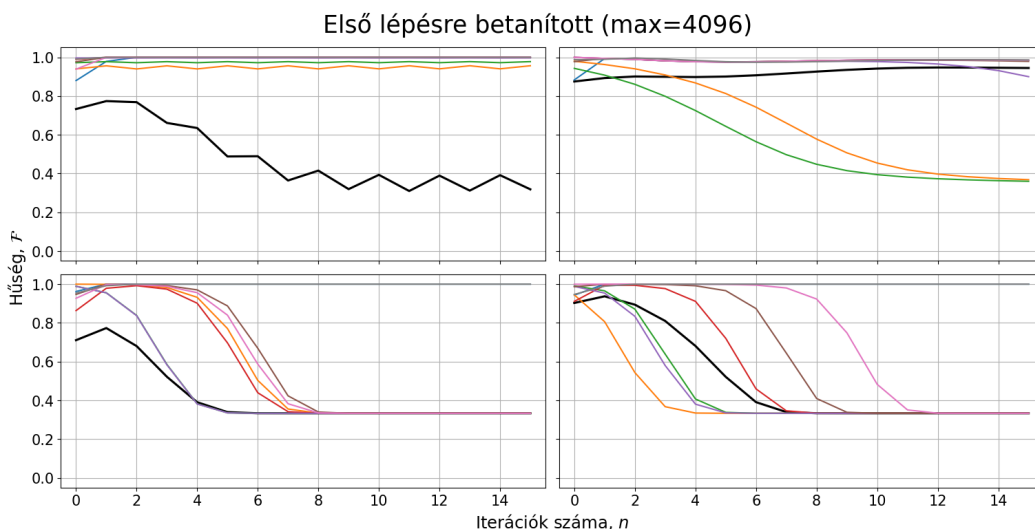
Hasonló tapasztalatokat vonhatunk le a kétlépéses protokoll esetében is. Bár a tiszta állapot esetében néhány lépés után még képes fenntartani stabil állapotát, későbbi lépéseket követően bizonyos komponensek esetében ez jelentősen leromlik, amelyek szintén a tiszta állapot nemnulla komponenseinek adódtak. Ezek szerint a fehérzajjal kevert állapotokra betanított eredmények általánosságban csakis bizonyos komponensek megfelelő desztillációjára képesek. Viszont így a megoldásaink közel sem tekinthetők tökéletesnek. Emiatt tovább kell vizsgálódnunk, és egy jóval hosszabb számítási idejű módszert keresnünk. Így következőleg tekintsük a két hibatípusra együttesen betanított protokollokat.

C. Kettős javítás kivitelezése

A következőkben részletezett kettős szimulációk során mindkét hibatípus esetét együttesen vesszük figyelembe. Ehhez egy adott kezdeti szögparaméterekkel definiált operátort egyszerre két különböző típusú bemeneti állapotra tanítjuk be, amihez a betanítást megelőzően 8+1 véletlenszerű zajértéket választunk a két hibatípus eseteire. Így minden betanítási iterációban mindkét hibatípusra elvégezzük az egy- vagy épp kétlépéses desztillációs protokollt, majd azok együttes hűségét választjuk költségfüggvény értéként. Ennek súlyozásához 1-1 arányban tekintjük a kevert és a nyolc tiszta állapot komponensből adódó hűségértékeket.

a. Egyoperátoros megközelítés

Elsőnek még az eddigi módszerekhez hasonlóan minden szimuláció esetén egyetlen, 16 szögparaméterrel definiált operátor betanítását tekintjük. Így minden betanítás során azonos kezdeti szögparaméterekkel mindkét hibatípus kiértékelését párhuzamosan végezzük. Későbbiekben itt is megkülönböztethetők az egy- és kétlépéses protokollok, amelyek ugyancsak eltérő eredményeket nyújtanak. Így tekintjük elsőként ismét az egylépéses módszert. Ehhez 1000 különböző szögparaméterek és hibakombinációk mellett végeztünk szimulációkat, amelyekkel eddig nem tapasztalt eredményekre is jutottunk. A kapott eredmények néhány példáját a 17. ábrán szemléltettük.



17. ábra. Első lépésre betanított, vegyes szimuláció négy eredménye mindkét hibatípus mellett (vastagabb fekete vonalak továbbra is a kevert állapot esetét jelképezik)

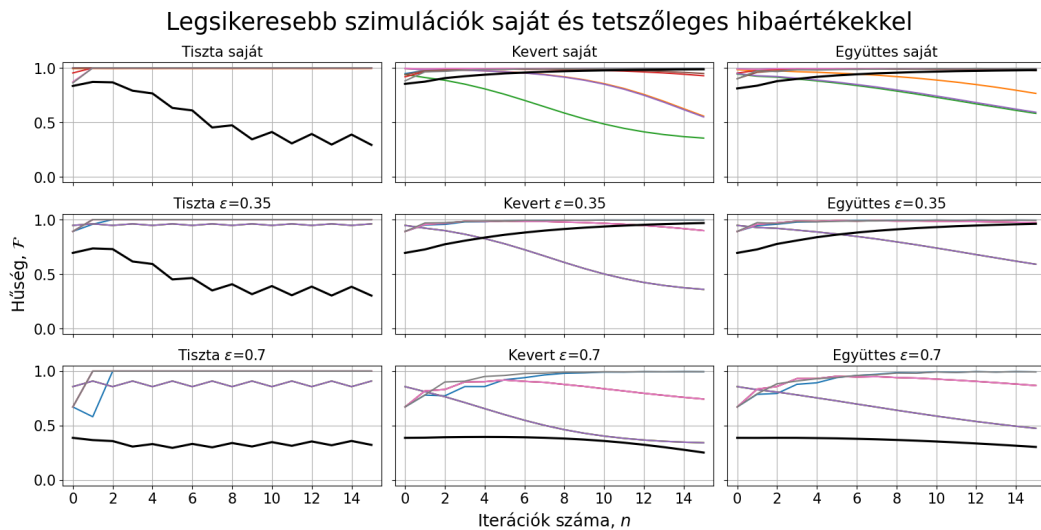
A 17. ábra második részábráján látható, hogy meglepő módon olyan eredményre is jutottunk, amely stabilan képes kevert állapot desztillációjára. Ezen jelenség a betanítás természetére vezethető vissza, hiszen most több, különböző komponenst egyszerre vettünk figyelembe. Azonban ez a megoldás tiszta állapotú hiba néhány komponense esetén elbukik. Hasonló módon több eredményt is tapasztalunk (mintpéldául az első részábrán), amely koherens hibák stabil desztillációjára képes, viszont kevert állapotok esetén lecseng. Általánosan kimondható, hogy az elvégzett 1000 db szimu-

láció közül valamelyest stabil eredményeket tekintve, mind ezen két csoport valamelyikébe sorolható. Vagyis egyetlen megoldást sem találtunk, amely stabilan képes mindkét hibatípus desztillációjára. Így külön tekintsük a legstabilabb esetet a tiszta és kevert állapot javítására, valamint keressünk a két hibatípus esetét együttesen 1-1 arányban súlyozva is egy jónak vélhető eredményt. Ehhez az eredmények 10. desztillációs lépést követő hűségét tekintettük. Az ilyen módon meghatározott három legsikeresebb eredmény paramétereit a 5. táblázatban rögzítettük.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$U_{ve}^{(t)}$	1.793	4.711	4.562	4.706	0.975	2.361	0.808	4.709
$U_{ve}^{(k)}$	1.242	4.890	0.633	3.834	1.873	5.971	2.926	2.009
$U_{ve}^{(v)}$	1.864	4.716	2.585	2.562	1.292	0.447	5.413	2.010
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$U_{ve}^{(t)}$	5.496	2.431	3.139	1.945	1.566	3.539	2.923	1.359
$U_{ve}^{(k)}$	0.039	1.136	0.629	4.514	2.612	4.986	3.803	4.165
$U_{ve}^{(v)}$	0.226	2.165	3.679	4.464	2.753	2.170	2.463	5.338

5. táblázat. Legjobb tiszta, kevert és vegyesen tekintett megoldás paramétereit egy lépéses protokoll esetén (3 tizedesjegyre kerekítve)

Illetve tekintsük ezek több desztillációs lépést követő hatását betanításukra használt, közepes ($\varepsilon = 0.35$) és egy nagyobb ($\varepsilon = 0.7$) hibaérték esetén. Ezen eredményeket a 18. ábrán szemléltettük.

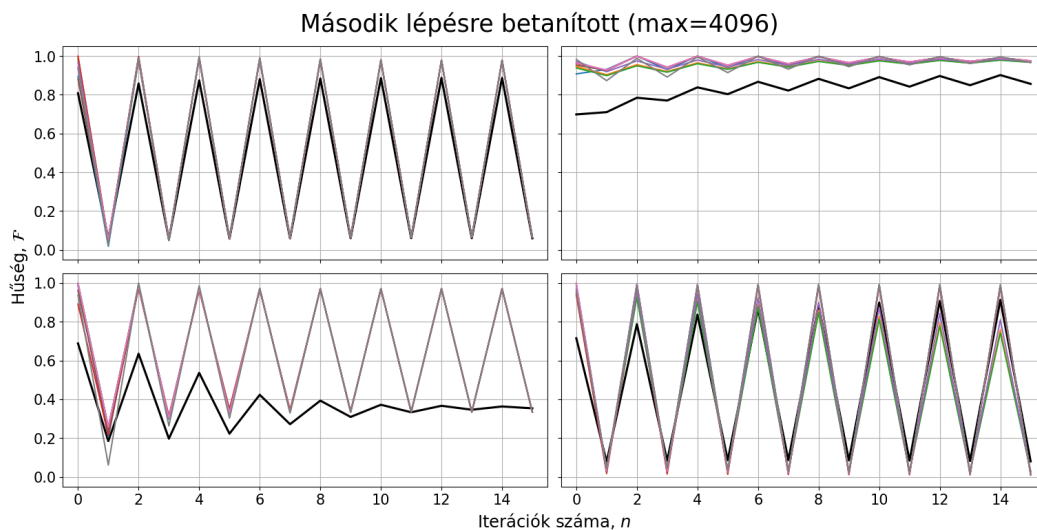


18. ábra. Legsikeresebb egy lépéses, vegyes betanítású szimulációk tiszta (bal), kevert (közép) és együttes (jobb) hibák desztillációjára, különböző hibaértékek esetén

Látható, hogy ezek a megoldások közepes hibaértékek mellett is képesek 'saját' hibatípusukat közel tökéletesen desztillálni, együttes figyelembevételnél pedig csak bizonyos komponensek esetében csökken a hűség. Nagy hibaértékek esetén (amelyeket a betanítás során már figyelembe sem vettünk) pedig egyik megoldás sem képes a kevert állapot megtisztítására a torzulás mértékéből adódóan.

Ennek kiküszöbölésére pedig tekintsük a kétlépéses protokollt, amely az eddigi eredményeink alapján jóval stabilabbnak bizonyult. Ehhez ismételtén 1000 db második lépésre betanított szimu-

lációt végeztünk eltérő szögparaméterek és hibaértékek mellett. A betanítás során a két hibatípushoz tartozó hőmérsékletet továbbra is 1-1 súlyozással tekintettük. Vizsgáljuk ezen megoldások hatását több desztillációs lépést követően. Ehhez néhány példa eredményét a 19. ábrán szemléltettük.



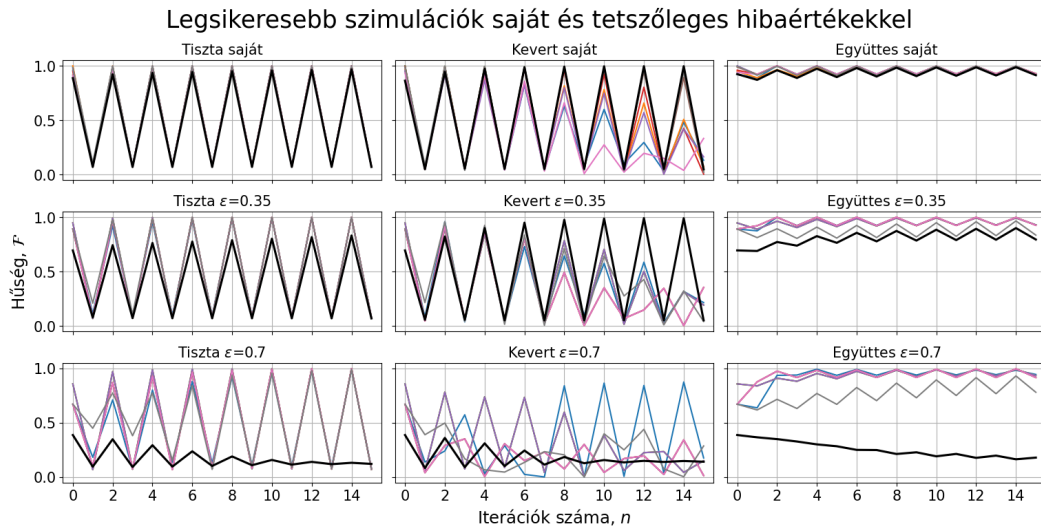
19. ábra. Második lépésre betanított, vegyes szimuláció négy eredménye mindkét hibatípus mellett

Ezek között láthatunk több lépést követően lecsengő, de az állapotot stabilan fenntartó megoldásokat is. Azonban a stabil megoldásokat általánosan tekintve, korábbiakhoz hasonló eredményekre jutunk. Olyan megoldásokat találunk, amelyek koherens hibák megtisztítására alkalmasak, viszont a kevert állapotokat legfeljebb stagnálva képesek fenntartani. Illetve megoldásokat, amelyek képesek kevert állapotok nagy mértékű desztillációjára, azonban a tiszta állapotok komponensei több lépést követően szétesnek. Hasonló módon keressük a legstabilabb megoldást mindkét hibatípus esetében, valamint tekintsük együttesen is a legjobb eredményt. Ezek paraméterei a 6. táblázatban találhatóak.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$U_{vk}^{(t)}$	1.578	4.830	3.321	5.954	1.892	1.003	5.329	4.716
$U_{vk}^{(k)}$	1.612	1.971	5.634	5.051	2.170	3.383	5.384	2.950
$U_{vk}^{(v)}$	1.105	1.805	2.358	3.555	4.932	0.276	4.346	1.874
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$U_{vk}^{(t)}$	4.716	3.316	5.726	1.514	1.320	4.780	2.174	2.366
$U_{vk}^{(k)}$	2.260	2.733	6.017	4.999	1.621	0.334	0.151	0.456
$U_{vk}^{(v)}$	1.409	3.211	6.009	2.688	0.899	5.079	0.750	6.246

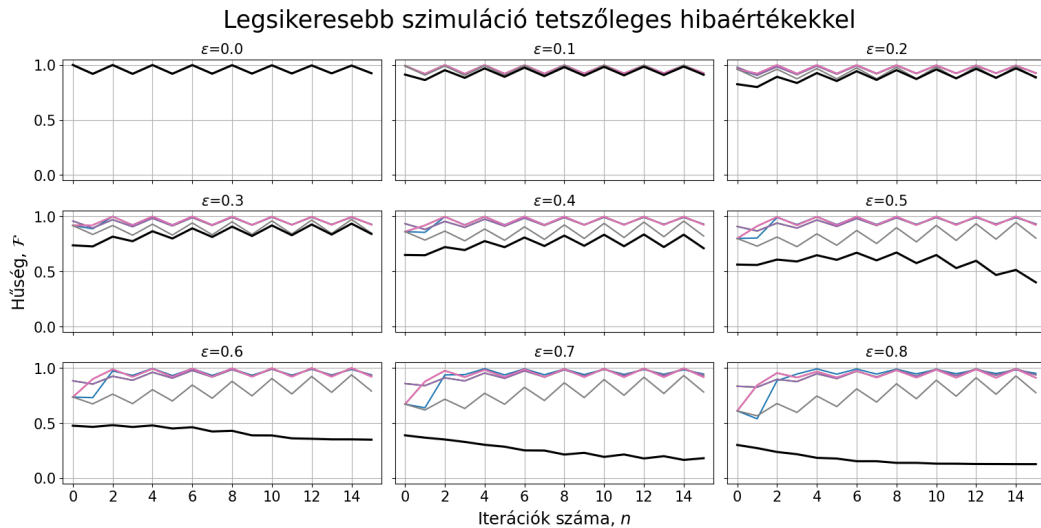
6. táblázat. Legjobb tiszta, kevert és egységesen tekintett megoldás paraméterei kétlépéses protokoll esetén (3 tizedesjegyre kerekítve)

Ezután pedig tekintsük ezek több desztillációs lépést követő hatását ismételten saját betanítására használt, közepes ($\varepsilon = 0.35$) és egy nagyobb ($\varepsilon = 0.7$) hibaérték esetén is. Ezen eseteket a 20. ábrán szemléltettük.



20. ábra. Legsikeresebb kétlépéses, vegyes betanítású szimulációk tiszta (bal), kevert (közép) és együttes (jobb) hibák desztillációjára, különböző hibák esetében

Látható, hogy közepes mértékű hibák esetén a bizonyos esetek továbbra is megfelelően képesek desztillálni 'saját' hibatípusukat. Emellett ezek között is fennáll a korábban felvetett csoportosítás. Az együttes feltételt tekintve pedig egy ígéretes eredményt kaptunk, amely bár lassabb mértékben, de képes mindkét hibatípust több lépést követően is desztillálni. Így lezárásképp tekintsük az együttes feltétellel meghatározott megoldást egyéb eltérő hibaértékek esetén is. Ehhez vizsgáljuk a protokoll több lépést követően a már korábban tekintett 9 különböző hibaérték esetében. Ezen különböző esetek a 21. ábrán láthatók.



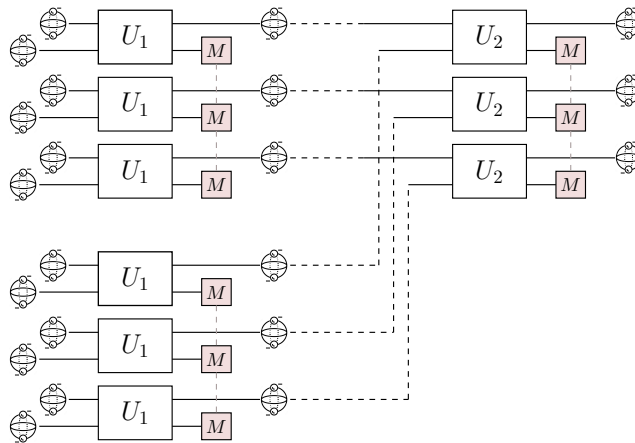
21. ábra. Együttes feltétellel tekintett legsikeresebb megoldás desztillációja különböző hibaértékek mellett

Ezen eredményünk a betanításra használt hibatartományon valóban képes különböző hibatípusok együttes desztillációjára, illetve nagyobb hibaértékek mellett is képes koherens hibák megtisztítására, csökkent hatékonysággal. Viszont ilyen szintű, vagy ehhez hasonló eredményeket a szimulációk kevesebb mint 1%-a tudott biztosítani (egyetlen darabot találtunk). Így vizsgáljunk még egy alternatív módszert, amely akár konzisztensen képes hasonló eredményeket produkálni.

b. Alternáló megközelítés

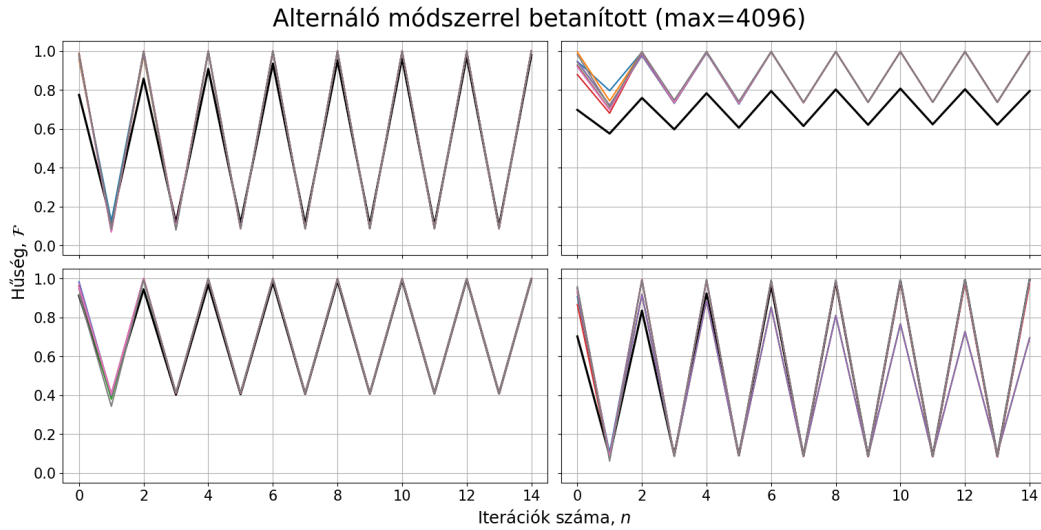
Az előző fejezetben láthattuk, hogy a vegyes módszerrel betanított kétlépéses protokoll sikeresen desztillálta a W -állapotokat, amennyiben a zaj mértéke $\varepsilon = 0.3$ alatt volt. Ebben a fejezetben egy úgynevezett alternáló protokollt vizsgálunk, amely az előzőekhez képest nagyobb zajértékek mellett is gyorsabb desztillációt eredményezhet.

Ebből kiindulva próbálkozzunk meg egy másik, két különböző operátort váltakozva alkalmazó protokoll betanításával is. Ehhez módosítsuk az 1. ábrán szemléltetett kétlépéses modellünket úgy, hogy minden szimuláció esetén két, különböző kezdeti szögparaméterekkel definiált U_1 és U_2 operátorokat tekintünk. Ezután minden betanítási iteráció esetén végezzük el a nemlineáris protokollt egy lépését egymást követően mindkét operátorral, és egy ilyen váltakozó párt követően értékeljük ki a kimeneti állapotot. Végezetül az eredmények alapján külön-külön módosítjuk operátorainkat. Ezen módosított protokoll vázlatos felépítése a 22. ábrán látható.



22. ábra. Alternáló módszeren alapuló nemlineáris protokoll vázlatos elve. A korábbi módszerrel ellentétben, a protokollt most két különböző U_1 és U_2 operátorokkal végezzük

Ezen módszerrel 500 db szimulációt végeztünk különböző kezdeti operátorok és hibakombinációk mellett. A betanítást követően pedig vizsgáljuk a protokoll több lépését követő hatását a meghatározott operátorokkal. Ehhez minden megoldás esetében a kapott operátorokat felváltva haddatjuk, és minden lépést újabb iterációnak tekintünk. Néhány eredményt a 23. ábrán szemléltettük.



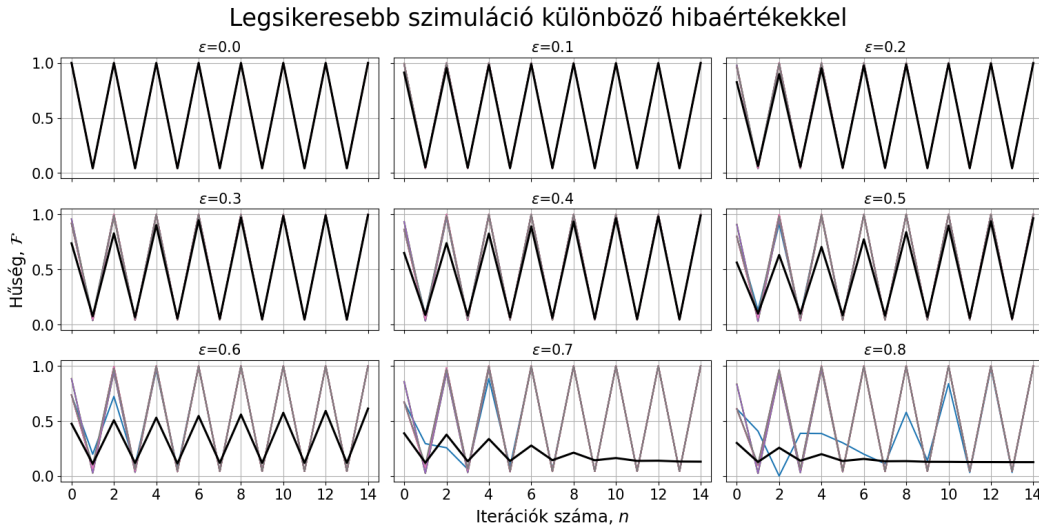
23. ábra. Alternáló módszerrel betanított szimulációk négy eredménye mindkét hibatípus mellett

Látható, hogy közel mindig stabil, a W-állapotot jól javító megoldásokat kapunk (természetesen egyelőre csak saját, betanított hibájukkal). Keressük ezen szimulációk közül a 3 legjobbat, amelyek mind saját és egy tetszőleges magasabb $\varepsilon = 0.4$ hibaérték mellett is képesek mindkét hibatípus megfelelő desztillálására. Ennek vizsgálatához a 10. desztillációs lépést követő 1-1 súlyozással vett átlaghűséget tekintettük. Minden megoldáshoz 32 db szögparaméter tartozik, amelyeket a Függelék, 'Alternáló módszer legsikeresebb megoldásai' című alfejezetében található 9. táblázatban rögzítettük. Ezen eredmények közül pedig tekintsük a legsikeresebb megoldáshoz tartozó $U_1^{(1)}$ és $U_2^{(1)}$ operátorokat. Ezek paraméterei a 7. táblázatban is láthatók.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$U_1^{(1)}$	5.201	0.383	1.398	1.596	1.864	0.932	3.563	3.589
$U_2^{(1)}$	2.353	5.069	0.276	1.253	3.332	3.209	3.645	0.841
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$U_1^{(1)}$	4.302	2.187	6.205	1.675	5.795	3.061	5.153	1.734
$U_2^{(1)}$	5.533	1.669	5.881	1.756	5.141	3.536	5.636	1.110

7. táblázat. Legsikeresebb alternáló módszerrel betanított megoldás paraméterei
(3 tizedesjegyre kerekítve)

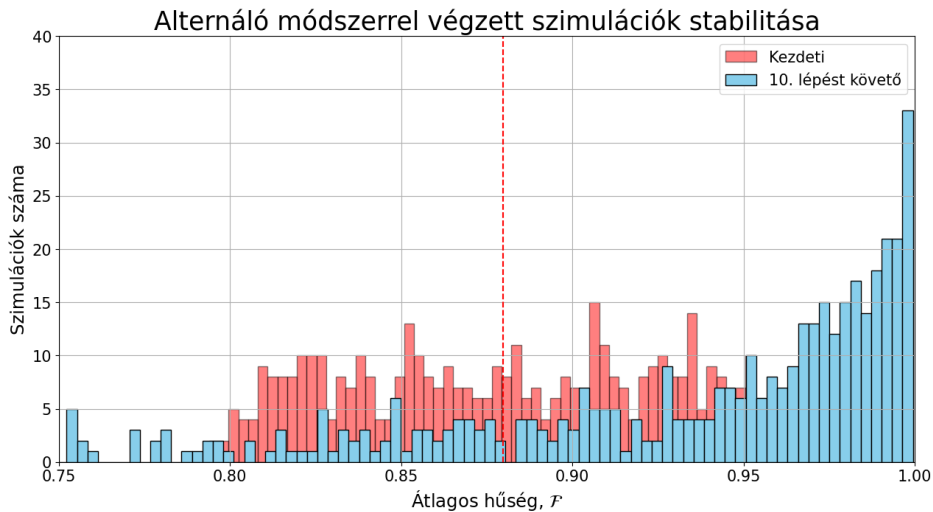
Ezután tekintsük ezen operátorral vett desztillációkat különböző koherens és fehérzajjal kevert hibaértékek esetében. A különböző esetekben tekintett eredmények a 24. ábrán láthatók.



24. ábra. Legsikeresebb alternáló módszerrel betanított szimuláció eredménye különböző hibaértékek esetén (a színes görbék a koherens hibák adott komponenseit, a vastag fekete vonal pedig a fehérzajjal terhet állapotot jelképezik)

Látható, hogy ez a megoldás $\varepsilon = 0.5$ hibaértéktől tökéletesen javítja a koherens és fehérzajjal kevert állapotok torzulását is, még a betanítási intervallumon túl nyúló $\varepsilon = 0.5$ esetet is nagyszerűen desztillálja. Nagyobb hibák esetében pedig a koherens hibákat továbbra is megfelelően tisztítja. Ezek szerint ez a módszerünk bár jóval több számítási időt igényel, a vizsgált módszereink közül kérdés nélkül ez adódott a lehető legeredményesebbnek.

Azonban a többi eredményt is tekintve jó arányban tapasztalunk hasonló stabilitású és hatékonyságú eredményeket, ahogyan ez a példák 23. ábráján látható. Végezetül pedig tekintsünk egy statisztikát mind az 500 elvégzett szimulációról. Vizsgáljuk, hogy az eredmények mekkora arányban képesek a 10. lépést követően is fenntartani, illetve javítani saját kezdeti állapotukon. A két hibatípus esetét továbbra is tekintsük 1-1 arányú súlyozással. Ehhez meghatároztuk az átlagos kezdeti hűséget is, amely $\bar{\mathcal{F}}_0 \approx 0.87978$ értéknek adódott. A vizsgált eredmények eloszlása a 25. ábrán látható.



25. ábra. Alternáló módszerrel betanított szimulációk betanításhoz használt hibaértékekkel vizsgált hűségeloszlása $\bar{\mathcal{F}}_{10} \approx 0.92237$ átlagértékkel

Az ábráról egyértelműen leolvasható, hogy az eredmények igencsak sikeresnek tekinthetők. Továbbá a hűség (kirívó értékeket is tartalmazó) átlagértékét tekintve ez az első alkalom, amikor a több lépést követő átlagérték valóban meghaladta a kezdeti állapotokét. Arányokat tekintve az elvégzett szimulációk közel 66.2%-a képes volt javítani kezdeti állapotán mind koherens, és fehérzajjal kevert hibák esetében is. Az eredmények stabilitását tekintve is kimondható, hogy az ilyen módon betanított megoldások a protokoll akár többszöri lépésére is magabiztosan alkalmazhatók.

IV. Analitikus kitekintés

A dolgozatban numerikus módszerekkel több sikeres eredményre is jutottunk, amelyek különböző hibatípusok hatékony desztillációjára alkalmasak. Azonban hosszú távú célunk ezek analitikus meghatározása is, hiszen ilyen módon a protokollhoz alkalmazott kvantumkapuk száma akár jelentősen csökkenthető. Így a sikeres numerikus eredmények meghatározását követően röviden részletezzük jövőbeli céljainkat is.

A. Unitér és fixmátrix feltételek

Ehhez elsőként rögzítsük a protokoll során alkalmazott operátor unitér feltételét. Mint ahogyan azt korábban az elméleti háttér C. alfejezetében részleteztük, a protokoll két-qubites lokális művelete egy $SU(4)$ mátrixszal reprezentálható. Ennek tulajdonságából adódóan a mátrixelemekre több feltételt is kiszabhatunk.

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \quad |\det(U)| = 1 \quad (11)$$

Tekintsünk egy általános U mátrix tetszőleges U_i és U_j sorait. A mátrix unitér tulajdonságából, miszerint adjungáltja az inverzével egyenlő, triviálisan belátható, hogy a mátrix oszlopvektora (és sorvektora) ortonormáltak.

$$U_i^\dagger U_j = \delta_{ij} \quad (12)$$

Az általunk alkalmazott protokoll speciális bázis megválasztásából adódik (nulla mérési eredmények kiválasztása), hogy a protokollhoz alkalmazott operátor második és negyedik sorai nem befolyásolják a kimeneti állapotot. Így egy megfelelő operátor meghatározásához elegendő a mátrix első és harmadik sorát vizsgálnunk. Ezen két sorra kirótt feltételek teljesülését követően pedig a további sorokat elegendő a mátrix unitér feltételeihez igazítanunk. Emellett a vizsgálandó sorvektorok ortonormáltságából felírhatók a következő összefüggések, amelyek a mátrix meghatározásához is alkalmazandó.

$$\begin{aligned} |U_{11}|^2 + |U_{12}|^2 + |U_{13}|^2 + |U_{14}|^2 &= 1 & |U_{31}|^2 + |U_{32}|^2 + |U_{33}|^2 + |U_{34}|^2 &= 1 \\ U_{11}^* U_{31} + U_{12}^* U_{32} + U_{13}^* U_{33} + U_{14}^* U_{34} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

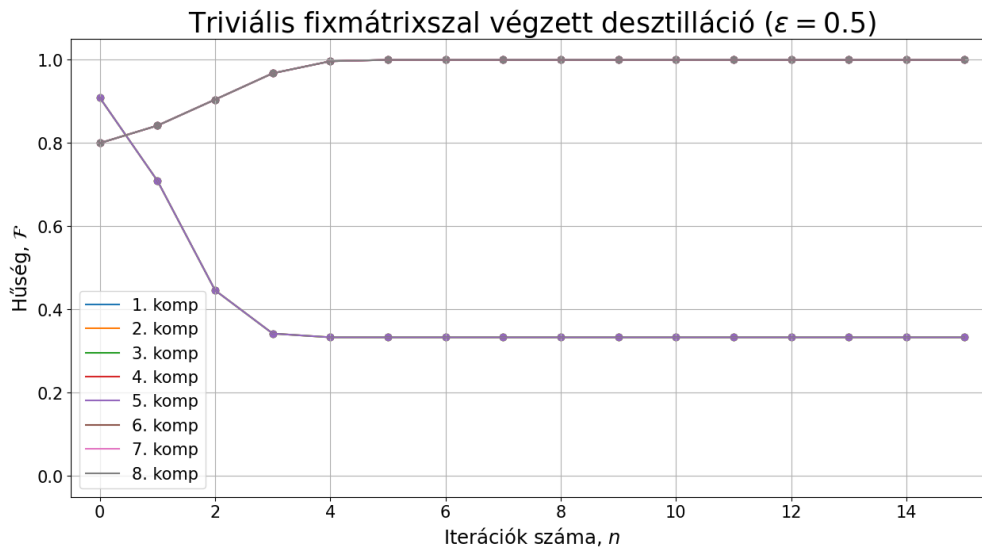
Ahol U_{ij} az adott sor és oszlopindexeket jelölik. A protokoll nemlineáris természetéből adódóan bármely számolás bonyolult, nemlineáris összefüggésekhez vezet. Ezért bontsuk fel a problémát apróbb, triviális eredményekre. Ehhez elsőként tekintsük a legegyszerűbb $\varepsilon = 0$ esetet. Természetesen elengedhetetlen, hogy a módszer a tökéletesen tiszta W-állapotot módosítás nélkül visszaadja. Ezért végezzük el egyszeresen a protokollt egy tiszta W-állapoton, általános U_{ij} mátrixelemekkel. Mivel tudjuk, hogy eredményként szintén tökéletesen tiszta W-állapotot szeretnénk, így komponensenként a mátrixelemekre különböző feltételek róhatók ki.

$$\begin{aligned}
U_{11} (U_{11}U_{14} + 2U_{12}U_{13}) &= 0 & U_{31} (U_{31}U_{34} + 2U_{32}U_{33}) &= 0 \\
U_{14}U_{31}^2 + 2U_{11}U_{32}U_{33} + 2U_{11}U_{31}U_{34} + 2U_{12}U_{31}U_{33} + 2U_{13}U_{31}U_{32} &= 0 \\
U_{11}^2U_{34} + 2U_{11}U_{12}U_{33} + 2U_{11}U_{14}U_{31} + 2U_{12}U_{13}U_{31} + 2U_{11}U_{13}U_{32} &\neq 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Ezen két feltételsorból már találhatunk több unitér fixmátrixot, amely képes a tiszta W-állapot fenntartására. Ennek egy triviális unitér megoldása a lentebbiekben látható.

$$U_{\text{fix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Vizsgáljuk ennek hatását a desztillációs protokoll több lépését követően. Ehhez tekintsünk egy nagyobb koherens hibaértéket ($\varepsilon = 0.5$). Ennek desztillációs eredményét a 26. ábrán szemléltetjük.



26. ábra. Fixmátrixszal koherens hibára tekintett desztilláció

Bár az azonos tulajdonságú komponensek nagyrészt átfedik egymást, megfigyelhető, hogy a komponensek két csoportra oszlanak, amelyek a tiszta W-állapot nulla és nemnulla komponenseivel megfeleltethetők. Ezen megoldásunk feltűnően emlékeztet a numerikus kiértékelés B. alfejezetében ismertetett egylépéses eredményre, amit a korábbi 16. ábrán szemléltettünk. Hasonló módon megoldásunk a nulla komponensek desztillációjára alkalmas, viszont a nemnulla komponensek esetén

a hűség néhány lépést követően kevesebb mint felére zuhan. Érdekességképp írjuk fel az említett megoldás mátrixát, amely a 3. táblázatban található. A numerikus pontatlanság csökkentéséhez minden mátrixkomponenst három tizedesjegyre kerekítettünk.

$$U_{ke}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.786 + 0.619i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.878 - 0.479i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.281 - 0.960i \\ 0 & 0 & -0.438 + 0.899i & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Látható, hogy ezen eredmény meglepően hasonlít triviális fixmátrix megoldásunkra. Érdekes megfigyelés tehát, hogy a legsikeresebb kevert állapotra betanított egylépéses protokollunk operátora éppen a fixmátrix alap feltételeivel is meghatározható. Az alapfeltételek rögzítését követően pedig általános apró ε értékű koherens hibák desztillációjával kezdtünk foglalkozni.

B. Koherens hibák vizsgálata

Mint a numerikus kivitelezésnél, a protokoll lépésszámának módosításával teljesen más feltételekhez jutunk. Ezen dolgozathoz az egylépéses protokoll koherens hibáinak általános desztillációját tekintettük. Mivel megoldásunkban apró ($\varepsilon \ll 1$) hibaértékeket vizsgálunk, így számításainknál elhanyagoljuk a lineárisnál nagyobb rendű tagokat, $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Ennek tudatában a következőkben minden bonyolult összefüggést az $\varepsilon = 0$ pontban vett, elsőrendű Taylor-sorával közelítjük. A koherens hibák kiszűréséhez pedig célunk, hogy bármely ε -ban lineáris tag együttthatója kinullázódjon.

$$f(\varepsilon) \approx f(0) + \varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (17)$$

A hátramaradó $f(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ tagra pedig a korábban meghatározott fixmátrix feltételeink elégségesek, hisz $f(0)$ éppen a tiszta W-állapot megfeleltetése. Ezen közelítéseket felhasználva vizsgáljuk a különböző komponensek koherens variációját. A protokoll egy lépését elvégezve újabb feltételek róhatók ki a mátrixelemekre. A kapott összefüggések a Függelék, 'Eglépéses protokoll koherens feltételei' című alfejezetében megtalálhatók. Azonban feltételeinkkel még nem jutottunk olyan szép, zárt alakú eredményre, amely bármely komponens esetén, egy lépést követően az állapot teljes desztillációjára lenne alkalmas. Pontosan ezért jövőbeli terveink közé tartozik ezen analitikus megoldások kiterjesztése kétlépéses protokollok, valamint kevert állapotok betanításának eseteire is. Így célunk, hogy sikeresen meghatározott numerikus eredményeinket későbbiekben más módszerekkel is alátámasszuk.

V. Eredmények összefoglalása

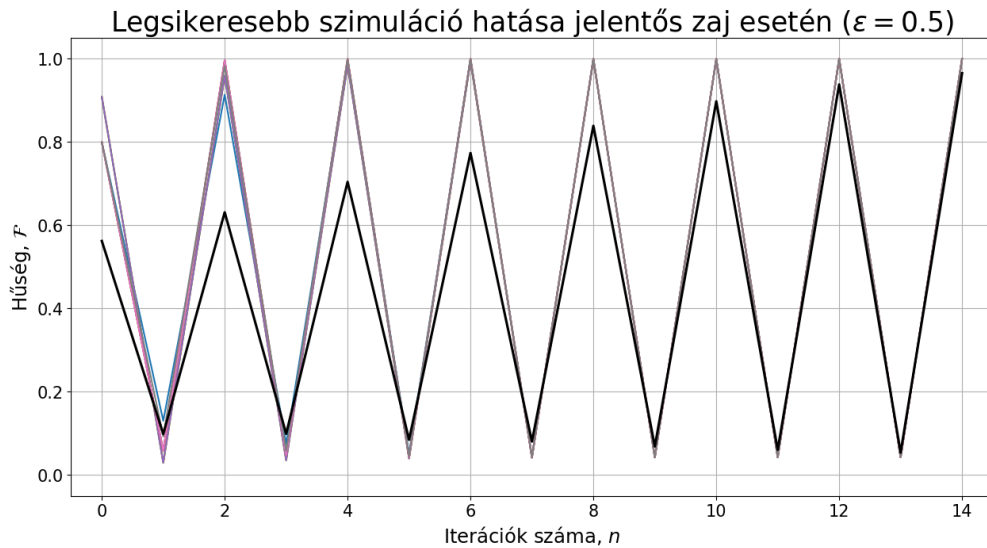
Dolgozatunk során zajos W-állapotok desztillációját vizsgáltuk nemlineáris iteratív protokoll segítségével, amihez a lokális unitér művelet optimális megválasztását numerikus módszerrel végeztük. A használt VQA módszer segítségével első körben számos sikertelen vagy közel stabil desztillációs protokollt találtunk. Tapasztalataink alapján Rozgonyi et al. [5] által GHZ-állapotokon vizsgált módszerei zajos W-állapotok esetében nem voltak elegendőek a két hibatípus együttes megtisztítására. Az egy-egy hibatípuson betanított egyszerűbb, kétlépéses módszerekkel egyedül az éppen vizsgált hibatípust tudtuk megfelelően desztillálni, együttesen egyáltalán nem.

Ebből adódóan vizsgáltunk nagyobb erőforrást igénylő, vegyesen betanított protokollokat is. Látható volt, hogy már az egyoperátoros megközelítéssel is jóval stabilabb megoldásokra jutottunk, azonban eredményeink alapján egyértelműen megállapítható, hogy a különböző hibatípusokkal torzított W-állapotok desztillációjára az alternáló módszerrel elért eredmények bizonyultak a leghatékonyabbnak. Bár a protokoll gyakorlati kivitelezésében a két különböző művelet együttes alkalmazása további nehézségeket okozhat, ezen módszerrel megfelelően tudtuk desztillálni mind a koherens, és inkohereus hibatípusokat is. Az általunk vizsgált különböző iterációszámon és hibatípusokon betanított módszerek sikerességének mértékét a lentebbi 8. összegző táblázatban rögzítettük.

Vizsgált hibatípus	Betanítás típusa		
	Tiszta állapot	Kevert állapot	Vegyes módszer
Egyiterációs protokoll			
Tiszta állapot	✓	×	✓/×
Kevert állapot	×	×	×/✓
Kétiiterációs protokoll			
Tiszta állapot	✓	×	✓
Kevert állapot	×	✓	✓
Alternáló protokoll			
Tiszta állapot	—	—	✓✓
Kevert állapot	—	—	✓✓

8. táblázat. Különböző betanítási módszerekkel kapott eredmények sikeressége tiszta és kevert állapotú hibák esetén, ahol a táblázat legsikeresebb eredményét dupla pipával szemléltettük

Legsikeresebb eredményünk, amely a 9. táblázat első két sorában is megtalálható, egy torzított állapot jelentős megtisztítására képes, már a protokoll első két lépését követően is. Ennek szemléltetésére tekintsünk egy egészen nagy $\varepsilon = 0.5$ zajértéket, amit már az eredmények betanításánál sem vettünk figyelembe. Az eredményünkkel tekintett desztillációs protokoll több lépését követő hatását a 27. ábrán szemléltettük.



27. ábra. Legsikeresebbnek bizonyult alternáló megoldás jelentős zajértékkel vett desztillációja mindkét hibatípus esetében (a színes görbék a koherens állapot különböző komponenseit, a vastag fekete vonal pedig a kevert állapotot jelképezi)

Látható, hogy eredményünk jelentős torzulás esetén is képes az állapot hatékony desztillációjára koherens és fehérzajjal kevert hibák esetén is.

Dolgozatunkban sikeresen beláttam, hogy az általam talált lokális operátor segítségével egy közepes mértékben, tetszőleges módon torzított háromrészecskés W-állapot hatékonyan desztillálható. Továbbiakban pedig a téma analitikus feltérképezésével, valamint a módszer nagyobb részecskeszámú W-állapotokra történő általánosításával szeretnék majd foglalkozni.

Függelék

Alternáló módszer legsikeresebb megoldásai

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
$\mathbf{U}_1^{(1)}$	5.201	0.383	1.398	1.596	1.864	0.932	3.563	3.589
$\mathbf{U}_2^{(1)}$	2.353	5.069	0.276	1.253	3.332	3.209	3.645	0.841
$\mathbf{U}_1^{(2)}$	3.123	0.567	1.268	2.991	1.897	2.500	1.330	1.452
$\mathbf{U}_2^{(2)}$	1.350	5.304	1.226	6.025	0.736	2.883	1.959	1.521
$\mathbf{U}_1^{(3)}$	1.589	4.392	3.742	4.898	2.923	0.735	1.852	5.130
$\mathbf{U}_2^{(3)}$	2.972	0.990	0.455	5.424	4.989	4.431	5.754	1.348
	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}
$\mathbf{U}_1^{(1)}$	4.302	2.187	6.205	1.675	5.795	3.061	5.153	1.734
$\mathbf{U}_2^{(1)}$	5.533	1.669	5.881	1.756	5.141	3.536	5.636	1.110
$\mathbf{U}_1^{(2)}$	4.413	4.154	4.115	6.017	0.243	1.556	5.336	6.015
$\mathbf{U}_2^{(2)}$	2.990	5.086	3.040	4.550	5.883	0.033	3.107	1.412
$\mathbf{U}_1^{(3)}$	1.248	4.502	3.541	3.755	0.819	0.094	2.482	4.671
$\mathbf{U}_2^{(3)}$	1.974	5.750	0.555	5.455	1.311	6.121	1.644	1.813

9. táblázat. Három legjobb alternáló módszerrel betanított megoldás paraméterei
(3 tizedesjegyre kerekítve)

Egylépéses protokoll koherens feltételei

$|000\rangle$ komponens variációjából:

$$U_{11}^2 (U_{12} + U_{13}) = 0 \quad U_{31}^2 (U_{32} + U_{33}) = 0$$

$$U_{11}^2 (U_{32} + U_{33}) + 2U_{11}U_{31} (U_{12} + U_{13}) = 0 \quad U_{31}^2 (U_{12} + U_{13}) + 2U_{11}U_{31} (U_{32} + U_{33}) = 0$$

$|111\rangle$ komponens variációjából:

$$U_{14} (U_{12}^2 + U_{13}^2) = 0 \quad U_{34} (U_{32}^2 + U_{33}^2) = 0$$

$$U_{34} (U_{12}^2 + U_{13}^2) + 2U_{14} (U_{12}U_{32} + U_{13}U_{33}) = 0 \quad U_{14} (U_{32}^2 + U_{33}^2) + 2U_{34} (U_{12}U_{32} + U_{13}U_{33}) = 0$$

További nulla komponensek ($|011\rangle$, $|101\rangle$, $|110\rangle$) variációjából:

$$U_{12}^2 U_{33} + U_{13}^2 U_{32} + 2U_{14}U_{31} (U_{12} + U_{13}) = 0 \quad (U_{32} + U_{33}) (2U_{31}U_{34} + U_{32}U_{33}) = 0$$

$$U_{12}U_{33}^2 + U_{13}U_{32}^2 + 2U_{11}U_{34} (U_{32} + U_{33}) = 0 \quad (U_{12} + U_{13}) (2U_{11}U_{14} + U_{12}U_{13}) = 0$$

$$U_{11}U_{34} (U_{12} + U_{13}) + (U_{32} + U_{33}) (U_{11}U_{14} + U_{12}U_{13}) = 0$$

$$U_{14}U_{31} (U_{32} + U_{33}) + (U_{12} + U_{13}) (U_{31}U_{34} + U_{32}U_{33}) = 0$$

Valamint nemnulla komponensek ($|001\rangle$, $|010\rangle$, $|100\rangle$) variációjából:

$$2U_{11}^2 U_{34} + U_{11} (U_{12}U_{33} + U_{13}U_{32}) - 2U_{31} (U_{11}U_{14} + U_{12}U_{13}) = 0$$

$$2U_{14}U_{31}^2 + U_{31} (U_{12}U_{33} + U_{13}U_{32}) - 2U_{11} (U_{31}U_{34} + U_{32}U_{33}) = 0$$

Hivatkozások

- [1] Abdallah Slaoui, Nada Ikken, Lalla Btissam Drissi, and Rachid Ahl Laamara. Quantum communication protocols: From theory to implementation in the quantum computer. 2023.
- [2] Eylee Jung, Mi-Ra Hwang, You Hwan Ju, Min-Soo Kim, Sahng-Kyoon Yoo, Hungsoo Kim, DaeKil Park, Jin-Woo Son, S. Tamaryan, and Seong-Keuck Cha. Greenberger-Horne-Zeilinger versus W states: Quantum teleportation through noisy channels. *Physical Review A*, 78(1), July 2008.
- [3] Chang-Yue Zhang, Zhu-Jun Zheng, Zhao-Bing Fan, and Hai-Tao Ma. The efficiency of quantum teleportation with three-qubit entangled state in a noisy environment. *Scientific Reports*, 13(1):3756, Mar 2023.
- [4] M. Murao, M. B. Plenio, S. Popescu, V. Vedral, and P. L. Knight. Multiparticle entanglement purification protocols. *Phys. Rev. A*, 57:R4075–R4078, Jun 1998.
- [5] Áron Rozgonyi, Gábor Széchenyi, Orsolya Kálmán, and Tamás Kiss. Training iterated protocols for distillation of GHZ states with variational quantum algorithms. *Physics Letters A*, 499:129349, 2024.
- [6] M. Cerezo, Andrew Arrasmith, Ryan Babbush, Simon C. Benjamin, Suguru Endo, Keisuke Fujii, Jarrod R. McClean, Kosuke Mitarai, Xiao Yuan, Lukasz Cincio, and Patrick J. Coles. Variational quantum algorithms. *Nature Reviews Physics*, 3(9):625–644, Sep 2021.
- [7] Jarrod R McClean, Jonathan Romero, Ryan Babbush, and Alán Aspuru-Guzik. The theory of variational hybrid quantum-classical algorithms. *New Journal of Physics*, 18(2):023023, feb 2016.
- [8] Maomin Qing and Wei Xie. Use VQE to calculate the ground energy of hydrogen molecules on IBM Quantum, 2023.
- [9] Ali Abu-Nada. Quantum computing simulation of the hydrogen molecular ground-state energies with limited resources. *Open Physics*, 19(1):628–633, 2021.
- [10] Jules Tilly, Hongxiang Chen, Shuxiang Cao, Dario Picozzi, Kanav Setia, Ying Li, Edward Grant, Leonard Wossnig, Ivan Rungger, George H. Booth, and Jonathan Tennyson. The variational quantum eigensolver: A review of methods and best practices. *Physics Reports*, 986:1–128, November 2022.
- [11] Ali Ibnun Nurhadi and Nana Rachmana Syambas. Quantum key distribution (QKD) protocols: A survey. In *2018 4th International Conference on Wireless and Telematics (ICWT)*, pages 1–5, 2018.
- [12] Gláucia Murta, Federico Grasselli, Hermann Kampermann, and Dagmar Bruß. Quantum conference key agreement: A review. *Advanced Quantum Technologies*, 3(11):2000025, 2020.
- [13] Péter Rakyta and Zoltán Zimborás. Approaching the theoretical limit in quantum gate decomposition. *Quantum*, 6:710, May 2022.
- [14] Sebastian Ruder. An overview of gradient descent optimization algorithms, 2017.
- [15] Apoorva D. Patel. The quantum density matrix and its many uses: From quantum structure to quantum chaos and noisy simulators. *Journal of the Indian Institute of Science*, 103(2):401–417, April 2023.