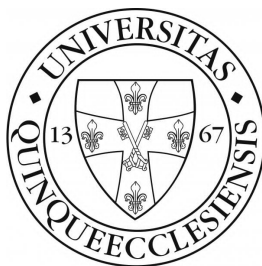


Pécsi Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Fizikai Intézet

**Reciprocitási- és középérték- tételek az elektro- és
magnetosztatikában**



Témavezető: Dr. Pálfalvi László
egyetemi tanár

Készítette: Szörcsök Noel
osztatlan tanárszakos hallgató

Pécs, 2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Előzmények	6
3. Célkitűzés	10
4. A Green-féle reciprocitási tétel bizonyítása	11
4.1. Bizonyítás diszkrét töltéseloszlás esetére	11
4.2. Bizonyítás folytonos töltéseloszlás esetére	14
4.3. Bizonyítás nemvezető felület esetére	14
4.4. Bizonyítás vezető felület esetére	18
5. Reciprocitási- és középérték tételek a magnetosztatikában	21
5.1. A magnetosztatika reciprocitási tételei	21
5.2. Középérték-tételek a magnetosztatikában	22
5.2.1. A gömbön kívüli áramok esete	23
5.2.2. A gömbön belüli áramok esete	25
6. A pontszerű dipólus potenciálja a Green-féle reciprocitási tétel tükrében	28
7. Összefoglalás	30
8. Függelék	31
Saját eredmények	34

1. Bevezetés

Dolgozatom témáját egy a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban (KöMaL) megjelent érdekes felvetés [1] ihlette. A szerzőt az a kérdés foglalkoztatta, hogy egy tetszőleges elektrosztatikus térbe tetszőlegesen elhelyezett gömbfelületre átlagolt potenciál, illetve térerősség milyen értéket ad, levonható-e valamilyen általános konklúzió. Hasonló kérdéskört boncolgatnak a [2–4] közlemények.

[1]-ben magát a problémát kétféleképpen közelítette meg a szerző. Az egyikre úgy hivatkozik, mint a „nyers erő” módszere, amely egy mechanikus számolást jelent. A részletes levezetés [1]-ben megtalálható, erre most itt nem térek ki, pusztán annak lényegét vázolom. A szerző kiindulásként olyan elektrosztatikus teret tekintett, amit egyetlen Q ponttöltés kelt. A tőle l távolságra felvett R sugarú, virtuális gömb felületén a ponttöltés által keltett potenciálnak az átlagát először az integrálás-átlagolás direkt módszerével („nyers erő”) határozta meg. Technikailag ez úgy történt, hogy a gömbfelületet a ponttöltés-gömbközepppont tengelyre merőlegesen szeletelte. A hengerszimmetriát kihasználva az integrálás viszonylag könnyen elvégezhető volt. Eredményül

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_>} \quad (1.1)$$

adódott, ahol $r_>$ l és R közül mindig a nagyobbat jelenti. $l > R$ felel meg a *külső*, $R > l$ pedig a *belső* töltéseknek.

A szerző ezután egy roppant szellemes, elemi módszerrel állt elő a probléma megoldására. Az R sugarú gömböt gondolatban töltéssel látta el: egy egységnyi töltéssel egyenletesen feltöltött, szigetelő gömbhéjat tekintett. Energia-viszonyok szempontjából a következő kérdést fogalmazta meg. Vajon mekkora a fenti módon értelmezett szigetelő gömb és annak középpontjától l távolságra lévő Q töltésű ponttöltés elektrosztatikus kölcsönhatási energiája? A problémát két különböző felfogással közelítette meg. Az egyik szerint: mivel

a Q ponttöltés az egyenletesen töltött gömbhéj elektrosztatikus terében van a kölcsönhatási energia a gömbhéj által a ponttöltés helyén keltett potenciál (ami jól ismert összefüggés mind *külső*, mind *belső* töltés esetén) szorozva Q -val. Ugyan ezt a kölcsönhatási energia-értéket kell kapnunk, ha a ponttöltés által keltett potenciált kiintegráljuk a gömbhéj felületére (melynek töltését egységnyiinek választották). Az egyenlőség fennálta miatt pont az integrálás elvégzését spóroljuk meg, és $\langle\varphi\rangle$ -re a válasz (az (1.1) összefüggés) egyszerűen adódik.

A frappáns energetikai megfontolás mögött hallgatólagosan az elektrosztatika szakirodalmában már az 1930-as évektől ismert Green-féle reciprocitás tétel húzódik.

Egy lehetséges megközelítés szerint [5] a tétel állítása a következő: Ha egy $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűséggel leírható töltéeloszlás $\varphi(\vec{r})$ potenciált kelt, egy tőle független $\rho^*(\vec{r})$ töltéssűrűséggel jellemezhető töltéeloszlás pedig $\varphi^*(\vec{r})$ potenciált kelt, akkor teljesülnie kell a

$$\int \rho(\vec{r})\varphi^*(\vec{r}) dV = \int \rho^*(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dV \quad (1.2)$$

összefüggésnek, ahol az integrálás a teljes térre terjed ki.

A tétel állításának szemléletes fizikai tartalmát a következőképpen lehet megragadni. Adott $\rho(\vec{r})$ tetszőleges (akár diszkrét, akár folytonos) töltéssűrűség és egy tőle független, végtelen távoli $\rho^*(\vec{r})$ töltéssűrűség. Mindkét töltéeloszlás töltéseit egymáshoz képest rögzítettnek tekintjük, kontinuum esetén merev testként képzeljük el. Feltételezzük azonban, hogy a két töltésrendszer egymás számára átjárható. A két töltésrendszer egyesítésénél az elektrosztatikus tér (mint konzervatív tér) ellenében végzett munka független attól, hogy eleinte melyik töltéeloszlást tekintjük nyugvónak, hiszen egyik sincs kitüntetett helyzetben a másikhoz képest. Az (1.2) képletben szereplő töltéssűrűségek és térfogatelemek szorzata éppen az adott térrészben lévő elemi töltésmennyiségeket adják. Ebből következik, hogy az egyenlet bal oldala a $\rho(\vec{r})$ töltésrendszer elektrosztatikus potenciális energiája a $\rho^*(\vec{r})$ töltések által keltett térben. Az egyenlet jobb oldala pedig hasonló gondolatmenettel a $\rho^*(\vec{r})$ töltésrendszer elektrosztatikus potenciális energiáját fejezi ki a $\rho(\vec{r})$ töltések által keltett térben.

A tétel állítását felfoghatjuk a következő egyszerű ténymegállapítás kiterjesztéseként. Vegyünk két, egymástól végtelen távol lévő ponttöltést: q_1 -et és q_2 -t. Jól ismert, hogy rögzített q_1 esetén a q_2 -n végzett W munka, miközben azt a végtelen távoból a q_1 -től r távolságra lassan, egyenletesen behozzuk

ugyanakkora, mintha fordítva járunk el, azaz q_2 -t rögzítjük, és q_1 -t mozgatjuk. Tehát

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \underbrace{\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\varphi_1(r)} q_2 = \underbrace{\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\varphi_2(r)} q_1, \quad (1.3)$$

azaz a munka felfogható úgy is, mint a q_1 ponttöltés által a q_2 helyén keltett $\varphi_1(r)$ potenciál és q_2 szorzata, és úgy is, mint a q_2 ponttöltés által a q_1 helyén keltett $\varphi_2(r)$ potenciál és q_1 szorzata. E szemlélet még jobban rávilágít a Green-féle reciprocitási tétel lényegére.

A szakirodalomban leginkább elterjedt a tételnek az a megfogalmazása, melyben megkülönböztetnek $\rho(\vec{r})$ *térfogati* és $\sigma(\vec{r})$ *felületi* töltéssűrűségeket. Ekkor ezen töltéssűrűségek együttese kelti a $\varphi(\vec{r})$ potenciált. A tételnek ezen megfogalmazásra is úgy szokás hivatkozni, mint Green-féle reciprocitás [6, 7], noha az Elméleti Fizika Példatár [8] Gauss reciprocitási tételeként emlegeti.

Az alábbiakban a Green-féle reciprocitási tétel különböző tankönyvekben, példatárakban közölt formáit és azok nyomtatásban és interneten elérhető példatárakban, feladatgyűjteményekben fellelhető „hivatalos” bizonyításait mutatom be kritikai észrevételeimmel. E szerzők által adott bizonyítások ugyanis meglehetősen formálisak, mindegyik egy kényes ponton elsiklik, amit kegyes csalással vagy egy jóhiszemű korrekcióval állítanak helyre.

A tétel és annak bizonyításának szövegét szó szerint idézem, pusztán a jelöléseket módosítom az általam használtakra a jobb átláthatóság kedvéért.

• A tétel [8] alapján:

„Bizonyítsuk be Gauss reciprocitási tételét: Ha a φ potenciált a V térfogatban elosztott ρ térfogati, és a határoló A felületen elosztott σ felületi töltéssűrűség hozza létre, és ha φ^* -t ugyanebben a tartományban ρ^* és σ^* hozza létre, akkor:

$$\int_V \rho \varphi^* dV + \int_A \sigma \varphi^* dA = \int_V \rho^* \varphi dV + \int_A \sigma^* \varphi dA.” \quad (1.4)$$

Bizonyítás [8] alapján: Induljunk ki a

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \varphi^* = -\frac{\rho^*}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

Poisson-egyenletekből, valamint a felületi töltéssűrűség és a térerősség kapcsolatából

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_n^* = \frac{\sigma^*}{\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

A Green-tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned}
\int_V \left(-\varphi^* \frac{\rho}{\epsilon_0} + \varphi \frac{\rho^*}{\epsilon_0} \right) dV &= \int_V (\varphi^* \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \varphi^*) dV = \\
&= \int_A (\varphi^* \text{grad } \varphi - \varphi \text{grad } \varphi^*) d\vec{A} = \int_A (-\varphi^* E + \varphi E^*) dA = \\
&= \int_A \left(\varphi^* \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \varphi \frac{\sigma^*}{\epsilon_0} \right) dA.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ebből átrendezéssel következik a tétel.

Kritikai megjegyzésem:

Mivel a felületnek semmilyen tulajdonságát nem említi (*vezető/nem vezető*) a térerősségek (E_n^*) normál komponenseinek csupán az *ugrása* azonos $\sigma^{(*)}/\epsilon_0$ -lal a felület átlépése során, nem maguk a térerősségek, ahogy azt feltételezték. Az utolsó lépésben az (1.6) összefüggéseket előjelhibásan alkalmazta.

Számos internetes példatárbeli megoldásban hasonló módon elsinkófálják az előjelet. Egy alább bemutatott megoldásban [9] azonban kifejezetten kitér az előjelbeli problémára, viszont helytelen magyarázatot ad.

• **A tétel [6] alapján:**

„Ha V térfogaton belüli ρ (térfogati) töltéssűrűség és a V térfogatot határoló A *vezető* felület σ (felületi) töltéssűrűsége által együttesen keltett potenciál φ , a ρ^* és σ^* töltéssűrűség által keltett potenciál pedig φ^* , akkor (1.4) teljesül.”

Ez a megfogalmazás annyiban különbözik a [8]-beli előző megfogalmazástól, hogy a felülethez *vezető* tulajdonságot társít.

Bizonyítás [9] szerint: A bizonyítás hasonlóan történik, mint [8]. A részletes bizonyítás a Függelékben (8. fejezet) található.

Kritikai megjegyzésem:

Szerző az előjelbeli problémát felismerheti, ugyanis úgy érvel, hogy a zárt felület normálisának irányítása vezető felület esetén *befelé* mutat. Így helyes végeredményre jut. A felület normálisának ilyen irányítása viszont ellentmondásban áll [6] 1.8 fejezetében foglaltakkal.

Fenti kritikai észrevételeim ösztönöztek arra, hogy a tétel bizonyításával mélyebben foglalkozzak. **Saját bizonyításomat** a 4. fejezetben mutatom be.

2. Előzmények

Ebben a fejeztben a tétellel kapcsolatos szakirodalomnak az esszenciáját foglalom össze különös hangsúlyt fektetve az ezzel kapcsolatos kutatások intézményi (PTE Fizikai Intézet) előzményeire. Erősen támaszkodom a [10–12] cikkekre melyekben a Green-féle reciprocitási tétel és a középérték-tételek kapcsolatáról, és a reciprocitási tétel néhány folyamányáról van szó. E téma kidolgozásához a [10–12] közlemények szerzőinek a motivációt a jelen dolgozat Bevezetőjében is említett azon tény adta, ami szerint az [1] cikk energetikai megfontolásai mögött a Green-féle reciprocitási tétel húzódik meg. A középérték-tételekkel kapcsolatos ezen eredmények kiemelten fontos kiindulópontok lesznek az 5. fejezetben (Reciprocitási- és középérték tételek a magnetosztatikában) bemutatásra kerülő **saját eredményeimhez**.

A KöMaLban [1] felvetett problémák a gömb felületére való átlagolásra csúcsosodnak ki. A [11, 12] közleményekben azonban a térfogatra vonatkozó átlagokat is meghatározzák. Ez nyolc darab középérték tételt jelent: négy *felületi*, négy *térfogati* átlagra vonatkozót, melyekből kettő-kettő *térerősségre* kettő-kettő *potenciálra* vonatkozik. Mindegyik alesetben megkülönböztetünk gömbön *kívüli*, illetve azon *belüli* töltéseket.

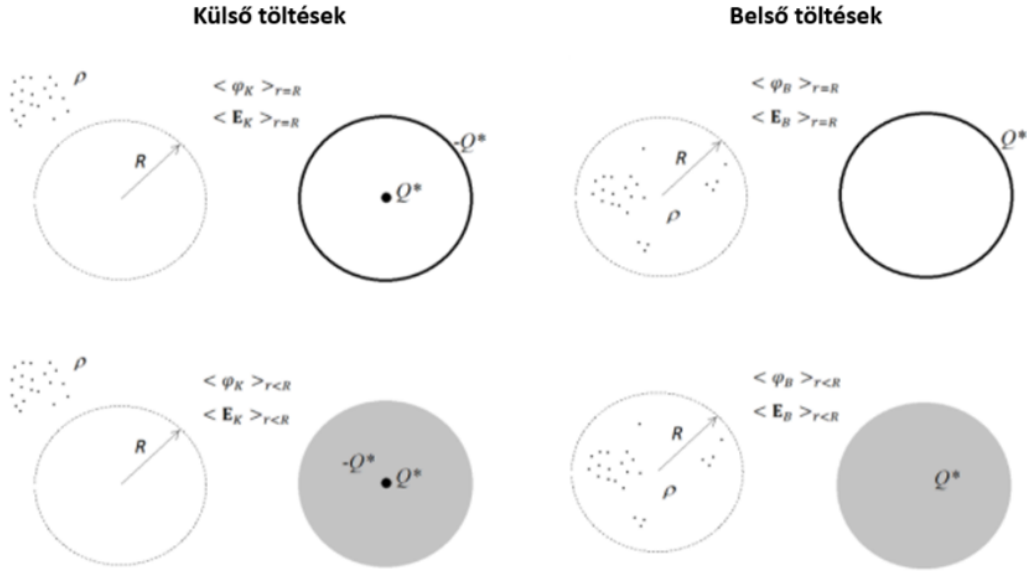
Míg a potenciállal kapcsolatos megállapítások mögött az (1.2) energetikai összefüggés áll, addig a térerősség esetén a ρ és ρ^* töltésrendszerek közti erőhatást kell vizsgálni. A töltésrendszereket alkotó töltések egymásra erőt gyakorolnak, melynek értékét a megfelelő töltésmennyiségek és térerősség értékek szorzatának teljes térre való integrálja adja. Teljesülnie kell a hatás-ellenhatás törvényének, azaz:

$$\int \vec{E}(\vec{r})\rho^*(\vec{r}) dV = - \int \vec{E}^*(\vec{r})\rho(\vec{r}) dV. \quad (2.1)$$

Az egyszerűség és a könnyen követhetőség érdekében a [11, 12]-beli jelöléseket fogom használni. A *felületi* átlagot a $\langle \dots \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \dots dA$ -ként , a

térfogatit, pedig $\langle \dots \rangle_{r < R} = \frac{1}{V_0} \int \dots dV$ -ként fogom jelölni és értelmezni (lásd a 2.1 táblázat).

A nyolc keresett átlagérték (1.2) és (2.1) reciprocitási tételek alapján történő meghatározásához elsődleges, alapvető fontosságú lépés egy alkalmas ρ^* segédtöltés-eloszlás megtalálása. Ez a nyolc különböző esetben négy különböző $\rho^*(r)$ eloszlást jelent (lásd a 2.1. ábrát). K index jelöli a *külső*, B a *belső* töltések esetét.



2.1. ábra. A kívánt átlagérték-számításához tartozó segédtöltés-eloszlás [11, 12].

Helytakarékosság miatt itt nem fogom mind a nyolc eset levezetését megismételni. A kapott eredmények viszont fontos kiindulópontjai azon fejezetek egyikének (5. fejezet), melyekben **saját munkámat** mutatom be. Ezért tanulságosnak gondolom, hogy a nyolcból egy kiragadott esetnek (az [1]-ben is tárgyalt $\langle \varphi \rangle_{r=R}$ -nak) a levezetését itt bemutassam.

Tekintsük azt az esetet, amikor a $\rho(\vec{r})$ töltéseloszlás az R sugarú gömbön kívül helyezkedik el. Ekkor a segédtöltés eloszlást egy a gömb középpontjában lévő Q^* és a felületén egyenletesen elosztatott $-Q^*$ töltés alkotja (2.1. ábra). Ezt a következő összefüggés adja meg:

$$\rho^*(r) = \frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r - R), \quad (2.2)$$

ahol az első tag a ponttöltés, a második a gömbhéj járulékát adja meg. Könnyen belátható, hogy erre az esetre felírt (1.2) egyenletnek bal oldala zérus, hiszen a konstrukció miatt a ρ töltéssűrűség a gömbön kívül helyezkedik el és a ρ^* -hez tartozó φ^* potenciál a gömbön kívüli értéke mindenhol nulla, így az integrálás során mindig nullákat adunk össze. Most már csak be kell helyettesíteni és mechanikusan végigszámolni a jobb oldalt:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r - R) \right] \cdot \varphi(r, \theta, \phi) r^2 d(\cos \theta) d\phi dr = 0. \quad (2.3)$$

A zárójel felbontása és az r változó szerinti integrálást elvégezve a következő teljesül:

$$\frac{Q^*}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(0, \theta, \phi) d(\cos \theta) d\phi = \frac{Q^*}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(R, \theta, \phi) d(\cos \theta) d\phi \quad (2.4)$$

Az egyenlet bal oldalán elvégezve az integrálásokat, továbbá a jobb oldalt R^2/R^2 -tel való szorzás, illetve egyszerűsítések után megkapjuk az első középérték tételt:

$$\varphi(0, \theta, \phi) = \varphi(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(R, \theta, \phi) \underbrace{R^2 d(\cos \theta) d\phi}_{dA}. \quad (2.5)$$

A kapott egyenlet jobb oldala éppen a potenciálnak a gömbfelületére vett átlaga, tehát

$$\langle \varphi_K \rangle_{r=R} = \varphi(0), \quad (2.6)$$

ami összhangban van az [1] cikkben lévő eredménnyel, azaz *külső* ρ töltéssűrűség által keltett potenciálnak a gömbfelületére vett átlaga valóban megegyezik a középpontbeli potenciál értékével.

A térerősségre vonatkozó középérték tételek megkaphatók, ha a (2.1) képletet használjuk. *Külső* ρ töltéssűrűség esetén a gömbfelületére vett átlag teljesen hasonló módon adódik, mint a φ potenciálnál. A rendszerhez tartozó segédtöltés-eloszlást ugyanaz a (2.2) egyenlet írja le. A behelyettesítések és átalakítások után megkaphatjuk a térerősségnek felületi átlagát, ami

$$\langle \vec{E}_K \rangle_{r=R} = \vec{E}(0) \quad (2.7)$$

szintén összhangban az [1]-ben lévő meggondolással.

A nyolc különböző esetbeli átlagértékeket, melyek részletes levezetése megtalálható [11, 12]-ben a 2.1. táblázat foglalja össze.

2.1. táblázat. Az első oszlop a *térerősség/potenciál felületi/térfogati* átlagait tartalmazza *külső/belső* töltések esetén, a második oszlopban pedig a segédtöltéssűrűség látható [11, 12]. H az egységugrás függvényt jelöli.

Keresett átlagmennyiség	Segédtöltéssűrűség $\rho^*(\vec{r})$
$\langle \varphi_K \rangle_{r=R} = \varphi(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r - R)$
$\langle \vec{E}_K \rangle_{r=R} = \vec{E}(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r - R)$
$\langle \varphi_K \rangle_{r<R} = \varphi(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r - R)]$
$\langle \vec{E}_K \rangle_{r<R} = \vec{E}(0)$	$\frac{Q^*}{4\pi r^2} \delta(r) - \frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r - R)]$
$\langle \varphi_B \rangle_{r=R} = \frac{\sum Q}{4\pi\epsilon_0 R}$	$\frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r - R)$
$\langle \vec{E}_B \rangle_{r=R} = 0$	$\frac{Q^*}{4\pi R^2} \delta(r - R)$
$\langle \varphi_B \rangle_{r<R} = \frac{1}{6\epsilon_0 V_0} \int \rho(r, \theta, \phi) (3R^2 - r^2) dV$	$\frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r - R)]$
$\langle \vec{E}_B \rangle_{r<R} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \langle \vec{P} \rangle$	$\frac{Q^*}{V_0} [H(r) - H(r - R)]$

A nyolc középértéktétel magnetosztatikai megfelelőjéhez analógiák alapján jutok el. Ezeket, mint **saját eredményeim** az 5. fejezetben fogom ismertetni.

3. Célkitűzés

Jelen dolgozattal céloom egy olyan munka elkészítése, mely hasznos segítséget nyújt a *középiskolai* és a *felsőfokú* fizikaoktatásban. A probléma gyökere egy Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban közölt cikkből [1] eredt. Noha e dolgozat matematikai eszköztára több helyen meghaladja a (még haladóbb) középiskolai szintet, magának a problémának, illetve a konklúzióknak az absztrakciós szintje viszont nem lépi meg azt. Így hasznos segítség lehet számos új problémák megoldása során. Példa ilyenre a dipólus távoli zónabeli potenciáljának meghatározása, ahogy az a 6. fejezetben látható.

A következő – szakirodalomban hiánypótló – célokat tűztem ki vizsgálni TDK munkámban:

- A kizárólag térfogati töltéssűrűséggel leírt Green-féle reciprocitási tétel bizonyítása *diszkrét* és *folytonos* töltéeloszlás eseteire.
- A térfogati és felületi tagot egyaránt tartalmazó Green-féle reciprocitási tétel bizonyítása *tetszőleges* tulajdonságú és *vezető* felületek eseteire.
- A magnetosztatikai középérték tételek levezetése az elektrosztatikai középérték tételek alapján.
- A pontszerű elektromos dipólus potenciáljának levezetése a Green-féle reciprocitási tétel alapján.

Témavezetőm korábbi tanítványával személyes diszkussziót folytatott **David J. Griffiths** professzorral, az *Introduction to Electrodynamics* c. tankönyv szerzőjével. A magnetosztatikai probléma kidolgozására a Professzor ösztökélt bennünket abban a levelében, melyben a [12] cikket méltatta.

A fenti pontokba szedett **célkitűzéseim megvalósítását** a 4., 5. és 6. fejezetekben fejtem ki. Ezen fejezetek képezik **saját munkámat**.

4. A Green-féle reciprocitási tétel bizonyítása

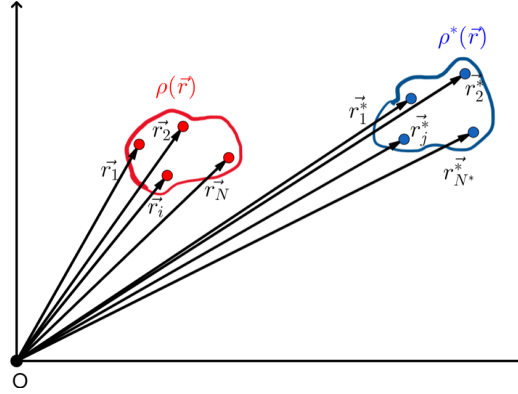
A 4.1 és 4.2 alfejezetekben a Green-féle reciprocitási tétel felületi tagokat nem tartalmazó (1.2) összefüggésére fogok **saját bizonyítást** adni a töltéssűrűség *diszkrét*, illetve *folytonos* eseteire vonatkozóan. A 4.3 és 4.4 alfejezetekben, pedig a felületi töltéseket is tartalmazó (1.2) tételre vonatkozó **saját bizonyításomat** fogom bemutatni *tetszőleges* töltéseloszlású, illetve *vezető* felületek eseteire egyaránt.

4.1. Bizonyítás diszkrét töltéseloszlás esetére

Emlékeztetőül, a [6, 7] hivatkozások szerint a tétel állítása a következő: ha egy $\rho(\vec{r})$ töltéssűrűséggel leírható töltéseloszlás $\varphi(\vec{r})$ potenciált kelt, egy tőle független $\rho^*(\vec{r})$ töltéssűrűséggel jellemezhető töltéseloszlás pedig $\varphi^*(\vec{r})$ potenciált kelt, akkor teljesülnie kell az (1.4) egyenletnek.

A bizonyítást először diszkrét töltéseloszlásra (a töltéseloszlást ponttöltések alkotják) végzem el. A bizonyítást direkt módon teszem meg, azon intuitív gondolatok alapján, amiket a bevezetőrészben is megfogalmaztam. A két töltéseloszlás egyesítéséhez szükséges munkát kétféleképpen ragadom meg. Egyik esetben gondolatban ρ -t rögzítem, és ρ^* -t mozgatom, azaz a munkavégzést úgy fogom fel, mint ρ^* potenciális energiája a ρ által keltett potenciálban. A másik esetben pedig fordítva járok el.

$\rho(\vec{r})$ -t alkossa N darab q_i , $\rho^*(\vec{r})$ -t pedig N^* darab q_j^* ponttöltés. Az egyes töltésrendszerek konfigurációit meg tudom adni töltései helyvektorai segítségével. Rendre jelölje a q_i és q_j^* ponttöltésekhez tartozó helyvektorokat $\vec{r}_i$, illetve $\vec{r}_j^*$, ahogyan a 4.1. ábra is mutatja.



4.1. ábra. A diszkrét töltéeloszlásokat szemléltető ábra.

A töltéssűrűségeket a következő összefüggésekkel adhatjuk meg:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (4.1)$$

illetve

$$\rho^*(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N^*} q_j^* \delta(\vec{r} - \vec{r}_j^*). \quad (4.2)$$

A töltéssűrűségekhez tartozó potenciálok az őket alkotó ponttöltések által keltet potenciálok összegeként áll elő a szuperpozíció elve szerint. Ez matematikailag így fejezhető ki:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (4.3)$$

hasonlóan

$$\varphi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N^*} \frac{q_j^*}{|\vec{r} - \vec{r}_j^*|}. \quad (4.4)$$

A fenti töltéssűrűségeket és potenciálokat kell az (1.2) egyenletben figyelembe venni. Az egyenlet bal oldala fejezi ki a ρ energiáját ρ^* terében azaz azt a W munkát, amit rögzített ρ^* esetén ρ -n végeznénk a gondolatbeli egyesítéskor:

$$W = \int \rho(\vec{r}) \varphi^*(\vec{r}) dV. \quad (4.5)$$

Figyelembe véve a megfelelő töltéssűrűséget és potenciált

$$\begin{aligned} W &= \int \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N^*} \frac{q_j^*}{|\vec{r} - \vec{r}_j^*|} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N^*} \frac{q_j^* q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_j^*|} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N^*} \frac{q_j^* q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j^*|} \end{aligned} \quad (4.6)$$

adódik. Kihasználtuk, hogy az összegzések és az integrálás sorrendje felcserélhető, illetve felhasználtuk a Dirac-delta definícióját.

Most következzen az (1.2) egyenlet jobb oldala, azaz

$$W^* = \int \rho^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV. \quad (4.7)$$

Ebbe a képletbe behelyettesítve a megfelelő összefüggéseket kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} W^* &= \int \sum_{j=1}^{N^*} q_j^* \delta(\vec{r} - \vec{r}_j^*) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} dV \\ &= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N^*} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_j^*}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \delta(\vec{r} - \vec{r}_j^*) dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N^*} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_j^*}{|\vec{r}_j^* - \vec{r}_i|}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Értelmeszerűen a két összefüggés ekvivalens, ezzel a tétel állítását diszkrét esetre beláttam.

4.2. Bizonyítás folytonos töltéseloszlás esetére

A potenciálok (4.3) és (4.4) kifejezéseiben az összegzéseket integrálások fogják felváltani:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (4.9)$$

$$\varphi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho^*(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (4.10)$$

Először a $\rho^*(\vec{r})$ töltéseloszlást rögzítem a térben, ekkor az egyesítéshez szükséges munkát (4.5) adja meg:

$$\begin{aligned} W &= \int \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho^*(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) \rho(\vec{r}) dV = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\vec{r})\rho^*(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ha pedig a másik töltéseloszlást rögzítem, a következő teljesül:

$$\begin{aligned} W^* &= \int \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) \rho^*(\vec{r}) dV = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho^*(\vec{r}')\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Az egyenletekben a $\vec{r}$ és $\vec{r}'$ teljesen szimmetrikus, így a két munka valóban megegyezik, $W = W^*$. Így a tétel ezen megfogalmazását bizonyítottam folytonos töltéseloszlás esetére is.

4.3. Bizonyítás nemvezető felület esetére

Ahogy annak a Bevezetésben kellő hangsúlyt szenteltem, a Green-féle reciprocitási tételre adott bizonyítások [8, 9] noha formálisan helyesnek tűnnek mégis hibásak. Az előjelhiba, és annak különböző cselekkel való eltusolása ösztökélt arra, hogy mélyebbre ássak.

Keresve a hibát, felismertem, hogy ott vétettek (nem is kis hibát), hogy a *Poisson-egyenlet* jobb oldalán a töltéssűrűséget kizárólag a ρ térfogati töltéssűrűséggel azonosították. Ez helytelen, hiszen a potenciált a *térfogati*

és a *felületi* töltéssűrűség *együttesen* kelti. Rájöttem arra, hogy hasonlóan kell eljárni, mint amikor egy folytonos ρ térfogati töltéssűrűség és diszkrét ponttöltés(ek) együttesen vannak jelen. Ilyenkor a ponttöltés forrás(ok) additív Dirac-deltával leírható taggal veendő figyelembe a teljes töltéssűrűséget megadó kifejezésében. Esetünkben tehát, amikor egy tetszőleges zárt felületen belül jelen van egy „elkent” $\rho^{(*)}$ térfogati töltéssűrűség, illetve jelen van a felület mentén vékonyrétegben kialakított $\sigma^{(*)}$ felületi töltéssűrűség, a Poisson-egyenletet a jelzetlen, és a jelzett $(*)$ esetekben a következő alakban írhatom fel:

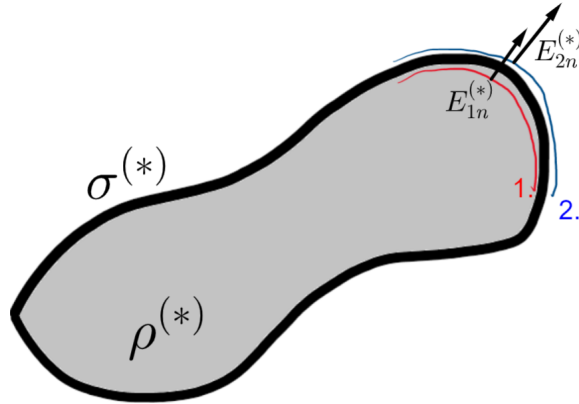
$$\nabla^2 \varphi^{(*)}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho^{(*)}(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \oint \sigma^{(*)}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dA'. \quad (4.13)$$

A

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \varphi^* - \varphi^* \nabla^2 \varphi) dV = \oint_A \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dA \quad (4.14)$$

Green-tétel bal oldalán tehát (4.13)-t kell megjeleníteni.

Egy másik sarkalatos pontnak láttam a (4.14) Green-tételbeli V integrálási térfogat, és annak A határolófelületének ésszerű megválasztását. A [8, 9]-beli bizonyítások során az A határolófelületet azzal a végtelen vékonynak idealizált felülettel azonosították, melyhez a $\sigma^{(*)}$ töltést tartozik. Ezt problémásnak találtam, hiszen a felület átlépésekor a folytonosan viselkedő potenciállal szemben a térerősség (a potenciál negatív gradiense) ugrást szenved.



4.2. ábra. A $\rho^{(*)}$ térfogati töltéssűrűséget egyetlen vékonyrétegből álló $\sigma^{(*)}$ felületi töltéssűrűség határolja.

Mindezek tükrében arra jutottam, hogy nem mindegy, hogy az integrálási tartomány hataraként *pontosan* mely felületet választjuk. Különbséget kell tenni a töltött felület, és az azt két oldalról (belülről, illetve kívülről) közvetlenül szendvicselő képzeletbeli felületek közt. Tisztán kell látni, mikor melyikről van szó. A 4.2 ábra szerint számozással (1. és 2.), illetve színkóddal különböztettem meg e felületeket.

Kézenfekvőnek gondoltam az 1. és/vagy 2. számú felületekre és az azokon belüli térfogatokra alkalmazni a (4.14) Green-tételt, és remélni, hogy így célravezető eredményre jutok, hisz mind a matematikai leírásmód, mind a fizikai tartalom tekintetében legjobb igyekezetem szerint járok el.

Kezdtém a 2. felülettel. A (4.13) egyenlet által a $\nabla^2 \varphi^*(\vec{r})$ -t megadó kifejezést behelyettesítettem a (4.14) egyenlet bal oldalán lévő első tagba:

$$\begin{aligned} \int_{V_2} \varphi \nabla^2 \varphi^* dV &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \varphi(\vec{r}) \left[\rho^*(\vec{r}) + \oint_A \sigma^*(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dA' \right] dV \quad (4.15) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \varphi(\vec{r}) \rho^*(\vec{r}) dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \sigma^*(\vec{r}') \left[\int_{V_2} \varphi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV \right] dA' \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \varphi(\vec{r}) \rho^*(\vec{r}) dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi(\vec{r}') \sigma^*(\vec{r}') dA' \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \varphi(\vec{r}) \rho^*(\vec{r}) dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi(\vec{r}) \sigma^*(\vec{r}) dA. \end{aligned}$$

Az első lépésben a felületi és a térfogati integrál felcserélhetőségét, a másodikban a Dirac-delta definícióját használtam ki, végül egy változócsereét hajtottam végre. Teljesen hasonló megfontolásokkal, ha a (4.13) egyenlet szerinti $\nabla^2 \varphi(\vec{r})$ -t helyettesítem a (4.14) egyenlet bal oldalán a kivonandó helyére

$$\int_{V_2} \varphi^* \nabla^2 \varphi dV = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \varphi^*(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi^*(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) dA \quad (4.16)$$

adódik. Felhasználva, hogy

$$E_{2n}^{(*)} = -\frac{\partial \varphi^{(*)}}{\partial n} \quad (4.17)$$

a (4.14) egyenlet jobb oldala

$$\oint_{A_2} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dA = \oint_{A_2} \varphi^* E_{2n} dA - \oint_{A_2} \varphi E_{2n}^* dA \quad (4.18)$$

lesz. Figyelembe véve (4.15), (4.16), (4.17) és (4.18) összefüggéseket (4.14)-ben a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \varphi \rho^* dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi \sigma^* dA - \\
& - \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \varphi^* \rho dV - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi^* \sigma dA \right) = \\
& = \oint_{A_2} \varphi^* E_{2n} dA - \oint_{A_2} \varphi E_{2n}^* dA.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Most tekintem az 1. felületet. Nem lehet megtenni azt, hogy a (4.19) egyenletben egyszerűen kicserélem a 2-es indexeket 1-re. Ennél körültekintőbben kell eljárni. Lényeges különbség ugyanis, hogy míg $\vec{r} \in V_2$, addig $\vec{r} \notin V_1$ (lásd a (4.13) egyenletet és a 4.2 ábrát). Ezt szem előtt tartva a következő megállapításra jutunk:

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_1} \varphi \rho^* dV + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_1} \varphi^* \rho dV = \oint_{A_1} \varphi^* E_{1n} dA - \oint_{A_1} \varphi E_{1n}^* dA. \tag{4.20}$$

Követeljük meg, hogy A_1 belülről, A_2 pedig kívülről minden határon túl tartson az általuk szendvicselt A felülethez. E határesetben

$$\lim_{A_{1(2)} \rightarrow A} V_{1(2)} = V \tag{4.21}$$

Mivel $\varphi^{(*)}$ folytonosan viselkedik az A felületen történő átlépéskor, valamint $E_{2n}^{(*)} - E_{1n}^{(*)} = \sigma^{(*)}/\epsilon_0$ a (4.19) egyenletből kivonva a (4.20) egyenletet a

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi \sigma^* dA + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi^* \sigma dA = \\
& = -\oint_A \varphi (E_{2n}^* - E_{1n}^*) dA + \oint_A \varphi^* (E_{2n} - E_{1n}) dA = \\
& = -\frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi \sigma^* dA + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \varphi^* \sigma dA
\end{aligned} \tag{4.22}$$

azonosság adódik a fent megkövetelt határátmenetre vonatkozóan. A tételt ugyan nem sikerült bebizonyítanom, de az ellentmondásmentes eredmény biztató olyan értelemben, hogy a problémát jól ragadtam meg, helyesen írtam le.

Más egyéb lehetőség nem igen volt, mint az Green-tételbeli integrálási tartományt a teljes térre kiterjeszteni. Ennek előnyét rögtön megláttam abban, hogy a (4.14) összefüggés jobb oldala zérus lesz. A véges térfogatra, illetve annak határfelületére korlátozódó töltésseloszlásunk potenciálja $1/r$ -rel, térerőssége $1/r^2$ -tel cseng le a végtelenben húzódó felület pontjaiban, így a (4.14) egyenlet jobb oldala $1/r$ -rel zérushoz tart $r \rightarrow \infty$ miatt. A (4.13) összefüggést a (4.14) egyenletbe helyettesítve ezen integrálási tartomány választás mellett

$$\begin{aligned} & \int_{V_\infty} \left[\varphi^* \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \sigma(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right) \right] dV - \\ & - \int_{V_\infty} \left[\varphi \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \rho^*(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \sigma^*(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right) \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

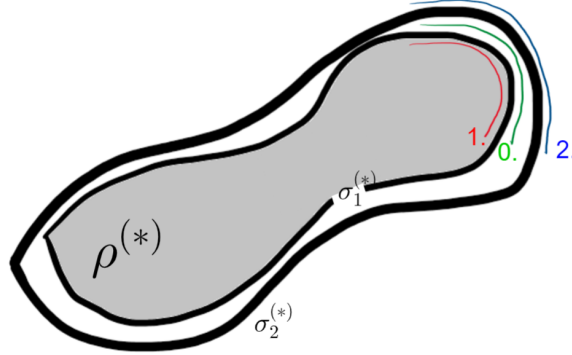
adódik. A kettős integrálokban a térfogati és felületi integrálás felcserélésével, a Dirac-delta definíciójának felhasználásával, ϵ_0 -lal való szorzás és rendezések után az (1.4) igazolandó tétel adódik. Ezzel bebizonyítottam azt, ami egyik célom volt: igazolni a Green-féle reciprocitási tételt tetszőleges tulajdonságú felületi töltés (és azon belül foglalt folytonos töltésseloszlás) esetére.

4.4. Bizonyítás vezető felület esetére

Vezető típusú felület esetéhez tekintsük a 4.3 ábrát! A vezető héj vastagsága bármilyen kicsi is, végesnek tekinthető. Az integrálási határ tekintetében megkülönböztethetjük az 1., a 0. és a 2. számokkal jelölt piros, zöld, és kék színű virtuális felületeket. Az előzőekben részletekre kiterjedően megadtam a levezetések lépéseit. Elkerülvén azt, hogy unalmassá váljon a dolgozat a sok, ismétlődő, hasonló lépéstől, most már csak jelezni fogom, hogy mi történik, visszautalva az előzőekben elkövetett hasonló megfontolásokra. A tételes levezetést Olvasóra bízom.

A fekete színű belső és külső felületekkel határolt vezető (4.3. ábra) belső felületén σ_1 , külső felületén σ_2 felületi töltéssűrűség van. Egy vékony kettős-rétegről van tehát szó.

Tekintsük az 1. (a 4.3. ábrán piros színű) felületet. Az (1.4) tétel bal oldalában kizárólag folytonos térfogati töltéssűrűségek kerülnek, jobb oldalán pedig a σ_1 töltéssűrűségű felületet közvetlen belülről határoló 1. (piros) felület mentén jelen lévő $E_1^{(*)}$ térerősségek jelennek meg. A héj vezető volta



4.3. ábra. A $\rho^{(*)}$ folytonos töltéeloszlás és az azt körülölelő vékony, töltött, vezető.

miatt e télerősségek egyrészt merőlegesek a felületre, másrészt egyben télerősség ugrások is, hiszen a vezető héj anyagában a télerősség zérus. Így e télerősségek a $\sigma_1^{(*)}$ töltéssűrűségekkel arányosak. E megfontolásokkal

$$\int \varphi \rho^* dV + \oint \varphi \sigma_1^* dA = \int \varphi^* \rho dV + \oint \varphi^* \sigma_1 dA \quad (4.24)$$

adódik, ami figyelembe véve, hogy az ekvipotenciális felületen a potenciál $V^{(*)}$, illetve a belső héj töltése $Q_1^{(*)}$

$$\int \varphi \rho^* dV + V \cdot Q_1^* = \int \varphi^* \rho dV + V^* \cdot Q_1. \quad (4.25)$$

Természetesen a Gauss-törvény értelmében $\int \rho^{(*)} dV + Q_1^{(*)} = 0$.

A 0. (a 4.3. ábrán zöld színű) felületet tekintve az (1.4) tétel bal oldalán a folytonos térfogati töltéssűrűségek mellett (4.13) szerint figyelembe kell venni a felületi σ_1 töltéssűrűséget. Az egyenlet jobb oldala pedig zérus, hiszen a vezető héjban a télerősség zérus. Mindezek figyelembevételével ugyancsak (4.25)-re jutunk.

A 2. (a 4.3. ábrán kék színű) felületet tekintve az (1.4) tétel bal oldalán a folytonos térfogati töltéssűrűségek mellett két (σ_1 és σ_2) felületi töltéssűrűséget leíró tagot is figyelembe kell venni (4.13) szerint. (1.4) jobb oldalán pedig a σ_2 töltéssűrűségű felületet közvetlen kívülről határoló 2. (kék) felület mentén jelen lévő $E_2^{(*)}$ télerősségek jelennek meg. A héj vezető volta miatt e télerősségek egyrészt merőlegesek a felületre, másrészt egyben télerősség

ugrások is, hiszen a vezető héj anyagában a térerősség zérus. Így e térerősségek a $\sigma_2^{(*)}$ töltéssűrűségekkel arányosak. E megfontolásokkal szintén (4.25)-re jutunk.

Érdekes tehát, hogy függetlenül attól, hogy melyik (0., 1. vagy 2.) felületet tekintettük az integrálási tartomány határának (4.25)-re jutunk.

A bizonyításhoz az lesz a célravezető, ha megint a végtelenben húzódó képzeletbeli felületre alkalmazzuk az (1.4) Green-tételt. A jobb oldal (felületi tag) zérus lesz, mivel lokalizált töltésrendszer potenciáljának és térerősségének szorzata a végtelenben $1/r^3$ szerint, felületi integráljuk pedig $1/r$ szerint lecseng. (1.4)-ben két felületi töltési taggal (σ_1 -t és σ_2 leíróval) kell kiegészíteni a térfogati töltéssűrűséget. Így a

$$\int \varphi \rho^* dV + \oint \varphi (\sigma_1^* + \sigma_2^*) dA = \int \varphi^* \rho dV + \oint \varphi^* (\sigma_1 + \sigma_2) dA \quad (4.26)$$

azaz

$$\int \varphi \rho^* dV + \oint \varphi \sigma^* dA = \int \varphi^* \rho dV + \oint \varphi^* \sigma dA \quad (4.27)$$

összefüggéshez jutunk, ahol $\sigma^{(*)} = \sigma_1^{(*)} + \sigma_2^{(*)}$. Ezzel a Green-féle reciprocitási tételt igazoltuk vezető felület esetére is.

A tétel bizonyításához elegendő volt a végtelenben húzódó felületet és annak belsejét tekinteni integrálási tartományként. Az 1. 0. és 2. felületekkel való próbálkozás viszont ad egy fontos eredményt. A (4.26)-ban megjelenítve a vezető héj belső és külső felületeinek $Q_1^{(*)}$, illetve $Q_2^{(*)}$ töltéseit a

$$\int \varphi \rho^* dV + V \cdot (Q_1^* + Q_2^*) = \int \varphi^* \rho dV + V^* \cdot (Q_1 + Q_2) \quad (4.28)$$

összefüggéshez jutunk. Ebből az egyenletből kivonva (4.25)-t a

$$V \cdot Q_2^* = V^* \cdot Q_2 \quad (4.29)$$

kapcsolat adódik a vezető potenciálja és annak *külső* felületén elhelyezkedő töltések közt. A belső $\int \rho^{(*)} dV + Q_1^{(*)} = 0$ össztöltésű semleges részt akár el is távolíthatjuk, akár az egész belső térfogatot vezető anyaggal tölthetjük ki. Így a (4.29) egyenlet létjogosultságot ad a $C = Q/V$ állandó definiálására, ami vezető kapacitása.

Rögös, de megfontolt úton jutottam el a Green-féle reciprocitási tétel bizonyításig. Sikeresen igazoltam azt a tételt amit a szakirodalom hibásan, leegyszerűsítve tett.

5. Reciprocitási- és középérték tételek a magnetosztatikában

5.1. A magnetosztatika reciprocitási tételei

A Green- féle reciprocitási tétel a szakirodalmakban csak az elektrosztatika témakörében jelent meg. Természetesen fogalmazódhat meg bennünk a kérdés, hogy nem áll-e fenn valamilyen hasonló kapcsolat a $\vec{j}$ áramsűrűség által keltett $\vec{B}$ mágneses indukcióra és a hozzá tartozó $\vec{A}$ vektorpotenciálra vonatkozóan.

Az (1.2) összefüggés kis átalakítással:

$$\int \frac{\varphi}{c}(\rho^* c) dV = \int \frac{\varphi^*}{c}(\rho c) dV, \quad (5.1)$$

ami sejteti, hogy, ha a potenciál és áramsűrűség négyesvektorok nulladik komponenseire igaz az állítás, igaz lesz

$$\int \vec{A} \cdot \vec{j}^* dV = \int \vec{A}^* \cdot \vec{j} dV \quad (5.2)$$

is. Hasonlóan, a hatás-ellenhatás miatt igaznak vélhetjük a

$$\int \vec{j}^* \times \vec{B} dV = - \int \vec{j} \times \vec{B}^* dV \quad (5.3)$$

kapcsolatot is. A jelzett és a jelzetlen két egymástól független, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^{(*)} = 0$ feltételnek elegettevő áramrendszer, az integrálás pedig a teljes térre terjed ki.

Ismert, hogy adott $\vec{B}$ mágneses indukció esetén a vektropotenciál egy $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$ mértéktranszformáció erejéig bizonytalan, hisz a következmény $\vec{A}$ -val szemben mindösszesen $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ teljesítése. Egy áramrendszer

másik áramrendszer terében értelmezett energiája e transzformációra invariáns kell legyen. Lássuk be!

$$\begin{aligned}\int \vec{A}' \cdot \vec{j}^* dV &= \int (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) \cdot \vec{j}^* dV = \\ \int \left[\vec{A} \cdot \vec{j}^* + \vec{\nabla}(\vec{j}^* \cdot \chi) - (\vec{\nabla}\vec{j}^*)\chi \right] dV &= \\ = \int \left[\vec{A} \cdot \vec{j}^* + \vec{\nabla}(\vec{j}^* \cdot \chi) \right] dV,\end{aligned}\tag{5.4}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\vec{\nabla}(\vec{j}^* \cdot \chi) = (\vec{\nabla}\vec{j}^*) \cdot \chi + (\vec{\nabla}\chi) \cdot \vec{j}^*$, továbbá, hogy $\vec{\nabla}\vec{j}^* = 0$. (5.4) utolsó tagját alakítsuk át felületi integrállá a Gauss-tétel alapján:

$$\int \vec{A}' \cdot \vec{j}^* dV = \int \vec{A} \cdot \vec{j}^* dV + \oint \vec{j}^* \cdot \chi d\vec{A}.\tag{5.5}$$

Mivel a végtelenben választott határolófelület mentén az áramsűrűség zérus a felületi integrál is zérus. Így beláttuk a mértéktranszformációval szembeni inverianciát.

Az (5.2) és az (5.3) tételekre úgy tekinthetünk tehát, mint az (1.2) és a (2.1) elektrosztatikai reciprocitási tételek magnetosztatikai megfelelőire.

A továbbiakhoz pedig fontos tény, hogy a skalárpotenciál kielégíti a Poisson-egyenletet, azaz

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},\tag{5.6}$$

illetve Coulomb-mértékben a vektropotenciál szintén hasonló összefüggést elégít ki:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{j}.\tag{5.7}$$

5.2. Középték-tételek a magnetosztatikában

Az elektrosztatikával ellentétben a magnetosztatikában nem kreálhatók a 2. fejezetben bemutatottakhoz (2.1 ábra) hasonló gömbszimmetrikus terek. Adná magát, hogy a magnetosztatikában inkább megjelenő, hosszú szolenoidális

segédterekkel hengerre való átlagolásokat tegyünk meg. Ez azonban elég érdektelen, triviális eredményekre vezet.

A gömbi átlagolások továbbra is érdekesek a magnetosztatikai terekben. Ebben az alfejeztben az elektrosztatika gömbi középértéktételeinek magneot-sztatikai megfelelőit fogom levezetni az elektrosztatikában kapott eredmények felhasználásával. Sztatikai problémákhoz híven Coulomb-mértéket választok.

A következő alfejezetben a félreértés elkerülése végett a felületre az S jelölést használom.

5.2.1. A gömbön kívüli áramok esete

- $\langle \vec{A}_K \rangle_{r=R}$: Az elektrosztatikus esetet tekintve, a gömbön kívüli töltésekhez tartozó potenciálnak a felületi átlaga a gömb közepében felvett potenciálértékkel egyenlő, azaz

$$\langle \varphi_K \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \varphi \, dS = \varphi(0). \quad (5.8)$$

A magnetosztatikai problémához tekintsünk egy tetszőleges Descartes koordináta-rendszert, melyben a vektorpotenciál adott komponense A_i , ahol $i = 1, 2, 3$ (x, y, z). A vektorpotenciál tetszőleges komponense – konstans-tól eltekintve – ugyan úgy Poisson-egyenletet elégít ki (lásd (5.7) egyenlet), mint a skalárpotenciál az elektrosztatikában (lásd (5.6)). Következésképp külső áramok esetén a vektorpotenciál tetszőleges A_i komponensének a felületi átlagára igaz, hogy

$$\langle A_{iK} \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint A_i \, dS = A_i(0). \quad (5.9)$$

Magának az $\vec{A}$ vektorpotenciálnak a felületi átlaga pedig az a vektor, amelynek komponensei az $\vec{A}$ vektorpotenciál komponenseinek átlaga, azaz:

$$\langle \vec{A}_K \rangle_{r=R} = \langle A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \rangle = \langle A_i \vec{e}_i \rangle = \langle A_i \rangle \vec{e}_i = A_i(0) \vec{e}_i = \vec{A}(0). \quad (5.10)$$

- $\langle \vec{B}_K \rangle_{r=R}$: A külső töltésekhez tartozó $\vec{E}$ térerősség vektor felületi átlaga a középérték tétel alapján:

$$\langle \vec{E}_K \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \vec{E} \, dS = \vec{E}(0). \quad (5.11)$$

Az $\vec{E}$ térerősség vektor komponensei és skalárpotenciál parciális deriváltjai között a következő kapcsolat áll fenn:

$$E_i = -\partial_i \varphi. \quad (5.12)$$

Az (5.11) középértéktétel az $\vec{E}$ térerősség tetszőleges komponensére is igaz:

$$\langle E_i \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint E_i dS = E_i(0), \quad (5.13)$$

azaz

$$\langle \partial_i \varphi \rangle = [\partial_i \varphi](0). \quad (5.14)$$

A fentieket felhasználjuk a $\vec{B}$ indukcióvektor felületi átlagának előállításához. Mint azt már korábban megállapítottuk:

$$\langle \vec{B}_K \rangle_{r=R} = \langle B_m \vec{e}_m \rangle = \langle B_m \rangle \vec{e}_m. \quad (5.15)$$

Felhasználva, hogy $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\langle B_m \rangle = \langle \epsilon_{mij} \partial_i A_j \rangle = \epsilon_{mij} \langle \partial_i A_j \rangle = \epsilon_{mij} [\partial_i A_j](0) = B_m(0), \quad (5.16)$$

ahol a harmadik lépésben analóg módon alkalmaztam az elektromos tere vonatkozó középértéktétel kapcsán érvényes (5.14) összefüggést, kihasználva, hogy φ és A_j ugyanúgy Poisson-egyenletet elégít ki (lásd az (5.6) és az (5.7) egyenletek). Így tehát külső áramok esetén a mágneses indukcióvektor gömbfelületre vonatkozó átlagára igaz:

$$\langle \vec{B}_K \rangle_{r=R} = \vec{B}(0). \quad (5.17)$$

• $\langle \vec{A}_K \rangle_{r < R}$: Ugyan azt a gondolatmenetet kell végigvinni, (az elektrosztatikus esettel való párhuzam) amit $\langle \vec{A}_K \rangle_{r=R}$ származtatásánál. Ezt itt nem ismételtem meg. Tehát külső áramok esetén a vektorpotenciál térfogati átlaga is megegyezik a gömb középpontjához tartozó vektorpotenciállal:

$$\langle \vec{A}_K \rangle_{r < R} = \vec{A}(0). \quad (5.18)$$

- $\langle \vec{B}_K \rangle_{r < R}$: szintén azt a gondolatmenetet kell megismételni, amit $\langle \vec{B}_K \rangle_{r=R}$ esetén, amit most mellőzök. Tehát külső áramok esetén a mágneses indukció térfogati átlaga is megegyezik a gömb középpontjához tartozó indukcióval:

$$\langle \vec{B}_K \rangle_{r < R} = \vec{B}(0). \quad (5.19)$$

Most térjünk rá a gömbön belüli áramok esetére.

5.2.2. A gömbön belüli áramok esete

- $\langle \vec{A}_B \rangle_{r=R}$: Belső töltések esetén a potenciál felületi átlaga:

$$\langle \varphi_B \rangle_{r=R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int \rho \, dV. \quad (5.20)$$

Egyszerű a dolgunk: el kell végeznünk a $\varphi \rightarrow \vec{A}$, $\rho \rightarrow \vec{j}$ és $\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$ cseréket, és kész is lennénk, hisz φ és $\vec{A}$ ugyanúgy Poisson-egyenletet elégít ki. Tehát

$$\langle \vec{A}_B \rangle_{r=R} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int \vec{j} \, dV. \quad (5.21)$$

Viszont a gömbön belül minden pontban megköveteljük $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ teljesülését, amit legegyszerűbben úgy képzelünk el, mint vékony, gömbön belül záródó vezetőkben folyó áramokat. Legyen a gömbben tetszőleges számú zárt vezető. Ismert, hogy

$$\vec{j} \cdot d\vec{V} = \vec{j} \cdot \vec{q} \cdot d\vec{l} = I \, d\vec{l}. \quad (5.22)$$

Minden zárt vezetőre igaz, hogy

$$\int \vec{j} \, dV = \oint I \, d\vec{l} = I \oint d\vec{l} = 0. \quad (5.23)$$

Ezt felhasználva az (5.21) egyenletben

$$\langle \vec{A}_B \rangle_{r=R} = 0 \quad (5.24)$$

adódik.

- $\langle \vec{B}_B \rangle_{r=R}$: Induljunk ki abból, hogy $\langle \vec{E}_B \rangle_{r=R} = 0$, azaz a térerősség tetszőleges komponensére igaz:

$$\langle \partial_i \varphi \rangle = 0. \quad (5.25)$$

Ezt használjuk fel a $\vec{B}$ indukció vektor felületi átlagának előállításához. Mint azt már korábban megállapítottuk

$$\langle B_m \rangle = \langle \epsilon_{mij} \partial_i A_j \rangle = \epsilon_{mij} \langle \partial_i A_j \rangle. \quad (5.26)$$

Vegyük észre, hogy az (5.25) összefüggésben φ -t a vektropotenciál j -edik komponensével helyettesíthetjük, mondván, hogy ugyan úgy Poisson-egyenletet elégít ki

$$\langle B_m \rangle = 0 \quad (5.27)$$

adódik a mágneses indukció tetszőleges m -edik komponensének átlagára. Eből kifolyólag

$$\langle \vec{B}_B \rangle_{r=R} = 0. \quad (5.28)$$

- $\langle \vec{A}_B \rangle_{r<R}$: Induljunk ki a

$$\langle \varphi_B \rangle_{r<R} = \frac{1}{6\epsilon_0 V_0} \int \rho(r, \theta, \phi) (3R^2 - r^2) dV \quad (5.29)$$

összefüggésből, ahol V_0 az R sugarú gömb térfogatát jelöli. A $\varphi \rightarrow \vec{A}$, $\rho \rightarrow \vec{j}$ és $\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$ cserékkel azonnal adódik az

$$\langle \vec{A}_B \rangle_{r<R} = \frac{\mu_0}{6V_0} \int \vec{j}(r, \theta, \phi) (3R^2 - r^2) dV \quad (5.30)$$

eredmény.

- $\langle \vec{B}_B \rangle_{r<R}$: Elérkeztünk a nyolcadik, egyben utolsó tételhez. A fentiekhez hasonlóan az elektrosztatikus esetből indulok ki:

$$\langle \vec{E}_B \rangle_{r<R} = -\frac{1}{3\epsilon_0 V_0} \int \vec{r} \rho(r) dV = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0 V_0} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \langle \vec{P} \rangle, \quad (5.31)$$

azaz a térerősség térfogati átlaga – konstans szorzófaktor erejéig – nem más mint, a gömbön belüli töltések átlagos polarizációja.

A $\vec{p}$ elektromos dipólmomentumnak a magnetosztatikai megfelelője az

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} dV \quad (5.32)$$

mágneses dipólmomentum.

Az (5.31) összefüggés alapján:

$$\langle \partial_i \varphi \rangle_{r < R} = -\frac{1}{3\epsilon_0 V_0} \int x_i \rho dV. \quad (5.33)$$

Elvégezve a szokásos megfeleltetéseket:

$$\langle \partial_i A_j \rangle_{r < R} = -\frac{\mu_0}{3V_0} \int x_i j_j dV. \quad (5.34)$$

A fenti egyenletetből ϵ_{mij} -vel való szorzás után kapjuk az indukcióvektor m -edik komponensének átlagát felismerve az (5.32) definíciót:

$$\langle B_m \rangle_{r < R} = \langle \epsilon_{mij} \partial_i A_j \rangle_{r < R} = -\frac{\mu_0}{3V_0} \int x_i j_j dV = -\frac{\mu_0}{3V_0} \underbrace{\int \epsilon_{mij} x_i j_j dV}_{2m_m}. \quad (5.35)$$

Belső áramok esetén tehát az indukcióvektor térfogati átlagára kapjuk:

$$\langle \vec{B}_B \rangle_{r < R} = -\frac{2}{3} \mu_0 \frac{\vec{m}}{V_0} = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \vec{M} \rangle. \quad (5.36)$$

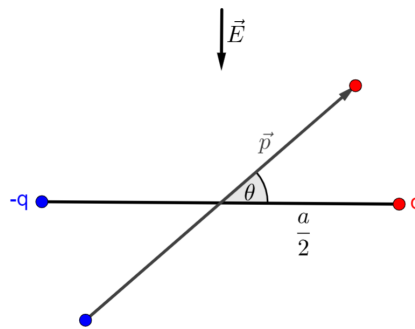
Végül az 5.1. táblázatba összegyűjtöttem a kapott magnetosztatikai középérték tételeket:

5.1. táblázat. Az *indukcióvektor/vektorpotenciál felületi/térfogati* átlagai *külső/belső* áramok esetén.

Külső áramok	Belső áramok
$\langle \vec{A}_K \rangle_{r=R} = \vec{A}(0)$	$\langle \vec{A}_B \rangle_{r=R} = 0$
$\langle \vec{B}_K \rangle_{r=R} = \vec{B}(0)$	$\langle \vec{B}_B \rangle_{r=R} = 0$
$\langle \vec{A}_K \rangle_{r < R} = \vec{A}(0)$	$\langle \vec{A}_B \rangle_{r < R} = \frac{\mu_0}{6V_0} \int \vec{j}(r, \theta, \phi) (3R^2 - r^2) dV$
$\langle \vec{B}_K \rangle_{r < R} = \vec{B}(0)$	$\langle \vec{B}_B \rangle_{r < R} = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \vec{M} \rangle$

6. A pontszerű dipólus potenciálja a Green-féle reciprocitási tétel tükrében

A pontszerű dipólus számos elektrosztatikai problémában előkerül, ezért tankönyvekben [6, 7, 13] alapvető fontosságú az általa keltett potenciál tárgyalása. Ebben a fejezetben azt mutatom be, hogy milyen elemi és gyors módszert nyújt a Green-féle reciprocitási tétel egy konkrét probléma esetén: a pontszerű dipólus potenciáljának származtatásához. Annak érdekében, hogy a levezetést középiskolások is gond nélkül megértsék, a tételt nem a rigorózus formájában fogom használni, hanem inkább intuitíve, annak fizikai tartalmát megragadva.

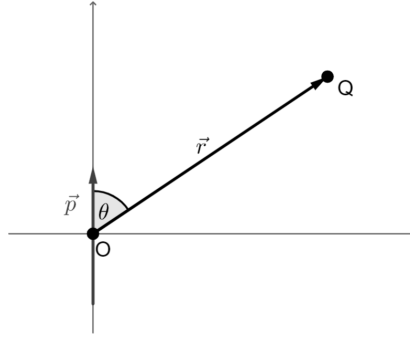


6.1. ábra. Homogén elektrosztatikus térbe helyezett dipólus.

Ehhez először a homogén elektrosztatikus erőterbeli pontszerű elektromos dipólus potenciális energiáját kell értelmezni. Ezt vissza lehet vezetni az m tömegű pontszerű test zérus energiaszinttől mért h magasságbeli $W = mgh$ potenciális energiájára. Tekintsük a 6.1. ábrát. A $\vec{g}$ -vel analóg módon az

$\vec{E}$ térerősség lefelé mutat. A potenciális energia önkényesen megválasztható nullszintje legyen a dipólus $\vec{E}$ -re merőleges helyzetében. Ha a dipólust középpontja körül θ szöggel elforgatjuk a 6.1. ábra szerint, a potenciális energia a homogén nehézségi erőter analógiája alapján

$$W = qE\frac{a}{2}\sin\theta - (-q)E\frac{a}{2}\sin(\theta) = -pE\cos(90^\circ + \theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (6.1)$$



6.2. ábra. A dipólus és ponttöltés kölcsönös helyzetét szemléltető ábra.

Most helyezzünk el egy $\vec{p}$ pontszerű dipólust és egy Q ponttöltést a 6.2. ábra szerint. A reciprocitási törvény elemi szintű értelmezése azt mondja, hogy a dipólus terébe helyezett töltés

$$W^* = Q\varphi(\vec{r}) \quad (6.2)$$

potenciális energiája megegyezik a Q ponttöltés elektromos terében lévő pontszerű dipól

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (6.3)$$

energiájával, ahol kihasználtuk, hogy a pontszerű dipól környezetében a Q ponttöltés tere *homogénnek* tekinthető. A $W = W^*$ követelésből kifolyólag a pontszerű dipólus potenciáljára a jól ismert

$$\varphi(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (6.4)$$

összefüggés adódik.

7. Összefoglalás

A dolgozat elkészítése során célom az volt, hogy olyan tudományos alaposságú munkát hozzak létre, amely a *közép-* és *felsőfokú* fizikaoktatásban egyaránt hatékonyan használható, különös tekintettel a tehetséggondozó programokra és az elektrodinamika alapjait bevezető kurzusokra. A kutatás kiindulópontját egy Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban megjelent cikk szolgáltatta, melyre építve a problémakör új aspektusait vizsgáltam.

A dolgozat keretében az alábbi, a szakirodalomban hiánypótlónak tekinthető célokat tűztem ki és valósítottam meg, mint **saját eredményeimet**:

- A Green-féle reciprocitási tétel bizonyítása kizárólag térfogati töltéssűrűséggel leírt esetre, mind diszkrét, mind folytonos töltéseloszlás esetén (4.1 és 4.2 alfejezetek).
- A Green-féle reciprocitási tétel bizonyítása térfogati és felületi tagot egyaránt tartalmazó esetekre, tetszőleges tulajdonságú, illetve vezető felületekkel (4.3 és 4.4 alfejezetek).
- A magnetosztatikai középérték tételek levezetése az elektrosztatikai középérték tételek alapján, bemutatva azok szoros elméleti kapcsolatát (5. fejezet).
- A pontszerű elektromos dipólus potenciáljának levezetése a Green-féle reciprocitási tétel felhasználásával (6. fejezet).

Munkám során önállóan végeztem a matematikai levezetésekhez szükséges elemzéseket és igazolásokat, valamint a fizikailag releváns következtetések rendszerezését. Bár a dolgozat matematikai háttere több ponton meghaladja a középiskolai tananyagot, az elméleti eredmények absztrakciója nem lépi túl ezt a szintet, így az alkalmazott példák a középiskolai szintű problémamegoldásban is hasznosak lehetnek.

Bízom benne, hogy a dolgozat eredményei, módszerei és következtetései a középiskolai tehetséggondozásban és a felsőoktatás fizikaoktatási programjaiban egyaránt sikeresen alkalmazhatók lesznek.

8. Függetlenség



Jackson 1.12 Homework Problem Solution
 Dr. Christopher S. Baird
 University of Massachusetts Lowell



PROBLEM:

Prove *Green's reciprocity theorem*: If Φ is the potential due to a volume-charge density ρ within a volume V and a surface-charge density σ on the conducting surface S bounding the volume V , while Φ' is the potential due to another charge distribution ρ' and σ' , then

$$\int_V \rho \Phi' d^3x + \int_S \sigma \Phi' da = \int_V \rho' \Phi d^3x + \int_S \sigma' \Phi da$$

SOLUTION:

Start with the Green's theorem:

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Phi' - \Phi' \nabla^2 \Phi) d^3x = \oint_S \left(\Phi \frac{d\Phi'}{dn} - \Phi' \frac{d\Phi}{dn} \right) da$$

Use the Poisson equation: $\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x})$ and $\nabla^2 \Phi' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho'(\mathbf{x})$:

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho' \Phi - \rho \Phi') d^3x = \oint_S \left(\Phi \frac{d\Phi'}{dn} - \Phi' \frac{d\Phi}{dn} \right) da$$

$$\int_V \rho \Phi' d^3x - \int_V \rho' \Phi d^3x = \oint_S \left(\Phi \epsilon_0 \frac{d\Phi'}{dn} - \Phi' \epsilon_0 \frac{d\Phi}{dn} \right) da$$

The normal direction n in Green's theorem points *away* from the volume of interest, which in this case would be into the conducting surface. From a previous problem, we know that the potential on a conductor and surface charge density are related according to:

$$\left[\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\text{on } S} \quad \text{and} \quad \left[\sigma' = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right]_{\text{on } S}$$

We have to realize that the normals in these equations are pointing out of the conductor, whereas the normals in Green's theorem are pointing into the conductor. We reverse the sign to account for this:

$$\left[\sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n_{\text{in}}} \right]_{\text{on } S} \quad \text{and} \quad \left[\sigma' = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial n_{\text{in}}} \right]_{\text{on } S}$$

Now substitute these into Green's theorem:

$$\int_V \rho \Phi' d^3x - \int_V \rho' \Phi d^3x = \oint_S (\Phi \sigma' - \Phi' \sigma) da$$

Shuffle around to find:

$$\int_V \rho \Phi' d^3x + \int_S \sigma \Phi' da = \int_V \rho' \Phi d^3x + \int_S \sigma' \Phi da$$

Irodalomjegyzék

- [1] Pozsgay B. „Az elektrosztatikus mező újabb érdekes tulajdonságai.” *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 51(2001) 555-559 (2001).
- [2] Ben Yu-Kuang Hu. „Spherical volume averages of static electric and magnetic fields using Coulomb and Biot–Savart laws”. *European Journal of Physics* 30.3 (2009), L29. old.
- [3] Ben Yu-Kuang Hu. „Averages of static electric and magnetic fields over a spherical region: a derivation based on the mean-value theorem”. *arXiv preprint physics/0002021* (2000).
- [4] Eduardo Sánchez-Velasco. „A simple derivation of a result in electrostatics”. *SIAM review* 40.4 (1998), 915–917. old.
- [5] Ben Yu-Kuang Hu. „Solving boundary-value electrostatics problems using Green’s reciprocity theorem”. *American Journal of Physics* 69.12 (2001), 1280–1282. old.
- [6] J. D. Jackson. *Klasszikus elektrodinamika, második kiadás*. Typotex, 2004.
- [7] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. 2017.
- [8] Tél T. Horváth Z. *Elméleti Fizikai Példatár*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- [9] C. S. Baird. *Jackson 1.12 Homework Problem Solution*. URL: https://www.wtamu.edu/~cbaird/all_homework_solutions/Jackson_1_12_Homework_Solution.pdf.
- [10] Pálfalvi László és Kovács Vivien. „A Green-féle reciprocitási tétel és néhány folyománya – I. rész”. *Fizikai Szemle* 7 (2021), 8. old.
- [11] Pálfalvi László és Kovács Vivien. „A Green-féle reciprocitási tétel és néhány folyománya – II. rész”. *Fizikai Szemle* 9 (2021).

- [12] Vivien Kovács és László Pálfalvi. „Spherical surface and volume averages in electrostatics using Green’s reciprocity theorem”. *European Journal of Physics* 42.4 (2021), 45202. old.
- [13] Hraskó Péter. *Elméleti Fizika II. - Elektrodinamika*. 1996.

Saját eredmények

Motivációm egy Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban elemzett probléma volt. E közlemény tetszőleges elektrosztatikus térben tetszőleges módon felvett gömbfelületre történő térerősség és potenciál átlagolással foglalkozik. Felismerve, hogy a problémakör mögött reciprocitási tételek húzódnak további érdekes kérdések merültek föl. Egyrészt a hazai és nemzetközi szakirodalomban hibásan szerepelt a Green-féle reciprocitási tétel bizonyítása. Kíváncsivá tett továbbá, hogy az elektrosztatikai reciprocitási tételeknek hogy festenek a magnetosztatikai megfelelői. Az is foglalkoztatott, hogy az ismerteken felül milyen alkalmazási területek vannak.

Célom volt olyan munka létrehozása, amely az elektromágnesség *közép- és felsőfokú* oktatásában egyaránt hatékonyan használható és a fenti vonatkozásban újszerű, hiánypotló.

Megvalósítottam:

- Az általános esetre vonatkozó Green-féle reciprocitási tételt bizonyítottam *diszkrét* és *folytonos* töltéseloszlás eseteire.
- A térfogati és felületi tagot egyaránt tartalmazó Green-féle reciprocitási tételt bizonyítottam *tetszőleges* tulajdonságú és *vezető* felületek eseteire.
- A magnetosztatikai középérték tételeket vezettem le az elektrosztatikai középérték tételek alapján.
- Levezettem a pontszerű elektromos dipólus potenciálját a Green-féle reciprocitási tétel alapján.

A fenti pontokban leírtakat saját eredményeimnek tekintem. Önállóan végeztem a bizonyításokat és az azokhoz szükséges matematikai levezetéseket, valamint a fizikailag releváns következtetések rendszerezését.

Bízom benne, hogy a dolgozat eredményei, módszerei és következtetései a középiskolai tehetséggondozásban és a felsőoktatás fizikaoktatási programjaiban egyaránt sikeresen alkalmazhatók lesznek.