

Téridő topológiájának és alapfogalmainak bemutatása középiskolai szakkör keretében

Peilert Soma

PTE TTK fizika-matematika osztatlan tanárszak

Témavezető:

Dr. Paragi Gábor docens

PTE Fizikai Intézet, Elméleti Fizika Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Speciális relativitáselmélet	3
3. Minimális pontthalmaz topológia bevezető	9
4. Görbék, felületek differenciál és integrálszámításának geometriai alapjai	11
5. Az általános relativitáselmélet főbb jellemzői	15
5.1. Gyorsuló koordinátarendszerek és a gravitációs tér	15
5.2. Két gondolkísérlet	19
5.3. Téridő sokaságok	20
5.4. Téridő topológiai alapfogalmak	25
5.5. Geodetikusok	30
6. Fekete lyukak termodinamikája	38
7. Merre tovább?	40

1. Bevezetés

A középiskolai fizika oktatás általában a modern fizika ajtajánál megtoppan, s csak nagyon kevés fényt enged át. Arra vállalkozunk, hogy az egészen nagy dolgok világával kapcsolatos általános relativitáselméletet próbáljuk gimnáziumi szinten befogadhatóvá tenni, annak erősen geometriai oldalát megragadva. Pusztán a jelenségek, megfontolások, illetve a matematikai eszköztár szemléletesebb, geometriai, lényegibb részét dolgozzuk fel úgy, hogy a diákok számára az egyszerűsítés miatt túlzottan homályos (vagy egyszerűen hibás), vagy a differenciálgeometriai, topológiai és megannyi technikai részlet miatt a diákok tudásához nem illeszthető tárgyalást elkerülhessük. A megannyi film, regény által bemutatott misztikus vonzata a relativitáselméletnek az időutazás, fekete lyukak, de még a rossz hétköznapi szóhasználatban túlzottan általánosnak vett „minden relatív” kifejezéssel is sokszor elterelődhetünk attól, hogy a klasszikus fizika logikus, megindokolt folytatásának tekintsük mind a speciális, mind az általános relativitás elméletet. Mivel a speciális relativitáselmélet és ahhoz vezető tudománytörténet középiskolai feldolgozására számtalan anyag született, így azt a témát kevésbé bontjuk ki részletesen, csupán nagy vonalakban a főbb tárgyalásunkhoz szükséges alapokat tisztázzuk. Mivel a témakör hatalmas, így itt pusztán a görbült téridő jellemzésével, illetve a fekete lyukak topológiai bevezetésével, jellemzésével foglalkozunk. Természetesen a későbbiekben más munkákban kifejtésre kerülhet: a világegyetem mint egész szerkezete, a gravitációs hullámok, vagy különböző kauzalitási kérdések. A tárgyalás roppant nagyvonalú, mondhatni intuitív, hogy a különböző felsőbb matematikai eszközöket hosszas felvezetés nélkül be tudjuk vezetni. Ez nem jelent veszteséget, mert a fizikai jelenségeket, főbb matematikai fogalmakat a fő irányvonalak mentén érdemes előbb megragadni, nem pedig a technikai részletekbe bonyolódni. Tehát nem egyszerűen középiskolás szintre való redukálásról van szó, inkább egy bevezetőről.

A célközönség elsősorban 11-12. osztályos gimnáziumi diákok, akik már a termodinamikát, elektrodinamikát, optikát elsajátították fizikából, matematikából pedig a halmazelmélet alapjait, a trigonometriát, euklideszi geometriát. Nem szükséges a valós analízis ismerete, egy geometriai megközelítést veszünk igénybe, ahol szükséges.

Az itt felvázolt lehetséges tárgyalásmód gyakorlatban való kipróbálását a szerző mihamarabb szeretné megvalósítani. A szerzett tapasztalatokkal lehetőség adódik majd korrigálásra, a témakörök mélységének, gazdagságának helyes beállítására.

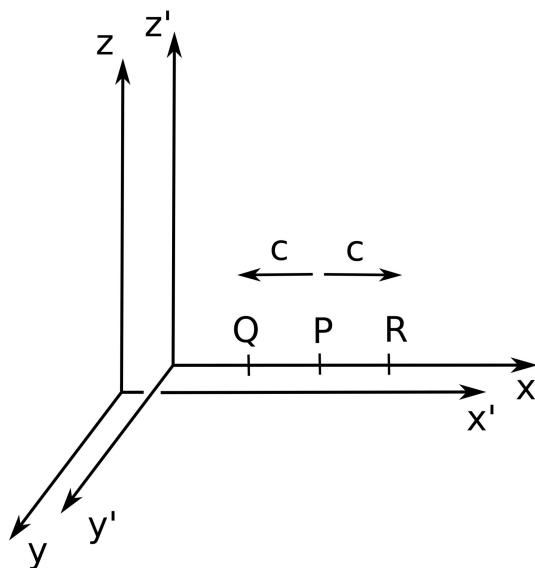
Mivel egy a középiskolai eszköztől kissé távol eső anyagról van szó, így meglehetősen nehéz feladatokat megfogalmazni (spec. rel. elmélet esetén ilyen gond kevésbé van). Mindenesetre remélhetőleg ezzel is gazdagodni fog majd idővel ez a gyűjtemény.

2. Speciális relativitáselmélet

Nagyrészt itt a relativitás általános elméletével foglalkozunk, a speciális relativitáselmélet középiskolás tárgyalása könnyen fellelhető. [6, 7] Így nem részletezzük milyen elméleti és kísérleti problémák, megfigyelések vezettek a híres 1905-s „születéséhez” a speciális relativitáselméletnek. Csak röviden vázoljuk a fontosabb eredményeket, amikre támaszkodni fogunk. Az információ terjedési sebessége korlátos, mely a vákuumbeli elektromágneses hullámok terjedésével, így a fénynek a sebességével is egyenlő, mely állandó mennyiség. A bevett irodalmi jelöléssel c -nek jelöljük a továbbiakban. Mivel sok félreértést okoz az inerciarendszer fogalma, ezért röviden adjuk meg a definícióját. A cél olyan vonatkoztatási rendszert találni, melyben a lehetséges legegyszerűbb alak-

ját kaphassuk a mechanika törvényeinek. **Inerciarendszernek** nevezünk egy olyan vonatkoztatási rendszert, melyben a tér homogén és izotrop, az idő pedig homogén. A **homogenitás** alatt azt értjük, hogy szabad testre (részecskére) a tér vagy időkoordináta tetszőleges eltolásakor is (mechanikailag) ekvivalens helyeket és időpontokat kaphatunk. Magyarán a két különböző hely, illetve időpont megválasztása nem befolyásolja a fizikai jelenség leírását. Egy űrhajóban, — mely az állócsillagokhoz képest nyugalomban van — elvégzett optikai kísérlet egy a tér adott pontján is ugyanazt az eredményt adja, illetve 5 km-rel arrébb is, két óra múlva. **Izotrópia** a különböző irányok ekvivalenciáját jelenti (forgatással szembeni invariancia). A sebesség mint vektor állandósága ezzel biztosítva van: iránya nem változik a térbeli izotrópia miatt, nagysága pedig egyes tér és időpontokban azonos. Vagyis visszakapjuk Newton I. törvényéből ismert egyenes vonalú egyenletes mozgást, melynek speciális esete a nyugalom.

A klasszikus mechanikában az információ avagy a kölcsönhatások terjedési sebessége végtelennek vehető. Kiemelten eltérő a helyzet a speciális relativitáselmélet által adott mechanikában. Fontos, hogy egyik vonatkoztatási rendszerről másikra térve egy-egy jelenségről más és más tapasztalunk lehet. Ezt jól megvilágítja az alábbi eset: ha K inerciarendszerhez képest (melyben felvett derékszögű koordináta-rendszer tengelyei x, y, z) K' inerciarendszer (tengelyei x', y', z') egyenletes sebességgel mozog, hogy a megfelelő tengelypárok párhuzamosak, illetve x, x' tengelyek pozitív irányában történik a mozgás. A két rendszer origója az időszámítás kezdetekor egybeesett. Ha x' -nek adott P pontjából ellentétes irányokba c sebességgel két jel indul el (például egy-egy fénycsóva), akkor K' -ben P -től azonos távolságra levő Q (P -től az illusztráció szerint balra), R (P -től jobbra) található pontokat azonos idő alatt éri el. Viszont K -ból szemlélve — melyhez képest ugye K' mozog — nem számolhatunk oly módon, hogy a jel sebessége $c \pm K'$ sebessége lenne, így Q -ba hamarabb ér, mint R -be. Azt mondhatjuk, hogy elébe ment a jelnek a rendszer.

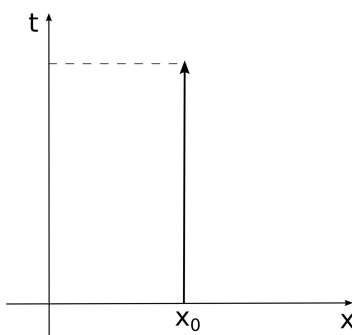


Q -ba hamarabb ér a jel, mint R -be

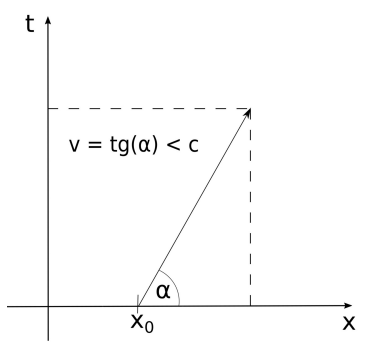
Koordináta rendszereinkkel már nem csak egy térbeli helyet, hanem egy adott történés időpillanatát is szeretnénk rögzíteni. Ezt többek között az indokolja, hogy a későbbiekben látjuk, más

és más megfigyelők adott jelenség időtartamára nem ugyanazt az értéket mérik. Emiatt az idő már nem lehet egy globális paraméter, ha lokálisan a megfigyelők nem tudnak megegyezni. Tehát minden egyes eseményt négy szám fog leírni, három a térbeli pontot, ahol végbemegy a folyamat, egy pedig az adott időpillanatot címkézi. Egy test mozgásánál sok esetben érdekel minket, milyen pályán mozog. Szeretnénk magának a mozgásnak az időbeni vetületét is valahogyan megragadni. Erre alkalmasak az úgynevezett **Minkowski-diagramok**, vagyis az időt is egy tengelynek vesszük fel a Descartes-féle koordináta rendszerünkben. Itt egy pontot **világpontnak** nevezünk, egy a tér-időben levő testet egy világpontok összessége — egy görbe — a **világvonal** ad meg. Megeshet, hogy a test nyugalomban van, ilyenkor is egy görbe rendelhető hozzá, hiszen az időben, az idő tengely mentén elmozdul (múlik az idő), a tér-tengelyek síkjára merőleges egyenest kapunk.

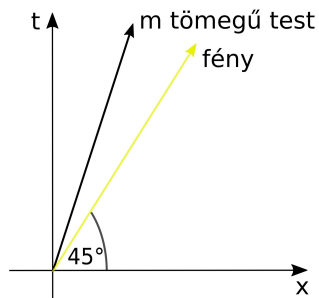
Egy dimenziós mozgásoknál néhány alapeset:



x_0 -ba nyugalomban lévő test

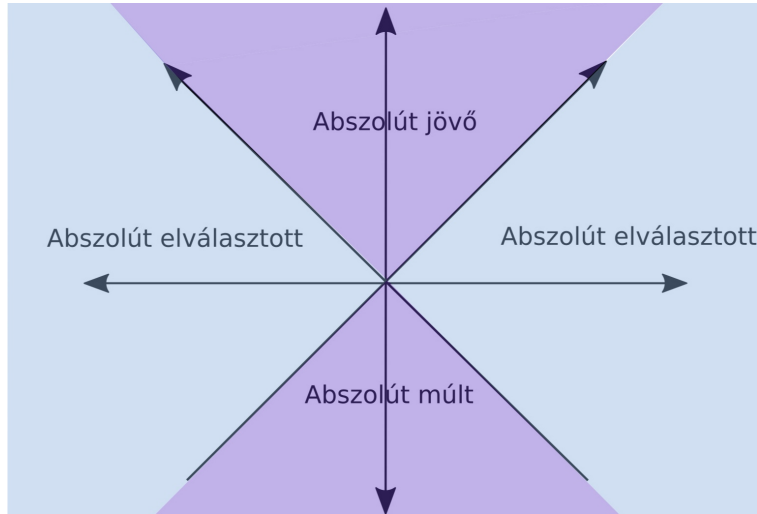


v állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez x_0 -ból kiindulva



Fényjel világvonala tömeggel rendelkező testhez képest

Látható, hogy az első diagramon x_0 pontban nyugalomban levő test állapotát követjük nyomon t_0 időpontig. Második esetben már valamilyen v állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez x_0 -ból kiindulva. A világvonalnak, — mely itt egy egyenes — a meredeksége a v sebesség. Harmadik esetben látható egy fényjel világvonala is. Mivel ennek sebességéhez viszonyíthatunk minden egyéb test sebességét, ezért ha egységnyiinek választjuk a c -t, akkor 45 fokos szöget zár majd be az x -tengellyel (pozitív körüljárás szerint). Nyilván ekkor más testek világvonala ennél meredekebb lehet csak. Tegyük fel, hogy a viszonyítási időpontkor, $t = 0$ -kor a test az origóban van. Ha az origóból fényjelet bocsátunk ki jobb és bal oldalnak megfelelően az x -tengelyen, illetve fényjeleket fogunk be ugyancsak az origóban, akkor két, az x -tengellyel 45 fokos szöget bezáró egyenest kapunk. Ez a két egyenes (ha pedig még egy térbeli irányt figyelembe veszünk: kúp; három térbeli dimenzió esetén négy dimenziós kúpról beszélhetünk) határozzák meg az origó mint esemény abszolút múltját és jövőjét. Ezek alatt az x -tengely feletti illetve alatti tartományokat értjük, melyeket a két fényegyenes határol. Bármely az abszolút jövőtartományban található pont mint esemény olyan, hogy az origóban történő esemény után kellett bekövetkeznie, tehát bármely test, mely éppen abban a világpontban van, már áthaladt korábban az origón (világvonala mindenképp az origóban metszi az x tengelyt $t = 0$ -kor, hiszen sebessége legfeljebb c lehet, tehát nem juthatott ki a „kúpból”). Hasonló érvényes az abszolút múltra is: olyan eseménypontok helyezkednek el ott, melyekből indult testek (jelek) világvonalai a jövőjükben az origót metszik. Azon világpontok, melyek a fénykúpon kívül esnek: a más helyen lejátszódó események. Az itt levő eseményekhez mindig vehetünk fel olyan vonatkoztatási rendszert, melyben az adott esemény az origóbelinél hamarabb, vagy később, esetleg egyidőben zajlik le.



Az origóból húzott fénykúpok

Két esemény távolságánál nyilván tér- és időbeli távolságot értünk egyszerre. Az előbb felvett K, K' vonatkoztatási rendszereket annyival egészítjük ki, hogy felvesszünk egy t , illetve t' időtengety is. K' itt is a már tekintett egyenletes mozgását végzi párhuzamos tengelypárokkal, x, x' tengelyek pozitív irányában. Vegyünk fel két eseményt K -ban: az első: (x_1, y_1, z_1) pontból t_1 -kor fényjelet bocsátunk ki, mely (x_2, y_2, z_2) pontba t_2 -kor érkezik. Így a fénysugár által megtett út: $c(t_2 - t_1)$. Ez ugyancsak egyenlő a hagyományos 3D-s távolsággal: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Vagyis:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Hasonló írható a vesszős rendszerben:

$$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0.$$

Tehát a baloldali kifejezés mindenfajta inerciarendszerben azonos, magyarul ha egyik inerciarendszerben nulla, akkor a többiben is az.

Legyen $s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}$ 1 és 2 indexű események közötti ívhossz ("téridő távolság"). Így is írhatjuk: $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ lévén, hogy s kifejezésében megfelelő koordináták különbségei állnak. Ha nagyon (pongyola terminussal "végtelenül") közel van két esemény egymáshoz, akkor differenciálokkal írhatjuk fel az infinitezimális ívelemnégyzetet:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

A differenciálok jelentéséhez legyen elég annyi, hogy a szokásos Δ jelölést a "lehető legpontosabbal" cseréltük fel, d -vel.

Látható: nem minden előjel azonos. $c^2 dt^2$, mely mértékegységileg távolságként kezelhető $+$ -szal áll, míg a „rendes” térbeli távolság, amit megszoktunk derékszögű koordináta rendszerben $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ kivonva áll. Majd később is látni fogjuk, hogy ez a téridőnek a nem szokványos geometriájára utal.

Megmutatható, hogy az ívelem hossz invariáns mennyiség, tehát minden inerciarendszerben két esemény közötti távolság azonos a koordináta választástól független. Tehát lehetséges, hogy a térbeli vagy időbeli távolság nem azonos (gondoljunk arra, hogy egy esemény nem feltétlenül egy-idejű minden megfigyelő számára különböző vonatkoztatási rendszerekben). Ha K vonatkoztatási rendszerben 1 és 2 indexekkel jelölünk két eseményt, akkor vannak olyan K' és K_J vonatkoztatási rendszerek, ahol az előbbiben a két esemény egy helyen zajlik le, utóbbiban pedig egy időpontban). K -ban $l_{12}^2 := (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$, $t_{12}^2 := c^2(t_2 - t_1)^2$, akkor $s_{12}^2 := c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$, K' -ben $s_{12}'^2 := c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$, az ívhossz mint említettük azonos, illetve K' olyan, hogy egybe esik a két esemény térbeli helye. Vagyis $l_{12}'^2 = 0$, következik $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$. Ez azt jelenti, hogy az események ívhossza valós (vonhatunk nyugodtan négyzetgyököt). Az ilyen ívhosszakat **időszerűeknek** nevezzük.

Hasonlóan kapjuk K'' -ben $t_{12}''^2 = 0$ -val, hogy $s_{12}''^2 = -l_{12}''^2 < 0$, tehát semmi esetre se lehet az ívhossz valós (képzetes szám lesz, tehát valamely nem nulla valós szám és az imaginárius egység i szorzata). Az ilyen ívhosszakat **térszerűeknek** nevezzük. Ha az előző ábrát elő vesszük, könnyen élhetünk a megállapítással: a fénykúp bensejében levő események és az origó közti ívhosszak időszzerűek. A Galilei- és Lorentz transzformáció tárgyalható Minkowski-diagramok segítségével is a már említett forrás szerint is. Ha a tanulok valamilyen oknál fogva ismerik a hiperbolikus trigonometrikus függvényeket, eljárhatunk az alábbi módon is:

Az ívelemet mint távolságot a ct, x, y, z térben minden megengedhető transzformáció megőriz. Viszont ebben az esetben csak a párhuzamos eltolás és a forgatás jöhet szóba. Előbbiek csak más origó és időszámítás kezdet megválasztást jelentenek. Utóbbiak esetén induljunk ki a három dimenziós térbeli forgatások felépítéséből. Ismert, hogy ott három síkbeli forgatás összetevése ad egy általános forgatást (xy, zy, zx síkok). Egy dimenzióval feljebb xy, zy, zx, tx, ty, tz síkokból válogathatunk. tx sík esetén $y, z = \text{áll.}$ kikötést vesszük. Vagyis az ívelem négyzet ilyen esetekben $(ct)^2 - x^2$ -tel egyezik meg. Ha euklideszi térbeli forgatásról lenne szó az új (t', x') koordináta pár (t, x) -szel az alábbi kapcsolatban lenne

$$x = x' \cos(\alpha) - ct' \sin(\alpha), \quad ct = x' \sin(\alpha) + ct' \cos(\alpha),$$

ahol α az elforgatás szöge. Viszont ez sajnos nem lesz megfelelő $((ct)^2 + x^2$ -tel még csak-csak, de sajnos $+$ helyett $-$ áll). A szokásos trigonometrikus függvények helyett írjunk hiperbolikusokat:

$$x = x' \operatorname{ch}(\alpha) - ct' \operatorname{sh}(\alpha), \quad ct = x' \operatorname{sh}(\alpha) + ct' \operatorname{ch}(\alpha),$$

ekkor $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$. Ha éppenséggel K' rendszer v egyenletes sebességgel mozog K -hoz képest, az x -tengely irányába, K' origójának mozgását szemléljük, ekkor $x' = 0$, $x = ct' \operatorname{sh}(\alpha)$, $ct = ct' \operatorname{ch}(\alpha)$, osztás után kapjuk: $\frac{x}{ct} = \operatorname{th}(\alpha)$, $v = \frac{x}{t}$, tehát $\operatorname{th}(\alpha) = \frac{v}{c}$, $\operatorname{sh}(\alpha) = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $\operatorname{ch}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, végeredményben:

$$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Ezt a transzformációt nevezzük **Lorentz-transzformációnak**.

Ezek alapján már a Lorentz-kontrakció, idődilatació hely, illetve időkoordináták felírásával levezethető, ahogy a sebességek közti transzformációs képletek is. A sajátidő és a tömegenergia ekvivalencia, ami még mindenképp kihagyhatatlan eleme a tárgyalásnak. De ezt már a fellelhető tankönyvekre, szakirodalmi tárgyalásokra hagyjuk (mint az 1-es forrás).

3. Minimális ponthalmaz topológia bevezető

Geometriában sok esetben hasznos, ha tudjuk két pont vagy geometriai alakzat milyen távolságra van egymástól, mekkorák egymáshoz viszonyítva stb. Amikor sorozatokat vizsgálunk kíváncsiak vagyunk vajon konvergensek-e, tehát egyre közelebb kerülnek a tagok egy adott számhoz. Ezt általában úgy fejezzük ki, hogy bármilyen kis pozitív valós számot adunk meg, elég sokadik tagjától kezdve vizsgálva a sorozatot ezen tagok távolsága a határérték számtól (különbségük abszolút értéke) kisebb lesz, mint a megadott kis valós szám. Ezt átfogalmazhatjuk úgy, hogy ha rajzolunk egy nyílt intervallumot a határérték köré, akkor abból véges sok eleme fog kimaradni a sorozatnak. Példának okáért a sorozat elemei $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, akkor látható, akármilyen kis ϵ pozitív valós számot választunk, alkalmas N index esetén minden $n \geq N$ -re $|a_n - 0| < \epsilon$. Vagy ha (a, b) nyílt intervallum, mely 0-t tartalmazza, s $b > 0 > a$, akkor csak véges sok eleme nem lesz a sorozatnak benne (lehet, hogy egy sem marad ki, a lényeg, hogy bármilyen intervallumra teljesüljön a kritérium). Figyeljük meg, hogy ha két ilyen nyílt intervallumot veszünk, akkor azok uniója is megfelelő lesz erre a célra, illetve metszetük is. Ha tetszőleges számú ilyen halmazt választunk, uniójuk ekkor is betölti ezt a szerepet. Ha végtelen számúnak vesszük az uniót, akkor ez már nem lesz igaz, mert ekkor a közös elemük csupán a 0-t tartalmazó halmaz lesz, ebből pedig nyilván végtelen sok eleme marad ki a sorozatnak. Sok esetben beszélünk arról, hogy valamely mennyiség értéke (melyet egy sorozat megfelelő eleme ad meg) *minden határon túl nő vagy valamilyen fix értékhez, pl.: 0-hoz tart*. Ezt felfoghatjuk egyfajta vég nélküli „játéknak”: utóbbi esetben ez nem jelent mást, mint hogy valaki megad nekünk egy nagyon kis valós, pozitív ϵ számot (akár 10 nagyon nagy abszolút értékű negatív hatványát), s mi azt mondjuk erre: a mennyiség és a rögzített érték, — amiről szó volt (a határérték) — távolsága ennél kisebb. Erre a társunk mond még kisebb ϵ -t, és így tovább. Minden határon túl növekedés esetén hasonlóan járunk el, csak $1/\epsilon$ -nal (természetesen negatív számoknál minden reláció jel fordul, tehát nagyon nagy illetve nagyon kicsi negatív ϵ , $1/\epsilon$ -ról van szó). Egyszerű eset példának okáért $\{\frac{1}{2^n} | n \in \mathbb{N}\}$, melyhez három nyílt intervallumot tüntettünk fel:



Kékbe minden feltüntetett pont beleesik, zöldből 1 kimarad, pirosból már $1/2$ és $1/4$ is

Úgy tűnik a nyílt intervallumokkal valamilyen szinten “letapogatást” tudunk végezni, anélkül, hogy bárhogyan is pontok vagy ezekből álló alakzatok, objektumok távolságáról beszélnünk kéne.

Általánosságban mondhatjuk, hogy egy X halmaz részhalmazai nyíltak, ha:

1. $\emptyset$ az üres halmazról vagy magáról X -ről van szó
2. tetszőleges számú uniójuk is nyílt
3. véges számú metszetük nyílt

Ha megmondjuk pontosan mely részhalmazait (nem csak valódiak) tekintjük egy halmaznak nyíltnak, akkor ezekkel együtt X halmazt **topologikus térnek** nevezzük. A második feltétel magyarázza az elsőt: bizonyos halmazoknak lehet nincs közös elemük, ekkor metszetük az üres halmaz, de véges sok halmaz metszetét vettük, így nyíltat kaptunk. Furcsának tűnhet, hogy az üres halmazhoz egy tulajdonságot rendelünk, vegyük ezt megegyezésnek. Maga X pedig minden nyílt halmaz uniójának tekinthető. Sok esetben maga a nyílt halmaz elnevezés nem tükrözi azt, amit megszoktunk: tehát például a fenti esetben a valós egyenesen a nyílt intervallumok annak tekinthetőek. De ha csupán ezt az absztrakt definíciót tekintjük, lehetséges, hogy nyílt halmaznak a balról zárt, jobbról nyitott intervallumokat tekintjük. Mindenesetre a fizikai alkalmazásoknál tekintsük egyszerűen olyan darabkáinak (halmazainak) az egyenesnek, síknak stb., melyeknek a peremét (határoló pontjait) elhagytuk (szokás szaggatott vonallal a határt jelölni). Ha egy pont egy nyílt halmazba esik, akkor bevett terminológia szerint annak a pontnak a **környezetéről** beszélünk. Megfelelően kis környezet esetén nem kell arra gondolni, hogy számértékileg mekkora ez a halmaz (ha egyáltalán lehet róla beszélni mekkora is a területe stb.), hanem mondjuk a fenti sorozatos példánknál egy nyílt intervallum kisebbnek tekinthető, ha egy másik részhalmaza, tehát több eleme marad ki belőle a sorozatnak (pl.: az ábrán $U_2 \subset U_1$, U_2 0-nak kisebb/szűkebb környezete, mint U_1). Legkisebb adott tulajdonságú halmaz az lesz, amelyet minden ilyen tulajdonságú halmaz tartalmaz.

Zárt halmazról beszélünk, ha komplementere nyílt. Tehát $\emptyset$ és X zártak, hiszen egymás komplementerei és nyíltak, (tehát itt már ki ütközik az elnevezés furcsasága, mindkettő egyszerre nyílt és zárt). Ezeknek tetszőleges számú metszeteik zártak, és véges számú uniójuk zárt (de Morgan-azonosságokkal ezek beláthatóak). Intuitívan itt a peremüket mindenhol megtartjuk. Magát a perempontokat tekinthetjük úgy is, hogy ha kiválasztunk az adott halmazunkból pontokat, valamilyen módon sorba rendezzük őket, akkor egy sorozatot kapunk. Ezeknek amennyiben van torlódási pontjuk (tehát olyan pont, ami köré tetszőlegesen kis nyílt halmazokat vehetünk, akkor végtelen sok pont reked benne; ha határérték ez a pont, akkor más torlódási pont nincs is), akkor vagy a halmazon belül, vagy a peremén vannak (fenti példánál 0 a perem). Egy **nyílt halmaz lezártján** azt a legkisebb zárt halmazt értjük, mely tartalmazza a nyílt halmazt. Lényegében a pereme összes pontját hozzá csatoljuk; jelölés $Cl(S)$, S halmazra (az angol 'closure'-ből). Ha S eleve zárt, akkor lezártja értelemszerűen önmaga. Egy topologikus térnek megannyi tulajdonsága lehet. Csak a legfontosabbakat érintve, melyekkel dolgozunk lehet:

Összefüggő: nem írható fel két nem üres halmaz uniójaként (tehát csak az az eset lehetséges, ha egyik önmaga, másik az üres halmaz).

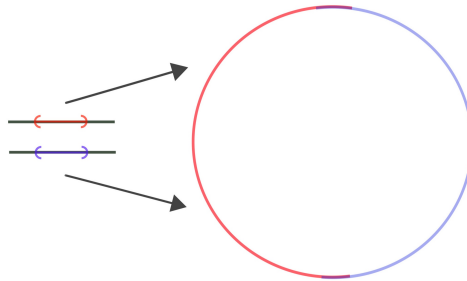
kép

Kompaktság: ez egyfajta végeességet fejez ki.

Nyílt lefedésének nevezzük egy topologikus térhez nyílt halmazok egy kollekcióját, ha uniójuk magát a teret adják ki. Másképp fogalmazva a tér minden egyes pontja legalább egy nyílt halmazában lesz a lefedésnek. Például a valós számegyenest nyílt intervallumokkal lefedhetjük, hasonlóan

az egységkörvonalat stb.

Maga a tér **kompakt**, hogy ha bárhogyan is fedjük le nyílt halmazokkal, mindig van ezek közül véges számú, melyek szintén lefedik a teret. Tehát ha a lefedést úgy képzeljük el, mint amikor papírmásét készítünk, ahogy egy hétköznapi tárgyat ragasztgatunk össze, akkor elég véges sok papírfecni az alakjának lefedéséhez. Például akárhogy próbálkoznánk a valós száme egyenes vagy a sík lefedésével, ott véges sokkal nem járhatunk sikerrel, ha figyelembe vesszük, hogy itt mindig adott végtelen sok nyílt halmazt tartalmazó lefedés elemei közül válogatunk, tehát a valós egyenes lefedése nem valósítható meg, ha például a nyílt lefedés elemei $(-a, a)$, $a \in \mathbb{Z}$ [a $(-\infty, 1)$, $(-1, \infty)$ halmazokkal való trükközés például itt nem működik, mert adhatunk olyan végtelen sok halmazból való nyílt lefedést, amikor nem lehet véges sokat kiválasztani: a lefedés $\{(n, n+1), (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z})\}$. Kör esetén viszont a kiválogatás mindig megvalósul, tehát az kompakt (ahogy vártuk is titkon). Itt intuitívan azért működik az egyenessel ellentétben, hogy a kör egy önmagába záródó objektum, nem tudunk elindulni egy irányba, hogy ne jutnánk oda vissza.

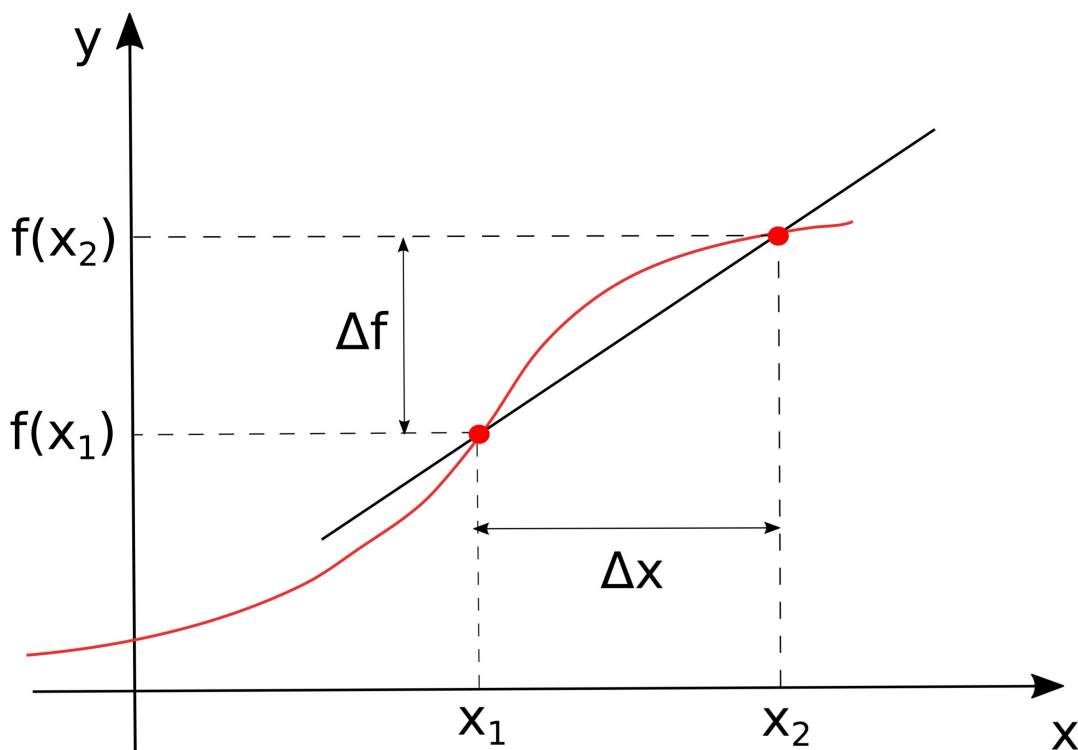


1. ábra. 1 dimenziós kör lefedése két nyílt halmazzal, melyek nyílt intervallumok képei

Az ábrán két valós egyenesen levő nyílt intervallum képével lefedtünk egy körvonalat (mint ruganyos szálakat hajlítgattuk őket egy függvény segítségével).

4. Görbék, felületek differenciál és integrálszámításának geometriai alapjai

A differenciál és integrálszámításra kevésbé lesz szükségünk. Sőt célunk, hogy minél több helyen elkerüljük. Mindenesetre az alapkoncepciókról rövid ismertetés szükséges. A fizikai mennyiségek nagy részét függvényekkel (vagy ahhoz hasonlatos vagy annak tekinthető elemekkel) írhatjuk le, tehát más mennyiségektől függő mennyiségekként. Minket legtöbbször az is érdekel, egy-egy ilyen mennyiség hogyan is változik a független változók változása esetén, így mint egy részecske által megtett út, ha telik az idő, jellemezhetjük sebességével (pillanatnyi vagy átlag etc.). Ha f függvényünk valamilyen x mennyiségtől függ, tehát írhatjuk $f = f(x)$ alakban, akkor például a sebesség analógiája alapján változását jelölhetjük $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ -ként, tehát kis megváltozása a függő változónak, osztva a független megváltozásával adja a "változási sebességét". Viszont mi ennél pontosabbak szeretnénk lenni, egyfajta pillanatnyi megváltozást keresünk (mint a pillanatnyi sebesség esetén a kinematikában). Vizsgáljuk meg az alábbi ábrát:



Az f grafikonjának x_1, x_2 pontjain keresztül húzott szelő

Két különböző értéket kiválasztva a független változónak mondjuk x_1, x_2 -t, illetve a hozzájuk tartozó függvényértékeket $f(x_1), f(x_2)$ -ket, látható, hogy $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ nem más, mint az $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ pontokra illesztett szelő meredeksége. Ha egyre közelebbi x_1, x_2 -ket választunk (legyen az x_1 mondjuk rögzített, és a másikat hozzuk közelebb) akkor a két pont egyre jobban megközelíti egymást. Végül már nem tudjuk megkülönböztetni őket, és igazából x_1, x_2 pontban húzott érintőt kapunk, melynek meredeksége mutatja, mennyire is nő ott a függvényünk. Ha a meredekség pozitív $\rightarrow$ nő, ha negatív $\rightarrow$ csökken a függvényünk az adott pontban. Magát a meredekséget így jelölhetjük: $\frac{df}{dx}$, ezt f szerinti deriváltjának nevezzük. Ne zavarjon meg minket, hogy a számláló meg a nevező nullának tűnik. Ezek tekinthetők külön-külön függvényeknek, nem pedig zérusnak megfelelő számnak. Bár ez kissé homályosnak tűnhet, egyezzünk meg abban, hogy df, dx, dy , stb. módon f, x, y mennyiségek rendkívül kicsiny megváltozásait jelöljük. Ezzel már találkoztunk az ívelemnégyzetnél is.

Az ábra alapján tehát a meredekségre egy közelítés $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, s ha ily módon jelölünk: $\Delta x = x_2 - x_1, x_2 = x_1 + \Delta x$, akkor $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$. Ha Δx minden határon túl tart 0-hoz, tehát Δx -ek helyett dx -ket írva f deriváltja x_1 pontban (érintőjének meredeksége ott) $\frac{df}{dx}(x_1) = \frac{f(x_1+dx)-f(x_1)}{dx}$ (ha pontosak szeretnénk lenni, inkább így írjuk $\frac{df}{dx}(x_1) = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}; \Delta x \rightarrow 0$ vagy $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$). Természetesen nem minden függvénynek minden pontjában létezik derivált (például nem definiált abban a pontban a függvény), de ha igen minden egyes eleméhez az értelmezési tartománynak az eddigi függvényérték helyett az ottani érintő meredekségét rendelhetjük egyértelmű módon, újabb függvényt nyertünk: a **deriváltfüggvényt** (sebességet). Pl.: $f(x) = x$, akkor a definícióba helyettesítve $\frac{df}{dx}(x_1) = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = \frac{x_1+\Delta x-x_1}{\Delta x} = 1, \Delta x \rightarrow 0$

itt nem is szükséges. Tehát minden pontjában azonosan 1 a meredekség (az abszcisszával bezárt szög 45 fok állandó). Konstans függvénynél a vártak megfelelően nulla meredekséget kaphatunk stb. A megfigyeléseinket többváltozós függvényekre is továbbvihetjük, bár ott figyelni kell arra, hogy a függvény képe 2, 3, ... dimenziós felületek (általános esetekben), s adott pontnak végtelen sok érintő egyenese lesz, tehát ott szigorúan meg kell mondani, mely irányban is vizsgáljuk a függvény változását (az általunk vizsgált egy változós esetben a pozitív abszcissza irányt választottuk ki, ennek megfelelően pozitív vagy negatív meredekségű érintőkről, tehát növekvő vagy csökkenő függvényviselkedésről beszélhettünk). Természetesen a jelölések hasonló fogalmakat takarnak: $df = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y, \dots)$, $\Delta x, \Delta y, \dots \rightarrow 0$, ahol f az $x, y, \dots$ -változók függvénye.

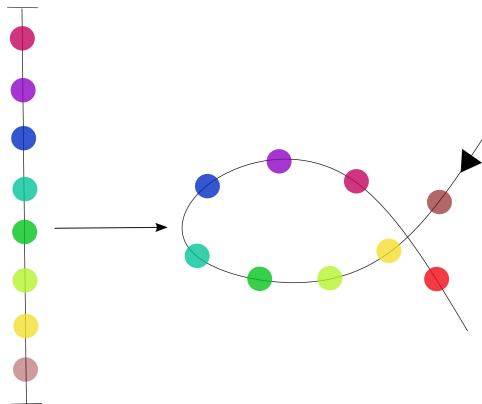
A görbék rendkívül hasznos objektumok, melyeket többféleképpen is lehet definiálni. Lehet egyszerűen posztulálni valamilyen speciális kollekciójukat (különböző geometriák esetén az egyenesek definíciója) vagy polinomok behelyettesítési értékeivel felrajzoltatni őket (egy görbét több polinomból nyert görbék "összeragasztásával" is nyerhetünk). Mi azt az utat választjuk, hogy kiindulunk a $[0, 1]$ zárt intervallumból, mely egység hosszú szakasz a valós egyenesen (bármilyen zárt véges „hosszúságú” szakaszt választhatnánk, itt az egyszerűség kedvéért élünk ezzel), majd mint 0 és 1 között (azokat is pontjainak tekintett) gumiszálnak tekintve addig húzzuk-nyújtjuk formázzuk, míg kedvünk telik, anélkül, hogy bármi „kárt” okoznánk benne: nem szakítjuk el, nem hagyjuk le a végpontjait stb, illetve nem zárjuk össze a végpontokat. Ha a keletkezett görbe nem metszi önmagát, megfelelő koordináta-rendszer felvételével akár egy függvény képe is lehet, melynek értelmezési tartománya pont $[0, 1]$ lesz. Természetesen kiindulhatunk olyan intervallumból is, melynek végpontjai közül valamelyeket hagyunk, ekkor végpont(ok) nélküli görbét kaphatunk. Ha már kezdetben egy egység sugarú körvonalból indulunk ki (0-t és 1-et „összeragasztjuk”), akkor zárt görbét kapunk: ha egy részecske pályájának tekintjük, akkor az mozgása során periodikusan mindig vissza-visszatér minden pontba, ahogy körbejár. Ugyancsak, ha tetszőleges, nem önmetsző görbét tekintünk valamely részecske pályájának a térben, abban az esetben minden pontjában a részecske sebességvektorát vehetjük fel. Ezt a görbe **érintővektorának** nevezzük az adott pontban. A gyorsulás vektort felbontjuk sebességirányú és arra merőleges vektorokra. A merőleges gyorsulásvektor a görbe adott pontbeli **normálisa** (**normálvektora**).

Felületek esete nagyban hasonló. Itt egy általános pontban az érintővektorok és a normálvektorok egy-egy síkot határoznak meg.

Ha görbék hosszát, felületek felszínének nagyságát szeretnénk kiszámítani ugyancsak megint a fenti "darabolás" módszert alkalmazhatjuk. Tekintsük például két pont p és q között futó görbét, majd osszuk fel kis darabkákra (az euklideszi geometriától eltérően a pontokat sokszor kis betűvel jelöljük). Ha a görbe hossza L (amit még nem ismerünk), akkor n darabra való felosztás után egy darabka Δl_i nagyságú lesz (a görbe két pontja lesz a két végpontja x_i, x_{i+1}), s természetesen ezek összege adja majd ki a teljes hosszt p, q között. Tehát $L = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$. Ha megint csak a lehető legfinomabb felosztást vesszük, Δl helyett dl -t írhatunk, s ekkor a szumma jel helyett az integrál jelét használjuk: $\int_p^q dl$, ahol jeleztük azt is, hogy p -től egészen q -ig adogatunk össze. Ez egy **vonalintegrál**.

Magyarázatra nem szorul, hogy ha különböző görbéket húzunk p, q között, akkor nem feltétlen lesznek egyenlő hosszúságúak.

A görbét legegyszerűbb módon jellemezhetjük leképezések segítségével. A topológiai bevezetőben szót ejtettünk arról, hogyan lehet egy szokványos intervallumból "csűrvecsavarva" görbét kapni. Ha megengedjük, hogy az intervallum megfelelő pontjai és a görbe pontjai között a megfeleltetés nem injektív, tehát két különböző intervallum ponthoz tartozhat ugyanazon görbe pont, akkor kifejeztük azt, hogy a görbe lehet **önmetsző**. Valóban, ha az intervallumot egyfajta csúszkának tekintjük, melyet változtatva egy részecske végighalad a görbén, a csúszka egy adott állása esetén a részecske állhat olyan ponton, ahol már járt, tehát két különböző csúszka értékhez tartozhat ugyanazon görbe pont. Az ábrán a csúszka mozgását a színek változásával szemléltetjük.



Egy önmetsző síkgörbe paraméterezése

Ha sík görbét szeretnénk kapni, akkor egy adott pontja $P(x(t), y(t))$ alakban írható, ahol t a kezdő intervallumunk eleme (mondjuk $[0, 1]$ -é), az úgynevezett paraméter, a pontot x, y koordinátaival jellemezhetjük (Descartes ko. rendszerben). Egy jól ismert eset:

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(t) \\ y(t) = r \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi) \quad (1)$$

Ez az r sugarú kör pontjait írja le, melynek középpontja az origó.

Maga a kiindulási intervallum választása tetszőleges, tehát mik a végpontjai. Ha az eltelt időként gondolunk egy adott pontjára az intervallumnak (ezért a t írásmód), akkor lényegében a sebességét jellemezhetjük a részecskének. A kör eseténél maradva

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(2t) \\ y(t) = r \sin(2t) \end{cases} \quad t \in [0, \frac{1}{2}) \quad (2)$$

ugyanazt a síkgörbét kapjuk meg, csak a részecske sebessége változott meg, gyorsabb lett (mondhatnánk fele annyi idő alatt teszi meg a teljes körbefordulását). Adott intervallum választás egy úgynevezett paraméterezés. Egyik paraméterezésről a másikra váltás az átparaméterezés. Előnyös, ha a paraméterünk olyan, hogy nem függ a koordinátarendszer választásától, tehát adott értéke esetén a részecske minden koordináta rendszerben ugyanott tart a mozgása során. Természetes választás, ha a megtett utat választjuk paraméternek, mert ekkor minden pontban a részecske sebessége egységnyi. A görbe adott pontjának érintővektora a részecske ottani sebességvektora, normál vektora erre merőleges (két irányú lehet — a görbéből "kifele" vagy "befe" mutat, azt pontosan

meg kell mondani, melyik irányt választjuk), tehát a gyorsulás normál irányú komponense. Ezek is a paraméter függvényei lesznek (minden pontban más és más lehet a sebesség, a gyorsulás). Konkrét függvények deriválásának, integrálásának, a mélyebb ismerete az elkövetkezőkhöz nem szükséges. Ha esetleg felmerül valahol egy konkrét integrálás, — és valaki ennek elvégzésének mikéntjével nincsen tisztában — anélkül is „elfogadhatja” az eredményt. Ez a "felszínesség" nem fogja a fizikával kapcsolatos tartalmak megértését csorbítani.

5. Az általános relativitáselmélet főbb jellemzői

5.1. Gyorsuló koordinátarendszerek és a gravitációs tér

Habár számtalan területre kiterjeszthető a speciális relativitáselmélet a gravitációs térről nem járhatunk el olyan könnyedén. Viszont figyeljük meg azt, hogy nehézségi erőterben bármely mozgó test (feltéve, hogy más hatás nem éri) azonos kezdőfeltételek mellett azonos mozgást végez, függetlenül attól, mekkora a tömege. Ezt a súlyos és tehetetlen tömeg egyenlőségéből láthatjuk, hiszen ekkor az egyenletben kiesik a két különböző fizikai jelentésű tömeg:

$$m_{teh}a = m_{neh}g \quad \Rightarrow \quad a = g$$

Ha egy homogén gravitációs térbe helyezünk el egy a külvilágtól teljesen elszigetelt megfigyelőt, vagy ezt a megfigyelőt gyorsítani kezdjük, — mondjuk maga az elszigetelő eszköz egy rakéta, és annak belsejében helyezkedik el a gyanútlan egyén — nos, nem fog különbséget tapasztalni. Így a gyorsuló vonatkoztatási rendszerek és a gravitációs térben levő inerciarendszerek mozgása között megfeleltetés van. Pontosabban egy egyenletesen gyorsuló koordinátarendszer ekvivalens egy állandó homogén külső gravitációs térrel. Ha nem egyenletesen gyorsul a koordináta rendszer, akkor egy homogén, de változó gravitációs térrel lesz ekvivalens. Fontos megjegyezni, hogy homogénnek a teret szigorú értelemben csak nagyon kis térrészben feltételezhetjük fel. Majd mint későbbiekben látjuk az ekvivalencia elv megfelel annak, hogy a téridő sokaság egy pont kis környezetében Lorentz-metrikával leírható, tehát mint a speciális relativitás téridejeként fog kinézni.

Fontos, hogy itt nem igazi gravitációs terekről beszélünk teljes értelemben, mert míg egy valódi gravitációs tér lecseng a testektől távol (gondoljunk a nagy távolságokban — tehát ahol gyengének tekinthető az erőter — érvényes Newton-képletre $\frac{1}{r^2}$, egy inercia erő, mint a centrifugális erő a távolsággal egyenesen arányos, mert nagysága $m\omega^2 r$). Akárhogyan is választjuk meg a koordináta rendszerünket, a valódi gravitációs tér nem tüntethető el, míg ha inerciarendszerre térnénk a gyorsuló rendszerrel ekvivalens erőter zérussá tehető.

Az elmondottak alapján a téridő geometriáját a tömeg (ami, mint láttuk súlyos, vagy tehetetlen mindenesetre számértékileg azonos) megváltoztatja, illetve a megváltozott tér a benne mozgó testek mozgását is befolyásolja. A téridőben levő anyag és energia nyomást fejt ki a téridőre, amit ne a szó szoros értelmében értelmezzünk. Hasonló furcsa jelenséget tapasztalunk a fénynyomás esetén is, ahol a fény bár csak az anyaggal vett elektromágneses kölcsönhatás folytán, de nyomásnak megfelelő hatást fejt ki egy felületre. Bár a pontos mechanizmus nem ismert, ebben az esetben szintén átvitt értelemben gondolkodunk erről. Arra, hogy az energia, (pontosabban az energiasűrűség) nyomásként értelmezhető a dimenzióanalízis világít rá: az energiasűrűség definíció alapján energia / egységtérfogat, tehát mértékegysége $\frac{J}{m^3} = \frac{N \cdot m}{m^3} = \frac{N}{m^2} = Pa$, valóban nyomás dimenziójú.

Hogyan néz ki az ívelemnégyszet egy gyorsuló koordináta rendszerben? Emlékezzünk Minkowski-téridőben az alábbi módon néznek ki az infinitezimális távolságok két világpont között:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Térjünk át egyenletesen forgó koordináta rendszerre, mely $\omega = \text{áll. szögsebességgel}$ forog:

$$x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t), \quad y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t), \quad z = z'$$

Rövid számolás után:

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 - 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt$$

Itt nem tudunk semmiféle okos transzformációval állandó szorzókat behozni a koordinátadifferenciálok elé. Arra a következtetésre kell jussunk, hogy gyorsuló koordináta rendszerek esetén általánosan a koordinátadifferenciálok előtt függvényszorzók lesznek, melyek nem feltétlen állandók.

Mit tudunk kiolvasni a kifejezésből? Ne felejtjük el, itt nem pusztán térbeli pontok, hanem események, tehát adott helyen adott pillanatban jellemzett pontokról van szó. Azonos helyen, különböző időpontokban történő események távolsága pedig $dx', dy', dz' = 0$ segítségével kapható, tehát $ds^2 = [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2$, ahol x', y' konstansok. Mint a speciális relativitásnál is, itt is $ds^2 = c^2 d\tau^2$, ahol $d\tau$ az infinitezimálisan közeli két esemény közt eltelt saját időtartam. Vagyis átrendezve $d\tau = dt / (c[c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)])$, melyet ezek után két világpont között eltelt sajátidő kiszámítására használhatunk (vonaleintegrálhoz).

Ha rögzítjük az időpillanatot, azaz egyidejű események közti távolságot vizsgáljuk, akkor ahol $dt = \text{áll.}$, azokat a tagokat nem vesszük figyelembe (vagyis dt mint időpontok különbsége zérus). Fenti esetnél így $ds^2 = -dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$, szóval mint egyszerű Minkowski-téridőben, két pont térbeli, euklideszi távolságát kaptuk $dl^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$. Általában ilyen egyszerűen nem tudunk eljárni, mert gravitációs térben a saját idő és a dt különböző módon változnak a tér különböző pontjaiban. Hogyan határozhatjuk meg mégis dl -et? Ehhez tekintsünk két pontot a térben P, Q -t. Indítsunk egy fényjelet Q -ból P -be, majd miután az odaért, vissza is fordítjuk, ugyanazon úton vissza fut a fénysugár, s felfogjuk Q -ban. Q -ban mérve a kibocsátás és befogás közti időt (ami ugye Q -nál sajátidő) a megtett távolságot ennek a $c/2$ -szerese adja. A probléma ott adódik, hogy ha elvégezzük a részletes számításokat, akkor dl kifejezésében szerepelni fognak a metrika elemei (tehát az ívelemnégyszet kifejezésében a differenciálok szorzói), amik sok esetben időfüggőek lehetnek. Ennél a példánál szerencsére nem ez a helyzet (tehát nem t függvénye egyik sem). Viszont sok esetben két világpont P, Q közti távolságnál függene az integrálás attól, hogy milyen világvonala mentén integrálunk (tehát milyen görbe köti össze a két pontot, amin a dl -eket "összeadjuk", másként szólva integráljuk). Így határozott távolságokat nem állapíthatunk meg, pusztán csak nagyon közelieket, infinitezimálisakat (ilyen távolságokban nyugodtan alkalmazhatjuk a speciális relativitáselmélet téridejét, tehát itt az idő és térbeli távolság, vagy mondhatni a dimenziók még jól elkülönülnek). Egyezzünk meg abban, hogy időkoordináta differenciálnégyszete előtt negatív szorzó áll, térkoordináták esetén pozitív. Hasonló a helyzet, mint a Lorentz-metrikánál.

Miért érdekes az, hogy nem egyszerű állandó együtthatóink, és mindenféle kevert differenciál szorzataink vannak ($dt dx$ stb.) az ívelemnégyszet kifejezésében? A matematikai leírás szerint ha van egy görbült terünk, akkor ilyesfajta úgynevezett metrikával írhatjuk le, ami a szorzófüggvények összessége. Lorentz metrika esetén dt^2 -hez -1, dx^2, dy^2, dz^2 khez +1 kerül, a vegyes tagokhoz,

mint $dt dx$ pedig 0 értékű állandó függvény. A metrika minden komponense 1 egy nem görbült, tehát sík tér esetén (ha időt nem vesszük be a leírásba), tehát az euklideszi távolságot kapjuk (térbeli Pitagorasz-tétel). A metrika függvények egy kollekciója különböző koordináta és vonatkoztatási rendszerekben is felírható. Ami fontos, hogy bizonyos tulajdonságok ekkor is megmaradjanak, többek között az ívelem invarianciája ¹.

A gravitációs tér a metrika alapján lehet:

Állandó: ha találhatunk olyan vonatkoztatási rendszert, melyben a metrika minden komponense független az időkoordinátától, ilyenkor azt **világidőnek** hívjuk. Ha precízek szeretnénk lenni, akkor csak egy test által létrehozott tér lehet állandó, mert a több testnél a kölcsönös vonzás mozgást idéz elő (relativisztikus Kepler-probléma). Ha a testünk mozdulatlan a világidő két iránya egyenértékű, mindkét előjellel vehetjük. Nem tudjuk tehát megmondani önkényesség nélkül melyik a jövő, melyik a múlt idealizált esetben, ha csupán a testet elszigetelten vizsgáljuk (nekünk megfigyelőknek a változása most nem játszik szerepet). Ilyenkor a téridő **sztatikus**: mely egyenértékű azzal, hogy minden dt -t tartalmazó kevert differenciálszorzatok együtthatója zérus, mert ds független lesz a világidő előjelétől. Bár elsőre úgy tűnik, hogy állandó csak akkor lehet az erőter, ha nem mozog, viszont rövid töprengés után világos, hogy saját tengelye körül forgó tengelyére szimmetrikus test (lehet gömb alakú csillag, planéta) tere is állandó. Viszont, ha itt megfordítjuk az idő előjelét, akkor a forgás iránya is megfordul. Az ilyen tér **stacionárius**, hasonlóan folyadékok, gázok viszkozitás nélküli lamináris áramlásához: habár mozog a közeg, minden időpillanatban ugyanúgy néz ki.

Mit értünk egyáltalán görbület alatt? Kinematikából ismerős lehet a görbületi/simuló kör és görbületi sugár fogalma. Ha egy sík görbét tekintünk, s annak egy kiszemelt P pontját, akkor a görbéhez rajzolható P -ben egy kör, melynek középpontja és P által meghatározott szakasz merőleges P -n átmenő közös érintőjére a görbének és a körnek. Ennek a körnek a sugara a görbületi sugár. Ennek reciprokaként definiáljuk az adott pontbeli görbületet, mely azt fejezi ki, mennyire "hajlik meg" a görbe. Ha a görbület egy pontban nulla, akkor a görbületi sugár végtelen, a simuló kört egyenesnek tekintjük. Pontosabban, ha $\gamma(s)$ görbénket ívhossz szerint paramétereztük, akkor adott pontjában az érintővektorának $\vec{v}(s)$ nagysága egység, ottani deriváltja (mindenhol állandó egységnyi hosszú a sebességvektor, azaz a gyorsulás csak az irány, nem pedig a nagyságváltoztatásban jelenik meg) rá merőleges vektor ($\vec{n}(s)$ irányú), nagysága pont az adott pontbeli görbület nagysága, ami ugye a görbületi sugár reciproka.

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \kappa(s) \vec{n}(s), \quad R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

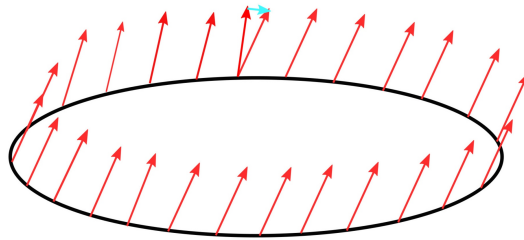
Ezt az iránytól való elhajlást szeretnénk általánosítani felületekre (akárhány dimenziósak is).

A hétköznapi életből tudjuk, ha egy felület görbült, akkor bizonyos kényszerként viselkedik a rajta mozgó testek számára. Ha dimbes dombos a táj, hiába szeretnénk egyenesvonalban elérni a célunkat, míg az Alföldön ezt könnyen megtehetjük, lankásabb helyen folyton változtatnunk kell mozgásunk: néha fel, néha lefele haladunk. Itt a felület, — mely kétdimenziós — görbült. Ha egy pizza-szeletre gondolunk, kezünkbe vesszük, az kissé megnyúlik, nem lesz olyan könnyű beleharapni. Lényegében egyfajta irányváltoztatást eredményez a görbület, de nem a célirányban, hanem a többenél: továbbra is a kiszemelt pont fele haladunk, de vertikálisan fel le mozgunk. Tekinthetjük ezt absztrakt módon úgy is, hogy egy vektort helyezünk a talpunkhoz, s iránya a fejünk

¹Ezenkívül a valóságos téridőben a metrikus tenzor determinánsa mindig negatív.

fele mutat. Ha megkövetelnénk, hogy ez a vektor mindig merőleges legyen a felületre, kívülről szemlélve mindenféle módon “eldőlne” eredeti irányához képest (nyilván itt egy ember nem tudna akárhogy megállni mondjuk egy meredélyen — itt már kissé elszakadtunk a reális példától). Általában nem a felületre merőleges, hanem érintővektort vizsgálunk. Ha egy zárt hurok mentén mindig saját magával párhuzamosan eltologatjuk, egyszerű módon vizsgálhatjuk, hogy a felület görbülete mennyire változtatja meg az irányát. Mikor mindig párhuzamosan tartjuk magával, akkor pusztán a felület görbületének hatását tudjuk vizsgálni, nem zavar be az, hogy egyébként elfordulhatna a vektor. Amikor valóban görbült a felület, akkor eltérés lesz a kezdeti és a visszatért irány között. Végezzük el ezt két vonalzóval, papírból kivágott nyíllal stb. egy henger és egy gömbfelületen. Mit tapasztalunk?

Egy zárt görbe mentén mozgattuk végig a piros vektort önmagával párhuzamosan, magyarul a talppontja mindig a görbén van, ezenkívül mindig önmagával párhuzamos, "nem dülöngél". A kezdeti és a visszahozott vektor eltérő, amennyiben görbült felületen van ez a kis hurok. Ekkor különbségük a nem nulla hosszágú kicsiny kék vektor.



Az, hogy a téridő, mint négydimenziós “felület” is görbült természetesen nem képzelhető el. Emiatt ne is aggódjunk, elég csupán két dimenzióban gondolkodni, a többit bízzuk a matematikai apparátusra, amire most kevésbé térünk ki.

Hogyan értelmezhetjük ekkor a testek mozgását a gravitációs erőterben? Ha egy sík felületen haladunk kiszemelt végcélunk felé, és mivel nincs semmilyen görbület, a jól ismert euklideszi térben mozoghatunk, ott pedig két pont között a legrövidebb út az egyenes. Hogyan jellemezhetjük ezt a mozgást? Ha a sebességünket mint minden egyes ponthoz csatolt vektort szemléljük láthatjuk, hogy az “célirányosan” mindig a kiszemelt pont fele mutat, tehát nincs semmilyen merőleges komponense a gyorsulásának, vagyis ami a vektor irányának megváltozását eredményezné. Nem ez a helyzet görbült felület (tér) esetén, ahol nem feltétlen “egyenes az egyenes”. Lehetséges, hogy itt is szabadon mozog egy részecske, még is “eltérítődik” irányától, egy görbült görbén fog mozogni. Olyan ez a görbe, melyen ilyenkor fog mozogni, ami legjobban megfelel a sík esetében egyenesnek. A feltételünket megtartjuk, nevezetesen, hogy a normális komponense tűnjék el a gyorsulásnak, de a görbe nem feltétlen lesz szokványos módon egyenes. Ilyenkor úgy tűnik, hogy inerciaerő lép fel, ami a téridőre alkalmazva mint gravitációs erő értelmezhető. Tehát az ekvivalencia elvet felidézve a gravitációs terünk egy gyorsuló koordináta rendszerrel ekvivalens, melyben inerciaerő szerepét a gravitációs erő játssza. Az ilyen általánosított egyeneseket **geodetikusoknak** nevezzük. Optikából tudjuk, hogy a fény egyenes vonalban terjed (legalább is kis távolságokra lebontva). Mivel a

geodetikusok nem feltétlen az euklideszi értelemben egyenesek, így úgy tűnik, a fénysugarak elhajlanak. A fényelhajlás jelensége csillagászatilag is megfigyelt (a jelenséget optikai lencsehatás néven illetjük). Több égitestről kaphatunk információt anélkül, hogy valóban "látnánk", mert más objektumok kitakarják. Mégis a kibocsátott fény (esetleg szóródott) a kitakaró objektum mellett elhajolva azt mindegy kikerülve mégis csak eljuthat távcsöveinkig.

Az elmondottak alapján a newtoni gravitáció elméletében kísértő távolhatás megszűnik, hiszen maga a téridő is bizonyos módon fizikai valóval bír, nem pedig ideális teret és időt tételezünk fel, mely mint színpad áll rendelkezésére a fizikai folyamatoknak (Arisztotelészről Newton-on át Kantig). Ha két test egymásra gravitációs erőt fejt ki, akkor mindkettő megváltoztatja a téridő geometriáját.

5.2. Két gondolkísérlet

Lássunk két indokot arra vonatkozóan, miért is lesz a téridő görbült, vagyis nemeuklideszi.

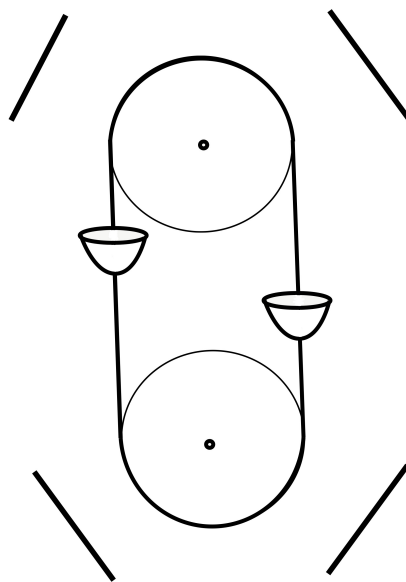
Ehrenfest-paradoxon

Ha egy inerciarendszerből egy egyenletesen forgó, lapos korongot szemlélünk, akkor egy mérőrúddal megmérjük a kerületét — mindig kis húrok hosszát mérjük, majd ezeket összeadjuk, így egyre finomabban közelítjük a valódi kerületet, — s a sugarát a korongnak. Ha olyan pillanatban végezzük el a mérést, hogy az egyenes, melyre a sugár illeszkedik ránk merőleges legyen, illetve egy kerületi szakasz pedig nem, akkor az utóbbi Lorentz-kontrakciót szenved el (a sugár pontjainak relatív sebessége nulla lesz hozzánk képest). A kerület egy ilyen húrhossz egész számú többszöröse lesz. Ha a két hosszt elosztjuk egymással az arány kisebb lesz, mint π . Számolással: ha a forgó koordináarendszer ω szögsebességgel forog, sugara r , akkor a kerületi sebesség bármely pontján a kerületnek ωr lesz, míg a Lorentz-összehúzódság miatt végül a kerületre $2\pi r \sqrt{1 - (\frac{\omega r}{c})^2}$ adódik.

Ekkor a kerület/átmérő $= \frac{2\pi r \sqrt{1 - (\frac{\omega r}{c})^2}}{2r} = \pi \sqrt{1 - (\frac{\omega r}{c})^2} < \pi$. Láthatóan az euklideszi geometria itt nem érvényesül.

Bondi-csigasor

Az alábbi elrendezésben két görgő között futó kötélén vödörket helyezünk el egyenlő távolságra egymástól. Mindegyik vödörbe "egy atomot helyezünk el". Bal oldali vödörökben alapállapotú atomok találhatók, jobboldaliakban gerjesztettek. Mivel utóbbiaknak nagyobb az energiája, így nagyobb a tömegük a tömeg-energia ekvivalencia szerint. Ha úgy alakítjuk ki a rendszert, hogy ne legyen súrlódás, a kötél szerkezet el kezd forogni. Ha leér egy vödör, akkor a benne levő atomot emisszióra kényszerítjük, így alapállapotba kerül. A kibocsátott fotont (fotonokat) tükrörendszerrel a legfelső tárolóban levő atomhoz vezetjük, azt gerjesztjük. Vagyis örökmozgót konstruáltunk?



Bondi-csigasor, ahol négy darab tükröt vettünk fel

Nem, sajnos (vagy szerencsére) nem. Egy foton energiája $E = h\nu$, ahol h a Planck-állandó, ν a foton frekvenciája. Mivel az örökmozgó léte egy sor fizikai törvénynek ellentmond, így a fenti részen található foton energiájának kisebbnek kell lennie, mint alul. Vagyis a frekvencia lesz kisebb, ami pedig $1/\text{idő}$ dimenziójú. Tehát a fenti óráknak lassabban kell járniuk, mint a lentieknek (már-mint számunkra megfigyelőknek, nem az atomoknak, melyek "sajátidejüket mérik", mely ugyanaz a két helyen). Tehát valamilyen azonos folyamatnak az idejét mérjük, lent kisebb időintervallumot kapunk, mint fent, azaz ennek reciproka nagyobb is lesz. Arra jutottunk, hogy a téridő nem a szokványos szerkezetű.

5.3. Téridő sokaságok

Ahhoz, hogy kicsit általánosabban tudjunk gondolkodni a téridőről **általánosítsuk a felület fogalmát**. Nyilván mindenfajta felület nekünk nem megfelelő arra, hogy leírjuk a téridőt, így például olyan extrém eseteket ki kell zárunk, amikor lyuk lenne benne, vagy önmetszés (gondoljunk kétdimenziós felületre ilyenkor egy tér és egy idő koordináta által meghatározott pontok összességére). Mint az ekvivalencia elvvel is láthattuk, ha egy pont nagyon kis környezetében szemléljük a világmunkat, olyannak tűnik, mint a Minkowski-idő. Ha kis sebességeket vizsgálunk pedig euklideszi térnek tűnik, amit megszoktunk a klasszikus fizikával leírható hétköznapijainkból. Nevezzük **sokaságnak** azt a geometriai objektumot, melynek bármely pontjának egy nagyon kis környezete úgy néz ki, mint egy euklideszi-tér [kevésbé pongyolán elég szép mint topologikus tér (Hausdorff és másodmegszámlálható), van olyan nyílt lefedése, hogy a nyílt halmazok folytonosan és bijektíven leképezhetők $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazaira; a lefedési halmazok közötti leképezés egyéb szép és hasznos tulajdonságúak]. Sokaságok a kúpszeletek, a gömb (mindennapi felismerés, hogy a közelítően

gömb alakú Földön nagy távolságokig a felszín a domborzatot figyelmen kívül hagyva sík). Triviálisan az euklideszi-tér is az. A sokaság dimenziója legyen annak az euklideszi-térnek dimenziója, aminek kinéz “lokálisan”. **Téridő sokaság**nak nevezzük, ha Minkowski-térnek néz ki lokálisan, tehát ha már megegyezünk abban is, hogy rendelkezésünkre állnak mérőberendezések, két pont távolságát is mérni tudjuk, tehát Minkowski/Lorentz metrika határozza meg a távolságokat. Ezzel az ekvivalencia elvet építjük be a leírásunkba. Az, hogy az időt is a többi térkoordináta közé soroljuk egyszerűen a speciális relativitásnál elmondottak szerint magyarázhatjuk (a ct hosszúság dimenziójú). Nyilván a megfigyelések alapján a világunk négy dimenziós, de tekinthetünk kettő vagy három dimenziós tereket is. Lényegében minden időpillanat esetén képzeljünk el egy lefagyasztott világot, tehát a háromdimenziós teret mozdulatlanul. A következő pillanatban hasonlóan járunk el és így tovább. Ha egymás mellé tesszük ezeket a világfelvétel-képkockákat, akkor kapjuk meg a négydimenziós téridő sokaságunkat, ami emiatt a mozgófilm szerű leírás következtében folyton változó, mozgó. Egy ilyen sokaság adott pontjában vett érintőtere alatt az adott pontra illeszkedő érintővektorok összességét értjük (fizikus nyelven a matematikaival nem megegyezően ezt föliázásnak — ‘foliation’ kifejezéssel illetjük). Mint a speciális elméletben láttuk lehetnek idő, tér és fény szerű tartományok a téridőben, attól függően, hogy két esemény ívhossza pozitív, negatív vagy zérus. Ez alapján egy **vektor legyen idő/tér/fény (null)** szerű, annak megfelelően, ha $v = (ct, x, y, z)$ komponensű, és $ct > r$, $ct < r$, vagy $ct = r$.

Az idő irányának folyását úgy adhatjuk meg, hogy mint már szó esett róla a fénykúpok egy múlt és egy jövő tartományt határoznak meg. Hasonlóan egy adott pont érintőterében levő fény szerű vektorok halmazát **fénykúp**nak nevezve az idő szerű vektorokat felbonthatjuk két diszjunkt halmazra. Egyik kollekciót konzisztens módon jövőbe mutató vektoroknak tekintjük, másikat múltba mutatóknak meghatározhatjuk a téridő sokaságunk egy idő irányítását. Ez számunkra azért lesz hasznos, mert innentől kezdve a testek mozgása a téridőben nyomott hagy: görbék fognak az idő előrehaladtával kirajzolódni, s így ezen világvonalak tanulmányozásával magát a sokaságunkat a jellemzőit ismerhetjük meg. Megfigyelőket fogunk mint “**próbatesteket**” beállítani a terünkbe, akár csak az elektromos vagy mágneses teret töltött részecskékkel, áramokkal le tudjuk tapogatni. Az itteni megfigyelőink ugyancsak hasonló szerepet fognak játszani. A megfigyelők alatt idealizált fizikusokat érthetünk, akik nem csak elszenvedik a téridő kénye-kedve által előírt útvonalakon való mozgást, hanem megfigyeléseket, méréseket is tudnak végezni. Ne feledjük el, hogy nem mindegy, milyen vonatkoztatási rendszerből látjuk az eseményeket. Ennélfogva a próbatestjeink itt már tudatos lényeknek is kell lenniük, legalább is abból a szempontból, hogy olyan kifejezéseket használhatunk majd, mint a megfigyelő által észlelt / mért stb. Nyilván ez nem jelenti azt, hogy a valóságban nem részecskékkel, testekkel zajlanak le ezek a történések, de így sokkal könnyebb a folyamatokat követni. A megfigyelőink által kirajzolt világvonalak **sima görbéknek** fogjuk tekinteni, ami matematikailag mondhatnánk úgy is, bármennyiszer differenciálhatóak mint függvények értékészleteiként gondolkodva róluk, s ezek a keletkezett függvények mindig folytonosak, de legyen elég annyi, hogy ha szépen felrajzoljuk a görbe pontjaiba az érintővektorokat, azok iránya, nagysága “simán” fog változni egyik pontról a másikra. Egy ilyen **görbét idő szerűnek mondunk**, amennyiben bármely pontjában az érintővektora idő szerű, jövőbe mutató. Lényegében egy olyan megfigyelő világvonalaról beszélhetünk, aki egy helyben “áll”, és csak utazik előre az időben (a Minkowski-diagramokon ez egyszerűen csak egy vertikális egyenes volt). **Oksági görbéről** beszélünk, ha az érintővektorok fény szerűek is lehetnek. Gondoljunk vissza arra, hogy a fényjelek küldése és fogadása az információ továbbítás egy modelljeként használható, nyilván a terjedési sebességek maximumával dolgozva. **Térszerű görbék** definiálása ezek után magától

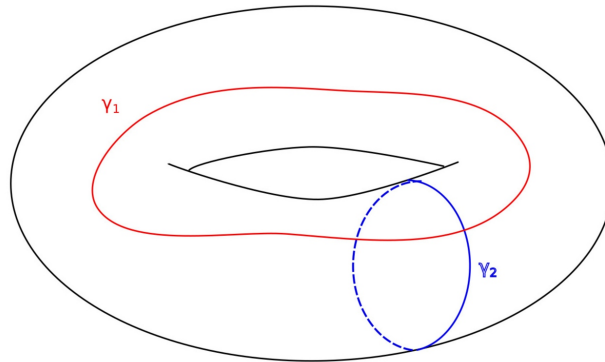
értetődő. Egészen eddig úgy-ahogy láhattuk sikerült a Minkowski-diagramjainkat általánosítani. De mit is szeretnénk vizsgálni? Egyfelől mindig cél a relativitáselméletben, hogy meghatározzuk adott testek által létrehozott gravitációs teret. Magának a gravitációs térnek minden jellemzője a metrikájából kiolvasható. Ehhez számtalan geometriai tétel és képlet állhatna rendelkezésünkre. Nyilvánvaló, hogy nem csak szabad testekkel lehet dolgunk, egy részecskére minden más erő is hathat. Ilyenkor a geodetikusok módosulnak a megfelelő erőterek, hatások figyelembevételével ². Mi elsősorban nem ezekre leszünk kíváncsiak. Azt állítottuk, hogy a téridőnk mint sokaság szép: többek között nincsenek benne lyukak. Azzal a feltételezéssel szintén élhetünk, hogy **nem lehetséges az időutazás a hétköznapi értelemben, tehát hogy zárt oksági görbéink legyenek**: egy megfigyelő korábbi időpontokig is eljuthat, ahol és amikor már tartózkodott. Mindenesetre érdemes megvizsgálni ezeket a lehetőségeket. De hogyan tudhatjuk meg esetleg, vannak-e “lyukas” tartományok a téridőnkben? Matematikailag erre több módszer is rendelkezésünkre áll. Az egyik az, hogy zárt görbét, gömbfelületeket stb. rajzolunk a sokaságra ³. Maradjunk egyelőre a zárt görbéknél. Ezeket végtelen ruganyos gumiszálnak tekintve apró nyújtásokkal, nyomásokkal egy szokványos körből is megkaphatjuk. Maga az, hogy milyen hosszú ez a szál, abszolút nem fontos, bármilyen kicsinyre is összehúzzhatjuk (tehát nem egy egyszerű befőttes gumiról van szó). Szélsőséges esetben a görbe két maximális távolságú pontja közti táv nullává redukálható, tehát egy pontot kaptunk. Mivel ez a görbe a felületre írt, tehát minden pontja valójában a felületé (mintha egyszerűen rárajzoltuk volna) ha van egy lyuk akkor viszont az előbb ismertetett egy pontra összehúzást nem tudjuk kivitelezni, hiszen ha egy pontban egyszerűen nincs definiálva a sokaság, mondhatnánk nem létezik, akkor a görbénk se létezhetne ott. Gondolhatunk rá oly módon akár, hogy egy szög van abba a pontba beverve, ezáltal nem tudjuk a gumit a beverés helyére tuszkolni. Ha találtunk egy lyukat (ami lehet egy pontnál “nagyobb” is), akkor köréje rajzolhatunk egy zárt görbét, illetve más görbét is, melyek nem zárják körbe. Ahány ilyen össze nem húzásra alkalmas zárt görbét találunk azon feltétel mellett, hogy két görbe azonos módon detektál, ha egyszerű mozgásokkal egymásba vihetőek (tehát magát a hurkot mint egészt a másikhoz toljuk, forgatjuk stb., illetve addig deformálunk ruganyos módon, amíg a másikat kapjuk), annyi “lyukúnak” mondjuk a sokaságot, idegen szóval genus-únak (genus mint ‘nem’: megmutatható, hogy pusztán a genus alapján osztályozhatóak a megfelelő sokaságok, ha magukra a sokaságokra is mint a fenti gumiszerű zárt görbéinkre egymásba “gyúrhatóságot” feltételezünk, tehát mint ideális gyurmának tételezve fel őket, plusz kikötjük nem lehet ezeket a gyurma-sokaságokat elszakítani, új lyukakat létrehozni vagy régiákat betapasztani vagy önmetszéseket készíteni etc. Ekkor érthető, hogy ha a lukszám azonos, egy ilyen gyurmalépések sorozatával eljuthatunk egyik sokaságból a másikba). Attól függően, hogy milyen dimenziós gömbbel tudunk egy-egy lyukat körbezárni beszélhetünk a lyuk dimenziójáról. Egy kört 1-dimenziósnek, a gömbfelületet 2-nek mondunk és így tovább. Egy n-gömb olyan geometriai ponthalmaz, mely a kör egyenletének általánosításával írható le, tehát: $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Nyilván a körnek van egy egydimenziós lyuka, a gömbfelületnek 2 A pont, mint lyuk is tekinthető egydimenziós lyuknak, hiszen egy kör írható köré (a ruganyos deformációk után egy szinte nulla, infinitezimális átmérőjű kör venné körbe). Alább a tóruszra látható példa: maga a tórusz (fánk alak, bicikligumi belső) elképzelhető úgy is, hogy felveszünk egy kört (hosszúsági kör) és ennek minden pontját, mint egy-egy kör pontjának tekintve köröket fűzünk fel (meridián/szélességi körök), hogy azonos sugarúak legyenek, plusz ne metsszék egymást

²Fermi-Walker-transzport

³Homotópia elmélet.

(azonos sugár nem is szükséges, csak egy "rendes" felületet kapjunk). Ez lényegében halmazelméleti jelöléssel $S^1 \times S^1$, ahol S^1 az egydimenziós gömböt (kört) jelöli egységsugárral. Egyszerűen fogalmazva a tóruszt pontpárok alkotják, az első a hosszúsági kör egy pontja, másik azon ponthoz tartozó szélességi köréé. Az ábrán egy tóruszra írtuk γ_1, γ_2 zárt görbét, melyek az ismertetett rugalmas transzformációkkal egy hosszúsági, illetve egy szélességi körbe vihetők. Ezek nyilván 1 genus-úak, tehát az üreges tórusz genus száma kettő (ha nem üreges, akkor csak γ_1 deformálása alapján, szélességi körök helyett körlapokat fűztünk fel).

$$T^2 = S^1 \times S^1$$



Egy tórusz, melyre két zárt görbét írtunk

Másik módszer lehetne az, hogy hasonló elvet követünk, de nem köröket alkalmazunk, hanem háromszögeket s azok általánosabb, magasabb dimenziós megfelelőit használjuk.⁴

Megmutatható: egy "szép" felület háromszöglapokkal minden átfedés vagy egyéb probléma nélkül lefedhető: háromszögelhető. Gondoljunk a 3D-s modellezés esetén a raszterekre, vagy egy fullerén molekulára, ahol az ötszög lapok háromszögekre bonthatóak, s így megfelelően eljárva egy kétdimenziós gömböt tudunk lefedni. Ahogy az n -dimenziós gömböt is tudtuk definiálni, ehhez hasonlóan n -dimenziós háromszögrasztereket is bevezethetünk, de ebbe itt nem bonyolódunk be. Az ötlet maga az, hogy vannak lapok, melyek nem fednek le semmit, akkor ott lyuk van. Belátható, a két módszer ekvivalens eredményekre vezet.⁵ Bár az ismertetett módszerek matematikailag gyümölcsöző elméletekhez vezettek, ennek ellenére mi másképp ragadjuk meg a problémát. A megfigyelők segítségével szeretnénk detektálni mindenféle anomáliát a téridőben, hiszen végső soron ezeknek maguk a testek lesznek "elszenvedőik". Egy **út végpontjának** tekintjük majd azt a pontot, ahonnan már nem folytatható tovább. Ez pontosabban kifejezve,

ha az utat mint egy függvény grafikonjának tekintjük, az értelmezési tartomány két végpontja, vagy ha nyílt intervallumról beszélünk a valós egyenesen, akkor a legkisebb ponthoz legközelebbi, legnagyobb valós számról beszélhetünk (infimum),

illetve a nagyobb végponthoz legközelebbi, legkisebb nagyobb számról beszélhetünk (supremum). Előbbi, ha jövő irányítható időszerű/oksági görbéről beszélünk, akkor terminológiánkban **múlt végpont** lesz, utóbbi **jövő végpont**. Lehetséges az is, hogy a végtelenbe folytatható görbékről beszélünk, ekkor az értelmezési tartomány végpontjai ∞ is lehetnek. Az ötlet az, hogy a téridő bármely pontjából induló megfigyelő világvonalát követjük, akár a jövőbe eső résznek vagy a múltba

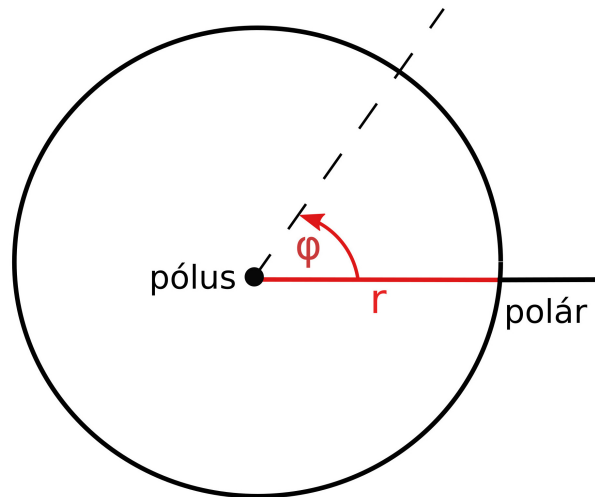
⁴Szimplicialis homológia.

⁵Hurewicz homomorfizmus.

eső résznek a rekonstruálásával (folytatásával). Ha valami oknál fogva nem tudjuk ezt végrehajtani, ott **szingulárisnak** tekintjük a téridőt. Több görbe akár egy egész ilyen szinguláris tartományt kirajzolhat, nem csak egy pontot. Fontos megjegyezni, hogy ezek a “behatolhatatlan” tartományok pusztán a téridő szerkezetéből adódnak, nem pedig valamilyen egyéb fizikai jelenség okozza őket (nagyon erős elektromágneses tér stb.). Persze érdekes kérdés az, hogy az ilyen jelenségek, amelyekhez valamilyen módon tömeget rendelhetünk hogyan befolyásolják magát a téridő metrikát.

Geodetikusan teljesnek nevezünk egy olyan geodetikust, mely a téridőben tetszőleges mértékben folytatható a múltba, jövőbe a tér minden pontjában — a test, melyhez a világvonal mint geodetikust tartozik — bebolyonghatja a téridőt minden világpontba akadály nélkül eljutva. Célunk megvizsgálni, milyen tulajdonságú téridők lesznek geodetikusan teljesek (vagy legalább is bizonyos tartományaik) ezenkívül, hogy okságot sértő esetek, mint pl. zárt időszerű vagy oksági görbék ne fordulhassanak elő. Zárt térszerű görbék persze megengedettek, ez pusztán zárt pályán való mozgást jelent.

Fontos mindig alaposan megvizsgálni vajon egy szingularitás valóban valamilyen fizikai jelenséggel kapcsolatos vagy pusztán matematikai, nevezetesen a koordináta rendszer választásából adódó. Nézzünk erre egy példát: vegyünk fel egy polár koordináta rendszert a síkon, vagyis jelöljünk ki egy pontot (ez az origó vagy pólus), ebből húzzunk tetszőleges irányba egy félegyenest (polár). Ezek után bármely pontot a síkon jellemezhetünk úgy, hogy hogy illesztünk rá egy a pólusból induló félegyenest, megvizsgáljuk, hogy óramutató járásával ellentétesen körüljárva (pozitív körüljárás szerint) milyen szöget zár be ez a félegyenes a polárral, s a pólustól a pont a félegyenesen milyen távol van. Ez a két adat: egy r hossz és egy ϕ szög leír minden pontot a síkban egyértelműen, kivéve a pólust.



Polárkoordináta-rendszer

Miért? Ha egy póluson átmenő félegyenes mentén haladunk folyamatosan a pólus fele, egyre kisebb és kisebb r -ket választunk adott ϕ szög mellett. Tehát mondhatnánk $(0, \phi)$ koordináták jellemzik a pólust. Viszont ezt tetszőleges félegyenesnél eljátszhatjuk, tehát bármilyen irány, azaz szög jó lenne a leíráshoz (hasonlóan, hogy a null vektor "minden irányú"), de elvesztettük az egyértelműséget, önkényességet csempésztünk be. Tehát az origó nem lesz leírható ebben a koordináta rendszerben. Mégis, a probléma könnyen orvosolható: válasszunk Descartes-féle koordináta

rendszert, legyen az általánosság mellőzése nélkül a polár az abcissa pozitív irányába eső, a pólus pedig ennek a koordináta rendszernek az origójával azonos (ami a két koordinátatengely metszéspontja).

Ezzel a leírásmóddal nem lesznek ilyen „szinguláris pontjaink”. Tehát csak egy alkalmatlan matematikai választás eredményezett olyan pontot, amit nem tudunk jellemezni. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy mindig csupán egy koordináta rendszerhez ragaszkodjunk görcsösen, pusztán azt, hogy mindig meg kell vizsgálni, ha valamely pont nem jellemezhető a koordináta rendszerben (nem egyértelmű a leírás, valamilyen paraméter ugrásszerűen végtelen nagy lesz és társai), akkor az eltüntethető egyszerűen más leírásmód választásával. Egyébként sok esetben egy adott téridő nem írható le egyfajta koordináta rendszerrel, hanem több különbözőt kell egymás mellé tenni, egyik tartományból a másikba térve mint új országok térképeit kell a koordináta rendszereinket változtatni. Erre jó példa mondjuk töltött fekete lyuk térideje.

Jó néhány definíció bevezetése után képesek leszünk megfogalmazni olyan tételeket, melyekkel a téridőnkben lehetséges szingularitások meglétére következtethetünk. A kísérleti megfigyelések alapján pedig majd azonosítani lehet ezeket a valóságban megfigyelt objektumokkal.

Megjegyzés az ábrákhoz: amikor sok dimenziós geometriai objektumokat rajzolunk le nyilván csak vizuális segítségnek alkalmazzuk őket. Nem tudunk 17 vagy 28 dimenziót papírra vetni, így mindig arra figyelünk, hogy a dimenziókülönbségek jól látszódnak az illusztrációkon. Ha valami n dimenziós, más valami $n+1$, akkor az előbbit egy görbeként szemléltethetjük, utóbbit egy felületként. Metszetük lehet n dimenziós (teljesen az $n+1$ dim-ban benne helyezkedik el az n -dimenziós), vagy $(n-1)$, stb. Az ábrák csalókák, de sokban lehetnek segítségünkre.

Hiperfelület alatt mindig az adott teljes tér dimenziójánál eggyel kisebb dimenziójú geometriai objektumot értünk. Síkok esetén a síkgörbék ilyenek (1 dimenziós "felületek"), 3D-s térnél a szokásos 2D-s felületek (innen az elnevezés) stb.

5.4. Téridő topológiai alapfogalmak

Nevezzük **utazásnak** szakaszonként jövőbe mutató időszerű geodetikusokat. Bár kissé furcsának tűnhet miért szakaszonként jellemezzük ezt a görbét, de több kissé patológikusnak tűnő metrika esetén hasznos lehet. Az utazás segítségével definiálhatunk egy relációt a téridő pontok között: x pont **kronológiai** megelőzi y -t, ha létezik x -ből x -ba utazás. Jel. $x \ll y$.

Kifejtve: $\exists x_1 \cdots x_n, n \geq 1$ időszerű geodetikusok: szegmensei ennek $[x_{i-1}, x_i]$, múlt végpontja ennek x_{i-1} , jövő végpontja pedig $x_i, \forall i \in 1, \cdots n$. Itt minden végpontját tartalmazzák a görbék, ezért torlódási pontokkal nem lesz dolgunk:



Ilyen "összegyűrőlő" utazásokkal nem lesz dolgunk

Oksági utazásról beszélhetünk oksági geodetikus utazások esetén. Itt is lesz egy relációnk: x okságilag avagy kauzálisan megelőzi y -t, ha létezik oksági utazás x -ből y -be. Jel.: $x \prec y$.

Nem engedjük meg "józan" téridőkben a zárt utazásokat, tehát: $x \prec x$ nem lehetséges. Az alábbi állítás könnyen igazolható a definíciókból:

$$\begin{aligned} a \ll b &\Rightarrow a \prec b \\ a \ll b, b \ll c &\Rightarrow a \ll c \\ a \prec b, b \prec c &\Rightarrow a \prec c \end{aligned}$$

Ahogy a fénykúpokkal tudtuk egy esemény jövőjét és múltját jellemezni, arra itt is módunk lesz: **Kronológiailag nyílt jövője x pontnak:** $I^+(x) := \{y \in M | x \ll y\}$

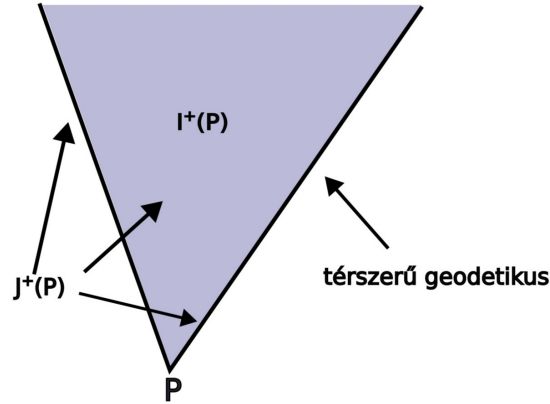
Kronológiailag nyílt múltja: $I^-(x) := \{y \in M | y \ll x\}$

Hasonlóan:

Oksági jövője x pontnak: $J^+(x) := \{y \in M | x < y\}$

Oksági múltja: $J^-(x) := \{y \in M | x > y\}$

$S \subset M$ részhalmaz, $I^+[S] = \bigcup_{x \in S} I^+(x)$, $J^+[S] = \bigcup_{x \in S} J^+(x)$



P pont kronológiailag nyílt jövője $I^+(P)$ és oksági jövője $J^+(P)$

Szemléltető eset: Minkowski-térben

(t, x, y, z) koordinátákkal $c = 1$, $a = (0, 0, 0, 0)$ pont, $I^+(a) = \{(t, x, y, z) | t > (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\}$, $J^+(a)$ ugyanez, csak $\geq$.

Az alábbi állítások matematikai szigorúság nélkül is egyszerűen definíciókból valósnak tételezhetők fel egyszerűbb ábrák segítségével (múltakra egyszerűen csak az idő irányát kell "megfordítani", vagy az ábráinkat tükrözni):

$I^+(a)$ nyílt halmaz.

$I^+[S]$ nyílt, $\forall S \subset M$ részhalmazra.

$x \in I^+(y) \iff y \in I^-(x)$ ugyanígy oksági halmazokra.

$I^+[S] = I^+[Cl(S)]$, ahol $Cl(S)$ S halmaz lezártja.

$I^+[S] = I^+[I^+[S]] \subset J^+[S] = J^+[S] = J^+[J^+[S]]$

$a \ll b, b \prec c \Rightarrow a \ll b$

$a \prec b, b \ll c \Rightarrow a \ll c$

$x \prec y \Rightarrow I^+(x) \supset I^+(y)$

Ha α fényszerű geodetikus a -ból b -be, ugyanígy β b -ből c -be a $a \ll c$ vagy $\alpha \cup \beta$ (tehát ahol véget ér, onnan haladunk tovább β -n) fényszerű geodetikus.

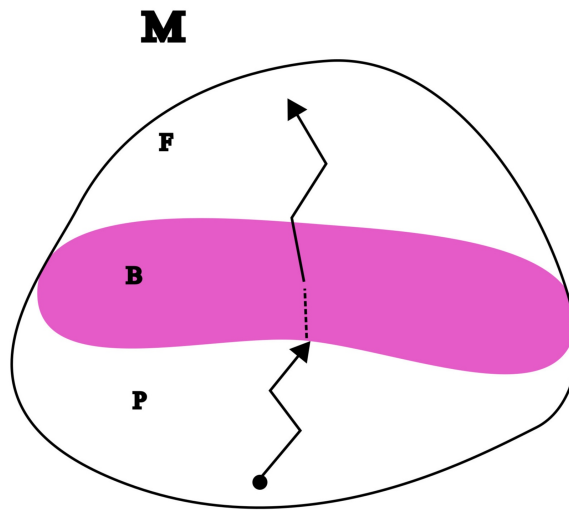
$a \prec b$, de $a \ll b$ nem teljesül $\Rightarrow \exists$ fényszerű geodetikus.

$a \ll b \iff \exists$ időszerű görbe a -ból b -be.

Jövő halmaza S halmaznak: $F \subset M$, ha $F = I^+[S]$, valamely $S \subset M$ -re. Ezzel ekvivalens $F = I^+[F]$, hiszen $I^+[I^+[S]]$. Tehát, ha $x \in F, x \ll y \Rightarrow y \in F$.

Múlt halmaza S -nek hasonlóan vezethető be. Egy $S \subset M$ részhalmaz **akronális perem**, ha nincsenek kronológiailag összefüggő pontjai.

Rajzzal:



Akronális perem $B \subset M$ részhalmaz, ha $B = \partial I^+[S]$ valamely S részhalmazára M -nek.

Minden akronális perem akronális halmaz is.

Egy akronális perem jellemezhető mint egy részhalmaz múlt nyílt halmaza is.

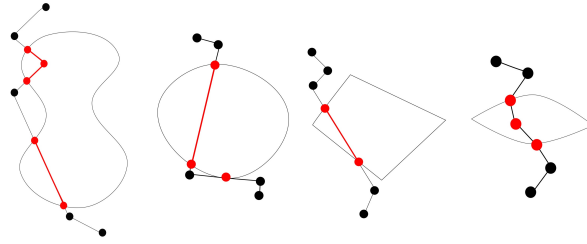
Ha B nem üres akronális perem, akkor $\exists! F$ jövő halmaz, $\exists! P$ múlt halmaz, hogy $M = F \cup B \cup P$, tehát B azonos F és P peremével. Minden utazás vagy időszerű geodetikus mely P egy pontjából indul és F egy pontjába fut be B -t egyetlen pontban metszi. Pl.: Minkowski-téridőben $P = I^-[B], F = I^+[B]$.

Még néhány fogalomra szükségünk van:

M **téridő jövő megkülönböztető** $p \in M$ -ben, ha $I^+(p) \neq I^+(q), \forall q \in M, q \neq p$. **Jövő megkülönböztető**, amennyiben minden pontjában az.

Egy $Q \subset M$ **okságilag konvex**, ha nem metszi egyetlen utazás sem egy nem-összefüggő halmazban. Tehát ha van metszete egy utazással, akkor az csupán egyetlen egy halmaz, nem pedig halmazok uniója.

Pl.:



Első két esetben a metszési halmazok (pirossal jelölve) nem-összefüggőek, ezért a feltüntetett halmazok nem okságilag konvexek, a harmadik és negyedik viszont az

M téridő erősen oksági p pontjában, ha létezik tetszőlegesen kicsiny okságilag konvex környezete. **M téridő erősen oksági**, ha bármely pontjában az. Belátható, hogy erősen oksági téridő múlt és jövő megkülönböztető lesz. Lényegében ez az egész azért fontos számunkra, hogy ne legyenek az okságot sértő görbék. Ezek az absztrakt feltételek mégsem elegendően teljesen, mert ha kicsit is megváltozik a metrika, tehát más lesz a téridő már minden rosszra fordulhat. Követeljük meg, hogy stabilan oksági legyen a téridő, vagyis ne jelenjenek meg ilyen okság sértő zárt görbék, ha kicsit is megváltozik a metrika.

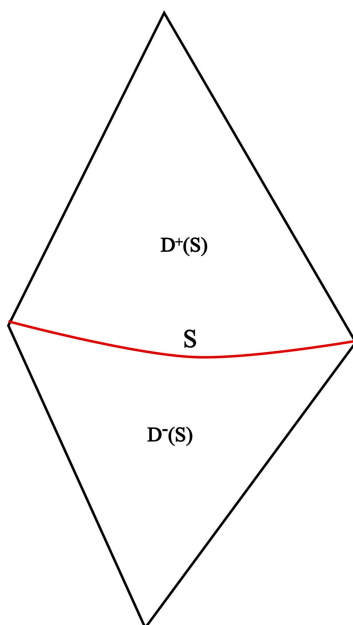
Függőségi tartományok:

$D^+[S] = \{x \mid \text{bármely múlt végpont nélküli utazás bármely múlt végpont nélküli utazás } x\text{-et tartalmazza, akkor } S\text{-et metszi} \}$

$D^-[S] = \{x \mid \text{bármely jövő végpont nélküli utazás bármely múlt végpont nélküli utazás } x\text{-et tartalmazza, akkor } S\text{-et metszi} \}$

$D[S] = D^+[S] \cup D^-[S]$

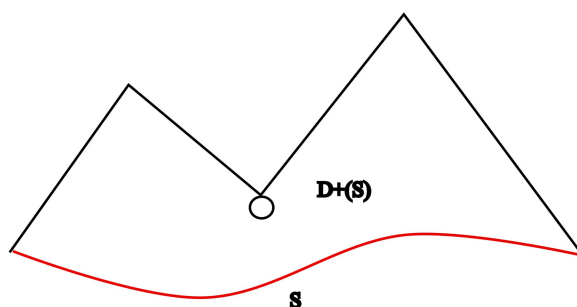
Szavakban $D[S]$ -t végpontok nélküli S -et metsző görbék pontjai alkotják. Avagy olyan téridőtartomány, melynek S akronális pereme.



S halmazhoz tartozó két függősségi tartomány: egy a múltban és egy a jövőjében

A fizikai jelentés: az információt időszerű görbéken szállítva, ha egy múlt végpont nélküli görbe nem metszi S -t, akkor lehet végpontja egy $p \in I^+[S]$ -ben, így a végtelenből ezen görbe mentén elhozhatunk információt, mely a p - beli jelenségeket befolyásolhatja, s nem S -en levő jelenségek, objektumok az információforrások. Viszont amennyiben $p \in D^+[S]$, $\rightarrow$ a definíció szerint nincs ilyen időszerű görbe. Az ábrán D határai fényszerű görbék alkotják, azért rajzoltuk “45 fokban” őket, hiszen ennél gyorsabban információ nem juthat el egy pontba S -ről.

Ha eltávolítunk egy pontot M -ből, akkor $D^+[S]$ -ről “behorpad”, hiszen oda hiába fut be az információ egy fényjel segítségével, onnan már nem haladhat tovább:



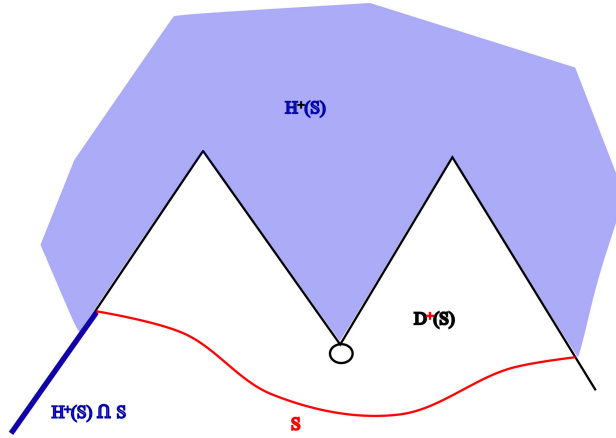
Egy újabb központi fogalom

Cauchy-horizontok:

$$H^+[S] = \{x | x \in D^+[S] \text{ de } I^+[S] \cap D^+[S] = \emptyset\}$$

$H^-[S]$ hasonlóan definiálható, $H[S]$ pedig ezek uniója.

Cauchy-hiperfelület: egy S akronális halmaz, melyre $D(S) = M$.



5.5. Geodetikusok

Időszerű geodetikusok kongruenciája: ha egy nyílt tartományt tekintünk a téridőben, akkor időszerű geodetikusok egy családjából ennek a tartománynak bármely pontján pontosan egy görbe halad át. A görbék nem metszik egymást, hasonlóan mint rézhuzalok egy nyalábja. A kongruenciánál érdekes megállapítani egy-egy geodetikus mentén haladva a szomszédos görbékkel a távolság mennyire változik (mekkora a deviáció). Jellemezhetjük ezt, mint a **kongruencia tágulását**: $\theta = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t}$, ahol V a kongruencia "térfogata", t az idő (valamely görbe mentén mért sajátidő), vagyis a hányados térfogat változását mérjük a kongruenciának. Ha ez a mennyiség pozitív, tágulásról beszélhetünk, ha negatív összehúzódásról. Lényegében közelebb kerülnek a geodetikusok egymáshoz vagy távolabb (nyilvánvalóan nem feltétlen mindegyik ugyanolyan mértékben). A tágulás változásának mértéke a saját idő függvényében kifejezhető egy egyenlettel, de mi itt ezzel nem foglalkozunk. ⁶ Ami számunkra fontos, hogy ha a kongruencia által metszett téridő tartományban minden egyes időpillanatban meghatározott térszerű tartományra merőleges minden geodetikus, illetve teljesül az úgynevezett erős energia feltétel, akkor a saját idő függvényében a tágulás mindenképpen csökkenni fog: ha kezdetben széttartottak a geodetikusok, a jövőben ez lassulni fog, ha pedig egymás fele tartottak, ez egyre erősebb lesz.

Energiafeltételek:

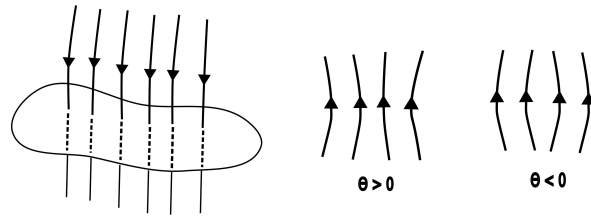
tökéletes folyadékok esetén (melyek idealizált eseteket jelenítenek meg: nem vezetik a hőt, egyáltalán nem nedvesítenek stb., az energia feltétel ennél általánosabb, de az egyszerűség kedvéért elégedjünk meg ezzel: ⁷ lényegében két egyenlőtlenséget állít: $p + \rho \geq 0$; $3p + \rho \geq 0$, ahol p a téridő szerkezetét meghatározó anyag nyomása, ρ az energiasűrűség. Gondoljunk vissza a dimenzióanalízisnél láttuk, hogy az energia is egyfajta nyomással rendelkezik a téridőre nézve, ezért adhatjuk össze a két mennyiséget. Sőt, még ennél több is igaz: $\theta_0 = \theta(0)$ a kezdeti tágulás, akkor $\tau \leq \frac{3}{|\theta_0|}$ véges sajátidőn belül egy pontban néhány geodetikus összefut (fókuszálódnak)⁸ Ezt az összefutást nevezzük **kausztikának**, mely optikából ismerős lehet. Eme pontot szingularitásnak

⁶Raychaudhuri-egyenlet.

⁷ $R_{ik}T^iT^k \leq 0$, erős energia feltétel, ha minden időszerű T^i vektorra teljesül, s ha minden nulla: gyenge; R_{ik} a Ricci-tenzor

⁸Raychaudhuri-Komar-hatás (fókuszálódási tétel). Riemann sokaságokra: Bonnet-Myers tétel néven ismert hasonló állítás.

kell tekintenünk.



A felületen áthaladó geodetikusok egymást nem metszik; táguló, illetve összehúzódó kongruencia

Még egy technikaibb fogalom:

konjugált pontpár: a geodetikusokat távolság minimalizáló görbéként definiáltuk, tehát melyek az egyenesek szerepét töltik be görbült sokaságokon (egyértelmű legrövidebb hosszúságú görbe adott két pont között). Ha néhány geodetikus metszi egymást egy pontban, akkor ehhez a ponthoz létezik egy konjugált párja, ha nyersen fogalmazva más pontban is metszik egymást a görbék. Jó példa erre a gömbfelület: az északi és déli sarkpont egymás konjugált párjai. A hosszúsági körök geodetikusok. Ha metszik egymást a déli sarkon, akkor az északin is fogják. Tehát bár lokálisan (kis részén a gömbnek) a főkörök, mint geodetikusok két pont között a legrövidebb távolságot jelentik (az északi és déli sark megfelelő megválasztásával mindig lesz egy főkör két tetszőleges pont között), de globálisan nem. Valóban, a sarkpontokon átrajzolva egy "fél geodetikus", egy fél szélességi kört, akkor minden probléma nélkül megrajzolhatjuk a másik felét is. De így nem lesz egyértelmű legrövidebb hosszúságú görbe két pont között. Az euklideszi térben nincsenek konjugált pontpárok (minden egyenes / egyenes szakasz legfeljebb egyszer metszi egymást). Ennek a technikai fogalomnak a lényege abban áll majd, hogy ha egy p pontból q -ba futó oksági geodetikusnak e két pont között létezik pontja, mely p vagy q -hoz konjugált, akkor létezni fog utazás p -ból q -ba, melynek hossza pq hosszánál szigorúan nagyobb. Maga a geodetikusok kongruenciájának tágulásával fogalmazva: ha valahol kialakult kausztika, s onnan „kifutó” geodetikusok (okságiak) tágulása negatív, akkor összefutnak egy pontba újból, tehát konjugált pontpárokat kapunk.

Görbék egy összessége kirajzolhat egy felületet, ha a felület minden pontja egy-egy ilyen görbéé. Így a felület adott pontjának érintővektorai azon a ponton átfutó görbék érintővektora is. Attól függően, hogy milyen görbéről beszélünk, például fényszerű, tehát minden pontjában az érintővektor fényyszerű, maga a felület is tekinthető ezáltal fényszerűnek, stb. A görbéket általában geodetikusoknak vesszük.

(jövő) csapdába ejtett halmaz egy nem üres zárt akronális részhalmaza M téridőnek, melyre $E^+[S] = J^+[S] - I^+[S]$ kompakt.

Elérkeztünk a két tételhez, melyet eddig próbáltunk megfogalmazni precízen:

Tétel (S. Hawking, 1967) [4, 8, 9]: Ha M téridőre teljesülnek az alábbiak:

$\alpha.$) M tartalmaz kompakt, peremmel rendelkező térszerű Σ hiperfelületet, melyre merőlegesen metsző geodetikusok kongruenciájára a tágulás pozitív.

$\beta.$) Erős energia feltétel teljesül ($p + \rho \geq 0$; $3p + \rho \geq 0$ tökéletes folyadékok esetén).

Ekkor: létezik múlt végpont nélküli geodetikus, melynek hossza véges.

Következmény (pontosabban így értelmezhető a matematikai állítás, ha a feltételeket megfigyelések alapján igaznak tételezhetjük fel): egy térben véges és mindenhol táguló univerzum esetén van egy kezdeti szingularitás.

Fontos megjegyezni, hogy maga a természettudomány és ennek legegzezaktabbnak tekintett ága a fizika pusztán térben és időben lezajló folyamatokkal foglalkozik. Mivel egy ilyen „kezdeti” szingularitás „előtti” világról információt nem nyerhetünk, így nem a fizika dolga ezen megállapítás után továbbmenni. Tehát hasonlóan a multiverzumokhoz (két eset lehetséges abban az esetben, ha vannak a mienktől eltérő világegyetemek: a mienk s egy másik között van kapcsolat: ekkor nincs okunk két különböző univerzumból beszélni; másik esetben nincsen kapcsolat: nem állíthatunk semmit egészen bizonyosan, így minden pusztán találgatásba fulladhat.⁹). A fizikai érveléseknek, vizsgálódásoknak itt meg kell toppanniuk.

Tétel (Hawking-Penrose) [10]: Egyetlen téridőre sem teljesül mind az alábbi három tulajdonság:

α .) M nem tartalmaz zárt utazásokat.

β .) Bármely vég nélküli oksági geodetikus M -ben tartalmaz konjugált pontpárt.

γ .) Létezik a jövőben foglyul ejtett részhalmaza a téridőnek.

α .)-t „földhöz ragadt módon” ki szoktuk zárni a logikai ellentmondások miatt. Filozófiai bizonyítására az időutazás lehetetlenségének itt nem térünk ki.

γ .) Lényegében azt fejezi ki, hogy valamilyen gravitációs összehúzóds történt. Mit is értünk ez alatt?

Nagyon nagy tömegű testeknél (mondjuk csillagok) előfordulhat, hogy nincsen sztatikus egyensúlyi állapot, tehát minden határon túli zsugorodást szenved el. Ez a gravitációs összehúzóds mégsem következik be olyan megfigyelők szempontjából, akik speciális relativitáselméletnek megfelelő téridőben vannak (tehát elhanyagolható mértékű a téridő eltérése a síktól) és messze vannak ettől az objektumtól (náluk csak végtelenhez tartó idő esetén történne meg ez). Az ilyen összeomló test térídejének metrikáját az alábbi kifejezés adja meg (külső szemlélő számára lényegében egy állandósult állapot látszik):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2 dt^2 - r^2(\sin^2(\theta)d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Ez az úgynevezett **Schwarzschild-téridő**. Ha egy adott időpillanatot kiválasztunk, akkor két nagyon közel eső pont távolsága:

$$dl^2 = r^2(\sin^2(\theta)d\phi^2 + d\theta^2) + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Az első gömbi koordináta rendszerben fejezi ki azt, hogy az objektum középpontja köré rajzolt kör sugara r . A második pedig azt, hogy azonos sugáron levő két pont (a, b) távolságát megkaphatjuk:

⁹Itt gondolhatunk akár a már modális filozófia birodalmába tartozó elméletéről David Lewisnak (On the Plurality of Worlds). Nyilvánvalóan a halmazelméleti koncepciók, axiómarendszerek problémáira lehetséges interpretáció (multiverse set theory) nem fizikai vizsgálódásra szánt, kivéve, ha valaki immanens realista.

$$\int_a^b dl = \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$$

integrál segítségével.

Az r_g mennyiség a test gravitációs sugara (Schwarzschild-sugár):

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Ezt úgy is megkaphatjuk, hogy a test nyugalmi energiáját egyenlővé tesszük a newtoni gravitációs energia kifejezéssel:

$$Mc^2 = \frac{GM^2}{2r}$$

A Napunkra erre az értékre 3 km-t, Földünkre 9 mm-t kapunk az adatok behelyettesítése után.

Az említett megfigyelő szerint sugara a gravitációs sugárnál kisebb nem lehet, tehát a megfigyelő szerint egy állandósult állapot fog egy idő után bekövetkezni. Ha egy test “bele esik” ebbe az összehúzódó objektumba, akkor a test által kibocsátott jelek (lehetnek akár fényjelek is) terjedési ideje a végtelenhez fog tartani. Valóban, ha fényjeleket tekintünk:

$$ds^2 = 0, \quad cdt = dr / (1 - \frac{r_g}{r})$$

ha ezt integráljuk valamilyen rögzített r_0 távolságig, akkor

$$c\Delta t = r_0 - 3 + r_g \cdot \ln\left(\frac{r_0 - r_g}{r - r_g}\right).$$

Viszont ahogy az r sugár egyre jobban megközelíti a gravitációs sugarat a logaritmus argumentuma nullához tart, így a kifejezés divergál, ebből következően korlátlanul nagy terjedési időt kapunk. Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy ami az objektum által meghatározott felületen, az úgynevezett eseményhorizonton egyszer kívülről érkezve átért az már nem juthat ki. Ezt az önmagába záródó különleges objektumot **fekete lyuk**nak, az által meghatározott téridőtartományt **fekete lyuk tartomány**nak nevezzük.

Egy fekete lyukat általánosan az alapján fogunk jellemezni, hogy felhasználjuk “ami bejutott, ki nem jut” jelenséget. Egy olyan téridőtartományról beszélhetünk, amiből kimenő fényszerű geodetikuskok az oksági végtelen jövőt nem érhetik el J^+ . Itt az egész M téridő oksági végtelen jövőjéről beszélünk, ami alatt olyan eseményeket értünk, amik “után” nem hosszabbítható tovább a “világtörténet”. Mint fizikában szokás itt a végtelen egyfajta matematikai absztrakció, arra vonatkozik, hogy a jelenségek geometriai méretei (itt az idő is egyfajta geometriai mérettel rendelkezik!) ehhez a távolsághoz (időben értve) elhanyagolhatóak. Magyarul ennek a J^+ jövő végtelennek a pontjait bizonyos megfigyelők világvonalai elérhetik, akkor nyilván ennek a J^+ -nak az oksági múltjában kell elhelyezkedniük. Ennél fogva egy fekete lyuk tartomány (pontosabban ezek összessége, ha M téridőben több is van): $B = M \setminus J^+(J^+)$, tehát melyek az oksági végtelen múltjában nem elhelyezkedő pontok (események) alkotnak.

Maga az eseményhorizont (mostantól B egyetlen fekete lyuk tartományt jelöl) B pereme lesz, tehát B -t és M többi részét elválasztó felület: $H = \partial B = \partial(J^-(J^+))$. Ha tekintünk egy Σ térszerű 2D-s felületet akkor az eseményhorizont keresztmetszete $H(\Sigma) = H \cap \Sigma$ metszet lesz.

Penrose, 1968 [5]: az eseményhorizont fényszerű felület, melyet fényszerű geodetikuskok rajzolnak ki, amelyeknek nem létezik jövő végpontjuk.

Ebből következik többek között: Ha egy ilyen kirajzoló geodetikust a múltba végig követünk nem feltétlen hagyja el a horizontot.

Ha egy kirajzoló geodetikus befutott a horizonton, kifelé már nem jöhet ki.

Két kirajzoló geodetikus nem metszi egymást, esetleg kivételt képez, ha egyszerre érnek be.

Az eseményhorizont bármely pontján (kivéve esetleg befutáskor) pontosan egy kirajzoló geodetikus halad át.

Ezek után már sokkal érthetőbb a **csapdába ejtett tartomány** fogalma. Egy ilyen tartomány általában tartalmaz csapdába ejtett felületeket: ezeknél a be- és kihaladó fényszerű geodetikusok kongruenciái, melyek merőlegesek a felületre és mindenhol negatív távolságuk rajta (képzeljük el, hogy vizet locsolunk egy locsolócsőből egy felületre: a vízsugarak széjjel tartanak a becsapódáskor: mivel nem juthatnak ki a geodetikusok, így a vízzel csak “elkanyarodnak” a felület közelében). Egy kissé nehezebben megragadható horizont konzisztens bevezetése is lehetséges:

Csapdába ejtett horizont: a téridőnek 3D-s pereme, mely csapdába ejtett felületeket tartalmaz.

Látszólagos horizont: egy csapdája ejtett horizont és egy térszerű 2D-s felület metszete.

A látszólagos horizont tulajdonképpen a kifelé irányított és kifelé haladó, illetve kifelé irányított, de befelé haladó fény sugarakat elválasztó felület (tehát akik még kijuthatnak, s akik már nem). Mivel peremről beszélünk, így a látszólagos horizont a legkülső csapdába ejtett felület. Általában megegyezik az eseményhorizonttal.

Mielőtt elvontabb területekre térnénk át, számoljuk ki a Schwarzschild-féle sugár felhasználásával egy fekete lyuk sűrűségét. Gömb alakúnak feltételezve térfogata $V = \frac{4}{3}\pi r_g^3$, ebből a sűrűsége:

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \cdot \frac{1}{M^2}$$

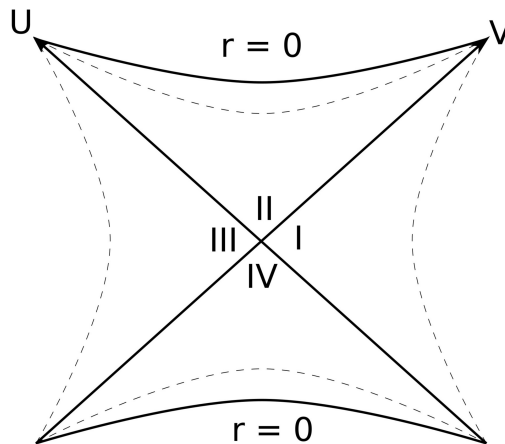
Habár a sűrűség a tömeg reciprok négyzetével arányos, az állandó szorzótényező 10^{78} nagyságrendű (SI egységekben), ezért mondjuk egy átlagos csillagközi fekete lyukra, melynek tömegének nagyságrendje 10^{31} , sűrűségére kb. $10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ -t kapunk. A Tejút közepén elhelyezkedő Sagittarius A* esetén $M \sim 10^{36}$, sűrűsége 10^6 nagyságrendű. Ezzel szemben az elméleti maximum 10^{41} kg [12], ekkor a sűrűség már csak 10^{-4} , ami kisebb, mint a hidrogéné (10^{-2})! Ezek alapján nem mondhatjuk, hogy mindenképp nagyon sűrű objektumoknak tekinthetjük a fekete lyukakat.

Már szó esett a koordináta és a fizikai szingularitások közti különbségről. A Schwarzschild-féle téridőben ha megvizsgáljuk az ívelemnégyszetet láthatjuk, hogy ha $r = r_g$, akkor dr^2 együtthatója értelmezhetlenné válik. Ez viszont a fenti tárgyalásnak ellentmond. Megnyugtató, hogy ez csak egy koordinátaszingularitás. A részletes transzformációkkal nem vesződve az ívelemnégyszet így is írható:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV + r^2 (\sin^2(\theta) d\phi^2 + d\theta^2)$$

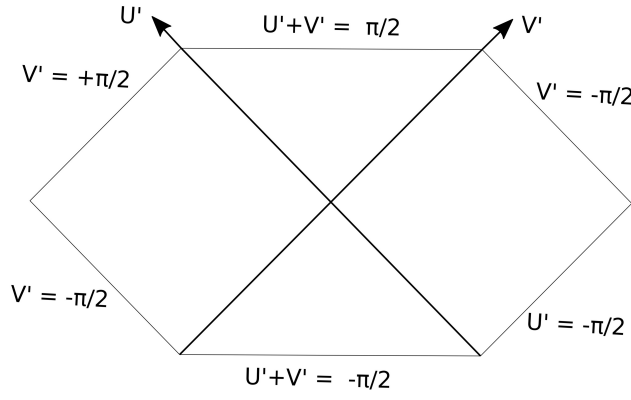
Itt U, V az úgynevezett **Kruskal-Szekeres**-koordináták. A fény sugarak ebben a leírásban $V = \text{ll. felületen}$, a bemenők pedig $U = \text{ll-n}$ mozognak. Látható, hogy itt $r = r_g$ -nél probléma nincs, ez egyébként $UV = 0$ -nak felel meg (tehát két egyenes, mely egy pontban metszi egymást), illetve $r = 0$ a fekete lyuk középpontját jelöli (ahol egyébként már mondhatjuk, hogy szingularitás van, mindenesetre nem lesz ez már zavaró a leírásnál). Utóbbi egyébként $UV = 1$ hiperbolának felel meg, általánosan pedig $r = \text{áll.}$, $UV = \text{áll-nak}$ felel meg.

A téridőt szemléletesen ábrázolhatjuk az alábbi módon:



Látható, hogy minden $r = \text{áll.}$ felületnek két másolata van az ábrán: illusztratív eset: $r = r_g$, akkor $UV = 0$, ami $U = 0$ vagy $v = 0$ esetén teljesülhet. Az **I-es tartomány** az, amit eredetileg leírtak a Schwarzschild koordináták, IV-et szokás **fehér lyuk tartomány**nak nevezni. Ez igazából idő-fordítottja egy fekete lyuknak, amiből csak kijutni tudnak a testek. Nem ismerünk semmilyen asztrofizikai lehetőséget arra, hogy valóban létezzenek, ez inkább csupán matematikailag bukkan fel. I és III külső tartományok, II, IV pedig belsők. Az új koordináták segítségével a téridőnk leírását úgymond kiterjesztettük, az eseményhorizont mögötti térben is használhatók a koordinátáink. Pontosabban, ilyen téridőben (leírásban) minden geodetikusunkat tetszőleges tér és időirányban hosszabbíthatunk, kivéve szingularitásba ütközéskor. A fénysugarak, melyek radiális irányúak U , V tengelyekkel párhuzamos egyenesek, ennél lassabban mozgó testek világvonala ezek közé esnek. Azaz a fénykúpok úgy viselkednek, mint Minkowski-téridőben. Minden $t = \text{áll}$ görbe a centrumon (U, V metszésponton) átfutó egyenes lesz. A fekete lyuk eseményhorizontja (I pereme) $t = \infty$ -hez tartozik (nincs menekülési lehetőség), $t = -\infty$ pedig a fehér lyukhoz (nincs visszatérés). $r = \text{áll.}$ görbék hiperbolák, melyek aszimptotái 45 fokos szöget bezáró eseményhorizontok (U, V tengelyek). Külön egzotikussága a diagramnak, hogy ha egy részecske eléri II tartománynál levő $r = 0$ felületet, akkor világvonalát folytathatjuk II tartomány $r = 0$ peremén. Mondhatjuk azt, hogy a fekete lyuk szingularitása után egy fehér lyukban találja magát a részecske, vagy egyszerűen csak azt, hogy valahogy visszafele játszottuk le a mozgását a lyukon belül. Nézzünk még egy koordináta transzformációs lehetőséget:

Legyenek $U' = \arctg(U)$, $V' = \arctg(V)$. Ekkor egy ilyen rajzot készíthetünk:



A hatszög oldalait különböző téridőtartományokkal tudjuk azonosítani.

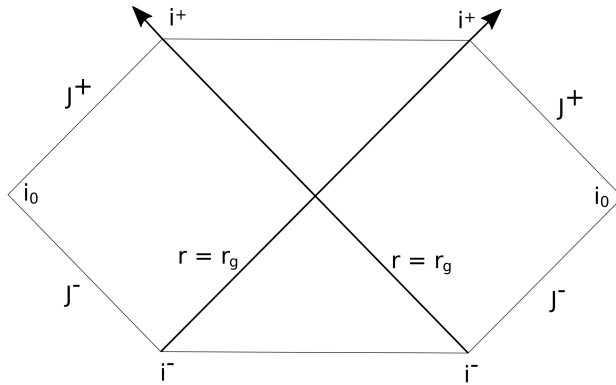
$U', V' = \pi/2$ -k a jövő fényyszerű (oksági) végtelen tartomány J^+ , $[(U, V) = (\text{véges}, \infty)]$;

$U', V' = -\pi/2$ -k a jövő fényyszerű (oksági) végtelen tartomány J^- , $[(U, V) = (-\infty, \text{véges})]$;

$J^+ \cap J^-$ térszerű végtelenek (térszerű geodetikusok végpontjai) i^0 [$r = \infty, t$ véges];

$(U', V') = (0, \frac{\pi}{2}), (U', V') = (\frac{\pi}{2}, 0)$ jövő időszerű végtelen (időszerű geodetikusok jövő végpontjai, melyek nem futnak be $r = 0$ -ba) i^+ [$t = \infty, r$ véges];

$(U', V') = (0, -\frac{\pi}{2}), (U', V') = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ jövő időszerű végtelen (időszerű geodetikusok jövő végpontjai, melyek nem futnak be $r = 0$ -ba) i^- [$t = -\infty, r$ véges];



Schwarzschild-féle fekete lyuk Penrose-Carter-diagramja

Az ilyen típusú ábrák a **Penrose-Carter-diagramok**.

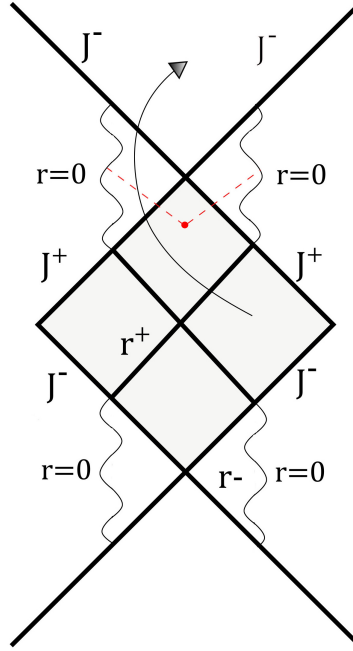
A két diagram előnyeit demonstrálhatjuk egy másik típusú fekete lyuk téridőn, ahol a fekete lyuk elektromos töltéssel is rendelkezik. Ezt **Reissner-Nordström-téridőnek** keresztelték el (RN). Ebben a téridőben az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g}{r} + (\frac{q}{r})^2)c^2 dt^2 - (1 - \frac{r_g}{r} + \frac{q}{r})^{-1} dr^2 - r^2(\sin^2(\theta)d\phi^2 + d\theta^2)$$

ahol $q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$, ϵ_0 a vákuum permeabilitása, Q a lyuk elektromos töltése. A tömeg-energia ekvivalencia folytán az elektromos mező miatt a tömege nagyobb lesz ennek a fekete lyuknak, mint az azonos paraméterekkel rendelkező Schwarzschild-félének.

Látható, hogy dr^2 szorzója nem definiált, ha $1 - \frac{r_g}{r} + (\frac{q}{r})^2$ eltűnik. Ez $1/r$ -ben másodfokú egyenlet. Gyökei $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Ha $|Q| = M$ extrém fekete lyukról beszélhetünk. Megmutatható, hogy az r_+ sugarú gömbfelület az eseményhorizont, r_- csupán látszólagos. Ha kívülről érkező átlépünk az eseményhorizonton a látszólagosig egészen alkalmazhatjuk a Kruskal-Szekeres-koordinátákat. Viszont a látszólagos horizontnál ezekkel bajban vagyunk. Mint már említettük korábban előfordulnak olyan téridők, melyek egy koordináta rendszerrel nem fedhetők le. Mindenesetre választhatunk olyan koordinátákat, melyek a látszólagos horizonton és azon belül „szépen viselkednek”, de az eseményhorizonthoz érve, s azon túl nem. Így váltogatnunk kell ahogy a fekete lyuk centrumtól radiális irányban mozgunk.

Ha azt a kérdést boncolgatjuk mi történik, ha a látszólagos horizonton túljut egy megfigyelő meglepő dolgokat tapasztalunk. Ha $r_- < r < r_+$, $c^2 dt^2$ szorzóját jelölje f , $-1/f$ lesz ekkor dr^2 -nek. Mivel az idődifferenciálnál a szorzó pozitív, a térkoordináta differenciálnál negatív, itt pedig pont fordítva van, ez esetben t térszerű, r pedig időszerű koordinátának tekintendő. Ha $r < r_-$, akkor $f > 0$ $r = ll..$ felületek térszerűek, s nyilván ekkor a szingularitás is. Gondoljunk kicsit bele, míg a Schwarzschild-téridőnél a szingularitás egy térbeli pont volt, itt időbeli lesz! Egy megfigyelő miután átlépte a külső eseményhorizontot, de még a belső látszólagosat nem, ahogy r csökken (más lehetőség nincs, az "időnek" egy iránya van, merre változhat), mindenképp a mozgás is zajlik, hiszen r itt időszerű. Ahogy a látszólagos horizontot átlépjük r átvedlik térkoordinátává, csökkenhet vagy növekedhet egyaránt. Így okosan navigálva egyszerűen kikerülheti a megfigyelő a szingularitást majd a látszólagos horizonton áthaladhat. Viszont ez nem az előzőleg érintett horizont, hanem egy újabb, mert minden $r = ll.$ felület kétszer fordul elő a Kruskal-Szekeres-diagramon. Átlépve ezt a kópiát r újból időszerű, csak növekedhet, mindenképp egy újabb $r = r_+$ felületen halad át. Semmi nem gátol meg minket, hogy itt egy újabb koordináta rendszert vezessünk be, ami előzőleg a szingularitástól mérve $r = r_+$ -tól térbeli végtelenig alkalmas volt számunkra a téridő leírására. A megfigyelő egy új univerzumban kötött ki. Ha itt is behatol a fekete lyukba a történet kezdődik előlről. Összefoglalva végtelen sok térképpel kell rendelkeznie a megfigyelőnek, hogy a Reissner-Nordström-téridő által leírt világban kiigazodjon (annyi könnyítéssel, hogy két típus van ezekből). Ha a Penrose-Carter-diagramját szeretnénk elkészíteni a téridőnek, akkor a Schwarzschild-téridőbeli ábrát kell végtelenszer egymásra pakolni:



2. ábra. Penrose-Carter-diagramja egy Reissner-Nordström-típusú fekete lyuknak

$r = r_- r_+$ felületek által határolt tartomány csapdába ejtett felületeket tartalmaz, innen kiinduló fényjelek (pirossal jelölve) mindenképp a szingularitásba futnak be.

Habár igazán science fiction-be illőek ezek az alagutak, amiket találtunk (egyfajta féregjáratok), mégsem stabilak: a valóságban ilyen pontos szimmetriákkal, tulajdonságokkal rendelkező RN fekete lyuk nem létezik, ez csupán egy modell. Ha picit is változtatunk a modellen (szakkifejezéssel perturbálunk), ezek az alagutak eltűnnek. Egyelőre sejtés az, hogy egy fekete lyuk legfeljebb három paraméterrel jellemezhető: tömegével, töltésével, illetve perdületével. Mindenesetre az igaz, hogy a Schwarzschild-megoldás egyértelmű megoldás, mely töltetlen, nem forgó fekete lyukat ír le, ugyanígy a Reissner-Nordström-megoldás, mely töltött, nem forgó fekete lyukat ad meg. Mikor nem töltött a fekete lyuk, de forog, akkor Kerr-féle megoldásról beszélhetünk. A fekete lyuk töltött és forog is, akkor Kerr-Newman-téridőről beszélünk. Utóbbi kettőt most nem részletezzük. Gigantikus matematikai feladat annak megmutatása, hogy ezek a megoldások stabilak: kicsit megváltozik a téridő, akkor is fennállnak (nem úgy, mint RN téridő esetén az alagutak).

6. Fekete lyukak termodinamikája

A Földünk esetén, ha a felszínhez közel tartózkodik egy részecske, akkor bizonyos gyorsulást érez a felszín felé radiális irányban. Ez a jól ismert gravitációs gyorsulás g . Más égitestekre is kiszámíthatjuk newtoni mechanika segítségével: $g = \frac{GM}{r^2}$. Viszont a fekete lyukak esetén a szokásos értelemben nincsen ilyen “szilárd” felszín, pontosabban az eseményhorizonthoz $f(r) = 1 - \frac{r_g}{r}$, akkor például töltött fekete lyuk közelében a részecskének gyorsulása az r radiális távolság függvényében: $a(r) = \frac{1}{2} \frac{df}{dr} / \sqrt{f}$, vagyis ha $r = r_g$, akkor a nevező nulla lesz, s a kifejezés végtelen nagyra válik. Hogyan tudnánk mégis észszerű meghatározást adni a felszíni gravitációnak? Tegyük fel, hogy a részecske egység-tömegű, így $a(r)$ valójában erő dimenziójú. Newton III. törvénye

alapján így ezt tekinthetjük olyan erőnek is, melyet egy megfigyelő fejt ki a részecskére, hogy r távolságra tartsa a fekete lyuk közepétől (mondjuk egy képzeletbeli tulajdonságokkal rendelkező ideális fonál végén). A megfigyelő távolodjon el egyre messzebb, határesetben végtelen távolságra. Mekkora lesz ekkor az $a_\infty(r)$ erő? Ha Δs -sel megemeli a fonalat (általa mért távolság) a megfigyelő, akkor $\Delta W_{inf} = a_\infty \Delta s$ munkát végez, a részecskénél is Δs -sel emelkedik a fonál, de a munka $\Delta W = a \Delta s$ (nagyon közeli kis környezetében a részecskének Lorentz-tér-idő vehe-tő). Valamilyen úton módon ez a munka sugárzássá alakul, s ezt felfogja a megfigyelő. Mivel vöröseltolódás is fellép, így a felfogott energia $\Delta E_\infty = \sqrt{f} \cdot a \Delta s$ Viszont az energiamegmaradást felhasználva (zártnak tekintjük a megfigyelő-részecske-fekete lyuk rendszert) $\Delta E_\infty = \Delta W_\infty$, tehát $a_\infty = \sqrt{f} \cdot a(r) = \frac{1}{2} \frac{df}{dr}$. Ha behelyettesítjük a gravitációs sugarat véges mennyiséget kapunk! Ezt most már nyugodtan elnevezhetjük felszíni gravitációnak: $\kappa = a_\infty(r_g) = \frac{1}{2} \frac{df}{dr}(r_g)$.

Schwarzschild fekete lyukra: $\kappa = \frac{r^4}{4GM}$. Tekintsünk a Földdel azonos tömegű lyukat, mely-nek nincsen töltése és nem forog. Ekkor $5 \cdot 10^{18} \frac{m}{s^2}$ gyorsulása lenne egy egység tömegű testnek a fekete lyuk felé radiális irányban. Vagy mondhatjuk ekkora számértékű Newtonban kifejezett erő-vel tudnánk az eseményhorizontnak megfelelő távolságban tartani (anélkül, hogy ránk számottevő hatással lenne a lyuk gravitációja). Akármilyen meglepő a fekete lyukak termodinamikai rendsze-reknek is tekinthetők, ha bizonyos mennyiségeket a jól ismert hőtani mennyiségekkel azonosítunk. Mi több, a termodinamika törvényeit is megfogalmazhatjuk. Megjegyezzük, hogy egy fekete lyuk tömege M (ami nem feltétlen a szokásos módon olyan egyszerű definiálni, de most fogadjuk el ezt a pontatlanságot), szögsebessége Ω , perdülete J , felszíne A és κ felszíni gravitációja közötti kapcsolat: $M = 2\Omega J + \frac{\kappa A}{4\pi}$. Ha a felszíni gravitációt a lyuk hőmérsékletének tekintjük az alábbi kifejezés segítségével: $T = \frac{h}{4\pi} \kappa$, ahol h a Planck-állandó. Egyszer már kiszámítottuk a Földé-vel azonos tömegű Schwarzschild fekete lyuk felszíni gravitációját. Ekkor ennek a hőmérséklete $\approx 3 \cdot 10^{-16} K$ Meglehetősen hideg, elképesztően közel van az abszolút nulla fokhoz. Mértékegysé-gek vizsgálatával felszínét pedig entrópiájaként $S = \frac{\pi}{2h} A$ kezelve a törvények így fogalmazhatóak meg:

Nulladik törvény:

Egy stacionárius fekete lyuk felszíni gravitációja állandó az egész eseményhorizonton. Hőtanban: termikus egyensúly esetén a test minden pontjában a hőmérséklete azonos.

Első törvény:

Ha kicsit megváltoznak a fekete lyuknak a paraméterei: $M \rightarrow M + \Delta M$, $J \rightarrow J + \Delta J$, $A \rightarrow A + \Delta A$, akkor $\Delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \Delta A + \Omega \Delta J$. Az energia-tömeg ekvivalencia alapján írhatjuk

$\Delta E = T \Delta S + \Omega \Delta J$, ahol a második tag egyfajta munkaként értelmezhető. Ha van a fekete lyuknak töltése, akkor egy $Q \cdot \phi(r)$ tagot írhatunk még a jobb oldalra, ahol $\phi(r)$ az elektrosztatikus potenciál.

Második törvény:

Ha a null energia feltétel teljesül, tehát tökéletes folyadékok esetén $p + \rho \geq 0$, akkor a fekete lyuk felszíne nem csökkenhet: $\Delta A \geq 0$.

Hőtanban ez az entrópiaváltozással azonos törvény.

Harmadik törvény:

Nem alakíthatunk ki zérus felszíni gravitációjú fekete lyukat. (A technikai részleteket mellőztük.) Tehát az abszolút nulla fok véges sok lépésben nem érhető el.

Megfigyelhetjük, hogy a fekete lyukak törvényei legalább formális szinten megfeleltethetők a termodinamika törvényeinek.

7. Merre tovább?

Mindenképpen sok mindent nem érintettünk, s amit igen azt is csak futólag. További lehetőségek még az űsrobbanás vizsgálata, féregjáratok, Alcubierre-féle meghajtás, Krasnikov-csövek, szuperfeladatok (supertasks) és megannyi fantasztikusabbnál fantasztikusabb téma. Tisztában kell lenni viszont azzal, hogy egy idő után egyszerűbb mind a diáknak, mind tanárának, hogy a diák jobban elmélyüljön a fizikában és a matematikában, hogy alaposabban és szakszerűbben dolgozhassa fel az adott témaköröket. Célunk csupán csak az volt, hogy egyfajta figyelemfelkeltő bevezetést adjunk, ami remélhetőleg a belső motivációra is serkentően hat.

Hivatkozások

- [1] E. Poisson: A Relativist's Toolkit, Cambridge University Press, 2004
- [2] L. D. Landau-E. M. Lifsic: Klasszikus erőterek, Tankönyvkiadó, 1976
- [3] L. D. Landau-E. M. Lifsic: Mechanika, Tankönyvkiadó, 1988
- [4] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, 1975
- [5] R. Penrose: Techniques of Differential Topology in Relativity, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Vol. 7, Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, 1972
- [6] Fizika, főszerkesztő: Holics László, Akadémiai Kiadó, 2009
- [7] Vermes Miklós: A relativitáselmélet, Gondolat Kiadó, 1958
- [8] Hawking, S. W. (1966). The Occurrence of Singularities in Cosmology. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 294(1439)511–
- [9] Hawking, S. W. (1966). The Occurrence of Singularities in Cosmology. II. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 295(1443), 490–493.
- [10] Hawking, S. W., & Penrose, R. (1970). The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 314(1519)
- [11] R. M. Wald: General Relativity, University of Chicago Press, 1984
- [12] King, A. (2015). How big can a black hole grow? Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 456(1), L109–L112. doi:10.1093/mnrasl/slv186