



Neumann János Egyetem
Műszaki és Informatikai
Kar

Síkbeli alakzatok approximációja véletlen sokszögekkel: elmélet és alkalmazások

Approximation of Planar Shapes with Random Polygons: Theory and Applications

Tóth Levente
Z2BD50

Dr. Osztényi József főiskolai docens

2024

Tartalomjegyzék

BEVEZETÉS	4
1. DIGITÁLIS KÉPALKOTÁS A JÁRMŰIPARBAN	5
1.1. MIÉRT VAN SZÜKSÉGÜNK DIGITÁLIS KÉPALKOTÁSI MÓDSZEREKRE A JÁRMŰIPARBAN?	5
1.1.1. Pontos felületvizsgálat és minőség-ellenőrzés.....	5
1.1.2. Gyártási folyamatok optimalizálása.....	5
1.1.3. Autonóm rendszerek és vezetési technológiák fejlesztése.....	6
1.1.4. Digitális ikrek	6
1.2. ESZKÖZÖK A JÁRMŰIPARI DIGITÁLIS KÉPALKOTÁSHOZ	6
1.2.1. Time-of-Flight (ToF) kamerák	6
1.2.2. LIDAR (Light Detection and Ranging) rendszerek	7
1.2.3. Sztereó kamerák	7
2. ELMÉLETI HÁTTÉR	8
2.1. PARAMÉTERES GÖRBÉK.....	8
2.1.1. Körvonal paraméterezése	8
2.1.2. Ellipszis paraméterezése	8
2.1.3. Epicikloid paraméterezése	9
2.1.4. Hipocikloid paraméterezése	10
2.2. VÉLETLEN SOKSZÖGEK	10
2.3. VIZSGÁLT GEOMETRIAI JELLEMZŐK	11
2.3.1. Kerület	11
2.3.2. Terület.....	11
2.3.3. Átmérő.....	12
2.4. A KÖZELÍTŐ SOKSZÖGEK ADOTT GEOMETRIAI JELLEMZŐINEK KISZÁMÍTÁSA	12
2.4.1. Kerület	12
2.4.2. Terület.....	12
2.4.3. Átmérő.....	12
2.5. VIZSGÁLT ELMÉLETI ELOSZLÁSOK.....	13
2.5.1. Béta eloszlás	13
2.5.2. Log-normál eloszlás	13
2.5.3. Weibull eloszlás	13
2.5.4. Gumbel eloszlás	13
2.5.5. Normális eloszlás	14
3. MATEMATIKAI SZÁMÍTÁSOK	15
3.1. A KERÜLET KISZÁMÍTÁSA	15
3.1.1. Egység sugarú kör lap kerülete.....	15
3.1.2. Adott paraméterű ellipszis kerülete.....	15
3.1.3. Adott paraméterű epicikloid kerülete.....	15
3.1.4. Adott paraméterű hipocikloid kerülete.....	16
3.2. A KERÜLET VÁRHATÓ ÉRTÉKÉNEK KISZÁMÍTÁSA	16
3.2.1. Körbe írt véletlen sokszög kerülete	17
3.2.2. Körbe írt sokszög kerületének várható értéke	17
3.3. A KERÜLET VÁRHATÓ ÉRTÉKÉNEK ASZIMPTOTIKUS VISELKEDÉSE	18
3.4. A TERÜLET KISZÁMÍTÁSA	18
3.4.1. Egység sugarú kör lap területe	18
3.4.2. Adott paraméterű ellipszis területe	18
3.4.3. Adott paraméterű epicikloid területe	18
3.4.4. Adott paraméterű hipocikloid területe	19
3.5. A TERÜLET VÁRHATÓ ÉRTÉKÉNEK KISZÁMÍTÁSA	19
3.5.1. Körbe írt véletlen sokszög területe	20
3.5.2. Körbe írt sokszög területének várható értéke.....	20

3.6.	A TERÜLET VÁRHATÓ ÉRTÉKÉNEK ASZIMPTOTIKUS VISELKEDÉSE	21
4.	SZIMULÁCIÓS EREDMÉNYEK	22
4.1.	A VÁRHATÓ ÉRTÉK BECSLÉSÉNEK VIZSGÁLATA	22
4.1.1.	A körbe írt véletlen sokszög	23
4.1.2.	Az ellipszisbe írt véletlen sokszög	24
4.1.3.	Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög	25
4.1.4.	A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög	26
4.2.	ELOSZLÁSOK VIZSGÁLATA	27
4.2.1.	A körbe írt véletlen sokszög kerülete és területe	28
4.2.2.	Az ellipszisbe írt véletlen sokszög kerülete és területe	29
4.2.3.	Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög kerülete és területe	30
4.2.4.	A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög kerülete és területe	31
	ÖSSZEFOGLALÁS	32
	SUMMARY	33
	ÁBRAJEGYZÉK	34
	IRODALOMJEGYZÉK	35
	MELLÉKLET	37

Bevezetés

A dolgozat témája a síkbeli alakzatok approximációjának elméleti és gyakorlati módszereinek vizsgálata, a sík alakzat geometriai jellemzőinek (kerület, terület, átmérő) számítása véletlenszerű hozzáírt poligonokkal való közelítéssel. Ez a probléma kulcsfontosságú a számítógépes látás és a 3D felületrekonstrukció területén, ahol különböző „3D-Scanner” kamerák (pl.: Time-of-Flight (ToF), LIDAR vagy sztereó kamerák) által gyűjtött pontfelhők adatait használják valós felületek modellezésére.

A tanulmány kiinduló pontja Claude Bélisle [2] cikke, melyben az aszimptotikus viselkedését vizsgálja egy körlap véletlen sokszöggel való közelítésének. A gyakorlatban fontos látnunk, hogy konkrét n csúcsú véletlen sokszöggel való közelítés mennyire „jó”. Az általunk végzett kutatás két fő részből állt. Elsőként elméleti matematikai módszerekkel vizsgáltuk a körlapba írt véletlen poligonok területének és kerületének várható értékeit. Ehhez az egyetemi matematika kurzusokon tanult módszereket, például háromszögelést és integrálást használtunk. A második lépésben szimulációkat végeztünk az általunk írt programokkal, hogy jobban megértsük, hogyan működik a véletlen poligonokkal való közelítés. A szimulációk segítségével statisztikai vizsgálatokat végeztünk az eredmények eloszlásáról, átlagáról és szórásáról. A kapott eredmények által pontos képet kaptunk az approximáció megbízhatóságáról.

A dolgozatban ezen felül szó esik a gyakorlatban való használhatóságáról a poligonális approximációnak, különösen a 3D pontfelhők feldolgozásában. Bemutatunk néhány eszközt a pontfelhők elkészítésének folyamatában. A gépi látás, az autonóm rendszerek és a minőség ellenőrzési folyamatok során elengedhetetlen a felületek konvex sokszögekkel való közelítése. Ez a matematikai lépés teszi lehetővé összetett, bonyolultabb geometriák gyors, hatékony és pontos vizsgálatát.

A következő fejezetekben leírunk néhány felhasználási lehetőséget a gyakorlatban. Bemutatjuk az alkalmazott matematikai módszereket és az elvégzett szimulációk eredményeit.

1. Digitális képalkotás a járműiparban

A valós idejű, 3-dimenziós (3D) leképezési módszerek elterjedésének számos jelentős alkalmazása van különböző területeken. Ha ezt kombináljuk mélység szenzorokkal a távjelenléti rendszereknek egy új generációját hozhatjuk létre. Ez a kombináció lehetővé teszi, hogy interakcióba lépjünk távoli emberekkel, eszközökkel a saját helyünkről, miközben azok 3D-s virtuális megjelenítését látjuk. Alább elmondjuk, hogy miért, hogyan és milyen eszközökkel hasznosul ez a járműiparban [1].

1.1. Miért van szükségünk digitális képalkotási módszerekre a járműiparban?

A digitális képalkotási technológiák elterjedése alapvető változásokat hozott a járműipar különböző területein, beleértve a gyártási, minőségellenőrzési, tervezési, valamint biztonsági rendszereket. Ezek a módszerek a hagyományos mérnöki megközelítéseket egészítik ki, lehetővé téve a pontosabb, gyorsabb és hatékonyabb alkatrészvizsgálatot, továbbá hozzájárul az autonóm rendszerek fejlődéséhez is. A járműiparban a legfontosabb szempontok: a hibák minimalizálása, a termelési sebesség növelése és a költségek csökkentése. Ezen célok elérésében a pontos és gyors digitális képalkotási módszerek kulcsszerepet játszanak.

1.1.1. Pontos felületvizsgálat és minőség-ellenőrzés

A járművek alkatrészei gyakran bonyolult geometriákat tartalmaznak, amelyeket a hagyományos mérési módszerekkel nem vagyunk képesek megfelelően ellenőrizni. A digitális képalkotási módszerek, mint például a 3D felületi rekonstrukció, lehetővé teszik az összetett felületek pontos vizsgálatát különböző 3D szkennerekkel (pl.: kék fényű 3D szkennerek), mely megjeleníti a tárgyra vetített fényt, és egy kamera rögzíti a szkennelt tárgy felületéről visszavert adatokat. Az ilyen rendszerek gyorsan és pontosan rögzítik a tárgyak méreteit, formáját és felületi hibáit, így jelentős mértékben hozzájárulnak a minőségellenőrzés hatékonyságához [4].

1.1.2. Gyártási folyamatok optimalizálása

A digitális képalkotási módszerek segítenek optimalizálni a járműgyártási folyamatokat azáltal, hogy pontos adatokat szolgáltatnak a termékek geometriájáról, és lehetővé teszik az alkatrészek illeszkedésének valós idejű ellenőrzését. Az iparban használt 3D szkennelési technológiák - amelyek pontfelhő alapú felületvizsgálatot végeznek – céljai közé tartozik az

is, hogy előre detektálják a felületi, - illesztési - vagy anyaghibákat, így csökkentve a selejt mennyiségét és növelve a termelékenységet.

1.1.3. Autonóm rendszerek és vezetési technológiák fejlesztése

A digitális képalkotási technológiák kiemelt szerepet játszanak az autonóm járművek fejlesztésében is. A számítógépes látás és a 3D kamerák kombinációjával az autonóm járművek képesek valós idejű adatokat szerezni környezetükről, így megbízhatóbb és biztonságosabb döntéseket hozhatnak. Az érzékelők által gyűjtött pontfelhők lehetővé teszik a jármű környezetének részletes leképezését, segítve az akadályok és a forgalomban résztvevők felismerését és a jobb manőverezést.

1.1.4. Digitális ikrek

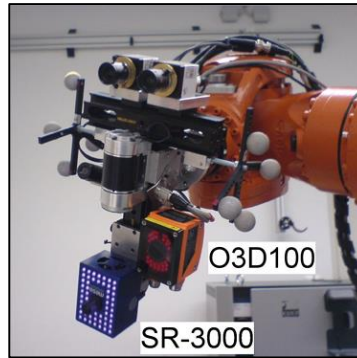
A digitális iker (Digital Twin, DT) technológiai fejlesztéseit számos helyen alkalmazzák a gyártásban és járműiparban. Lényege, hogy olyan 3D modellt hozunk létre, mely dinamikus módon képes követni a „fizikai objektumot”, azaz a tárgyon lévő szenzorok által gyűjtött adatokat valós időben jeleníti meg, ezáltal képes szimulálni a tárgy viselkedését különböző szituációkban. Így akár saját autónk viselkedését is le tudnánk szimulálni adott helyzetekben. A DT egy közvetett alkalmazása a felületek approximációjának [3].

1.2. Eszközök a járműipari digitális képalkotáshoz

A képalkotási módszerek három legelterjedtebb és legmegbízhatóbb eszköze a Time-of-Flight (ToF) kamerák, a LIDAR rendszerek, valamint a sztereó kamerák. Ezek a technológiák lehetővé teszik a járművek és alkatrészeik pontos térbeli leképezését és digitális modellezését. Mindezt valós idejű adatokkal, megbízható eredményekkel és nagy felbontású pontfelhők használatával [9].

1.2.1. Time-of-Flight (ToF) kamerák

A ToF kamerák egyre szélesebb körben elterjedtek a járműiparban, különösen a minőségellenőrzésben és a felületi rekonstrukcióban (1. ábra). A ToF technológia fényimpulzusokat küld az objektumra, majd a visszaverődő fény mérésével határozza meg az adott pont távolságát, gyors és viszonylag pontos adatokat eredményezve. Sztereó kamerával vegyítve tovább növelhetjük a pontosságot [5] [6].



1. ábra: Kísérleti beállítás a DLR 3D-Modeller számára ToF kamerákkal [9]

1.2.2. LIDAR (Light Detection and Ranging) rendszerek

A LIDAR technológia szintén széles körben használt a járműiparban, különösen az autonóm járművek környezeti érzékeléséhez. A járműben elhelyezett szenzor lézersugarat bocsát ki a földfelszín felé, és méri a visszaverődés idejét, amiből távolságot számol (lézertáv mérő). A LIDAR rendszerek ezek alapján építenek fel egy pontfelhőt, amely a környezet részletes 3D modelljét adja vissza [10].

1.2.3. Sztereó kamerák

A sztereó kamerák az emberi látáshoz nagyon hasonlóan működnek. Két különböző azonos síkban eltolt, vagy akár egymáshoz képest el is fordított képet rögzítenek és háromszögeléssel 3D-s rekonstrukciót állítanak elő. Rendkívül praktikus és költséghatékony módszer. Gyakran kombinálják őket ToF szenzorokkal a pontosság növelése érdekében [7].

2. Elméleti háttér

Szimulációs és elméleti vizsgálataink során egy körlapnak, illetve a deformáltjainak véletlen sokszögekkel való közelítését néztük. Nevezetesen a közelítő sokszög területének, kerületének és átmérőjének viselkedését az eredeti alakzat területéhez, kerületéhez és átmérőjéhez képest. Ennek tanulmányozásához jelen fejezetben összeszedjük a szükséges elméleti ismereteket.

2.1. Paraméteres görbék

A körlap mellett azon deformáltjait vizsgáltuk, melyek határa egy paraméteres görbéként megadható.

Síkgörbén egy $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos leképezés képét értjük. A $\vec{r}$ leképezését pedig a görbe paraméterezésének nevezzük. A $\vec{r}$ leképezés adott $\vec{r}(t)$ értékét a bázisvektorok lineáris kombinációjaként felírhatjuk, azaz:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2, \quad (1)$$

ahol, az $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ leképezések az $\vec{r}$ leképezés koordinátafüggvénye.

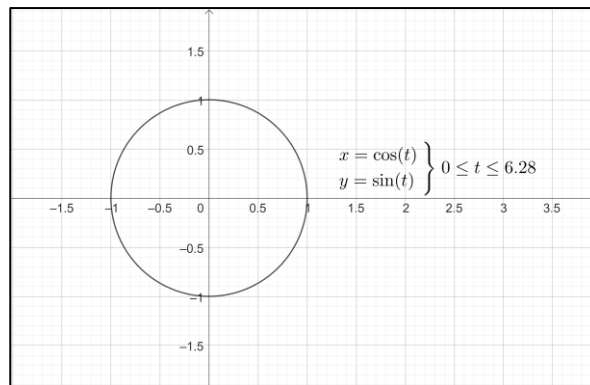
2.1.1. Körvonal paraméterezése

Az origó középpontú, R sugarú körvonal standard paraméterezése:

$$\vec{r}(t) = R * \cos t \vec{e}_1 + R * \sin t \vec{e}_2 \quad (2)$$

Az általunk vizsgált C_0 körlap határának paraméterezése (2. ábra):

$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \quad (3)$$



2. ábra: Origó középpontú, egységsugarú körvonal

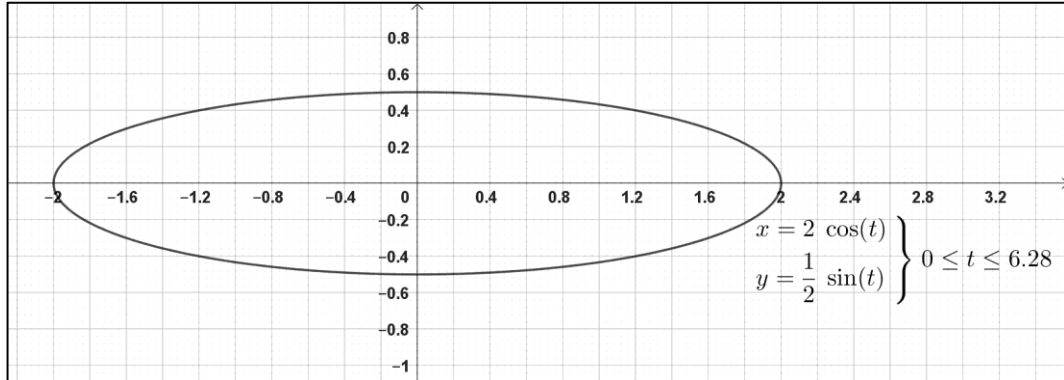
2.1.2. Ellipszis paraméterezése

Az origó középpontú, (a, b) fél kis- és nagytengetű ellipszis standard paraméterezése:

$$\vec{r}(t) = a * \cos t \vec{e}_1 + b * \sin t \vec{e}_2 \quad (4)$$

Az általunk tekintett C_1 ellipszis határának paraméterezése (3. ábra):

$$\vec{r}(t) = 2 * \cos t \vec{e}_1 + 0.5 * \sin t \vec{e}_2 \quad (5)$$



3. ábra: Origó középpontú, $(2, 0.5)$ egység hosszúságú fél kis- és nagytengelyű ellipszis

2.1.3. Epicikloid paraméterezése

Az origó középpontú, (a, b) paraméterű epicikloid standard paraméterezése:

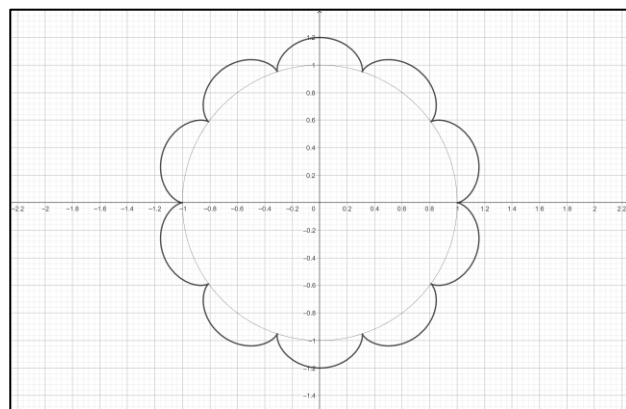
(6)

$$\vec{r}(t) = \left((a + b) * \cos(t) - a * \cos\left(\frac{a + b}{a} t\right) \right) \vec{e}_1 + \left((a + b) * \sin(t) - a * \sin\left(\frac{a + b}{a} t\right) \right) \vec{e}_2$$

Az általunk elemzett C_2 epicikloid határának paraméterezése (4. ábra):

(7)

$$\vec{r}(t) = (1.1 * \cos(t) - 0.1 * \cos(11t)) \vec{e}_1 + (1.1 * \sin(t) - 0.1 * \sin(11t)) \vec{e}_2$$



4. ábra: Origó középpontú, $(0.1, 1)$ egység hosszúságú paraméterű epicikloid

2.1.4. Hipocikloid paraméterezése

Az origó középpontú, (a, b) paraméterű hipocikloid standard paraméterezése:

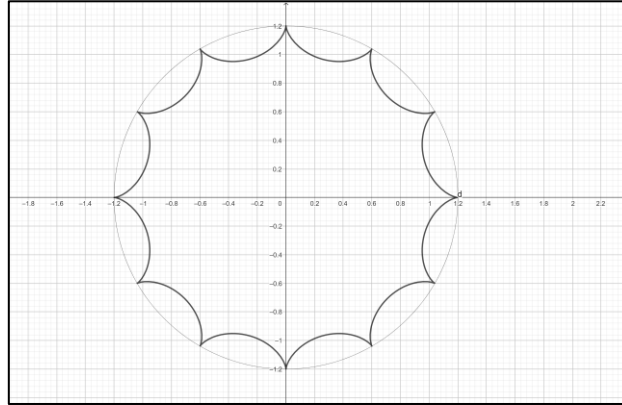
(8)

$$\vec{r}(t) = \left((b - a) * \cos(t) + a * \cos\left(\frac{b - a}{a}t\right) \right) \vec{e}_1 + \left((b - a) * \sin(t) - a * \sin\left(\frac{b - a}{a}t\right) \right) \vec{e}_2$$

Az általunk vizsgált C_3 hipocikloid határának paraméterezése (5. ábra):

(9)

$$\vec{r}(t) = (1.1 * \cos(t) + 0.1 * \cos(11t))\vec{e}_1 + (1.1 * \sin(t) - 0.1 * \sin(11t))\vec{e}_2$$

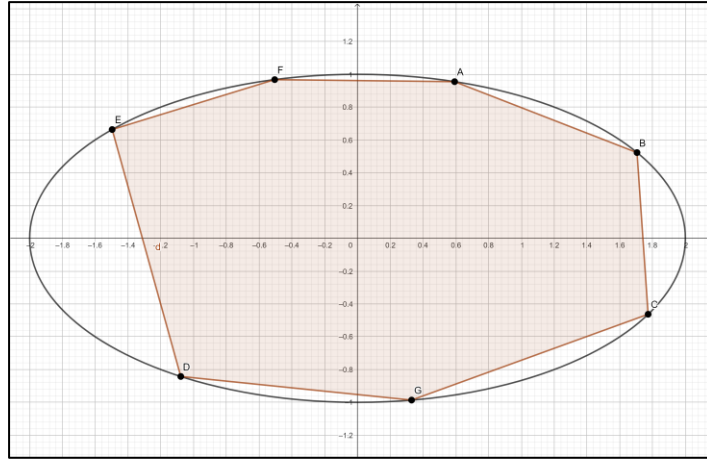


5. ábra: Origó középpontú, $(0.1, 1.2)$ egység hosszúságú paraméterű hipocikloid

2.2. Véletlen sokszögek

Az általunk vizsgált C síkbeli alakzatok véletlen sokszögekkel való közelítéséhez a Rolf Schneider [8] cikkében található matematikai modell alábbi módosítását vesszük.

Legyen C egy olyan síkbeli alakzat, mely belsejében tartalmazza az origót és határának paraméterezése legyen $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Vegyünk $t_1, t_2, \dots, t_n$ egyenletes eloszlás szerinti véletlen számokat az I intervallumból. Ekkor az $O, \vec{r}(t_i), \vec{r}(t_{i+1})$ síkbeli ponthármak konvex burkának $i = 1, \dots, n$ -re vett egyesítését a C véletlen közelítő sokszögének nevezzük, amit $\mathcal{P}_n$ -nel jelölünk (6. ábra).



6. ábra: 7 csúcsú véletlen sokszög

Abban az esetben, amikor a C alakzat konvex, $\mathcal{P}_n$ egy beírt sokszöge C -nek.

2.3. Vizsgált geometriai jellemzők

A szimulációs és elméleti számításaink során a C alakzat alábbi geometriai jellemzőit tanulmányoztuk. Legyen a C síkbeli alakzat határának paraméterezése $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

2.3.1. Kerület

C kerületét az alábbi jól ismert formulával tudjuk kiszámolni:

$$K = \int_c^d |\vec{r}'(t)| dt \quad (10)$$

ahol c, d az I intervallum két végpontja.

2.3.2. Terület

C területét az alábbi formula segítségével számolhatjuk ki, amit a Green-tételt speciális esetben alkalmazva kapunk:

$$T = \frac{1}{2} \int_c^d x(t) * y'(t) - y(t) * x'(t) dt \quad (11)$$

ahol c, d az I intervallum két végpontja, az x, y leképezések az $\vec{r}$ paraméterezés koordinátafüggvényei.

2.3.3. Átmérő

A C síkbeli alakzat átmérőjén tetszőleges két pontjának a távolságának a maximumát értjük. Formulával kifejezve:

(12)

$$D = \max\{\sqrt{(x(t_1) - x(t_2))^2 + (y(t_1) - y(t_2))^2} \mid t_1, t_2 \in I\}$$

ahol x, y leképezések az $\vec{r}$ paraméterezés koordinátafüggvényei.

2.4. A közelítő sokszögek adott geometriai jellemzőinek kiszámítása

Az előző alfejezetben felsorolt geometriai jellemzőket a szimuláció során a $\mathcal{P}_n$ közelítő sokszögre is kiszámoljuk. Ehhez megadjuk a megfelelő formulákat, amikben a $P_1, P_2, \dots, P_n$ legyenek $\mathcal{P}_n$ sokszög csúcsai.

2.4.1. Kerület

A $\mathcal{P}_n$ sokszög kerülete:

(13)

$$K(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n |\overline{P_i P_{i+1}}|$$

2.4.2. Terület

A $\mathcal{P}_n$ sokszög területe kiszámítható az alábbi formulával:

(14)

$$T(\mathcal{P}_n) = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times \vec{p}_{i+1} \right|$$

ahol $\vec{p}_i$ a P_i pontba mutató helyvektor. Ez a formula akkor is érvényes, ha $\mathcal{P}_n$ sokszög nem tartalmazza belső pontként az origót.

2.4.3. Átmérő

A $\mathcal{P}_n$ sokszög átmérőjén ugyancsak tetszőleges két pontjának a távolságának a maximumát értjük, amit az alábbi formulával fogunk kiszámolni:

(15)

$$D(\mathcal{P}_n) = \max\{|\overline{P_i P_j}| \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

2.5. Vizsgált elméleti eloszlások

Adott C alakzat közelítéséhez használt $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög kerülete és területe, mint véletlen mennyiség eloszlását tanulmányozzuk a 4.2. fejezetben. Az összehasonlító vizsgálat során az alábbi nevezetes eloszlásokat tekintettük:

2.5.1. Béta eloszlás

Az X véletlen változó Béta eloszlású, ha sűrűség függvénye:

(16)

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

ahol: $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ és Γ a Gamma függvény.

2.5.2. Log-normál eloszlás

Az X véletlen változó Log-normál eloszlású, ha sűrűség függvénye:

(17)

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

2.5.3. Weibull eloszlás

Az X véletlen változó Weibull eloszlású, ha sűrűség függvénye:

(18)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

2.5.4. Gumbel eloszlás

Az X véletlen változó Gumbel eloszlású, ha sűrűség függvénye:

(19)

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-(z+e^{-z})}$$

ahol: $z = \frac{x-\mu}{\beta}$

2.5.5. Normális eloszlás

Az X véletlen változó Normális eloszlású, ha sűrűség függvénye:

(20)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

3. Matematikai számítások

Először kiszámoltuk az egység sugarú kör lap és annak 2.1-es pontban megadott deformáltjainak a kerületét, területét és átmérőjét az általunk választott paraméter értékekre. Majd elméleti számításokat végeztünk a 2.2-es pontban definiált $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög kerületének és területének várható értékére, amikor a C alakzatunk az origó középpontú, egység sugarú kör lap. Jelen fejezetben ezen számításokat részletezzük.

3.1. A kerület kiszámítása

A lentebb felírt határozott integrálokat az Octave komputer algebrai programmal számíttattuk ki.

3.1.1. Egység sugarú kör lap kerülete

(21)

$$K(C_0) = 2\pi,$$

ahol C_0 az egység sugarú kör lap.

3.1.2. Adott paraméterű ellipszis kerülete

Vegyük az (5) paraméterezést, ennek deriváltja:

$$\vec{r}'(t) = -2 * \sin t \vec{e}_1 + 0.5 * \cos t \vec{e}_2$$

aminek hossza:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4 * \sin^2(t) + \frac{\cos^2(t)}{4}}$$

A (10) összefüggésnek megfelelően ezt integrálva kapjuk a kerületet.

(22)

$$K(C_1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 * \sin^2(t) + \frac{\cos^2(t)}{4}} dt = 8.5784$$

ahol C_1 a $(2, \frac{1}{2})$ paraméterű ellipszis.

3.1.3. Adott paraméterű epicikloid kerülete

Vegyük az (7) paraméterezést, ennek deriváltja:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) = & (-1.1 * \sin(t) + 1.1 * \sin(11t))\vec{e}_1 + \\ & (1.1\cos - 1.1 * \cos(11t))\vec{e}_2 \end{aligned}$$

aminek hosszára trigonometrikus azonosságokat alkalmazva az alábbi formulát kapjuk:

$$|\vec{r}'(t)| = \frac{11 * |\sin(5t)|}{5}$$

A (10) összefüggésnek megfelelően ezt integrálva kapjuk a kerületet.

(23)

$$K(C_2) = \int_0^{2\pi} \frac{11 * |\sin(5t)|}{5} dt = 8.8$$

ahol C_2 a $(0.1, 1)$ paraméterű epicikloid.

3.1.4. Adott paraméterű hipocikloid kerülete

Vegyük az (9) paraméterezést, ennek deriváltja:

$$\vec{r}'(t) = (-1.1 * \sin(t) - 1.1 * \sin(11t))\vec{e}_1 + (1.1 * \cos(t) - 1.1 * \cos(11t))\vec{e}_2$$

aminek hosszára trigonometrikus azonosságokat alkalmazva az alábbi formulát kapjuk:

$$|\vec{r}'(t)| = \frac{11 * \sqrt{2 - 2 * \cos(12t)}}{10}$$

A (10) összefüggésnek megfelelően ezt integrálva kapjuk a kerületet.

(24)

$$K(C_3) = \int_0^{2\pi} \frac{11 * \sqrt{2 - 2 * \cos(12 * t)}}{10} dt = 8.7988$$

ahol C_3 a $(0.1, 1.2)$ paraméterű hipocikloid.

3.2. A kerület várható értékének kiszámítása

A 2.2-es pontban definiált $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög kerületének, mint véletlen mennyiség várható értékét a következőképpen is kiszámíthatjuk:

(25)

$$E(K(\mathcal{P}_n)) = \frac{1}{|I|^n} \int_D \dots \int K(\mathcal{P}_n) dt_1 \dots dt_n$$

ahol $D = I^n$ és $|I|$ az I intervallum hosszát jelöli. Ugyanis a fenti többváltozós integrál a $K(\mathcal{P}_n)$ átlagos értékét adja meg a D tartományon, ami megegyezik $K(\mathcal{P}_n)$ várható értékével, ha a t_i -ket egyenletes eloszlás szerint választjuk.

Egy adott $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög kerületét a (13) összefüggésből kapjuk meg, amit az általunk vizsgált C körlapra az alábbiakban részletezünk ki.

3.2.1. Körbe írt véletlen sokszög kerülete

Vegyük a C_0 alakzatot, aminek a határának a paraméterezése a (3) összefüggés.

Ekkor:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= \vec{r}(t_i) = \cos t_i \vec{e}_1 + \sin t_i \vec{e}_2 \\ \vec{p}_{i+1} &= \vec{r}(t_{i+1}) = \cos t_{i+1} \vec{e}_1 + \sin t_{i+1} \vec{e}_2\end{aligned}$$

vektorok a P_i, P_{i+1} pontokba mutató helyvektorok. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{P_i P_{i+1}}| &= |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)| = \sqrt{(\cos(t_{i+1}) - \cos(t_i))^2 + (\sin(t_{i+1}) - \sin(t_i))^2} \\ &= \sqrt{4 * \left(\sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)\right)^2} = 2 * \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)\end{aligned}$$

Így:

(26)

$$K(\mathcal{P}_n) = 2 * \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)$$

Az origó középpontú, R sugarú körlapra a kerület ennek az R -szerese, azaz:

(27)

$$K(\mathcal{P}_n) = 2 * R * \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)$$

3.2.2. Körbe írt sokszög kerületének várható értéke

A (25) formulába a (26) képletet behelyettesítve a következő összefüggést kapjuk:

(28)

$$E(K(\mathcal{P}_n)) = \frac{1}{|I|^n} \int \dots \int_D 2 * \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) dt_1 \dots dt_n$$

Ennek a többszörös integrálnak az értékét ugyancsak Octave program segítségével számoltuk ki $n = 4 \dots 32$ -re. A kapott eredményeket a 4. fejezetbeli szimulációs eredményekkel együtt ábrázoljuk.

3.3. A terület várható értékének aszimptotikus viselkedése

Claude Bélisle által [2] a $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög területére az alábbi aszimptotikus érték került meghatározásra:

(29)

$$E(K(\mathcal{P}_n)) = 2\pi - \frac{2\pi^3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$$

A $K(\mathcal{P}_n) = 2\pi - \frac{2\pi^3}{n^2}$ sorozatot is a 4. fejezetbeli számítási eredményekkel együtt ábrázoljuk.

3.4. A terület kiszámítása

Az alábbi határozott integrálokat ismét az Octave komputer algebrai programmal számíttattuk ki.

3.4.1. Egység sugarú körlap területe

(30)

$$T(C_0) = \pi,$$

ahol C_0 az egység sugarú körlap.

3.4.2. Adott paraméterű ellipszis területe

Vegyük ismét az (5) paraméterezést, ennek deriváltja:

$$\vec{r}'(t) = -2 * \sin t \vec{e}_1 + 0.5 * \cos t \vec{e}_2$$

akkor

$$x(t) * y'(t) - y(t) * x'(t) = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

Így a terület a (11) képlet szerint:

(31)

$$T(C_1) = \pi$$

ahol C_1 a $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ paraméterű ellipszis.

3.4.3. Adott paraméterű epicikloid területe

Vegyük a (7) paraméterezést, ennek deriváltja:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) = & (-1.1 * \sin(t) + 1.1 * \sin(11t))\vec{e}_1 + \\ & (1.1\cos - 1.1 * \cos(11t))\vec{e}_2 \end{aligned}$$

akkor a (11) formulában szereplő integrandus:

$$x(t) * y'(t) - y(t) * x'(t) = \frac{66 * \sin^2(5 * t)}{25}$$

Így a terület:

(32)

$$T(C_2) = \int_0^{2\pi} \frac{33 * \sin^2(5 * t)}{25} dt = 4.1469$$

ahol C_2 a $(0.1, 1)$ paraméterű epicikloid.

3.4.4. Adott paraméterű hipocikloid területe

Vegyük a (9) paraméterezést, ennek deriváltja:

$$\vec{r}'(t) = (-1.1 * \sin(t) - 1.1 * \sin(11t))\vec{e}_1 + (1.1 * \cos(t) - 1.1 * \cos(11t))\vec{e}_2$$

ekkor a (11) formulában szereplő integrandus:

$$x(t) * y'(t) - y(t) * x'(t) = \frac{11 * (1 - \cos(12 * t))}{10}$$

Így a terület:

(33)

$$T(C_3) = \int_0^{2\pi} \frac{11 * (1 - \cos(12 * t))}{20} dt = 3.4558$$

ahol C_3 a $(0.1, 1.2)$ paraméterű hipocikloid.

3.5. A terület várható értékének kiszámítása

A 2.2-es pontban definiált $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög területének, mint véletlen mennyiség várható értékét a következőképpen is számíthatjuk:

(34)

$$E(T(\mathcal{P}_n)) = \frac{1}{|I|^n} \int_D \dots \int T(\mathcal{P}_n) dt_1 \dots dt_n$$

ahol $D = I^n$ és $|I|$ az I intervallum hosszát jelöli. Ugyanis a fenti többváltozós integrál a $T(\mathcal{P}_n)$ átlagos értékét adja meg a D tartományon, ami megegyezik $T(\mathcal{P}_n)$ várható értékével, ha a t_i -ket egyenletes eloszlás szerint választjuk.

Egy adott $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög területét a (14) összefüggésből kapjuk meg, amit az általunk vizsgált C_0 körlapra részletezünk.

3.5.1. Körbe írt véletlen sokszög területe

Vegyük a C_0 alakzatot, aminek a határának a paraméterezése a (3) összefüggés.

Ekkor:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= \vec{r}(t_i) = \cos t_i \vec{e}_1 + \sin t_i \vec{e}_2 \\ \vec{p}_{i+1} &= \vec{r}(t_{i+1}) = \cos t_{i+1} \vec{e}_1 + \sin t_{i+1} \vec{e}_2 \\ \vec{p}_i \times \vec{p}_{i+1} &= 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + (\cos t_i * \sin t_{i+1} - \sin t_i * \cos t_{i+1})\vec{e}_3 \\ &= 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \sin(t_{i+1} - t_i)\vec{e}_3\end{aligned}$$

Így:

(35)

$$T(\mathcal{P}_n) = \frac{1}{2} * \left| \sum_{i=1}^n \sin(t_{i+1} - t_i) \right|$$

Az origó középpontú, R sugarú körlapra a terület ennek az R^2 -szerese, azaz:

(36)

$$T(\mathcal{P}_n) = \frac{1}{2} * R^2 * \left| \sum_{i=1}^n \sin(t_{i+1} - t_i) \right|$$

3.5.2. Körbe írt sokszög területének várható értéke

A (34) formulába a (35) képletet behelyettesítve a következő összefüggést kapjuk:

(37)

$$E(T(\mathcal{P}_n)) = \frac{1}{|I|^n} \int \dots \int_D \frac{1}{2} * \left| \sum_{i=1}^n \sin(t_{i+1} - t_i) \right| dt_1 \dots dt_n$$

Ennek a többszörös integrálnak az értékét szintén az Octave program segítségével számoltuk ki $n = 4 \dots 32$ -re. Az eredményeket a 4. fejezetbeli szimulációs eredményekkel együtt ábrázoljuk.

3.6. A terület várható értékének aszimptotikus viselkedése

Claude Bélisle [2] által a $\mathcal{P}_n$ véletlen sokszög területére az alábbi aszimptotikus érték került meghatározásra:

(38)

$$E(T(\mathcal{P}_n)) = \pi - \frac{4\pi^3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A $T(\mathcal{P}_n) = \pi - \frac{4\pi^3}{n^2}$ sorozatot a 4. fejezetbeli számítási eredményekkel együtt ábrázoljuk.

4. Szimulációs eredmények

Python programozási nyelven (melyet az Anaconda disztribúció részeként elérhető Spyder integrált fejlesztői környezetből (IDE) futtattunk) alkottunk egy programot, mely generál n db véletlen pontot a $[0; 2\pi]$ -on, majd az ezen pontok által meghatározott $\mathcal{P}_n$ sokszög kerületét, területét és átmérőjét számolja ki a megadott paraméteres görbére. Ezt elvégzi k -szor (mi $k = 1000$, majd $k = 1.000.000$ iterációval futtattuk a szimulációt). Ezeket egy-egy táblázatba gyűjtjük.

4.1. A várható érték becslésének vizsgálata

Ezen szimulált adatokból és a fentebb kiszámolt értékekből készítettük el az alábbi diagramokat a vizsgálatunkhoz, mely eredményeket következők szerint ábrázoltuk:

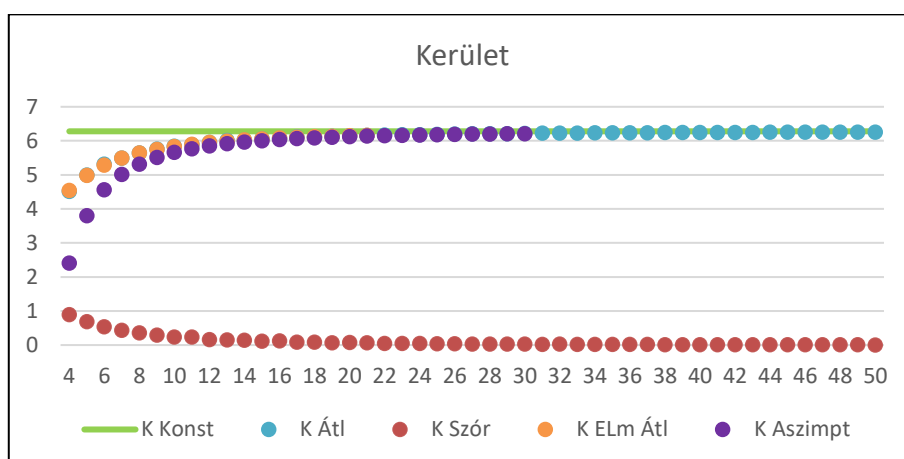
- a zöld vonal: a C alakzat tényleges kerület, terület és átmérő (K/T/D) értéke;
- a kék pontok: a véletlenül generált $\mathcal{P}_n$ sokszögek K/T/D értékeinek átlaga 1000 iteráció esetén;
- a narancssárga pontok: $\mathcal{P}_n$ sokszögek K/T/D értékeinek várható értékei (körlap esetén);
- a lila pontok: $\mathcal{P}_n$ sokszögek K/T/D értékeinek várható értékeinek aszimptotikus értékei (körlap esetén);
- a piros pontok: a véletlenül generált $\mathcal{P}_n$ sokszögek K/T/D értékeinek szórása 1000 iteráció esetén.

A lenti diagramok azt mutatják, hogy a kör (7. ábra) és ellipszis (10. ábra) esetén a közelítő sokszögek kerületeinek átlaga már viszonylag kis n -ekre ($n \sim 30$) a tényleges értéktől csak 1%-ban tér el. Az epicikloid (13. ábra) és hipocikloid (16. ábra) esetén ehhez $n \sim 200$ csúcsú poligonra van szükség.

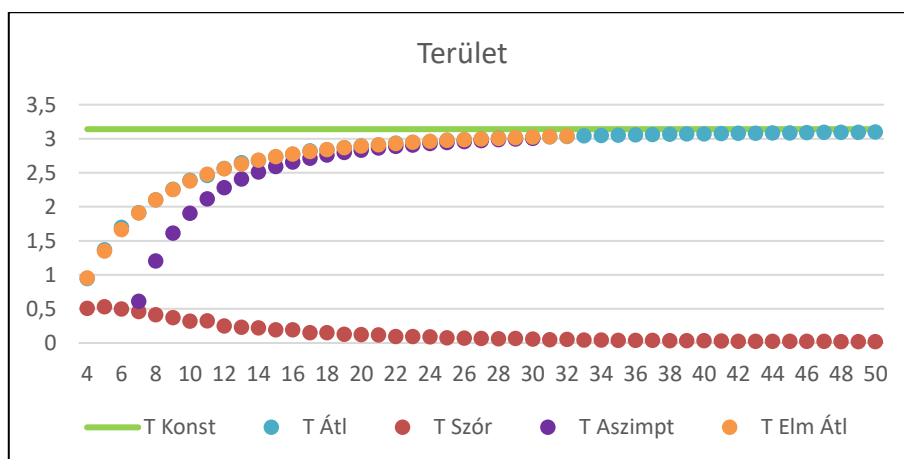
A területet vizsgálva már $n \sim 50$ csúcsú sokszögre volt szükség az 1% körüli eltérés eléréséhez a kör (8. ábra) és ellipszis (11. ábra) esetén, míg az epicikloid (14. ábra) és hipocikloid (17. ábra) esetén ugyancsak $n \sim 200$ csúcsú sokszöggel érjük el ezt az eltérést. A hipocikloid esetén a közelítő sokszögünk nem feltétlenül beírt sokszög, így $n \sim 18$ -tól a szimulációs eredmények átlaga nagyobb, mint a tényleges terület (lásd. 17. ábra).

Az átmérőre mind a 4 általunk vizsgált C alakzat esetén már $n \sim 30$ csúcsú poligonnal kijön a kb. 1%-os eltérés (9., 12., 15. és 18. ábrák).

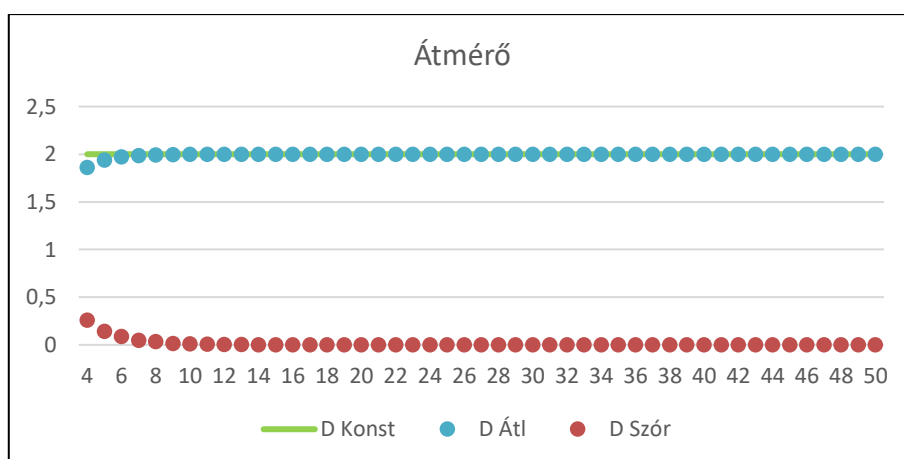
4.1.1. A körbe írt véletlen sokszög



7. ábra: A körbe írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében

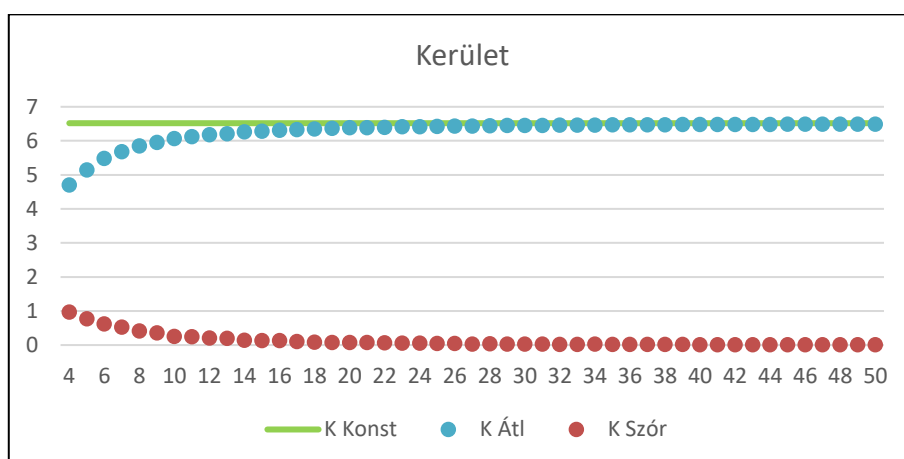


8. ábra: A körbe írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében

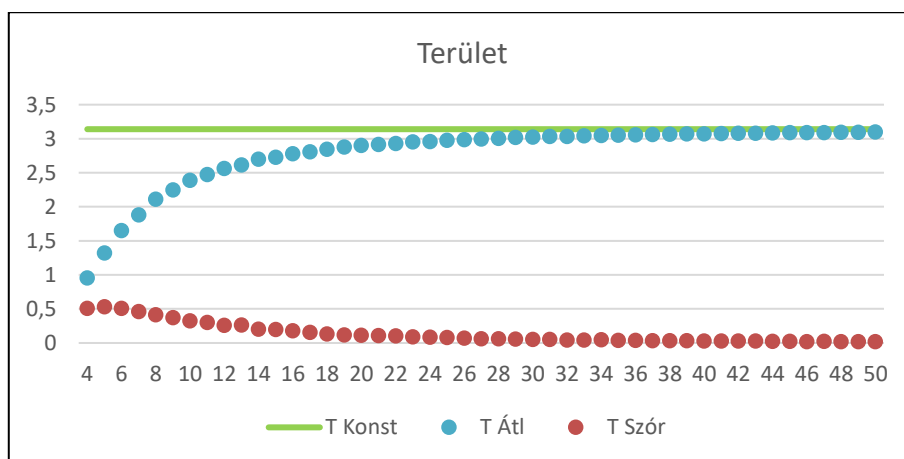


9. ábra: A körbe írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében

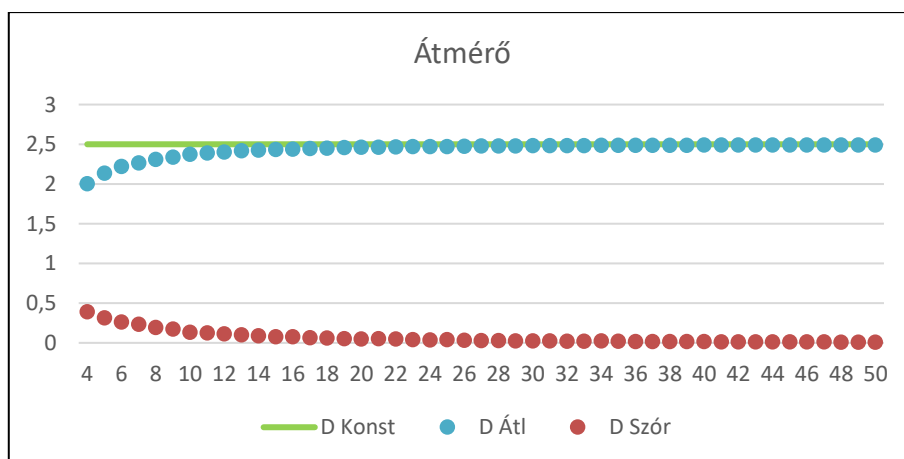
4.1.2. Az ellipszisbe írt véletlen sokszög



10. ábra: Az ellipszisbe írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében

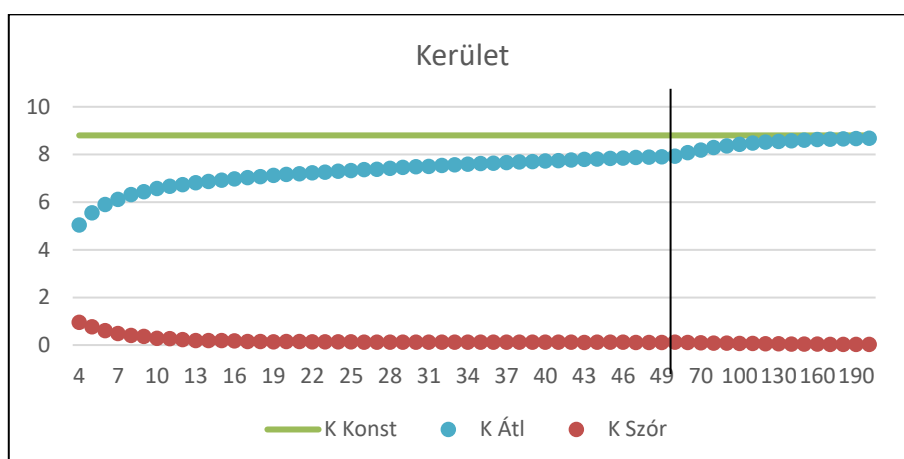


11. ábra: Az ellipszisbe írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében

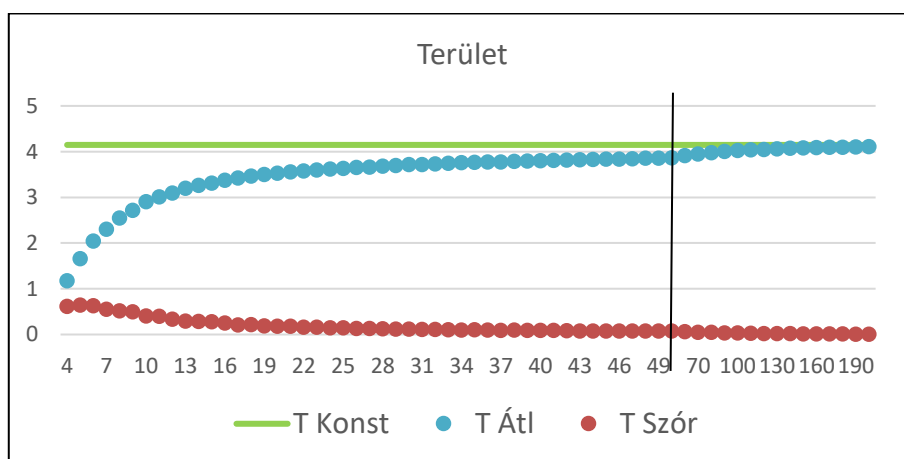


12. ábra: Az ellipszisbe írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében

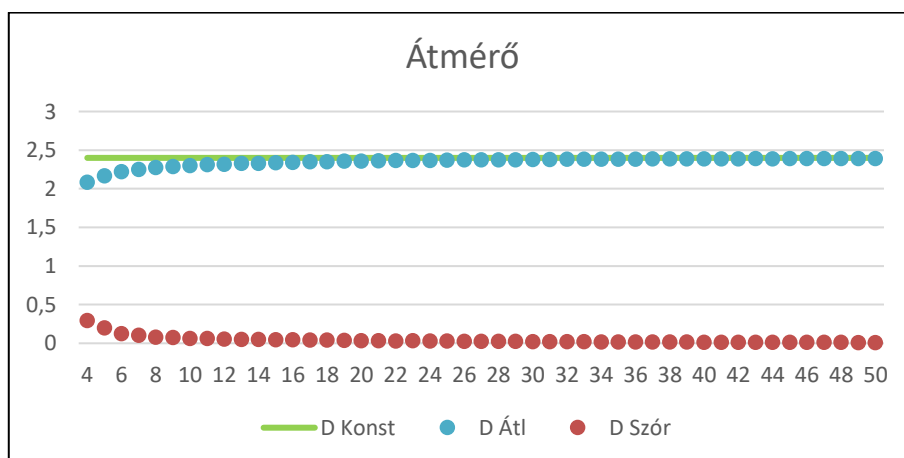
4.1.3. Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög



13. ábra: Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében

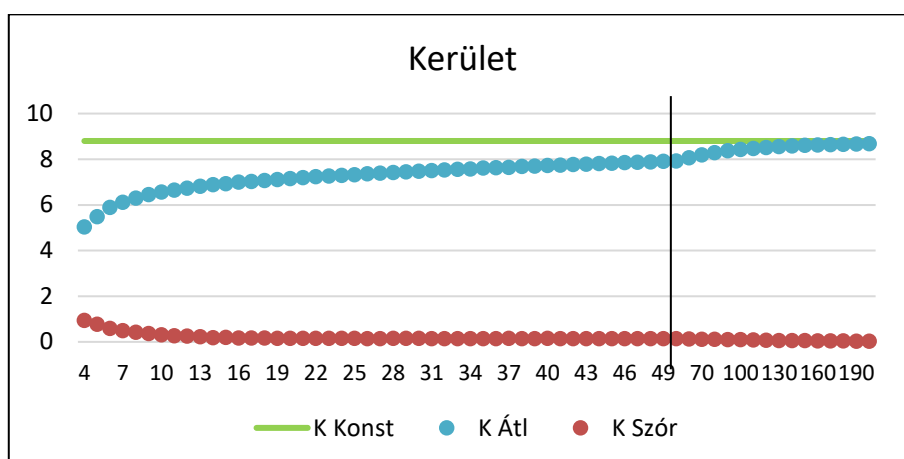


14. ábra: Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében

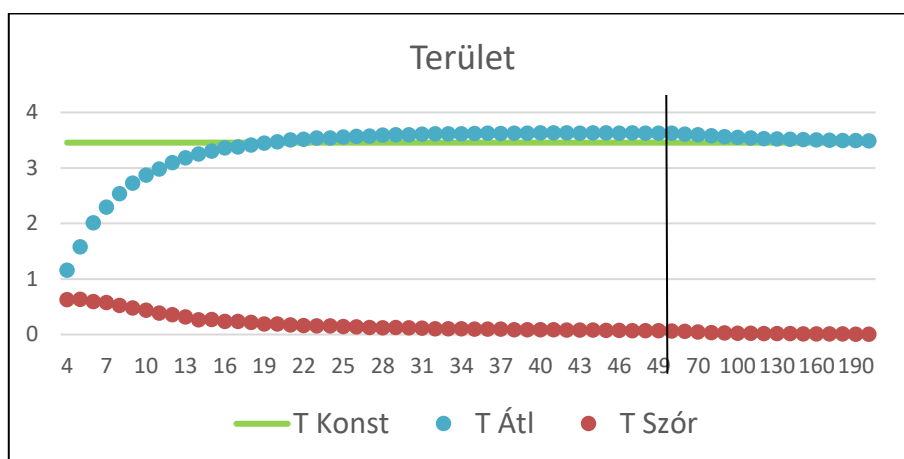


15. ábra: Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében

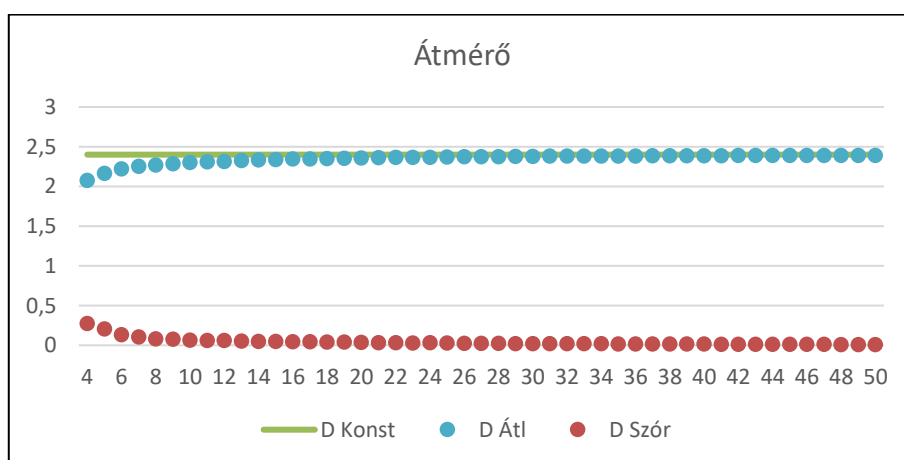
4.1.4. A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög



16. ábra: A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében



17. ábra: A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében



18. ábra: A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében

4.2. Eloszlások vizsgálata

Egy, a gyártás során alkalmazott 3D pontfelhőn alapuló minőségellenőrzési eljárás megalkotásakor meg kell adnunk az adott α elsőfajú hibához tartozó elfogadási tartományt. Az elfogadási tartomány meghatározásához szükséges ismernünk a közelítő véletlen sokszög adott geometriai jellemző értékének az eloszlását.

Ezen fejezetben részletesen tanulmányozzuk az általunk vizsgált C alakzatok közelítő véletlen sokszög kerületének és területének az eloszlását. Az említett véletlen mennyiségek eloszlásának tanulmányozásához a normált értékeket vettük, azaz a közelítő sokszögek területét és kerületét leosztottuk a tényleges területtel és kerülettel. A normált gyakorisági diagramok megrajzolásához $k = 1.000.000$ iterációval futtattuk a szimulációt $n = 100$ csúcsú sokszögre.

A normált gyakorisági diagramokhoz megrajzoltuk a 2.5. alfejezetben felsorolt eloszlások sűrűség függvényét azon paraméterekkel, melyekre a legjobban illeszkednek. A paraméterek meghatározása az Octave program statistics kiegészítő csomagjának segítségével történt.

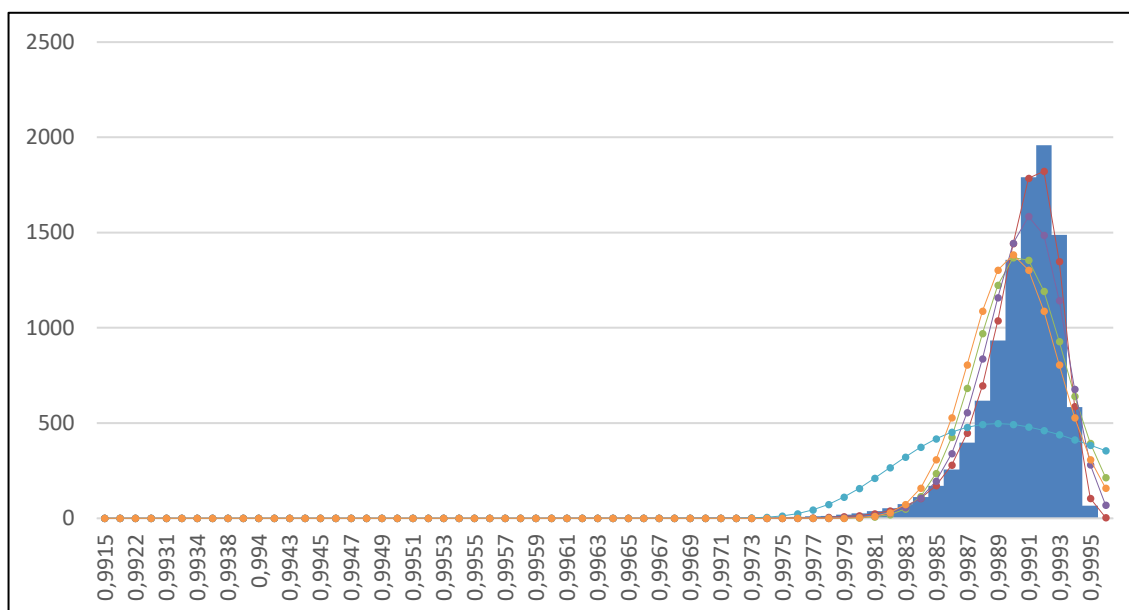
A megkapott konkrét eloszlások illeszkedését a Kolmogorov-Smirnov teszttel (K-S teszt) ellenőriztük.

A diagramokon a következők szerint ábrázoltuk a sűrűség függvényeket:

- kék oszlopok: az adott normált kerület/terület érték eloszlása;
- narancssárga pontozott vonal: Normális eloszlás;
- zöld pontozott vonal: Log-normális eloszlás;
- lila pontozott vonal: Béta eloszlás;
- piros pontozott vonal: Weibull eloszlás;
- világos kék pontozott vonal: Gumbel eloszlás.

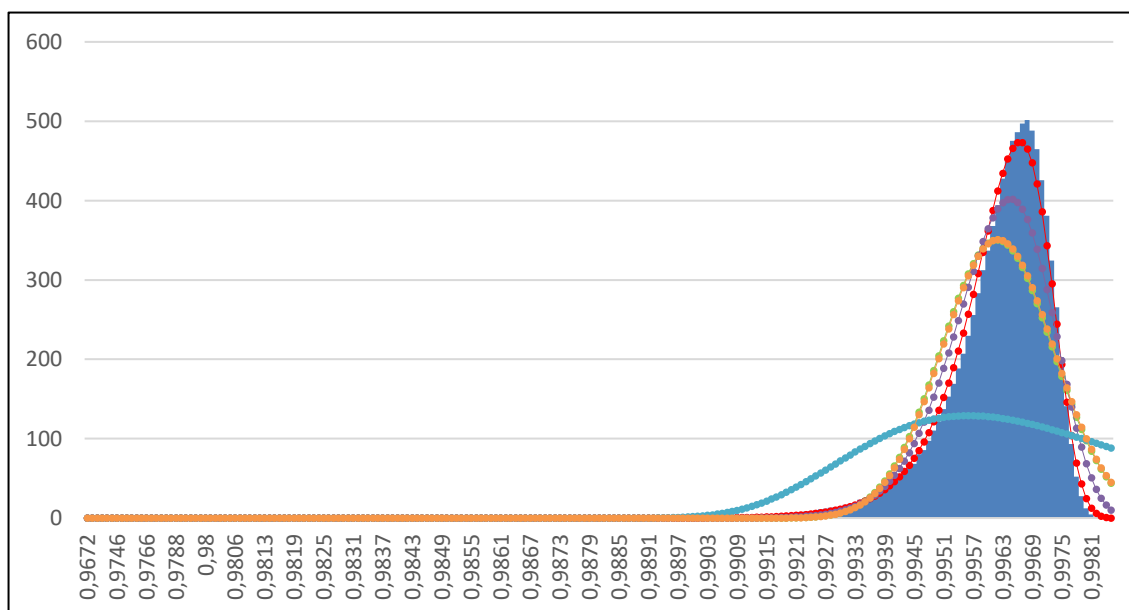
4.2.1. A körbe írt véletlen sokszög kerülete és területe

Az elvégzett K-S tesztek azt mutatták, hogy a közelítő véletlen sokszög kerületének eloszlása a kör esetén nem tartozik egyik általunk vizsgált eloszlástípushoz sem (19. ábra).



19. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja a kör esetén

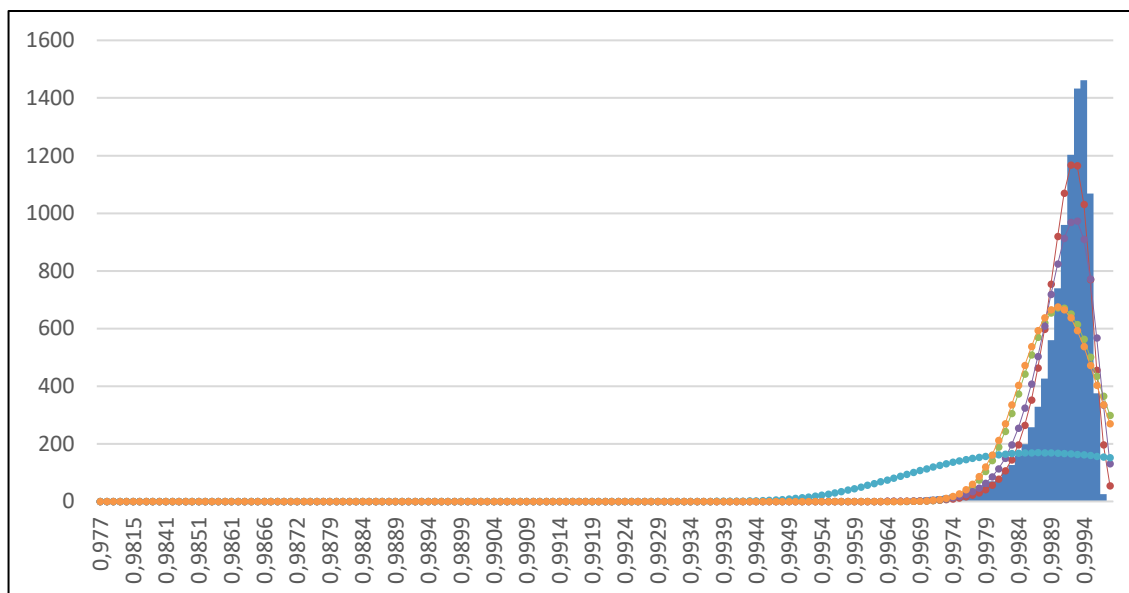
Az elvégzett K-S tesztek alapján a közelítő véletlen sokszög területének eloszlására a kör esetén elfogadhatjuk, hogy adott paraméterű Weibull eloszlású, amint azt a 20. ábrán is látjuk.



20. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja a kör esetén

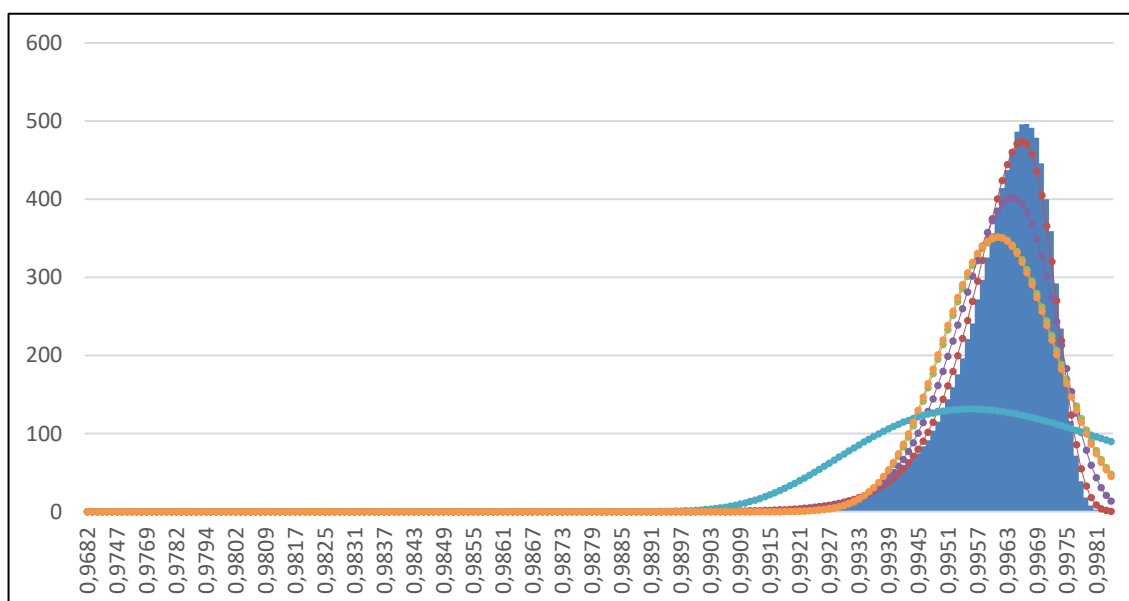
4.2.2. Az ellipszisbe írt véletlen sokszög kerülete és területe

Az elvégzett K-S tesztek azt mutatták, hogy a közelítő véletlen sokszög kerületének eloszlása az ellipszis esetén nem tartozik egyik általunk vizsgált eloszlástípushoz sem (21. ábra).



21. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja az ellipszis esetén

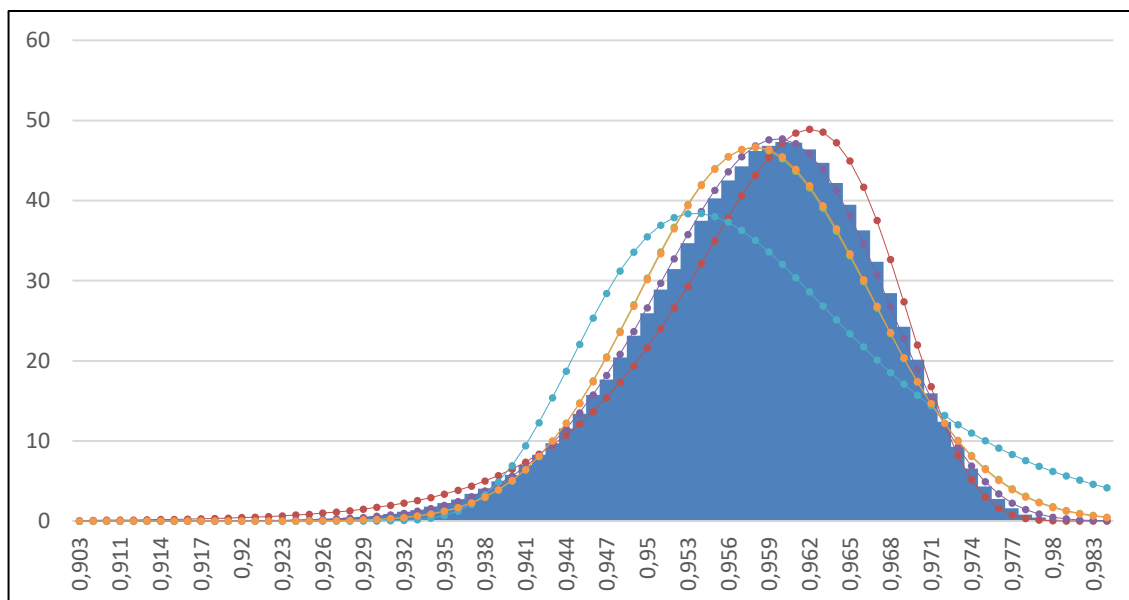
Az elvégzett K-S tesztek alapján a közelítő véletlen sokszög területének eloszlására az ellipszis esetén elfogadhatjuk, hogy adott paraméterű Weibull eloszlású, amint azt a 22. ábrán is látjuk.



22. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja az ellipszis esetén

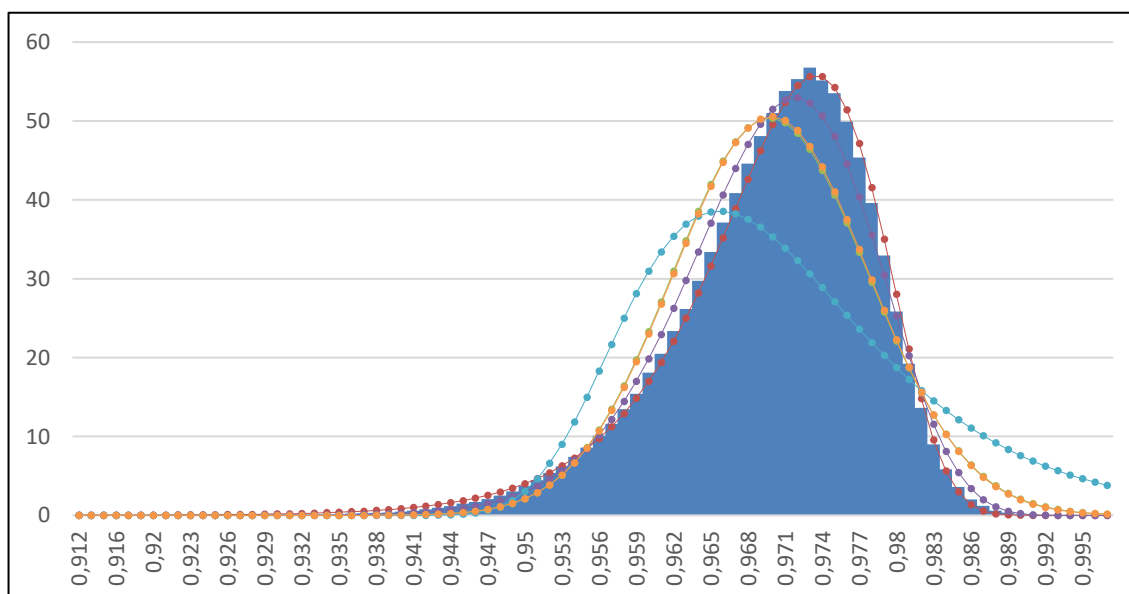
4.2.3. Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög kerülete és területe

Az elvégzett K-S tesztek alapján a közelítő véletlen sokszög kerületének eloszlására az epicikloid esetén elfogadhatjuk, hogy adott paraméterű Normális, Log-normális és Béta eloszlású, amint azt a 23. ábrán is látjuk.



23. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja az epicikloid esetén

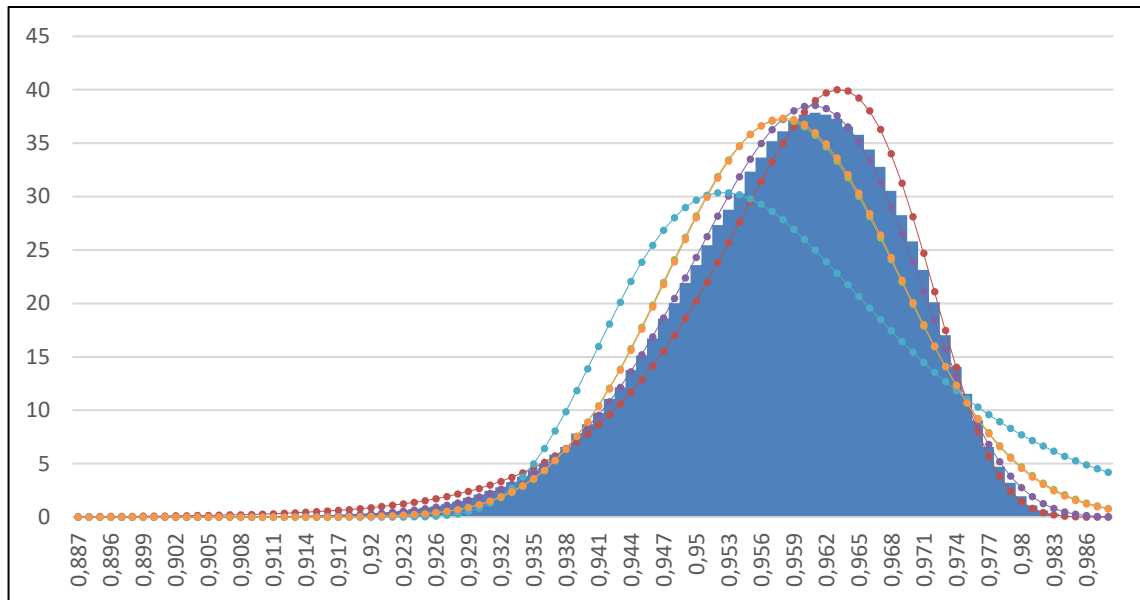
Az elvégzett K-S tesztek azt mutatták, hogy a közelítő véletlen sokszög területének eloszlása az epicikloid esetén nem tartozik egyik általunk vizsgált eloszlástípushoz sem (24. ábra).



24. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja az epicikloid esetén

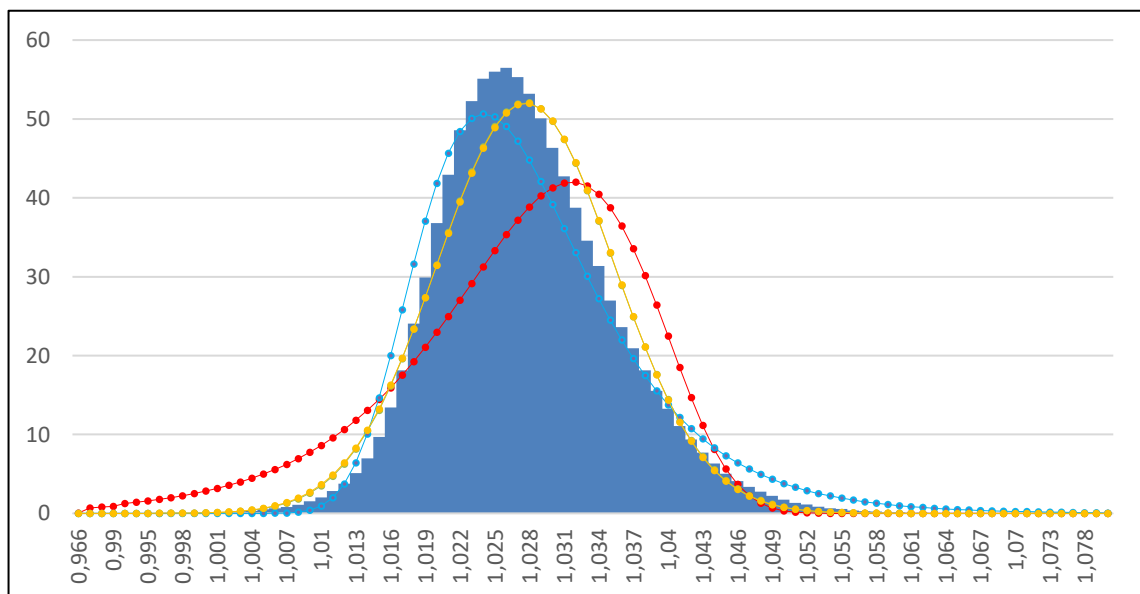
4.2.4. A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög kerülete és területe

Az elvégzett K-S tesztek alapján a közelítő véletlen sokszög kerületének eloszlására a hipocikloid esetén elfogadhatjuk, hogy adott paraméterű Béta és Weibull eloszlású, amint azt a 25. ábrán is látjuk.



25. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja a hipocikloid esetén

Az elvégzett K-S tesztek alapján a közelítő véletlen sokszög területének eloszlására a hipocikloid esetén elfogadhatjuk, hogy adott paraméterű Normális és Log-normális eloszlású, amint azt a 26. ábrán is látjuk.



26. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja a hipocikloid esetén

Összefoglalás

A dolgozatban áttekintettük adott C síkbeli alakzatok paraméterezését és különböző geometriai jellemzőiknek (kerület, terület és átmérő) számításait. Ezeket az alakzatokat közelítettük véletlen hozzáírható poligonokkal, melyeknek kerületét, területét és átmérőjét különböző matematikai módszerekkel meghatároztuk. Az adatok átlagáról, szórásáról és eloszlásáról végeztünk statisztikai elemzéseket, hogy jobban megértsük az approximáció pontosságát és megbízhatóságát. A kutatás során az eredményeket szimulációk futtatásával és elemzésével validáltuk. A kapott végeredményeket diagramokon összegeztük és analizáltuk, melyek pontos képet adnak az approximáció hatékonyságáról.

Megvizsgáltuk továbbá, hogy ezek a módszerek hol jelennek meg a mindennapok során: a felületek 3-dimenziós leképezésének folyamatánál milyen módon hasznosulnak. Ezek hogyan befolyásolják a mérnökök munkájához elengedhetetlen pontos felületvizsgálatot és minőség-ellenőrzést, illetve hogyan hasznosítják a gyártási folyamatok optimalizálásában és miért jelenik meg az autonóm rendszerek technológiájában is. Felsoroltuk és jellemeztük a legelterjedtebb ezekhez használatos eszközöket.

Tanulmányunkban a matematikai elmélet és gyakorlati szimulációk összehasonlítása és elegyítése egymással tökéletes példája annak, hogy ezek kombinációja milyen jelentőséggel bír az ipari és tudományos alkalmazásokban. A dolgozat megbízható matematikai biztosítékot ad arra, hogy a véletlen poligonokkal való közelítési technikák mennyire hatékonyak.

Summary

In this thesis we have reviewed the parameterization of given planar shapes C and the calculations of their various geometric properties (perimeter, area and diameter). These shapes have been approximated by random circumscribable polygons, whose perimeter, area and diameter have been determined by various mathematical methods. Statistical analyses were performed on the average, standard deviation and distribution of the data to gain a deeper understanding of the accuracy and reliability of the approximation. The results were validated by running and analysing simulations. The final results were summarised and analysed in the form of diagrams, which give an accurate picture of the effectiveness of the approximation

Additionally, we examined where these methods appear in everyday life: in the process of 3-dimensional mapping of surfaces. How they affect accurate surface inspection and quality control, which are essential to the work of engineers, and how they are used to optimise manufacturing processes, and why they are also emerging in autonomous systems technology. We have listed and characterised the most common tools used for these purposes.

In our study, the comparison and blending of mathematical theory and practical simulations is a perfect example of how their combination is crucial for industrial and scientific applications. The thesis provides a solid mathematical assurance of the accuracy of approximation techniques with random polygons.

Ábrajegyzék

1. ábra: Kísérleti beállítás a DLR 3D-Modeller számára ToF kamerákkal [9]	7
2. ábra: Origó középpontú, egységsugarú körvonal	8
3. ábra: Origó középpontú, (2, 0.5) egység hosszúságú fél kis- és nagytenyelyű ellipszis ...	9
4. ábra: Origó középpontú, (0.1, 1) egység hosszúságú paraméterű epicikloid	9
5. ábra: Origó középpontú, (0.1, 1.2) egység hosszúságú paraméterű hipocikloid	10
6. ábra: 7 csúcsú véletlen sokszög	11
7. ábra: A körbe írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében	23
8. ábra: A körbe írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében	23
9. ábra: A körbe írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében	23
10. ábra: Az ellipszisbe írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében..	24
11. ábra: Az ellipszisbe írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében...	24
12. ábra: Az ellipszisbe írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében.	24
13. ábra: Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében	25
14. ábra: Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében	25
15. ábra: Az epicikloidhoz írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében	25
16. ábra: A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög kerületének megváltozása n függvényében	26
17. ábra: A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög területének megváltozása n függvényében	26
18. ábra: A hipocikloidhoz írt véletlen sokszög átmérőjének megváltozása n függvényében	26
19. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja a kör eseten	28
20. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja a kör eseten	28
21. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja az ellipszis eseten	29
22. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja az ellipszis eseten	29
23. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja az epicikloid eseten	30
24. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja az epicikloid eseten	30
25. ábra: A közelítő sokszög normált kerületének normált gyakorisági diagramja a hipocikloid eseten	31
26. ábra: A közelítő sokszög normált területének normált gyakorisági diagramja a hipocikloid eseten	31

Irodalomjegyzék

- [1] Abd Karim Ishigaki S., Ismail AW., Fadzli FE: A systematic literature review: Real-time 3D reconstruction method for telepresence system. PLoS ONE 18(11): e0287155. (2023)
Elektronikus forrás:
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0287155>
Megtekintés dátuma: 2024. 11. 07.
- [2] Claude Bélisle: On the polygon generated by n random points on a circle (2011) Statistics & Probability Letters, Volume 81, Issue 2, Pages 236-242
- [3] De-Graft J. O., Srinath P., Robert OK., Maria R.: Digital twin application in the construction industry: A literature review. (2021) *Journal of Building Engineering*, Volume 40, 102726
Elektronikus forrás:
[Digital twin application in the construction industry: A literature review - ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352710221002726)
Megtekintés dátuma: 2024. 11. 17.
- [4] Haleem A., Javaid M., Pratap Singh R., Suman R.: Industrial perspectives of 3D scanning: Features, roles and it's analytical applications (2021) *Sensors International*, 2, art. no. 100114
Elektronikus forrás:
[Industrial perspectives of 3D scanning: Features, roles and it's analytical applications](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666369721000114)
Megtekintés dátuma: 2024. 11. 14.
- [5] Hoegg T. Kolb A. Lefloch D.: Time-of-Flight camera based 3D point cloud reconstruction of a car (2013) *Computers in Industry*, 64 (9), pp. 1099-1114.
- [6] Jung S, Lee Y-S, Lee Y, Lee K. 3D Reconstruction Using 3D Registration-Based ToF-Stereo Fusion. *Sensors*. 2022; 22(21):8369.
Elektronikus forrás:
<https://doi.org/10.3390/s22218369>
Megtekintés dátuma: 2024. 11. 07.
- [7] Kató Zoltán: Ipari képfeldolgozás. Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika tanszék SZTE
Elektronikus forrás:
<https://www.inf.u-szeged.hu/~kato/teaching/IpariKepfeldolgozas/03-StereoCamera.pdf>
Megtekintés dátuma: 2024. 11. 07.
- [8] Schneider R.: Random approximation of convex sets (1988) *Journal of Microscopy*, 151 (3), pp. 211-227

- [9] Stefan May, Stefan Fuchs: Calibration and Registration for Precise Surface Reconstruction with TOF Cameras. (2007)

Elektronikus forrás:

[TOFCamerasFuchsMay2007.pdf](#)

Megtekintés dátuma: 2024. 11. 07.

- [10] [Lidar - ENVIROSENSE Hungary - professzionális távérzékelés](#)

Megtekintés dátuma: 2024. 11. 17.

- [11] <https://www.python.org/>

- [12] <https://www.anaconda.com/>

- [13] <https://www.spyder-ide.org/>

- [14] <https://octave.org/>

- [15] <https://www.geogebra.org/>

- [16] <https://www.microsoft.com/hu-hu/microsoft-365/microsoft-office>

Melléklet

Saját eredmények:

- 3.1. fejezetbeli kerületek kiszámítása;
- 3.2.2. alfejezetbeli többszörös integrál kiszámítása Octave-val $n=4, \dots, 32$ -re;
- 3.4. fejezetbeli területek kiszámítása;
- 3.5.2. alfejezetbeli többszörös integrál kiszámítása Octave-val $n=4, \dots, 32$ -re;
- 4. fejezetben említett Python programok "megírása" ChatGPT segítségével;
- 4. fejezetben található grafikonok elkészítése;
- 4. fejezetben található, a szimulációval megkapott empirikus eloszlásokra a felsorolt nevezetes eloszlások illesztése, paramétereik becslése;
- 4. fejezetben található, a szimulációval megkapott empirikus eloszlások és az illesztett nevezetes eloszlások egyezőségére a Kolmogorov-Smirnov tesztek elvégzése.