

Töréskép optimalizálás

Elmélet, megvalósítás, alkalmazás

Készítették: Borbély Dániel

Szerkezet-építőmérnök Msc hallgató

Borbély Gábor

Alkalmazott matematika Msc hallgató

Koppányi Zoltán

Földmérő- és Térinformatikai mérnök Msc hallgató

Témavezető: Dr. Görög Péter

Adjunktus

BME Építőmérnöki Kar,

Építőanyagok és Mérnökgeológia Tanszék



BME
2011

Tartalomjegyzék

TARTALOMJEGYZÉK	2
JELÖLÉSRENDSZER	5
RÁCSOS TARTÓK KÉPLÉKENY TOPOLÓGIAI OPTIMALIZÁLÁSA	5
TÖRÉSKÉP OPTIMALIZÁLÁS	6
ABSZTRAKT	8
1. BEVEZETÉS	10
2. KÉPLÉKENY HATÁRTEHERBÍRÁS VIZSGÁLATA (PLASTIC LIMIT ANALISYS)	13
3. AZ LINEÁRIS PROGRAMOZÁS MATEMATIKAI ALAPJAI	19
3.1. GLOBÁLIS OPTIMALIZÁLÁS	19
3.2. LINEÁRIS PROGRAMOZÁS	20
3.3. DUALITÁS	21
3.4. MEGOLDÓ ALGORITMUSOK	22
3.5. AZ OSZLOPGENERÁLÁS (COLUMN GENERATION)	24
4. TÖRÉSKÉP OPTIMALIZÁLÁS	27
4.1. RÁCSOS TARTÓK KÉPLÉKENY TOPOLÓGIAI OPTIMALIZÁLÁSA ÉS A TALAJOK KÉPLÉKENY TEHERBÍRÁSÁNAK ANALÓGIÁJA	27
4.1.1. <i>Elméleti alapok</i>	27
4.1.2. <i>Rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálásának LP-formulája</i>	28
4.1.3. <i>Töréskép optimalizálás LP-formulája:</i>	30
4.1.4. <i>Példa az analógia illusztrálására.</i>	33
4.1.5. <i>Tartóalak felvétel a gyakorlatban</i>	35
4.2. KINEMATIKAI EGYENLETEKEN ALAPULÓ LP-FORMULA	37
4.2.1. <i>Mohr-Coulomb törési feltétel</i>	37
4.2.2. <i>Állandó és változó terhek</i>	38
4.2.3. <i>Megoszló terhek</i>	40
4.2.4. <i>Önsúly jellegű terhek</i>	40
4.2.5. <i>Földrengés</i>	40
4.2.6. <i>Peremfeltételek</i>	41

4.2.7.	<i>Teljes LP-formula felírása</i>	41
4.3.	TÖRÉSKÉP OPTIMALIZÁLÁS OPEN OFFICE CALC SEGÍTSÉGÉVEL	42
4.3.1.	<i>Változók</i>	44
4.3.2.	<i>Célfüggvény vektora és értéke</i>	44
4.3.3.	<i>A változók értékére történő megkötések</i>	44
4.3.4.	<i>Az együtttható mátrix</i>	44
4.3.5.	<i>A jobb oldal és az operátorok</i>	45
4.3.6.	<i>Open Office Calc Megoldó</i>	45
4.4.	A MÓDSZER HATÉKONYSÁGA	48
4.5.	EGYENSÚLYI EGYENLETEKEN ALAPULÓ LP-FORMULA	48
4.5.1.	<i>LP-formula</i>	48
4.5.2.	<i>Az oszlopgeneráláson alapuló módszer</i>	50
4.6.	INHOMOGEN ANIZOTROP TALAJOK	52
4.6.1.	<i>Rétegzett talaj</i>	52
4.6.2.	<i>Anizotrop talajok</i>	52
4.6.3.	<i>Nemlineáris törési feltétel használata</i>	53
4.6.4.	<i>Heterogén kőzettest</i>	55
4.6.5.	<i>Végtelen nyírószilárdságú elem</i>	55
4.7.	ELFORDULNI KÉPES ELEMÉK	56
4.8.	TALAJVÍZ FIGYELEMBEVÉTELE	58
5.	A MEGVALÓSULT PROGRAM	60
5.1.	<i>ÁTTEKINTÉS</i>	60
5.2.	<i>BEMENETEK</i>	61
5.3.	<i>TOPOLOGIA TÁROLÁSÁNAK KÉRDÉSEI</i>	62
5.4.	<i>LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT FELÍRÁSA</i>	66
5.5.	<i>A LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSA</i>	67
5.6.	<i>MEGVALÓSÍTOTT PROGRAM</i>	70
5.7.	<i>PROGRAM BEMUTATÁSA</i>	71
6.	FUTÁSOK	77
6.1.	<i>SÁVALAP ALATTI TALAJTÖRÉS ÖNSÚLY ÉS KOHÉZIÓ NÉLKÜL</i>	77
6.2.	<i>SÁVALAP ALATTI TALAJTÖRÉS ÖNSÚLY ÉS BELSŐ SÚRLÓDÁSI SZÖG FIGYELEMBEVÉTELÉVEL</i>	80
6.3.	<i>MEGTÁMASZTÁS NÉLKÜLI FÜGGŐLEGES FÖLDFAL.</i>	86

6.4.	PASSZÍV FÖLDNYOMÁS	88
6.5.	ALAGÚTINDÍTÁS	92
7.	A DLO ALKALMAZÁSA	94
7.1.	RÉZSŰ VIZSGÁLATA	94
7.2.	SÁVALAPOK ELFORDULÁSA	96
7.3.	TALAJVÍZ	97
7.4.	BIZTONSÁG ÉRTELMEZÉSE, <i>ADEQUACY FACTOR</i>	98
8.	FUTÁSI EREDMÉNYEK ÉRTÉKELÉSE	101
8.1.	A TÖRÉSKÉP OPTIMALIZÁLÁS HELYTÁLLÓSÁGÁRÓL	101
8.2.	MODELLEZÉSI HIBÁK	101
8.2.1.	<i>Geotechnikai vagy kőzetmechanikai modell</i>	101
8.2.2.	<i>Diszkrétizálás</i>	101
8.2.3.	<i>Geometriai záródás</i>	102
8.2.4.	<i>A hibák hatása</i>	102
8.3.	FELÍRT FELADATOK MEGOLDHATÓSÁGÁRÓL	103
9.	KÉSŐBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK	105
10.	ÖSSZEFOGLALÁS	106
	KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	108
	A FELHASZNÁLT PROGRAMOK	109
	HIVATKOZÁSJEGYZÉK	110
	ÁBRÁK GRAFIKONOK ÉS TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE	113
	ÁBRÁK	113
	GRAFIKONOK	116
	TÁBLÁZATOK	116

Jelölésrendszer

T_i a felületen megoszló terhek

F_i a térfogati terhek

σ_{ij} a terhekkel egyensúlyban lévő feszültség

u_i^* a virtuális elmozdulások

ε_{ij}^* a virtuális alakváltozások

ϕ a belső súrlódási szög

c_i az i -ik lehetséges csúszólap kohéziója.

n a pontok száma

m az élek száma

Rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálása

s a relatív eltolódás nyíró irányú komponense.

n a relatív eltolódás normál irányú komponense

V a szerkezet teljes térfogata

$q^T = \{q_1^+, q_1^-, q_2^+, q_2^-, \dots, q_m^-, q_m^+\}$, q_i^+, q_i^- a nyomó és a húzó rúderők

$c^T = \{l_1 / \sigma_1, l_1 / \sigma_1, l_2 / \sigma_2, \dots, l_m / \sigma_m, l_m / \sigma_m\}$

l_i az i -ik rúd hossza

σ_i az i -ik rúd szilárdsága

B egy megfelelő $2n \times m$ egyensúlyi mátrix

$f^T = \{f_1^x, f_1^y, f_2^x, f_2^y, \dots, f_n^y\}$, f_j^x, f_j^y hasznos teher x és y irányú komponense

x_i, y_i az i -ik él végpontjának koordinátái

Töréskép optimalizálás

B egy megfelelő $2n \times m$ kompatibilitási mátrix

E elmozdulás-rendszeren végzett virtuális belső munka

$d^T = \{s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, \dots, s_m^-\}$, illetve $d^T = \{s_1, n_1, s_2, n_2, \dots, n_m\}$ a lineáris programozási formulától függően.

$$g^T = \{l_1 * c_1, l_1 * c_1, l_2 * c_2, \dots, l_m * c_m, l_m * c_m\}$$

l_i az i -ik lehetséges él hossza

c_i az i -ik lehetséges él kohéziója

$u^T = \{u_1^x, u_1^y, u_2^x, u_2^y, \dots, u_n^y\}$, u_j^x, u_j^y a j -ik csomópontra alkalmazott virtuális elmozdulás x és y irányú komponense

N_i a helyi képlékenységi mátrix

$$p_i = \{p_i^1, p_i^2\}$$

p_i^1 és p_i^2 a képlékeny alakváltozásokat leíró változók, ahol p_i^1 , és $p_i^2 \geq 0$

$$f_D^T = \{f_{D1}^s, f_{D1}^n, f_{D2}^s, f_{D2}^n, \dots, f_{Dm}^n\}$$

$$f_L^T = \{f_{L1}^s, f_{L1}^n, f_{L2}^s, f_{L2}^n, \dots, f_{Lm}^n\}$$

$f_{Di}^s, f_{Di}^n, f_{Li}^s, f_{Li}^n$ az i -ik élre ható nyíró és normál irányú állandó és változó teher

σ_z az önsúlyból származó függőleges feszültség

z a felszíntől számított mélység

γ a talaj térfogatsúlya.

W_i az i -ik lehetséges csúszólap fölötti sávban lévő földtömeg súlya

λ a biztonsági tényező

$$t^T = \{t_1^x, t_1^y, t_2^x, t_2^y, \dots, t_n^y\}$$

t_i^x, t_i^y az x és y irányú ekvivalens csomóponti erők

$q^T = \{S_1, N_1, S_2, N_2, \dots, N_m\}$ ahol S_i és N_i az élre ható nyíró és normálirányú belső erők

ω az elfordulni képes elemek szögelfordulása

E_{AB} : AB élen lévő relatív eltolódásokon a talajvíznyomás által végzett munka

U_{AB} : a talajvíznyomásból származó nyomóerő

$u^T = \{0, u_1, 0, u_2, \dots, u_m\}$ és u_i az i -ik élre ható talajvíznyomás (Az u vektor nem tévesztendő össze a 4.1.3. fejezetben szintén u -val jelölt csomóponti elmozdulásokkal. Az azonos jelölés zavaró lehet, mindazonáltal a szakirodalomban is ezt használják, ezért mi is ezt követjük)

Absztrakt

Dolgozatunk célja a töréskép optimalizálás elméletének összefoglalása, e módszeren alapuló program készítése Matlab környezetben C nyelv segítségével. Továbbá példákon keresztül szemléltetjük a bemutatott módszer széleskörű alkalmazhatóságát.

A töréskép optimalizálás (Discontinuity Layout Optimization; DLO) egy új és igen ígéretes módszer képlékeny anyagok adott terhelés hatására létrejövő képlékeny törésképének, és a hozzá tartozó törőteher számítására. A módszer elméleti alapjait a képlékeny határteherbírási vizsgálata (plastic limit analysis) biztosítja, mely segítségével számítható a valós teherbírási felső illetve alsó korlátja. Több, a gyakorlati felhasználás szempontjából elengedhetetlen, jelenség egyszerűen kezelhető segítségével pl.: talajrétegződés, anizotrop és inhomogén talaj, talajvíz hatása, ezek mellett szerkezeti elemek viselkedése is modellezhető pl.: támfalak és alaptestek. A véges elemes modellezéshez hasonlóan ezzel a módszerrel is megoldhatóak összetett, több terhet tartalmazó, általános geometriájú feladatok.

A számításokban a szokásos Mohr-Coulomb törési feltételen túl más, akár általánosított törési feltételek is használhatók. A módszer jellegéből adódóan a szingularitások, akár a feszültségben akár az elmozdulásokban, könnyedén figyelembe vehetők. Bemutatjuk, hogyan alkalmazhatunk nemlineáris törési feltételeket a töréskép optimalizálás módszerénél. Ennek nagy a jelentősége ugyanis a Hoek-Brown és Barton-Bandis törési feltételek egyenesekkel való közelítésével tagolt sziklarézsűk is modellezhetőek.

A számítások az igen hatékony és gyakran alkalmazott lineáris programozási módszerekkel végezhetőek el. Dolgozatunkban megvizsgálunk több különböző LP-megoldót, és bemutatjuk a nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldási lehetőségeit. A módszernek sok közös vonása van a rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálásával (plastic truss layout optimization), az itt kifejlesztett módszerek a töréskép-optimalizálás esetén is sikerrel használhatóak. Ezek alkalmazhatóságát, és hatékonyságát futási eredményekkel támasztjuk alá. Emellett bemutatjuk az általunk készített programot kiemelve az egyes kulcsfontosságú elemek részleteit, így teljes képet

adunk a töréskép optimalizálás elméleti és gyakorlati lehetőségeitől. Az elérhető irodalmakon túlmutatva a teljes „megoldókulcsot” leírjuk.

A módszer és az általunk készített program helytállóságát több közismert példán keresztül igazoljuk, eredményeinket általánosan elfogadott eljárásokkal hasonlítjuk össze. Lényeges része a dolgozatnak, hogy becslést ad az eredmények numerikus és modellezési hibájára. Végezetül összefoglaljuk a további kutatási lehetőségeket és terveinket.

1. Bevezetés

Még a 60-as években alkottak meg egy hatékony és jól alkalmazható eljárást talajok képlékeny törésénél figyelembe vehető teherbírás számítására. A teherbírás alsó és felső korlátjának meghatározására Chen írt le számos módszert (Chen 1975, Chen 1990), melyek eddig mégsem terjedtek el széles körben a mérnöki gyakorlatban, ugyanis minden feladatnál elő kell állítani a lehetséges elmozdulás vagy erőrendszereket, amelyeknek minél jobban közelítenie kell a töréskor kialakulót. Ez intuíciót és gyakorlatot követel meg a képlékeny határállapot vizsgálatát (*Plastic Limit Analysis*, PLA) végző mérnöktől. A gyakorlatban széleskörűen alkalmazható módszertől elvárjuk, hogy képes legyen a lehetséges törésképek közül előzetes tudás vagy sejtés nélkül kiválasztani a töréskor ténylegesen létrejövőt, ami általános esetben különböző numerikus módszerek segítségével végezhető el.

A képlékeny talajtörés problémája megfogalmazható olyan formában, hogy a vizsgált talajtömeget kellő számú lehetséges csúszólappal közelítjük, és ezek közül választjuk ki a ténylegesen megcsúszókat, azaz a ténylegesen kialakuló törésképet (töréskép-optimalizálás, *Discontinuity Layout Optimization*, DLO). Ez a megfogalmazás nagyban hasonlít az adott terhet viselő rácsos tartó tömegének minimalizálását végző módszerekhez (Dorn et al. 1964, Pritchard et al. 2005.), melyek során lehetséges rácsrudak közül választjuk ki azokat, melyek statikailag határozott és minimális tömegű tartót eredményeznek. A síkbeli feszültségállapotban lévő anyagok képlékeny tönkremenetelének és a rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálásának hasonlóságára már több évtizede rámutattak (Hemp, W.S. 1958 ; Prager, W. 1959), mindazonáltal a rácsos tartókra irányult a kutatók figyelme.

Ezen feladat megoldására többféle módszer született- alaposan kutatott területnek tekinthető; így alkalmazhatunk genetikus algoritmust (Kawamura, H etc., 2002), mely hatékonysága ellenére könnyen lokális minimumban ragad, ami jelen esetben jelentős probléma, mivel a talajokban kialakuló törésképnek sok lokális minimuma lehet. A másik lehetséges megoldási módszer a lineáris programozás lehet (Gilbert, M, 2003), amely segítségével rendkívül hatékonyan oldható meg ez a feladat.

Az elmúlt évtizedekben az informatika és a számítástechnika hatalmas fejlődést mutatott. A számítási kapacitás nagymértékben növekedett, és a lineáris programozási feladatok megoldásának technikái is fejlődtek. A 80-as évektől, a lineáris programozási feladatok polinom időn belül megoldhatóvá váltak (Karmarkar, 1984). Lehetővé vált a DLO-n alapuló algoritmusok személyi számítógépen történő futtatása.

A 2000-es években kezdték a rácsos tartók optimalizálásának módszereit talajmechanikai problémákra is átültetni (Gilbert, M. 2007). Ezután a DLO módszer geotechnikai alkalmazása rohamos fejlődésnek indult. Megoldhatóak több sávalapból álló alapozások, húzási repedés hatásának vizsgálata, mind sík, mind ferde térsíkon (Gilbert, M. 2008). A módszer helytállóságát kísérleti eredmények bizonyítják (Gilbert, M. 2008 b). Rétegzett talajok vizsgálata, és talajvíz modellezése is megoldható (Gilbert M. , 2007b). Horgonyzott és befogott támfalak állékonyságának számítása is lehetséges, beleértve a támfalra átadódó terhek közelítő számítását is (Gilbert M, 2010).

Dolgozatunk fő célja egy a DLO-n alapuló szoftver implementálása, illetve azon ismeretek összefoglalása, melyek a töréskép optimalizálás kutatásához és érteve használatához elengedhetetlenek. A további fejezetek négy fő részbe sorolhatóak:

Az első részben a töréskép optimalizálás elméleti alapjait tárgyaljuk. A 3. fejezet áttekintést ad a képlékeny határteherbírás vizsgálatáról, ami a töréskép optimalizálás talajmechanikai alapja. Ismertetjük a képlékeny határteherbírás alsó és felső korlátját számító módszereket. A 4. fejezet a lineáris programozással kapcsolatos azon ismereteket tárgyalja, melyek elengedhetetlenül szükségesek a címben szereplő számítási eljárás megértéséhez.

A második fő rész a töréskép optimalizálás megoldásának elméletét taglalja, kifejtve az alkalmazható LP-formulákat, felírásuk lépéseit. A fejezet fő célja bemutatni az egyes modellezhető jelenségeket, illetve azt, hogy ezek hogyan jelennek meg az egyes LP-formulákban.

A harmadik fő rész az általunk készített programról ad áttekintést, illetve az egyes programozás technikai kérdéseket vizsgálja.

A negyedik és egyben utolsó rész tartalmazza a programunk validálását, illetve az általunk nem feldolgozott részfeladatok bemutatását. Ezekben a fejezetekben kívánunk képet adni arról, hogy milyen lehetőségeink vannak egy modell felállítására. Az egyes futási eredményeket értékeljük. Áttekintést adunk a további kutatási lehetőségekről.

2. Képlékeny határteherbírás vizsgálata (Plastic Limit Analysis)

Részen praktikus megfontolásokból, részben a mechanika fejlődéstörténetéből következően a talajmechanikai számításokat két teljesen elkülönülő részre szokás bontani: az állékonysági problémák megoldására és a rugalmas vizsgálatokra (Chan 1975). Az állékonyságvizsgálat célja EuroCode szerinti megfogalmazásban a tönkremeneteli határállapotot előidéző teher meghatározása. A rugalmas vizsgálatok célja az adott teher hatására létrejövő alakváltozások és feszültségek meghatározása, melyekre az EuroCode használhatósági határállapottal foglalkozó részei tartalmaznak előírásokat (Szepesházi 2008). Jelen dolgozat tárgyát képező számítási eljárás az állékonysági problémákra ad megoldást. A számítás célja a képlékeny talajtörést okozó teher meghatározása síkbeli feszültségállapotban lévő talajtömeg esetén. Ebben az esetben a merev tökéletesen képlékeny anyagmodell használatos, melynél a rugalmas alakváltozásokat elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük. A téma további tárgyalása előtt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a képlékeny határteherbírás vizsgálata nem az egyetlen módszer talajok törőterhének meghatározására. A legismertebbek: a végeselemes modellezés, a különböző sík, kör vagy sokszög-csúszólapos számítási eljárások, valamint a blokk módszer, analitikus úton levezetett táblázatok és a valószínűségi elven történő méretezés (Abramson et. al. 2002).

A képlékeny teherbírás vizsgálat (*Plastic Limit Analysis*, PLA) előnye abban áll, hogy közvetlen úton bármely problémára – az eset összetettségétől függetlenül – képes a módszert használó mérnök valós képet kapni a törőteher alsó (*Lower Bound Limit*, LBLA) vagy felső (*Upper Bound Limit*, UBLA) korlátjáról. A módszer – bár a geotechnikai modellalkotás során egyszerűsítésekkel él – mechanikailag korrekt kitűzésű, önmagával konzekvens. A PLA két ága a felső és az alsó korlát számítása, melyek közös jellemzője, hogy minden statikailag korrekt kitűzésű feladathoz hasonlóan az eredmények számításához három egyenlettípus megoldása szükséges: geometria, anyag és kompatibilitási egyenletek.

A törőteher alsó korlátjának számítása a talajban fellépő feszültségeloszlás alapján történik. Amennyiben egy statikailag lehetséges erőrendszer felírható, továbbá nem sérti

meg a folyási feltételt, akkor a feszültségeloszlást előidéző teher számítható, melynél nagyobb vagy egyenlő a talaj képlékeny törőterhe. A törőteher számításakor a statikailag lehetséges erőrendszerek közül kiválasztjuk azt, amelyik a legnagyobb terhet egyensúlyozza, ez pedig a legnagyobb alsó korlátnak tekinthető (Chan 1975).

A törőteher felső korlátjának számítása a következőképpen végezhető el: a belső erők által egy virtuális elmozdulás-rendszeren végzett belső munka egyenlő a külső erők által a virtuális elmozdulásokon végzett külső munkával.

$$\int_A T_i \dot{u}_i^* dA + \int_V F_i \dot{u}_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \quad (1)$$

ahol T_i a felületen megoszló terhek, F_i a térfogati terhek, σ_{ij} a terhekkel egyensúlyban lévő feszültség, $\dot{u}_i^*$ a virtuális elmozdulások, $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ a virtuális alakváltozások (Chan 1975). A munkák egyes szerzők műveiben nem egyenlők, hanem összegük zérus.

Ez alapján számítható a virtuális elmozdulás-rendszerhez tartozó törőteher, mely nagyobb vagy egyenlő, mint a képlékeny törőteher. A törőteher meghatározásához a lehetséges virtuális elmozdulás-rendszerek közül azt választjuk ki, amelyikhez a legkisebb teher tartozik. Ez a teher tekinthető a talaj képlékeny törőterhének legkisebb felső korlátjának (Chan 1975). Tehát az UBLA virtuális elmozdulásokkal és tényleges terhekkel számol, melyek virtuális külső vagy belső munkát végeznek. A munkák és elmozdulások nem abszolút változók, csupán a töréskor korlátlanul növekvő változók arányát adják meg, azaz az elmozdulások tetszőleges nagyságúak lehetnek, viszont az arányaik állandóak, mely azonos a virtuális elmozdulások arányaival. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban ezt nem hangsúlyozzuk ki külön, csupán elmozdulásként és munkákként hivatkozunk rájuk.

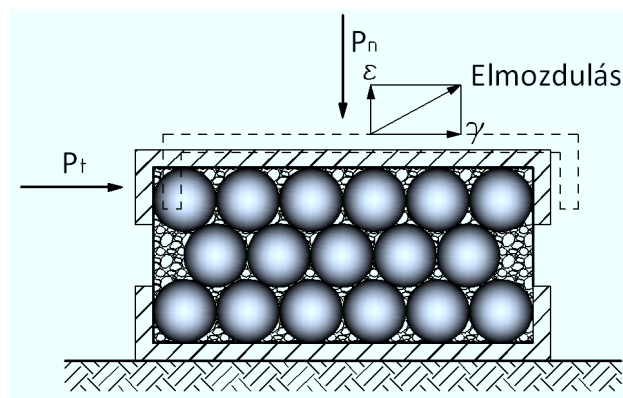
A megoldás akkor tekinthető egzaktnak, ha a törőteher alsó (LBLA) és felső (UBLA) korlátjaként meghatározott képlékeny törőteher azonos. Ha a két megoldás eltér, akkor kijelenthető, hogy az egzakt megoldás a két eredmény között van (Chan 1975).

A talajmechanikai számítási eljárások nagy részéhez hasonlóan a DLO is a Mohr-Coulomb törési feltételen alapszik. Természetesen más törési feltételek is használhatóak például a

Tresca törési feltétel, ami a Mohr-Coulomb feltétel azon speciális esete, ahol a belső súrlódási szög zérus. Fontos megjegyezni, hogy általánosított törési feltételek is használhatóak. A számítást megkönnyítendő lineáris törési feltételt javasolt használni, mindazonáltal nemlineáris törési feltételek is linearizálhatók (Chan, 1975).

Az anyagok képlékeny törésekor az elmozdulások nagysága a teher növekedése nélkül is korlátlanul növekszik, ezért nincs lehetőségünk a feszültségek és az elmozdulások között a rugalmas vizsgálatokhoz hasonló egyértelmű megfelelést feltételezni. Ennek ellenére bizonyos következtetéseket levonhatunk az elmozdulásokról is a törés bekövetkeztekor fennálló feszültségállapot alapján.

A legegyszerűbb feltételezés az asszociatív folyás (*associated flow rule*) mely szerint a nyírásakor nem csak nyíró, hanem normálirányú elmozdulások is végbemennek (1. ábra). Ez az úgynevezett képlékeny modell (*plastic model*).



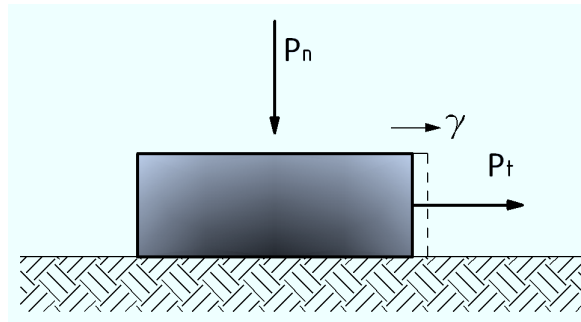
1. ábra: A képlékeny modell

A nyíró és normál irányú eltolódások közti kapcsolatot a (2) összefüggés írja le.

$$n = |s| * \operatorname{tg}(\phi) \quad (2)$$

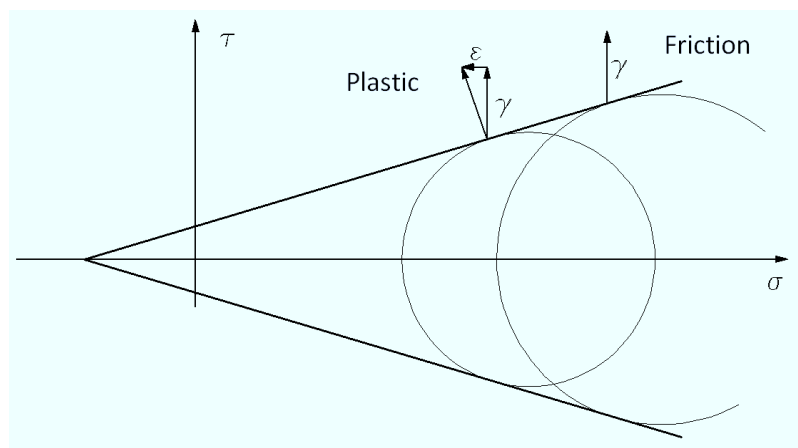
ahol s , n a relatív eltolódás nyíró és normál irányú komponense.

A valós talajok esetében ez a feltételezés nem tekinthető minden esetben igaznak. A szemcsés talajok viselkedését jobban közelíti az úgynevezett súrlódó modell (*friction modell*, 2. ábra).



2. ábra: A súrlódó modell

Látható hogy a súrlódó modell esetén ellentétben a képlékeny modellel, csak nyíró irányú komponense van az elmozdulásoknak.



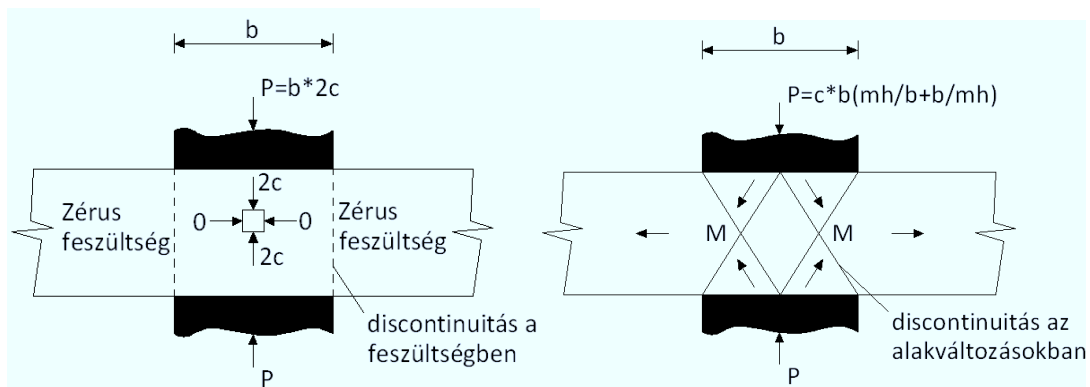
3. ábra: Elmozdulások a töréskor képlékeny és súrlódó modell esetén

Az asszociatív folyás feltételezése drénezetlen talajok vizsgálatakor jó közelítést ad, mivel a belső súrlódási szög értéke közel nulla. Drénezett talajok esetén, különösen, nagy belső súrlódási szögű és kis kohéziójú talajok viselkedését a nem asszociatív folyás (*non associated flow rule*) írja le, mely szerint a nyíró és normál irányú elmozdulások függetlenek egymástól (Manzari, 2000).

Legtöbb esetben a szemcsés talajok vizsgálatakor a képlékeny modell használatával az állékonysági biztonság felül becslése nagy. Így nagyobb állékonysági biztonságot kapunk az eljárással, mint a ténylegesen fennálló biztonság. A nem asszociatív folyás feltételezésével szemcsés talajok is kellő pontossággal modellezhetők. (Chan, 1975).

Összefoglalva a törőteher alsó és felső korlátjának meghatározásához elegendő egy statikailag lehetséges erőrendszer és egy kinematikailag lehetséges elmozdulás-rendszer felvétele, majd ezekből a keresett korlátok számíthatóak.

A következőkben bemutatásra kerülő probléma két oldalról tökéletesen súrlódásmentesen, b szélességben nyomott, h vastagságú, végtelen széles, síkbeli feszültségállapotban lévő, tisztán kohéziós anyagú tartó teherbírásának számítása a Mohr-Coulomb törési feltétel alkalmazásával, $\phi=0$ esetben. A feltételezett statikailag lehetséges erőrendszert és a kinematikailag lehetséges elmozdulás-rendszert a 4. ábra tartalmazza.

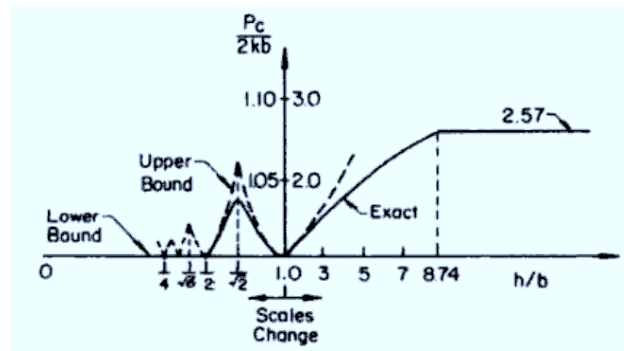


4. ábra: Alsó és felső becsléshez szükséges erő illetve elmozdulás-rendszer

A törőteher számítása egyszerűen elvégezhető (Chen, 1975), a számított eredmény a következő (3.1.):

$$1 \leq \frac{P_c}{2cb} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{mh}{b} + \frac{b}{mh} \right) \quad (3)$$

ahol b a teher szélessége, h a földem vastagsága, m az M jelű csomópontok száma, amit úgy kell megválasztani, hogy a törőteher minimális legyen és $m(m-1) \leq \frac{b}{h} \leq m(m+1)$, c a kohézió, P_c a törőteher. A kapott eredményt az 5. ábra tartalmazza.



5. ábra: Alsó és felső becslés, illetve az egzakt megoldás (Chan 1975)

Szaggatott vonal jelzi a felső korlátot (az UBLA eredményét), az alsó korlát (LBLA eredménye) konstans 1.00 és folytonos vonal jelöli az egzakt megoldást (Green, 1951)

A képlékeny teherbírás vizsgálatban (PLA) alkalmazhatunk numerikus minimumkeresési módszereket, melyek segítségével általános feladatok is megoldhatóak, így a PLA alkalmas automatizált törőteher-számítási eljárások kidolgozására.

A dolgozatunkban tárgyalásra kerülő DLO módszer, egy matematikai eljárás, mely a szélsőérték keresést hatékonyan és nagy szabadságfokú rendszerre hajtja végre. Személyi számítógépeken legfeljebb nagyságrendileg 10^8 lehetséges csúszólapot tartalmazó feladatok oldhatóak meg, lineáris programozás segítségével.

3. A Lineáris Programozás matematikai alapjai

3.1. Globális optimalizálás

A Lineáris Programozás (LP) a globális optimalizálás egy speciális esete. A globális optimalizálás, mint matematikai módszer számtalan helyen előkerül a mérnöki számításokban, mivel nagyon általános problémát fogalmaz meg.

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) = ? \quad (4)$$

ahol $\mathcal{X}$ egy adott keresési tér és $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ adott célfüggvény. Egyszerű transzformációval maximumot is kereshetünk, ha az f függvény -1 -szeresét vesszük célfüggvénynek. Az általános globális optimalizálási feladatnak a megoldása sem analitikusan, sem numerikusan nem ismert, a megoldó módszerek az adott probléma f célfüggvényének és $\mathcal{X}$ keresési terének sajátosságait használják ki. Egy általános optimalizálási feladatnál kérdés a keresett minimum, az az $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ vektor, ahol a minimum felvétetik, valamint az, hogy van-e illetve hány ilyen $\mathbf{x}^*$ vektor van.

Az optimalizálási feladatok egy lehetséges osztályozása:

$$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d, f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (nincs megkötés)} \quad \text{globális optimalizálás} \quad (5)$$

$$\mathcal{X} \text{ egy konvex alakzat} \quad \text{konvex optimalizálás} \quad (6)$$

$$\mathcal{X} \text{ egy konvex alakzat}, f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad \text{konvex programozás} \quad (7)$$

$$\mathcal{X} \text{ egy poliéder}, f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad \text{kvadratikusan programozás} \quad (8)$$

$$\mathcal{X} \text{ egy poliéder}, f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad \text{lineáris programozás} \quad (9)$$

$$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}^d \subseteq \{\text{egy poliéder}\}, f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad \text{egész értékű programozás} \quad (10)$$

Például a Lagrange multiplikátor alapfeladata (5)-nek része. (7)-ben egy konvex alakzat adott irányban ($\mathbf{c}$) extrémális pontját keressük, míg (9) esetén azt is megkötjük, hogy az alakzatot egyenes oldalak (hipersíkok) határolják. (10) esetén is egy poliéder belseje a keresési tér, de csak az egész koordinátájú pontokra hagyatkozunk.

Természetesen ezeken belül is vannak még kutatott feladatosztályok, valamint ezeknél általánosabbak is. A fentebb felsorolt problémák közül (8) bizonyos eseteire, (7)-re valamint (9)-ra ismerünk gyors (és általános) numerikus algoritmust, (10) például NP nehéz feladat. Ezen problémák mindegyikére vannak elméletek, de az (9)-ban van lehetőségünk a legnagyobb méretű feladatok megoldására.

3.2. Lineáris Programozás

A (9) feladat felírásához meg kell értenünk a poliédereket.

3.0.1. Állítás. Egy $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ alakzat poliéder akkor és csak akkor, ha létezik egy $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ mátrix és egy $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor, hogy

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

Vagyis az $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ vektor koordinátáinként nem nagyobb $\mathbf{b}$ vektornál. Geometriailag ez azt jelenti, hogy előáll félterek metszeteként.

Íly módon az LP feladat megfogalmazható a következő alakban:

Legyen adott $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$. Keressük $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^d$ vektort, hogy $A\mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}$ és minden más $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ vektorra, amire $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ teljesül az, hogy $\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}$.

$$\min \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \tag{11}$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{12}$$

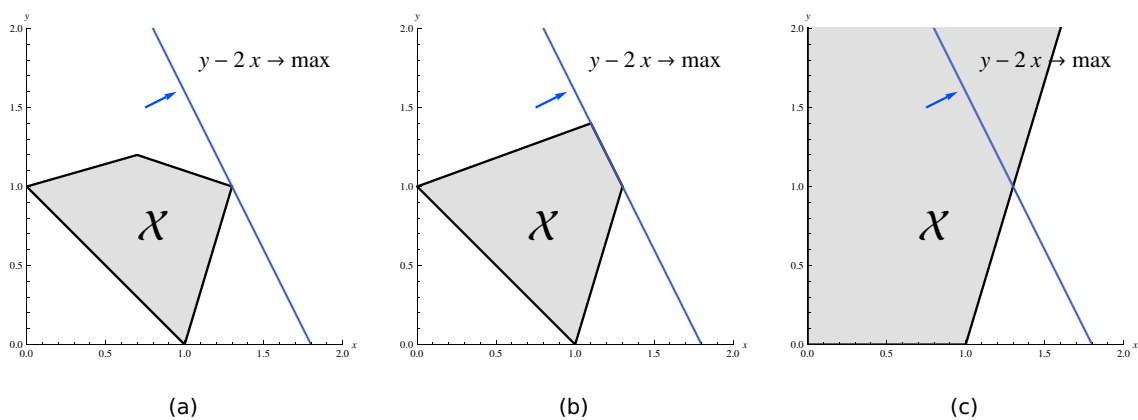
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ -t döntési vagy LP változóknak nevezzük, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_d)^T$ -t célfüggvénynek, vagy célfüggvény-vektornak. Az ilyen alakú LP feladatot kanonikus alakúnak hívjuk. Más típusú feltételeket is be lehet építeni az egyenletekbe és a fenti (kanonikus) alakra hozni.

$$\begin{array}{c|c|c} \min \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} & \min \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} & \max \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 & & \end{array}$$

A (11)-(12) probléma megoldása illetve megoldhatóságának karakterizációja régóta ismert [Gale, 1951], ezek osztályozása:

- Ideális esetben (6(a) ábra), egyetlen $\mathbf{x}^*$ vektor létezik, amire teljesül a kívánt feltétel és a célfüggvény minimális.
- Lehet, hogy több optimális vektor is van (6(b) árba), ekkor optimális megoldások halmazáról beszélhetünk. Ez a jelenség akkor lép fel, ha a poliéder optimális lapja párhuzamos a célfüggvény szintvonalával.
- Elképzelhető, hogy a megadott feltételek nem elég korlátozóak, így található olyan megoldás, amin a célfüggvény értéke tetszőlegesen nagy lesz. Ekkor azt mondjuk, hogy (az adott halmazon) *nemkorlátos a célfüggvény* (6(c) ábra).

- A feladat túlhatározott, az $\mathcal{X}$ halmaz üres, vagyis nincs olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, hogy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ teljesüljön. Ekkor *nincs fizibilis megoldás*.



6. ábra

3.3. Dualitás

3.1. Tétel (Erős dualitás tétel (Gale, 1951)). Tekintsük a

$$\min \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad (13)$$

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

LP feladatot. Ha a feladatnak van optimális megoldása, akkor a

$$\max \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y} \quad (14)$$

$$A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

feladatnak is van optimális megoldása és a célfüggvényeik optimális értékei egyenlőek. A (13)-t primál, a (14)-t duál feladatnak hívjuk.

Vagyis egy (13) alakú feladatot úgy is megoldhatunk, hogy képezzük a párját és azt oldjuk meg. Ez azért lehet célszerű, mert (14)-nek esetleg kevesebb változója van, vagy valami miatt jobban tudjuk kezelni, megérteni. A két feladat matematikailag egymással ekvivalens, lényegében két különböző egyenlet ugyanarra a problémára.

Természetesen a tételnek több féle általánosítása létezik (Lagrange dualitás), és mélyebb kapcsolat is fennáll a primál feladat és annak duál párja között. Mi a következőt használjuk ebből: **minden LP feladatnak képezhető un. duál párja** és ha az eredetinek van megoldása, akkor a duálnak is van, sőt a célfüggvényeik értéke megegyezik. Ha a duál feladatnak (mint kiindulási feladat) képezzük megint a duál párját, akkor visszakapjuk az eredeti egyenleteket. Továbbá az is igaz, hogy ha a primál-duál feladatpár közül az egyiknek nemkorlátos a célfüggvénye, akkor a másiknak nincs fizibilis megoldása (és viszont). De az is lehetséges, hogy egyiknek sincs fizibilis megoldása.

3.1.1. Megjegyzés. *A duális képzés matematikai művelet, minden feladatra elvégezhető, annak fizikai tartalmától, a modellezendő problémától függetlenül.*

Egy általános, nem kanonikus alakú, LP feladat duálisának a felírását most nem taglaljuk, csak a számunkra érdekes eset duálisának felírását közöljük.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P)} & \text{(D)} \\
 \min \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} & \max \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y} \\
 \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\
 \mathbf{x} \geq 0 & \\
 \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \\ \\ \text{dualitás} \\ \Leftrightarrow \\ \\ \end{array}$$

(P) feladatban $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ és tipikusan $m < d$, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alulhatározott legyen.

3.4. Megoldó algoritmusok

Az LP feladatok szerkezetükben a lehető legegyszerűbbek, de ennek ellenére nagyon sok probléma írható fel ilyen (lineáris) alakban a menetrend-optimalizálástól a termékraktározásig. A számítási nehézséget a keresési tér mérete adja. Valós problémákban az A mátrix mérete $d, m > 10^5$ nagyságrendű. A feladatok megoldhatóságát sokszor nem is a számítási kapacitás (CPU), hanem az együtthatómátrix tárolása korlátozza (RAM/HD kapacitás).

Egy LP feladat megoldására két főbb módszert ismertetünk, az egyik az un. szimplex módszer, a másik az un. belsőpontos módszer. A szimplex módszer kifejlesztésében többek között George Dantzig játszott fontos szerepet a 20. század közepén. A módszer alapvetően Gauss eliminációs lépéseket használ a feladatból képzett szimplex táblán. A pivotálási lépések elvégzésére több szabály illetve heurisztika is létezik. Addig kell

A	b
c^T	0

7. ábra. Szimplex tábla

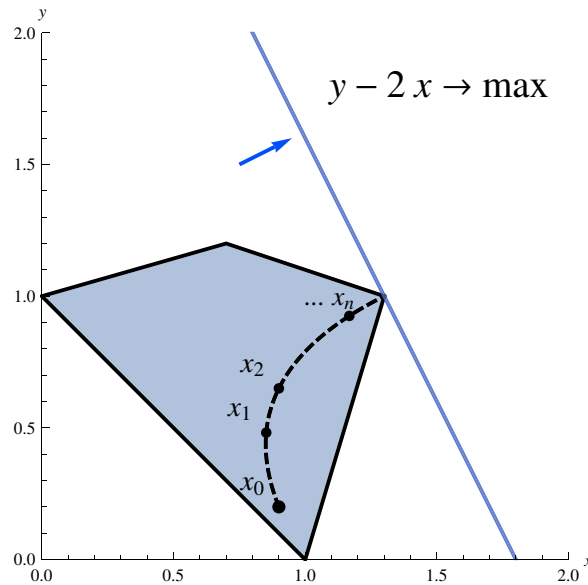
sorműveleteket végeznünk amíg egy leállási feltételt el nem érünk, ekkor a jobb alsó sarok elem helyén megjelenik a célfüggvény optimális értéke, a c^T vektor helyén pedig az x^* változó, amin ez az optimum felvételik.

Ilyen és ehhez hasonló elveken alapuló algoritmusok képesek pontos, analitikus eredményt adni, viszont lassúak. Pontosságukat az adja, hogy a Gauss elimináció szimbolikusan is elvégezhető, viszont a szükséges eliminációk száma esetenként nagyon nagy lehet. Lehet olyan példát konstruálni, amiben a futásidő a mátrix méretének exponenciális függvénye.

A belső pontos módszer elve egészen más. Itt egy kezdeti pontot kell találni a poliéder belsejében, majd innen indulva iteratív lépésekkel közelíti meg az optimum pontot. x_{n+1} kiszámolásához a feladat A mátrixából és az előző x_n értékből az algoritmus összeállít egy lineáris egyenletrendszert, majd azt megoldja (mátrixinverz számolás). Ezt a módszert először a 80-as években Karmarkar tette használhatóvá, amiben a számítástechnika fejlődésének is fontos szerepe volt. Ekkortól már bizonyíthatóan és praktikus is lehetett polinom időben nagyméretű (több 10000 változós) LP feladatokat megoldani [Karmarkar, 1984].

A belső pontos módszereknél megfigyelhető jelenség a *numerikus instabilitás*. Az algoritmus minden elemi lépésében egy (nagyméretű) lineáris egyenletrendszer megoldása történik, aminek a pontosságát az adott együtthatómátrix kondíciószáma negatívan befolyásolhatja. A kiforrottabb szoftverek ezt a jelenséget úgynevezett pre-solver segítségével kezelik. Egy nulladik fázisként átskálázza a program a döntési változókat úgy, hogy a kapott feladat jobban kondicionált legyen és persze vissza tudja következ-

tetni belőle az eredetinek a megoldását.



8. ábra

A belső pontos algoritmusok egy hátránya, hogy mindig csak adott tűrésen belül dolgoznak, a tökéletes optimumot sosem érik el és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ feltételt is csak közelítőleg teljesítik. Természetesen a tűrést csökkentésével elméletileg pontos eredményt is tudnak szolgáltatni, de a gyakorlatban meg kell elégednünk valamennyi numerikus hibával. Ma a belső pontos algoritmusok a kizárólagos eszközei a nagyméretű LP feladatok megoldásának [Illes, 2002]. A belső pontos algoritmusok egy másik jellegzetessége, hogy a dualitás tételt kihasználva *egyszerre* írja fel és oldja meg a primál és a duál feladatot.

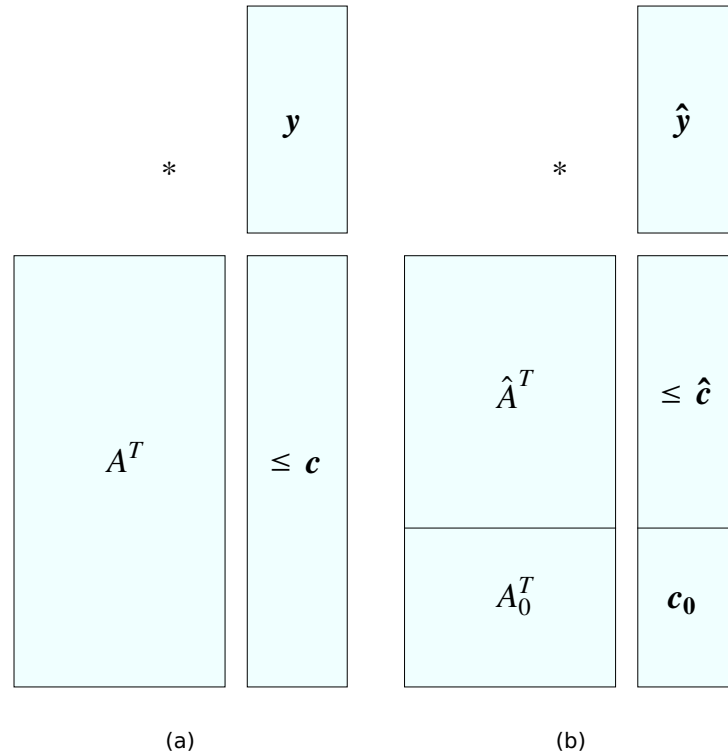
3.5. Az oszlopgenerálás (column generation)

Azzal, hogy [Karmarkar, 1984] lehetővé tette a tízezres nagyságrendű feladatok megoldását, sem a rácsos tartók alakjának megtalálása, sem a talajok törésképe nem váltak egy PC számára számolhatóvá. További gyorsítási lehetőség az *oszlopgenerálás* [Bertsimas, 1997].

Tekintsük a

$$\begin{aligned} \max \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y} \\ A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \quad (D) \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

duál feladatot. Csökkentsük a változók számát és egy kisebb feladatot oldjunk meg. Oldjuk meg $\max \mathbf{b}^\top \cdot \hat{\mathbf{y}}$ -t a redukált $\hat{\mathbf{A}}^\top \hat{\mathbf{y}} \leq \hat{\mathbf{c}}$ feltétellel, ahol $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times d'}$, $\hat{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{d'}$ és $d' < d$.



9. ábra

Vegyük észre, hogy $\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$, a döntési változók száma nem változott, csak egy másik feladatot írtunk fel rájuk. Ezután le tudjuk ellenőrizni, hogy a kapott $\hat{\mathbf{y}}$ mennyiben közelíti az eredeti 9(a) problémát.

$$\mathbf{h} := \mathbf{c} - \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^d$$

Ha jól oldottuk meg a 9(b) feladatot, akkor $\mathbf{h}$ -nak az első d' koordinátája nem-negatív, viszont a többi koordinátájára nincs megkötésünk.

Az oszlopgenerálás fő ötlete az, hogy vegyük hozzá 9(b) feladathoz azokat a sorokat, ahol $\mathbf{h}$ -nak a koordinátái a legkisebbek. Ezzel bővítjük vissza a feladatot, hogy közelítsük a 9(a) megoldását. Egy gyors algoritmusnál persze a cél az, hogy a redukált feladat kibővített változata is (sokkal) kisebb legyen, mint az eredeti feladat. A kérdés az, hogy mely sorokat vegyük bele a kibővített feladatba a $\mathbf{h}$ ismeretében. Erre több technika és heurisztika létezik. Az egyik legegyszerűbb, ha nagyság szerint rendezzük $\mathbf{h}$ koordinátáit és a legelső (legkisebb) $\mu \cdot d'$ darab értéknek megfelelő sorral bővítjük a

feladatot ($\mu < 1$).

Az oszlop generálás sematikus algoritmus:

1. Vegyük a 9(a) feladatot d sorral ($A^T, \mathbf{c}$).
2. Vágjuk ki (nem feltétlenül az első) d' darab sorát ($\hat{A}^T, \hat{\mathbf{c}}$).
3. Oldjuk meg a $\max_{\mathbf{y}} \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \hat{A}^T \mathbf{y} \leq \hat{\mathbf{c}} \}$ feladatot.
4. Képezzük $\mathbf{h} = \mathbf{c} - A^T \hat{\mathbf{y}}$ vektort.
5. Válasszuk ki $\mathbf{h}$ -nak a legkisebb $\mu \cdot d'$ darab elemét, és az ezek indexeinek megfelelő sorokat vegyük hozzá $\hat{A}^T$ -hoz. Így lesz $d' + \mu \cdot d'$ eleme $\hat{\mathbf{c}}$ -nak és sora $\hat{A}^T$ -nak. Ezután folytatjuk:
 - Ha $\min_{i=1 \dots d} h_i > -\epsilon$, akkor leállunk.
 - Ha $\min_{i=1 \dots d} h_i \leq -\epsilon$, akkor 3. lépés.

Ez a módszer a primál megfogalmazásban azt jelenti, hogy megtaláljuk a szignifikáns változókat és nem kell a feleslegeseket cipelni. A primál feladat változói (oszlopai) megfelelnek a duál feladat feltételeinek (sorainak).

Ennek a technikának a megvalósításáról olvashatunk Gilbert és Tyas 2003-as cikkében konkrét futási eredményekkel és tapasztalatokkal. Ezzel a technikával lényegében 10^8 nagyságrendű problémák váltak számolhatóvá és ez eredményezte (többek között) a DLO elterjedését.

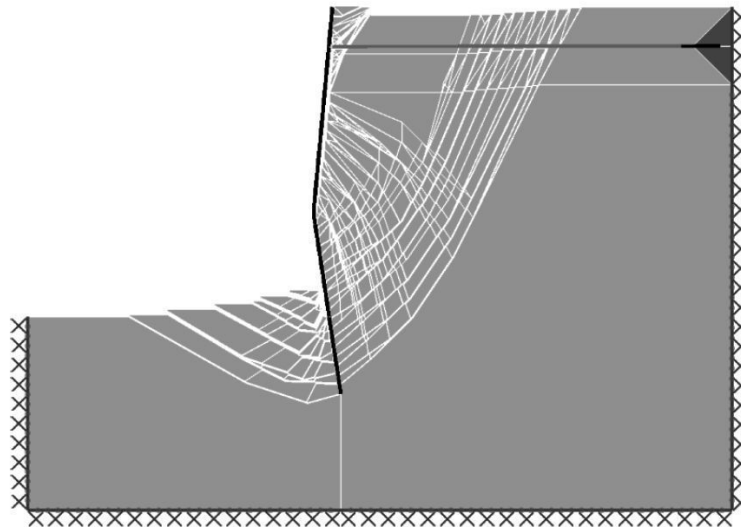
4. Töréskép optimalizálás

4.1. Rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálása és a talajok képlékeny teherbírásának analógiája

4.1.1. Elméleti alapok

A fémek képlékeny törésekor kialakuló elmozdulások, és az optimális Michell-féle rácsos tartók (Michell 1904) rácsrúd-topológiája között hasonlóság mutatkozik (Strang, G. & Kohn, R.V. 1983). A Michell-féle rácsos tartók végtelen sok rúdból álló szerkezetek, az alakjuk több módszerrel is meghatározható és a megoldás sok esetben diszkrét rudak sokaságaként közelíthető. A PLA problémája ehhez hasonlóan közelíthető diszkrét csúszólapokkal határolt merev blokkokkal. A folytonos probléma diszkretizálásán túl a számított mennyiségek is hasonlóságot mutatnak. A töréskor végzett belső munka az elmozdulás, hossz és a nyírószilárdság szorzata. Adott rúd szükséges keresztmetszete a rúderő és a hossz szorzatának a húzószilárdsággal képzett hányadosa. Ez alapján már felírható a két probléma hasonló LP-formulával. Természetesen az analógia az egyszerűbb eseteknél áll fenn, összetett feladatok esetén a lineáris programozási feladat eltérő.

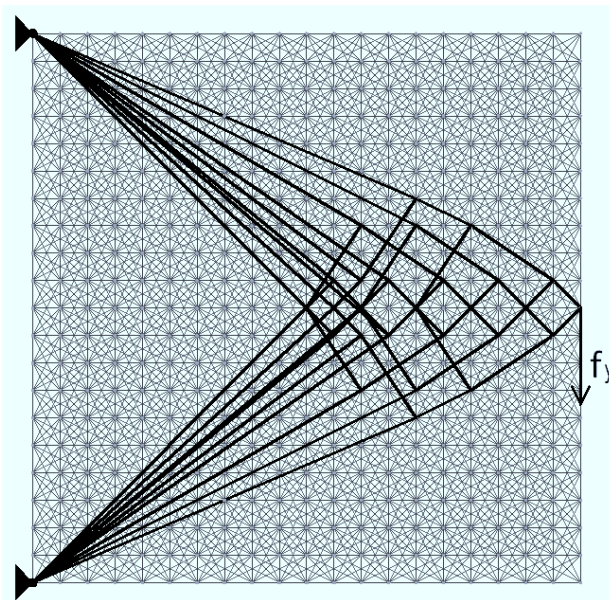
A töréskép optimalizálásnál az egyenleteket pontokra és élekre írjuk fel, az élekkel határolt merev testek egyensúlya implicit módon teljesül. Ezáltal a számításba vett lehetséges törésképek száma jelentős mértékben megnő azokhoz a módszerekhez képest, ahol poligonokkal határolt merev testek képezik a munkák vagy erők egyensúlyának alapját pontok és élek helyett. E megközelítés további előnye, hogy a megoldás kevésbé érzékeny a diszkretizálás módszerére, azaz a ponthálózat felvétele kevésbé determinálja az eredményt, mint például egy háromszögekből álló hálózathál (Gilbert 2007). Az eredményül kapott csúszólapokkal határolt merev testek előállítás is csupán az ábrázoláshoz szükséges, így a mérnökök által megszokott, a tönkremenetel módját jól reprezentáló eredmény kapható (10. ábra).



10. ábra: Töréskép optimalizálás eredménye: a kialakult töréskép (Clarke SD, 2010)

4.1.2. Rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálásának LP-formulája

Vegyünk egy vizsgálati területet, amit n számú ponttal és m számú lehetséges rácsrúddal közelítünk (11. ábra).



11. ábra: Rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálásának diszkretizálása és az eredmény

A rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálásának klasszikus módszerénél alkalmazott LP-formula a következő:

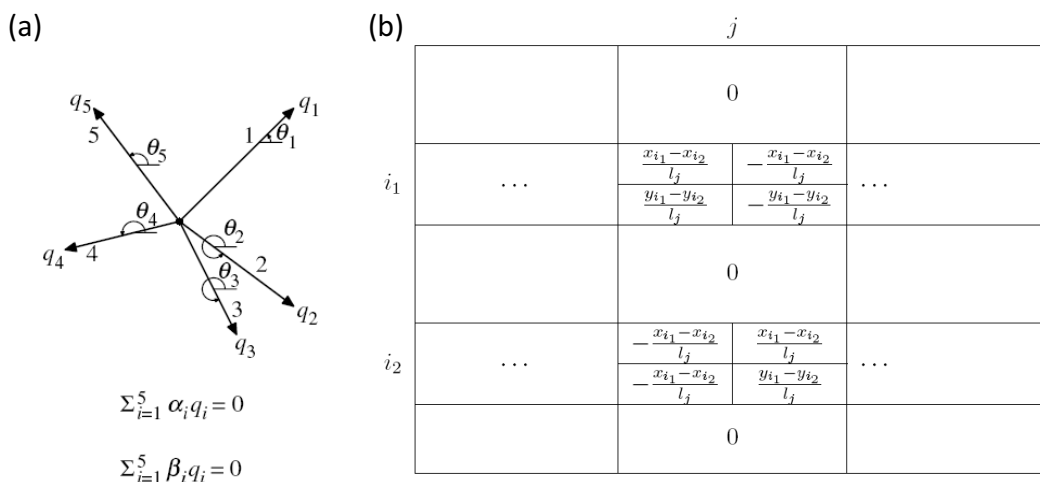
$$\min V = c^T q$$

figyelembe véve, hogy

$$\begin{aligned} Bq &= f \\ q &\geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ahol V a szerkezet teljes térfogata, $q^T = \{q_1^+, q_1^-, q_2^+, q_2^-, \dots, q_m^-, q_i^+, q_i^-\}$ a nyomó és a húzó rúderők az i -ik rúdban, ahol $i = 1, \dots, m$, $c^T = \{l_1 / \sigma_1, l_1 / \sigma_1, l_2 / \sigma_2, \dots, l_m / \sigma_m, l_m / \sigma_m\}$, l_i, σ_i az i -ik rúd hossza és szilárdsága, B egy megfelelő $2n \times m$ egyensúlyi mátrix, $f^T = \{f_1^x, f_1^y, f_2^x, f_2^y, \dots, f_n^y\}$, f_j^x, f_j^y a j -ik csomópontokra ható hasznos teher x és y irányú komponense, ahol $j = 1, \dots, n$.

A B mátrixnak tartalmaznia kell a szomszédsági információkat, azaz mely pontok vannak lehetséges rácsrúddal összekötve. A B mátrix garantálja, hogy a szerkezet statikailag határozott legyen, szerkezetét az 12. ábra (a) része mutatja. Végiggondolható, hogy a B mátrixszal vett szorzat a kívánt egyensúlyi egyenletet adja (12. ábra (b) része). Az i_1 és i_2 sorok közti előjelváltás oka az, hogy egy húzott rúd mind a két végén lévő csomópontot húzza, míg egy nyomott rúd mindkét végén lévő csomópontot nyomja.



12. ábra: Egyensúlyi egyenletek (a) és az egyensúlyi mátrix (b)

Az α_i és β_i értékek az θ_i szög szinusza és koszinusza (12. ábra (a) része), melyek a koordinátákból is számíthatók (12. ábra (b) része):

$$\alpha = \frac{x_{i1} - x_{i2}}{l_i}$$

$$\beta = \frac{y_{i1} - y_{i2}}{l_i} \quad (16)$$

ahol x_{i1} y_{i1} az i -ik él első végpontjának koordinátái, x_{i2} y_{i2} az i -ik él második végpontjának koordinátái.

Ezek alapján az (15) egyenlet a következő formába írható:

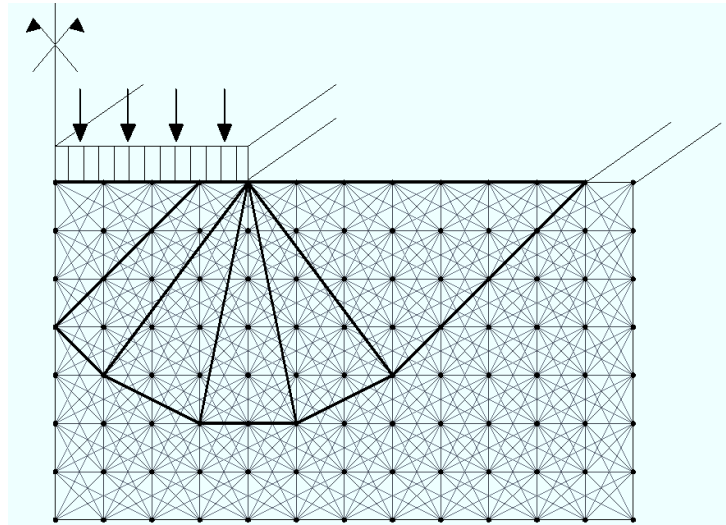
$$\begin{bmatrix} +\alpha_i & -\alpha_i \\ +\beta_i & -\beta_i \\ -\alpha_i & +\alpha_i \\ -\beta_i & +\beta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^+ \\ q_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i1}^x \\ f_{i1}^y \\ f_{i2}^x \\ f_{i2}^y \end{bmatrix} \quad (17)$$

A támaszok oly módon vehetők figyelembe, hogy a csomópontnak megfelelő értéket az f vektorból és a megfelelő sort B mátrixból nem vesszük figyelembe a feladat megoldásakor, így az adott pontban nem feltétlenül vannak egyensúlyban a rúderők; az adott pontra ható erők eredőjével van egyensúlyban a támaszerő. Belátható, hogy a $Bq = f$ egyenlet megoldásai közül bármely q topológia statikailag határozott és ezek közül a minimalizálási feltétel ($\min V = c^T q$) szabja meg azt, hogy a lehetséges topológiák közül a minimális térfogatút tekintjük megoldásnak.

Ily módon felírt feladat a lineáris programozás módszerei segítségével megoldható, ahol a rúderőket tekintjük ismeretlennek, a q vektor az LP-változó (Gilbert 2003). A kapott megoldás 11. ábrán látható.

4.1.3. Töréskép optimalizálás LP-formulája:

Vegyünk egy kvázi-statisztikus terhelésű, tisztán kohéziós sík feszültségállapotban lévő talajt, amit n számú ponttal és m számú lehetséges csúszólappal közelítünk (13. ábra).



13. ábra: A töréskép optimalizálás során alkalmazott diszkretizálás és a kapott eredmény

A klasszikus DLO során alkalmazott LP-formula ekkor a következő:

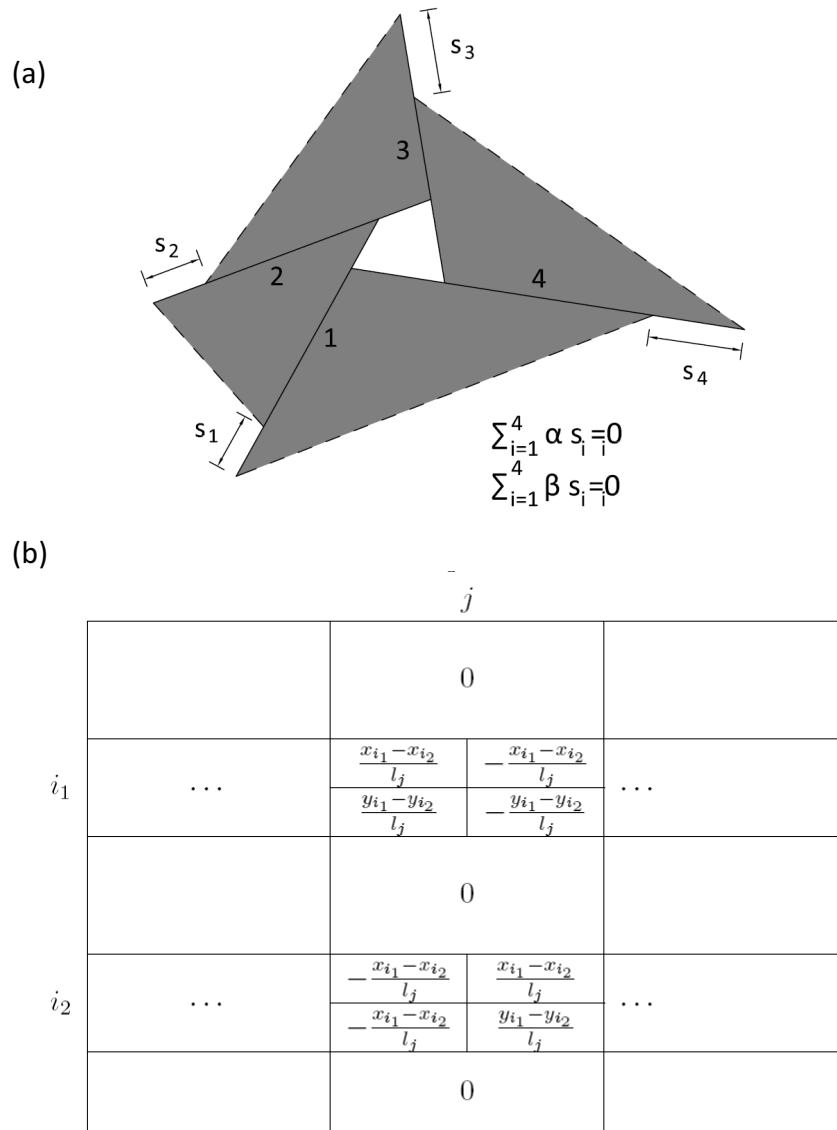
$$\min E = g^T d$$

figyelembe véve, hogy

$$\begin{aligned} Bd &= u \\ d &\geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ahol E a d elmozdulás-rendszeren végzett virtuális belső munka, $d^T = \{s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, \dots, s_m^+, s_m^-\}$, s_i^+, s_i^- a lehetséges csúszólapok közt fellépő virtuális relatív nyírási eltolódás, ahol $i = 1, \dots, m$, $g^T = \{l_1 * c_1, l_1 * c_1, l_2 * c_2, \dots, l_m * c_m, l_m * c_m\}$, l_i, c_i az i -ik lehetséges csúszólap hossza és a kohézió, B egy megfelelő $2n \times m$ kompatibilitási mátrix, $u^T = \{u_1^x, u_1^y, u_2^x, u_2^y, \dots, u_n^x, u_n^y\}$, u_j^x, u_j^y a j -ik csomóponttra alkalmazott virtuális elmozdulás x és y irányú komponense, ahol $j = 1, \dots, n$.

B mátrix garantálja, hogy a kialakuló töréskép kinematikailag határozott legyen (14. ábra (a) része), felvétele az 4.1.2. pontban leírtakhoz hasonlóan történik (14. ábra (b) része).



14. ábra: A kompatibilitási egyenletek (a) és a kompatibilitási mátrix (b)

A vizsgált terület határán lévő merev kapcsolat oly módon vehető figyelembe, hogy a csomópontnak megfelelő értéket f vektorból és a megfelelő sort a B mátrixból nem vesszük figyelembe a programozási feladat megoldásánál. A lehetséges csúszólapok közt fellépő relatív nyírási eltolódást tekintjük ismeretlennek, a d vektor az LP-változó. A külső és belső virtuális munkák egyenlőségéből fakadóan a belső erők munkájából meghatározható a külső erők munkájának értéke, amiből a λ biztonsági tényező számítható (Gilbert 2007). A kapott eredmény a 13. ábrán látható.

A (15) és (18) egyenlet közti párhuzam ily módon szembeűnő. A megoldásuk azonos módon végezhető el. A két módszer hasonlósága táblázatos formában a következő:

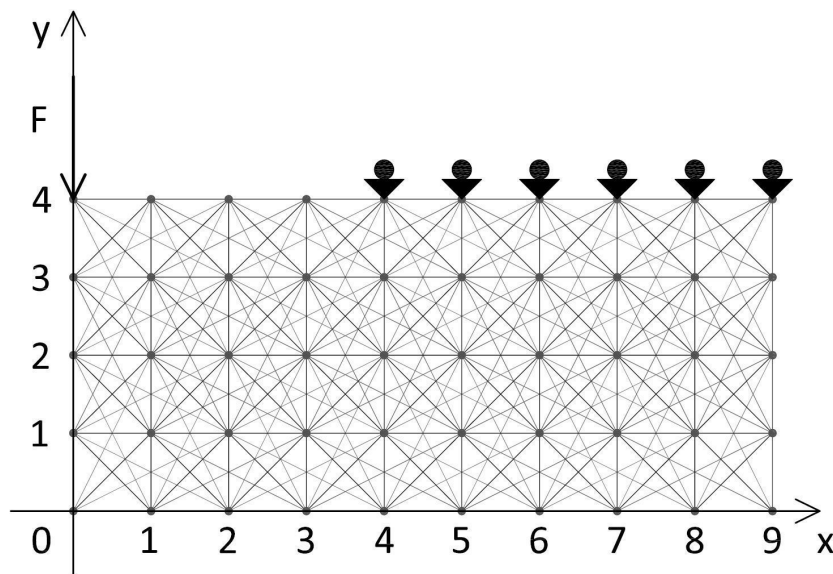
1. Táblázat: A töréskép optimalizálás és a képlékeny topológiai optimalizálás analógiája (Gilbert 2007)

	Rácsos tartó	Talajtörés
LP-változó	rúderők, q	relatív eltolódások, d
Egyűtható mátrix	egyensúlyi mátrix, B	kompatibilitási mátrix, B
Terhek	külső erők, f	csomópont elmozdulás, u
Célfüggvény	térfogat minimalizálása, V	munka minimalizálása, E
Rajzi megjelenítés	Maxwell diagramm	hodográf

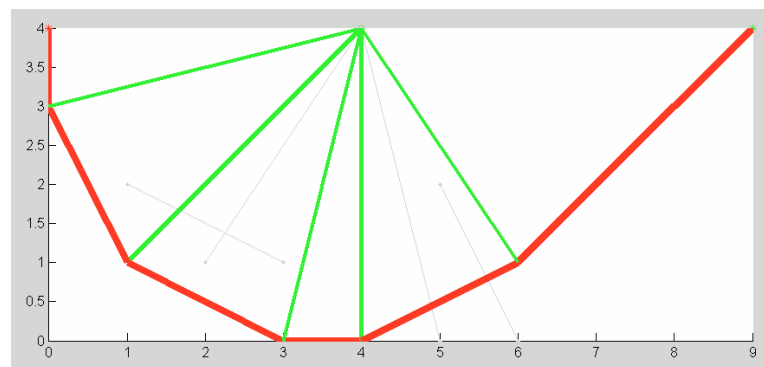
Fontos megjegyezni, hogy a lehetséges csúszólapok vagy rácsrudak keresztezhetik egymást. Ez helytálló feltevés, mivel két geometriailag egymást keresztező, de egymásnak erőt át nem adó rácsrúd, vagy két egymást keresztező csúszólap lehetséges megoldásnak tekinthető. Az egymást keresztező csúszólapok vagy rácsrudak helytállóságát igazolja az a tény is, hogy a metszéspont helyén felvett csomópontban teljesülnek az egyensúlyi vagy kompatibilitási egyenletek, mivel a rudakban vagy csúszólapokban fellépő erők vagy relatív eltolódások kiejtik egymást. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a metszéspontban felvett csomóponttal bővítve a keresési teret, nem kapható jobb eredmény (Gilbert 2007).

4.1.4. Példa az analógia illusztrálására.

Egy egyszerű példával kívánjuk szemléltetni a címben szereplő két számítási eljárás hasonlóságát. Vegyük az alábbi (15. ábra), adott peremfeltételekkel rendelkező rácsos tartó optimalizálási feladatot. Látható hogy a tervezési tartomány felső részén egy meglévő rúd található, azaz a (4,4) és (9,4) pontot összekötő szakaszon végtelen (megfelelően nagy) szilárdságúnak tekinthető rúd található. Azaz a célfüggvényben zérus értékkel szerepelnek e rudak. Az 4.1.2. fejezetben leírt módszer szerinti a szerkezet térfogata 5,90, a megoldást a 16. ábra mutatja be.

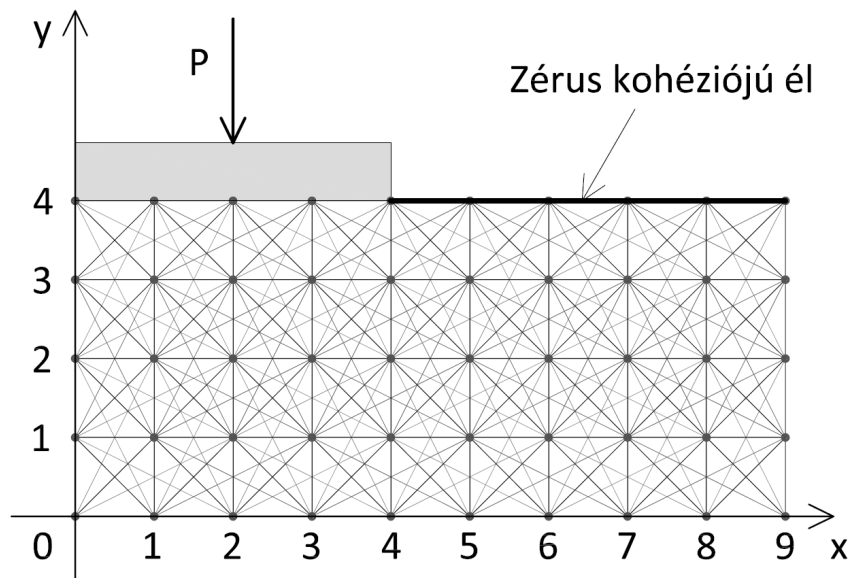


15. ábra: A feladat és a diszkretizálása

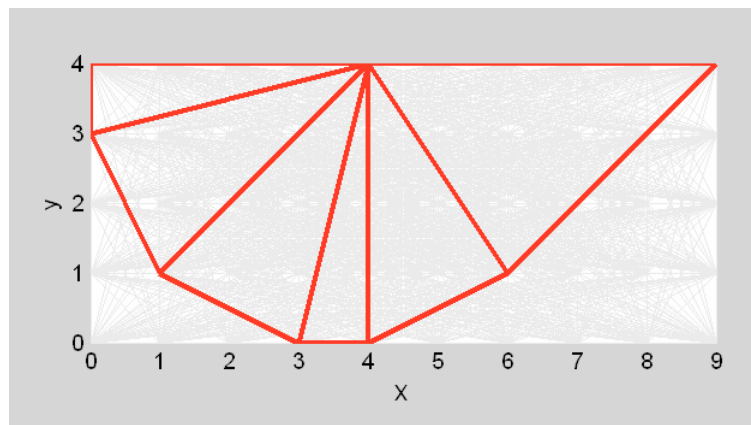


16. ábra: Rácsostartó optimalizálási feladat megoldása

Ezen rácsos tartó optimalizálási feladattal analóg képlékeny határteherbírási feladatot a 17. ábra szemlélteti. Látható, hogy a felszín (a meglévő rúdhoz hasonlóan) nulla kohéziójú területként vesszük figyelembe. A sávalap és a talaj közti kohéziót figyelembe vettük, ez az oka, hogy csak a (4,4) (9,4) szakaszon nulla a kohézió, illetve végtelen a szilárdság. Az 4.1.3. fejezetben ismertetett formulával történő megoldás során az állékonysági biztonság 5.8722-ra adódik (18. ábra).



17. ábra: A töréskép optimalizálási feladat és a diszkretizálása

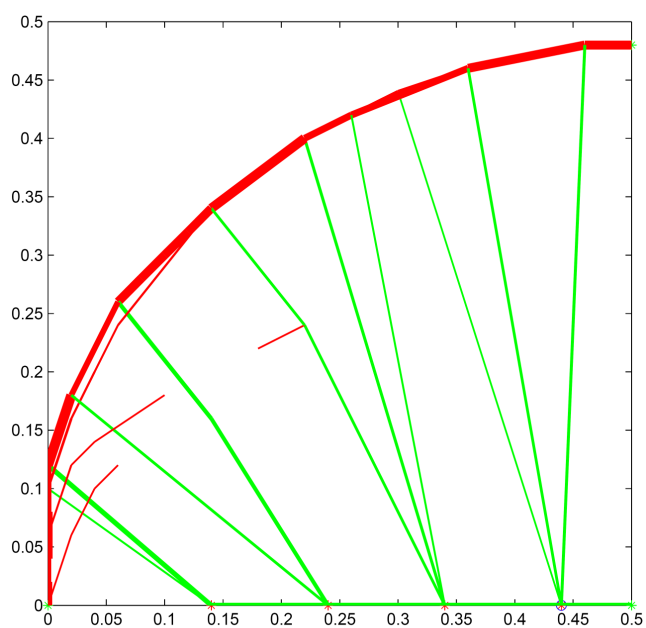


18. ábra: A töréskép optimalizálási feladat megoldása

Látható, hogy mind topológiában mind a változók értékében közel azonos a két megoldás. Ez már csak amiatt is magától értetődő, hogy a felírt LP-feladat mindkét esetben azonos. A két érték közti különbség vélhetően numerikus hiba.

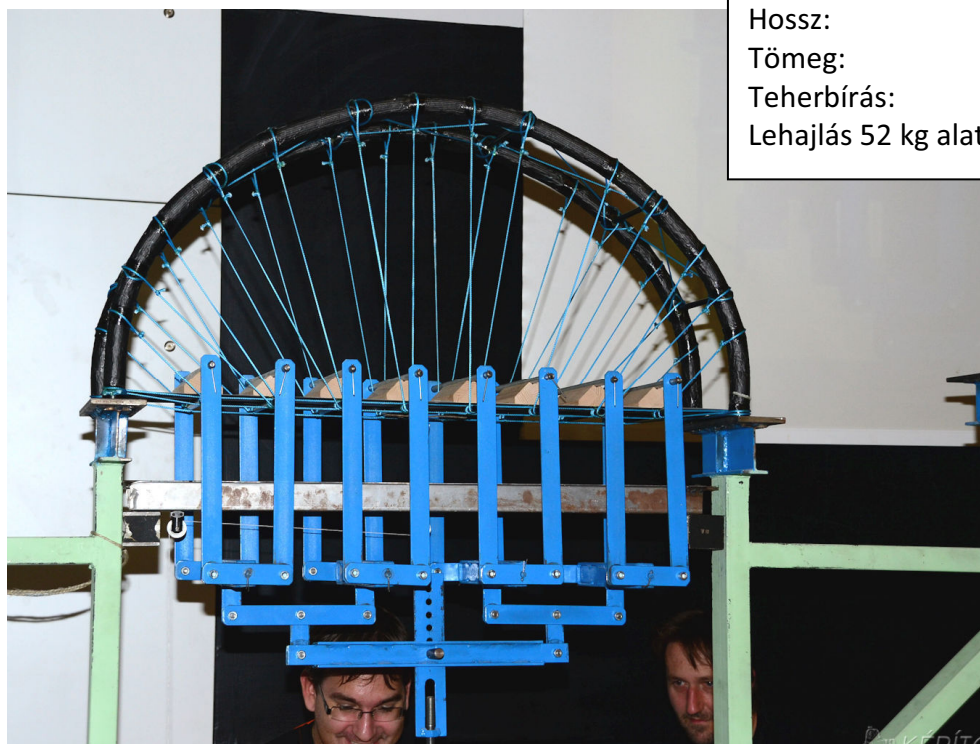
4.1.5. Tartóalak felvétel a gyakorlatban

Érdekességgéppen megemlítjük, hogy a rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálását végző programot is készítettünk, mellyel a 2011. évi Hídépítő versenyre készített hidunk alakfelvételét végeztük el.



19. ábra: Hídépítő verseny, optimált topológia

A 4.1.2. fejezetben bemutatott formulát bővítettük, így a valós szerkezetekhez közelebb álló módszert használtunk. A számításokat 2 és 3 dimenzióban is elvégeztük.



Hossz:	1m
Tömeg:	564 g
Teherbírási:	2,5 kN
Lehajlás 52 kg alatt:	1,59 mm

20. ábra: A megvalósult híd

A tönkremenetel sajnálatos módon nem a főtartókban, hanem az optimálás hatályán kívül eső pályalemezben következett be, így nem tudtuk felmérni, hogy mennyire voltak helytállóak a számításaink. Ennek ellenére a program hasznosnak bizonyult, mivel az igen alacsony súlyhatárt sikerült tartani.

4.2. Kinematikai egyenleteken alapuló LP-formula

A valós mérnöki problémák megoldására összetettebb LP-problémát kell felírni. A legfontosabb igények a következők:

- Mohr-Coulomb anyagmodellre történő kiterjesztés.
- Nem asszociatív folyás figyelembevétele.
- Hasznos és önsúly jellegű terhek felvétele.
- Fix perem, szabad perem, szimmetriatengely típusú peremfeltételek felvétele.
- Merev és rugalmas terhelés felvétele.
- Talajvíz figyelembevétele.
- Támfalak számíthatósága.
- Inhomogén, anizotrop talajok figyelembevétele.

A fenti igények kielégítésére egy összetettebb kinematikai formula felírása szükséges.

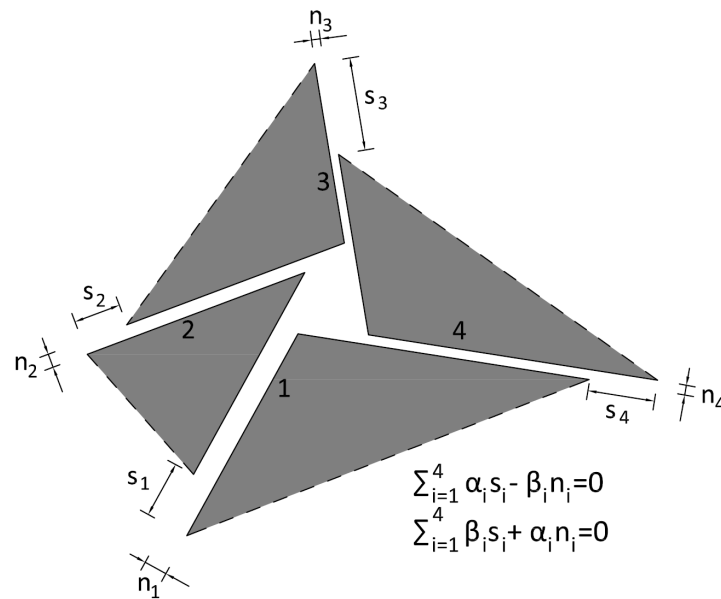
4.2.1. Mohr-Coulomb törési feltétel

Mohr-Coulomb anyagmodellre történő kiterjesztés szükségessé teszi a relatív nyírási eltolódáson kívül a normál irányú relatív eltolódások vizsgálatát is.

Ennek figyelembevételéhez a (18) egyenlet az alábbi formában írható fel:

$$B_i d_i = u_i$$
$$\begin{bmatrix} +\alpha_i & -\beta_i \\ +\beta_i & +\alpha_i \\ -\alpha_i & +\beta_i \\ -\beta_i & -\alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{Ai}^x \\ u_{Ai}^y \\ u_{Bi}^x \\ u_{Bi}^y \end{bmatrix} \quad (19)$$

Ahol α_i és β_i az i -ik csúszólap x és y tengellyel bezárt szögének koszinusza.



21. ábra: A kompatibilitási egyenletek

Több lehetőségünk van s és n közti összefüggés megadására. A legegyszerűbb lehetőség az asszociatív folyás, mely szerint:

$$n_i = |s_i| * \operatorname{tg}(\phi) \quad (20)$$

Amennyiben szükséges a nem asszociatív folyás vizsgálata, a következő összefüggés javasolt, mely biztosítja s és n függetlenségét, valamint azt hogy n pozitív legyen és a Mohr-Coulomb törési feltétel teljesüljön:

$$N_i p_i - d_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \operatorname{tg}(\phi) & \operatorname{tg}(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^1 \\ p_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

ahol N_i a helyi képlékenységi mátrix, $p_i = \{p_i^1, p_i^2\}$, p_i^1 és p_i^2 a képlékeny alakváltozásokat leíró változók, ahol p_i^1 , és $p_i^2 \geq 0$.

4.2.2. Állandó és változó terhek

A (18) egyenlet felírásával célunk a belső erők által a d elmozdulás-rendszeren végzett munka minimalizálása volt. Ez a feltétel implicit módon tartalmazza azt a feltételt, hogy a hasznos terhek által végzett munka is minimális legyen. Több probléma tartalmaz olyan

terheket, melyek parciális biztonsági tényezője ismert és az állékonysági biztonság számításánál a többi tehertől külön kezelendőek.

Állandónak nevezzük azokat a terheket melyek nagyságát a törés pillanatában ismertnek tekintjük, ilyen lehet például egy alap alatti földtömeg súlya. Változónak nevezzük azokat a terheket, melyek nagyságát a törés pillanatában keressük, például a sávalapon megoszló terhelés.

A számításkor kapott biztonsági tényező (jele: λ) nem más, mint a törést előidéző teher nagyságának és az általunk megadott változó teher nagyságának hányadosa. Az állandó terhek általunk megadott nagysága és a változó terhek λ szorosa okoz törést.

A számítás szempontjából állandó és változó terhek nem összetévesztendőek a hatások tartósságuk szempontjából történő EuroCode szerinti besorolással, mindössze egy számítási fogáshoz kapcsolódó elnevezések.

Ezek alapján szükséges, hogy a külső és belső virtuális munkák egyensúlyát explicit tartalmazza az alkalmazott LP-formula:

$$\lambda f_L^T d = -f_D^T d + g^T p, \quad (22)$$

ahol $f_D^T = \{f_{D1}^s, f_{D1}^n, f_{D2}^s, f_{D2}^n, \dots, f_{Dm}^n\}$ és $f_L^T = \{f_{L1}^s, f_{L1}^n, f_{L2}^s, f_{L2}^n, \dots, f_{Lm}^n\}$ és $f_{Di}^s, f_{Di}^n, f_{Li}^s, f_{Li}^n$ az i -ik élre ható nyíró és normál irányú állandó és változó teher, ahol $i = 1, \dots, m$.

Változó terhek esetén az $u = 0$ feltevéssel élhetünk. A feladat lineáris volta miatt nem érzékeny az átskálázásra, ezért az egyenletek közé felvehető, hogy

$$f_L^T d = 1 \quad (23)$$

A szakirodalom ezekre gyakran hivatkozik önsúlyként és hasznos teherként, ebből ered a (22) egyenlet indexelése is: *dead load* és *live load*. Bár ez a megfogalmazás nem teljesen helytálló ugyanis az önsúly jellegű terhek is lehetnek változók pl.: rézsú vizsgálata, illetve állandók pl.: sávalap alatti talajtörés. A felhasználó feladata eldönteni melyik terhet

tekinti állandónak, és melyik teher változó, azaz melyik teherre vonatkoztatva kíváncsi az állékonyságra. Ehhez kapcsolódóan a terhek besorolásáról olvashatunk a 7.4. fejezetben.

4.2.3. Megoszló terhek

A megoszló terhek két típusba sorolhatók: merev és rugalmas terhelés. Merev teher esetén megkötjük, hogy a terhelt élek azonos normál irányú eltolódást szenvedjenek, azaz, ha az A , B , C és D pontokat összekötő lehetséges csúszólapokon hat a teher és a pontok egy egyenesen helyezkednek el az $n_{AB} = n_{BC} = n_{CD}$ feltételezéssel élhetünk. Rugalmas terhelés esetén a normál irányú eltolódásokra nem alkalmazunk ilyesfajta megkötést. Merev tehernek tekinthető például egy sávalap, rugalmas tehernek tekinthető a víznyomás.

4.2.4. Önsúly jellegű terhek

Mivel a terhek alakváltozás jellegű relatív eltolódásokra hatnak, ezért a terhet feszültségként kell megadni. Az önsúly meghatározásánál a

$$\sigma_z = z^* \gamma \quad (24)$$

összefüggés alkalmazandó, ahol σ_z az önsúlyból származó függőleges feszültség, z a felszíntől számított mélység és γ a talaj térfogatsúlya. Mindez egy lehetséges csúszólapra következőképpen írható fel: a csúszólap fölötti sávban lévő földtömeg súlyának s és n irányú komponense irrandó f_D -be, azaz:

$$f_D^T d = \begin{bmatrix} -W_i \beta_i & -W_i \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix}, \quad (25)$$

ahol W_i az i -ik lehetséges csúszólap fölötti sávban lévő földtömeg súlya.

A (25) összefüggésben az állandó terhek egyenlők az önsúly jellegű terhekkel, amennyiben az önsúly változó tehernek tekinthető az f_L^T vektorba irrandó az önsúly értéke.

4.2.5. Földrengés

Hasznos teherként vehető fel a földrengésekből származó vízszintes teher is, és tömegező lévén az önsúly jellegű terhekkel analóg módon kezelendő. A vízszintes és

függőleges gyorsulásból származó teher az önsúly W vektorának konstans szorosa. Ily módon az EuroCode által megkövetelt földrengésre való méretezés is elvégezhető.

4.2.6. Peremfeltételek

A peremfeltételek megadásához a peremfeltétel helyén lévő lehetséges csúszólapok tulajdonságait kell módosítani, azaz az élhez tartozó értékeket módosítani az LP-formulában szereplő megfelelő vektorokban és/vagy mátrixokban.

- Fix perem: Ez az alapértelmezett tulajdonság, nem igényel változtatást.
- Szabad perem: A kohézió értékét zérusra kell felvenni a (18). egyenletben szereplő g vektorban, az él nem szerepel a 21. egyenletben, így s_i és n_i értéke meghatározatlan lesz.
- Szimmetriatengely: A kohézió és a belső súrlódási szög értéke zérus, (21) egyenletben szereplő n_i értékét zérusnak tekintjük.

4.2.7. Teljes LP-formula felírása

Az eddigieket összefoglalva vehetünk egy kvázi-statisztikus terhelésű Mohr-Coulomb törési feltételnek eleget tevő, sík feszültségállapotban lévő talajt, amit n számú ponttal és m számú lehetséges csúszólappal közelítünk. A teljes primál kinematikai LP-formula a következő:

$$\min \lambda f_L^T d = -f_D^T d + g^T p$$

figyelembe véve, hogy

$$Bd = 0$$

$$Np - d = 0$$

$$f_L^T d = 1$$

$$p \geq 0 \quad (26)$$

ahol f_L és f_D a hasznos és önsúly jellegű terheket tartalmazó vektorok, d az élekhez tartozó relatív eltolódások, $d^T = \{s_1, n_1, s_2, n_2, \dots, n_m\}$, s_i, n_i az i -ik élhez tartozó relatív

virtuális eltolódás nyíró és normál irányú komponense, ahol $i = 1, \dots, m$, $g^T = \{l_1 * c_1, l_1 * c_1, l_2 * c_2, \dots, l_m * c_m, l_m * c_m\}$, l_i, c_i az i -ik lehetséges csúszólap hossza és a kohézió, B egy megfelelő $2n \times 2m$ kompatibilitási mátrix, N egy megfelelő $2m \times 2m$ képlékenységi mátrix, p_i a p^1_i és p^2_i a képlékeny alakváltozásokat leíró változókat tartalmazó vektor, ahol p^1_i és $p^2_i \geq 0$.

Ebben a feladatban p vektor, d vektor és λ az LP-változók.

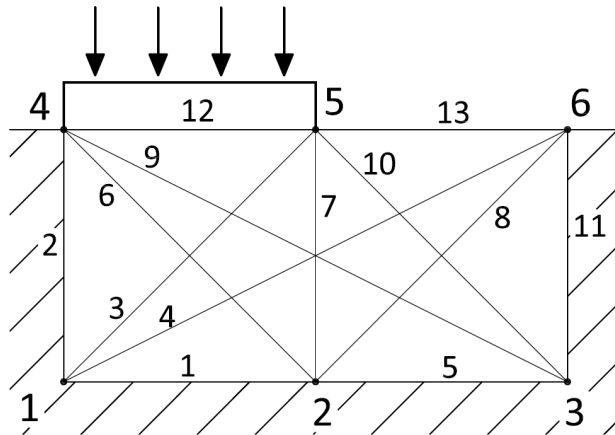
4.3. Töréskép optimalizálás Open Office Calc segítségével

Az LP feladatok megoldásáról nem voltak előismereteink, mivel a konvex optimalizálás nem része az egyetemi matematika oktatásnak. Az LP-feladat felírásának elve némileg szokatlan lehet egy átlag mérnökhallgatónak, ezért, hogy megfelelő képet adhassunk az LP-formula felépítéséről egy egyszerű feladatot elkészítettünk Open Office Calc segítségével (3. Táblázat). Amelyben látható a teljes együttható mátrix, a célfüggvény, az egyenlőségek, a jobboldal vektor, a változók értékei a megoldás után és a célfüggvény értéke. E táblázat segítségével könnyebb képet kapni a töréskép optimalizálás „működéséről”, nekünk is nagy segítséget jelentett a dolgozat írásának kezdeti szakaszában, amikor még csak „ismerkedtünk” a problémával.

A feladat egy 2×3 ponttal és azokat összekötő 13 egyenessel közelített terület. A kohézió és az önsúly értéke egységnyi, a belső súrlódási szög 5° . A két oldalsó és az alsó peremet fixnek, a felső peremet szabadnak tekintjük, a felső él bal fele terhelt egységnyi erővel. A megoldás első lépése a pont- és él-listák előállítása, melyeket a 2. Táblázat tartalmaz, ebben látható, hogy egymást átfedő élek nincsenek, melynek oka, hogy ezek bonyolítanak a peremfeltételek megadását.

2. Táblázat: Pont és él lista

Pontok		
sorszám	x	y
1	0	0
2	1	0
3	2	0
4	0	1
5	1	1
6	2	1



Élek										
Él sorszám	kezdőpont			végpont			él tulajdonságok			szabad perem-e
	sorszám	x	y	sorszám	x	y	hossz	szinusz	koszinusz	
1	1	0	0	2	1	0	1,00	-1,00	0,00	nem
2	1	0	0	4	0	1	1,00	0,00	-1,00	nem
3	1	0	0	5	1	1	1,41	-0,71	-0,71	nem
4	1	0	0	6	2	1	2,24	-0,89	-0,45	nem
5	2	1	0	3	2	0	1,00	-1,00	0,00	nem
6	2	1	0	4	0	1	1,41	0,71	-0,71	nem
7	2	1	0	5	1	1	1,00	0,00	-1,00	nem
8	2	1	0	6	2	1	1,41	-0,71	-0,71	nem
9	3	2	0	4	0	1	2,24	0,89	-0,45	nem
10	3	2	0	5	1	1	1,41	0,71	-0,71	nem
11	3	2	0	6	2	1	1,00	0,00	-1,00	nem
12	4	0	1	5	1	1	1,00	-1,00	0,00	igen
13	5	1	1	6	2	1	1,00	-1,00	0,00	igen

A dolgozatunkban felírt LP-feladat 7 alapvető részből áll:

- Együttható mátrix
- Változók
- Célfüggvény vektora
- Jobb oldal vektora

- Operátorok
- Célfüggvény értéke
- Változók értékére történő megkötések

A teljes LP-feladatot a 3. Táblázat tartalmazza. A következőkben az egyes sorokra illetve oszlopokra a *neveik* alapján fogunk hivatkozni, melyeket dőlt betűvel szedünk. A tartományokra az *együttható mátrix*sal egy sorban illetve oszlopban lévő sorszámokkal hivatkozunk.

4.3.1. Változók

Az 4.2.7. fejezetben leírtaknak megfelelően a változók az adott élre vonatkozó s_i , n_i , p_i^1 , p_i^2 azaz d és p vektor. Az 3. Táblázat *sorszám* sorában találhatóak az i értékek, alatta pedig a *tulajdonság* sorban, az hogy s , n , p^1 vagy p^2 értéket tartalmaz-e az oszlop. A megoldáskor kapott eredmények a *változók* sorban találhatóak.

4.3.2. Célfüggvény vektora és értéke

Célunk az LP-feladat megoldásával az, hogy a változók és a célfüggvény vektorának szorzata azaz a célfüggvény értéke minimális legyen. A célfüggvény vektora (*célfüggvény vektor* a 3. Táblázatban) jelen esetben két részből áll. Az 1-26. oszlop tartalmazza az önsúly normál és nyíró irányú vetületét, azaz f_D vektort. A 27-52. oszlop pedig tartalmazza az i . él hosszának és kohéziójának szorzatát, azaz g vektort. A *célfüggvény értéke* megadja az állékonysági biztonságot azaz λ -t melynek értéke jelen esetben 8,37.

4.3.3. A változók értékére történő megkötések

Jelen feladatban s és n értéke $+\infty$ és $-\infty$ között változhat, p^1 , p^2 viszont egy nem negatív szám. Ezeket a megkötéseket az Open Office Calc megoldójában tudjuk megadni.

4.3.4. Az együttható mátrix

Az együttható mátrix négy részből áll: az 1. sor tartalmazza az $f_L^T d = 1$ megkötést. Az 1. sor 1-26. oszlopában helyezkedik el az f_L vektor, a további cellák pedig zérus értékeket tartalmaznak.

A 2-13. sor és 1-26. oszlop a B mátrixot reprezentálja, a 27-52. oszlop zérus elemei fejezik ki a $Bd = 0$ megkötést.

A 14-39. sor tartalmazza az $Np - d = 0$ megkötést. Látható hogy az N mátrix a 27-52. oszlopban található, így a p értékekkel szorzódik a megoldás során. A d -t pedig az 1-26. oszlopban lévő, főátlóban található -1 értékek adják, mivel ezek az értékek a d vektorral szorzódnak.

Az utolsó sor jelen esetben csupa zérus elemet tartalmaz, melynek funkciója a már említett virtuális elmozdulásokra történő megkötések tárolása, azaz ha n_i egyenlő n_j -vel akkor az utolsó sor $2i$ -ik helyére -1 , a $2j$ -ik helyére 1 kerül, így biztosítva n_i és n_j egyenlőségét. Természetesen, ha a feladat több megkötést kíván meg, további sorokkal egészíthető ki az együttható mátrix.

4.3.5. A jobb oldal és az operátorok

Megkötéseken jelen esetben a jobb oldal viszonyát értjük az együtthatómátrix és a változók értékének szorzatával. Az *Operátorok* oszlopban láthatóak a feladatban szereplő egyenlőségek. A 36-39. sorban F -ek szerepelnek melyek jelentése free, azaz az 4.2.6. fejezetnek megfelelően ezekben a sorokban nem kell teljesülnie a felírt egyenlőségeknek. Ezek a sorok akár törölhetőek is az LP-feladatból, de a mátrixok és vektorok indexelését megkönnyítendő érdemes bennhagyni őket a feladatban, és a megkötéseket tartalmazó vektorban megadni, hogy ezeknek a soroknak nem kell teljesülniük. A jobb oldal első eleme 1 , ami a $f_L^T d = 1$ megkötésből következik, a többi értéke zérus, mivel a többi megkötés nullákat tartalmaz.

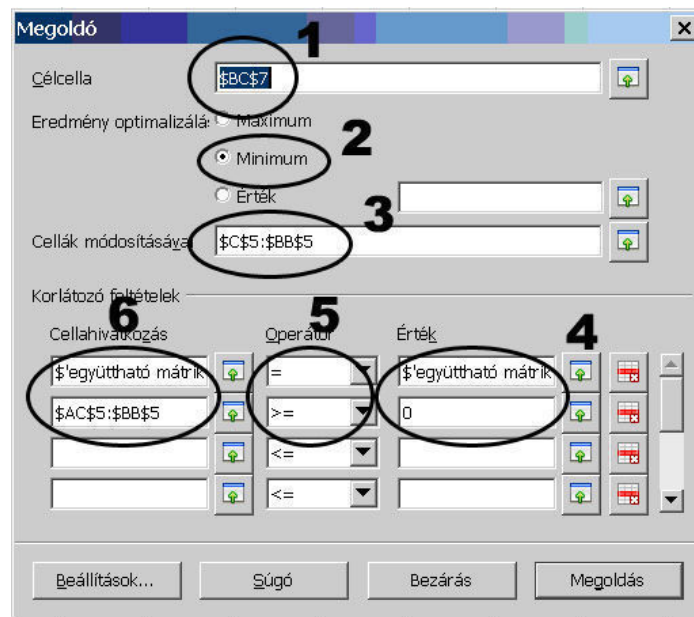
4.3.6. Open Office Calc Megoldó

A Megoldó parancsra kattintva megadhatjuk a feladatot.

1. a célfüggvény vektorának és a változók kezdeti értékének szorzatát summázó cella, azaz a célfüggvény értéke,
2. a célfüggvényt minimalizáljuk,
3. a változókat tartalmazó cellák,

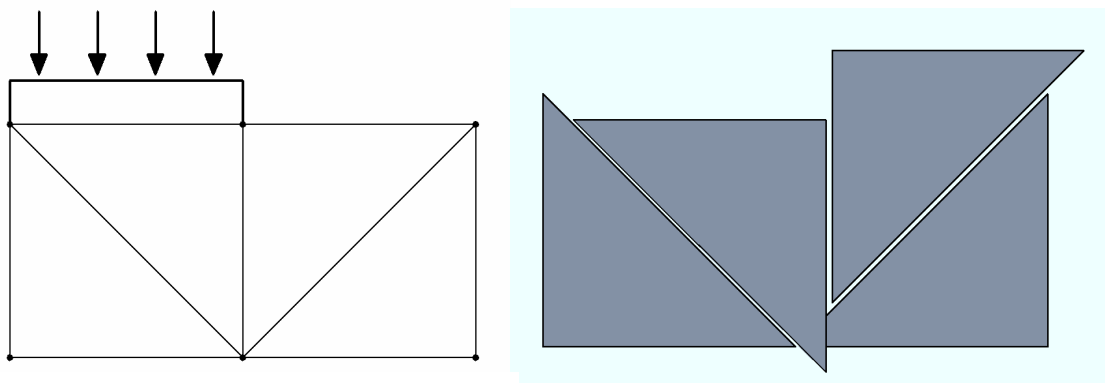
4. a jobb oldal vektora
5. az operátorok
6. az együttható mátrix és a változók kezdeti értékének szorzata.

A korlátozó feltételek 2. sora tartalmazza azt, hogy p^1 , p^2 nagyobb vagy egyenlő, mint nulla.



22. ábra: Open Office Calc Megoldó

A megoldásra kattintva megkapjuk a célfüggvény értékét azaz 8,37-et, és a változók értékét, melyeket az 3. Táblázat *változók* sora tartalmaz. Az eredményeket ábrázolva könnyen képet kaphatunk a tönkremeneteli módról (23. ábra).



23. ábra: Tönkremeneteli mód

4.4. A módszer hatékonysága

A pontosság a diszkretizálás mértékétől függ, azaz hogy a teret hány pontra osztjuk fel. A kellően pontos eredményhez a lehető legtöbb élet kell figyelembe venni, azaz a pontok összes lehetséges kombinációját elő kell állítani. Az egymást fedő élek törölhetők, viszont a keresztező élek szükségesek. A pontosság és a diszkretizálás kapcsolatára külön kitérünk a 0. fejezetben. Mindemellett a probléma mérete rohamosan növekszik a pontok számának növekedésével. Példaként egy átlagosnak mondható kiosztású ponthálózatot felvéve, egy 30 m x 10 m terület 50 cm-es raszterrel: 60 x 20 pont, azaz 1200 pontot jelent, ami megközelítően 720 000 él. Ez a rövid kis példa is jól szemlélteti, hogy általában milyen nagy méretű problémákról van szó. Ezek a mérnöki gyakorlatban is használt személyi számítógépeken az úgynevezett oszlopgenerálás (talajok képlékeny törőteher számításánál *addaptive connecting scheme*, rácsos tartók estén a *member adding method*) segítségével oldhatóak meg, melyek heurisztikus elvek a számítási idő és a memóriaigény csökkentésére. Egy iterációs eljárásról van szó, mely során először egy ritkább lehetséges él-hálózatra oldjuk meg a feladatot, majd élek hozzáadásával növeljük a keresési teret. Erről a témáról részletesen olvashatunk Gilbert és Tyas 2003-as cikkében.

A módszer végrehajtásához elengedhetetlenül szükséges előállítani a (26) egyenlet duálisát, azaz egy egyensúlyi egyenleteken alapuló LP-formulát, amit a 4.5. fejezet tárgyal.

4.5. Egyensúlyi egyenleteken alapuló LP-formula

4.5.1. LP-formula

A dualitás elvei alapján a 6.7-es egyenlet duálisa előállítható: ismételten vegyünk egy adott kvázi-statisztikus terhelésű Mohr-Coulomb törési feltételnek eleget tevő sík feszültségállapotban lévő talajt, amit n számú ponttal és m számú lehetséges csúszólappal közelítünk. A teljes duális egyensúlyi LP-formula a következő:

$$\max \lambda$$

figyelembe véve, hogy

$$B^T t + \lambda f_L - q = -f_D,$$

$$N^T q \leq g, \quad (27)$$

ahol $t^T = \{t_1^x, t_1^y, t_2^x, t_2^y, \dots, t_n^x, t_n^y\}$, t_i^x, t_i^y az x és y irányú ekvivalens csomóponti erők, ahol $i = 1, \dots, n$, melyek u -vektorral munka-kompatibilis általánosított erők, q az élekre ható nyíró és normálirányú terhek, $q^T = \{S_1, N_1, S_2, N_2, \dots, S_m, N_m\}$ ahol S_i és N_i az élre ható nyíró és normálirányú belső erők és $i = 1, \dots, m$.

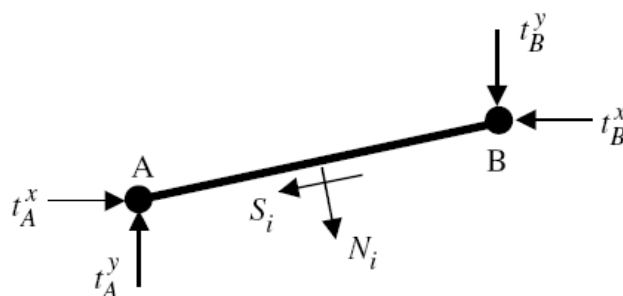
Az ismeretlenek a λ , S_i és N_i , célunk λ maximalizálása miközben a lehetséges csúszólapok egyikében sem megengedett a Mohr-Coulomb törési feltétel megsértése.

Az LP-formula részletesen kifejtve, egy adott csúszólapra:

$$B_i^T t_i + \lambda f_{Li} - q_i = -f_{Di}$$

$$\begin{bmatrix} +\alpha_i & +\beta_i & -\alpha_i & -\beta_i \\ -\beta_i & +\alpha_i & +\beta_i & -\alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_A^x \\ t_A^y \\ t_B^x \\ t_B^y \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} f_{Li}^s \\ f_{Li}^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_i \\ N_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_{Di}^s \\ f_{Di}^n \end{bmatrix} \quad (28)$$

A fenti összefüggés mechanikai megfontolások alapján is könnyen belátható (24. ábra), egy él vetületi egyenleteit fejezik ki.



24. ábra: Adott élre ható erők (Gilbert 2007)

A Mohr-Coulomb törési feltétel részletesen kifejtve, egy adott csúszólapra (29)

$$N_i^T q_i \leq g_i,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & tg(\phi) \\ -1 & tg(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i \\ N_i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} cl_i \\ cl_i \end{bmatrix}, \quad (29)$$

A lineáris egyenletek megoldására méretük miatt a belsőpontos módszereket ajánljuk, melyek előnye, hogy a primál és a duál feladatot párhuzamosan oldják meg, így ha a primál formula ismert és megoldott t_j^x, t_j^y, S_i és N_i értékeit ismertnek tekinthetjük.

A 4.2 fejezetben bevezetett képlékeny alakváltozásokat leíró változókat mesterségesen vettük fel, fizikai tartalmuk nincs, viszont garantálják a Mohr-Coulomb törési feltétel teljesülését. Ezt könnyen beláthatjuk, ha a duál feladat alapján előállítjuk a primál feladatot. A (29) egyenletből áll elő a (21) egyenlet. Hasonló megfontolások alapján szükséges az is, hogy a (26) egyenletben a belső munka a képlékeny alakváltozásokat leíró változók és a kohézió szorzata legyen.

4.5.2. Az oszlopgeneráláson alapuló módszer

Mint már utaltunk rá, a kellően pontos eredmény eléréséhez igen nagyméretű lineáris programozási feladatokat kell megoldanunk, amelyek még a legmodernebb módszerekkel is sok időt igényelnek. Megmutatható, hogy egy lineáris programozási feladat $m_{all} = \frac{n(n-1)}{2}$ számú lehetséges csúszólapot tartalmaz, ami az egymást átfedő esetek kizárásával sem csökkenthető jelentősen.

A feladat személyi számítógépeken való megoldhatóságának érdekében nagymértékben (több nagyságrenddel $m \ll m_{all}$) csökkenteni kell az LP-változók számát. Így azonban a tényleges törőteher jelentős felülbecslésére kell számítanunk. Az ebből adódó hiba elkerülésére az oszlopgenerálás kínál megoldást, melynél korlátozott számú lehetséges csúszólapokat tartalmazó LP feladatot oldunk meg, majd az eredményt egy iterációs eljárással javítjuk. Gilbert, 2003 javaslata szerint a csúszólapok hosszát maximalizálva csökkenthetjük hatékonyan a lehetséges csúszólapok számát, ha a hosszat $\sqrt{2}$ -ben maximalizáljuk (egységnyi távolságokban lévő pontok esetén) megközelítőleg $m = 4n$ lehetséges csúszólapot kapunk, ami az előzőekhez képest jelentős csökkenés. Majd $\tilde{m} = m_{all} - m$ számú lehetséges csúszólapból kiválasztjuk azokat, amelyeket a lineáris programozási feladathoz adunk, és újból megoldjuk a feladatot. Mivel minden

pontban ismerjük t_{ij}^x , t_{ij}^y értékét, minden élben számítható $\tilde{S}_i$ és $\tilde{N}_i$ ahol:

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_i \\ \tilde{N}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\alpha_i & +\beta_i & -\alpha_i & -\beta_i \\ -\beta_i & +\alpha_i & +\beta_i & -\alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_A^x \\ t_A^y \\ t_B^x \\ t_B^y \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} f_{Li}^s \\ f_{Li}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{Di}^s \\ f_{Di}^n \end{bmatrix} \quad (30)$$

és $\tilde{S}_i$ és $\tilde{N}_i$ fizikai tartalma azonos a 7.2. képletben szereplő S_i és N_i -vel, viszont nem LP-változó. Így m élre számítható S_i és N_i ; $\tilde{m}$ élre számítható $\tilde{S}_i$ és $\tilde{N}_i$, ily módon az összes lehetséges élre ellenőrizhető a Mohr-Coulomb törési feltétel (7.3.). Azokat az éleket, amik még nem részei az LP-problémának, és $\tilde{S}_i$ és $\tilde{N}_i$ megsértik a Mohr-Coulomb törési feltételt, sorba kell rendezni aszerint, hogy „mennyire” sérti meg azt, majd ezen élek egy részét hozzáadjuk az LP-problémához. Az újonnan hozzáadott élek számát oly módon érdemes megválasztani, hogy 5%-a legyen a kiindulási LP-problémában szereplő élek számának. Ez egy viszonylag egyszerű heurisztikának tekinthető. Természetesen más eljárások is kidolgozhatóak, de ez az egyszerű módszer is biztosítja, hogy az így kapott megoldás (kellő számú iterációt végrehajtva) azonos legyen a globális minimummal, és jelentősen csökkenjen a futási idő és a szükséges memória.

A fentiekben leírt lépéseket ismételve olyan iterációs eljárás kapható, mely segítségével nagy mennyiségű pontból álló feladatok is elfogadható időn belül megoldhatóvá válnak. A módszer lépései a következők:

- I. A folytonos probléma diszkretizálása n ponttal.
- II. A pontok összekötése kis számú, de a problémát jól reprezentáló éllel.
- III. Az LP-probléma felírása az aktuális méretű problémára.
- IV. LP-probléma megoldása.
- V. A (28) és (30) egyenlet alapján az összes m_{all} élre ellenőrizzük a Mohr-Coulomb törési feltételt.
- VI. Abban az esetben, ha volt él, ami megsértette a feltételt, az attól legtávolabb álló élek egy részét hozzáadjuk az LP-problémához, majd a III. lépéstől folytatjuk, ha nem volt ilyen akkor tovább lépünk.

- VII. A meghatározott eredmény a teljes méretű probléma megoldásával megegyező.

Az oszlopgenerálás használatával rácsos tartók esetén (jelen esetben lehetséges rácsrudakat adunk az LP-feladathoz: *member adding method*) mind a futási idő, mind a szükséges memória jelentősen csökkenthető. Az oszlopgenerálás használatával 350 000 lehetséges él esetén a futási idő mintegy 8 %-a a teljes probléma megoldásához szükséges időnek, míg a memóriaigény 1,1 % a teljes problémához viszonyítva. Látható hogy a futási idő egy, a memóriaigény két nagyságrenddel csökken (Gilbert & Tyas, 2003).

4.6. Inhomogén anizotrop talajok

A mérnöki gyakorlatban ritkán találkozunk tökéletesen homogén altalajjal, az esetek túlnyomó többségében a vizsgálatunk tárgya inhomogén talajösszetétel. Az izotróp feltételezés általában elfogadható, bár az alább ismertetett módszerrel anizotrop talajok is vizsgálhatóak.

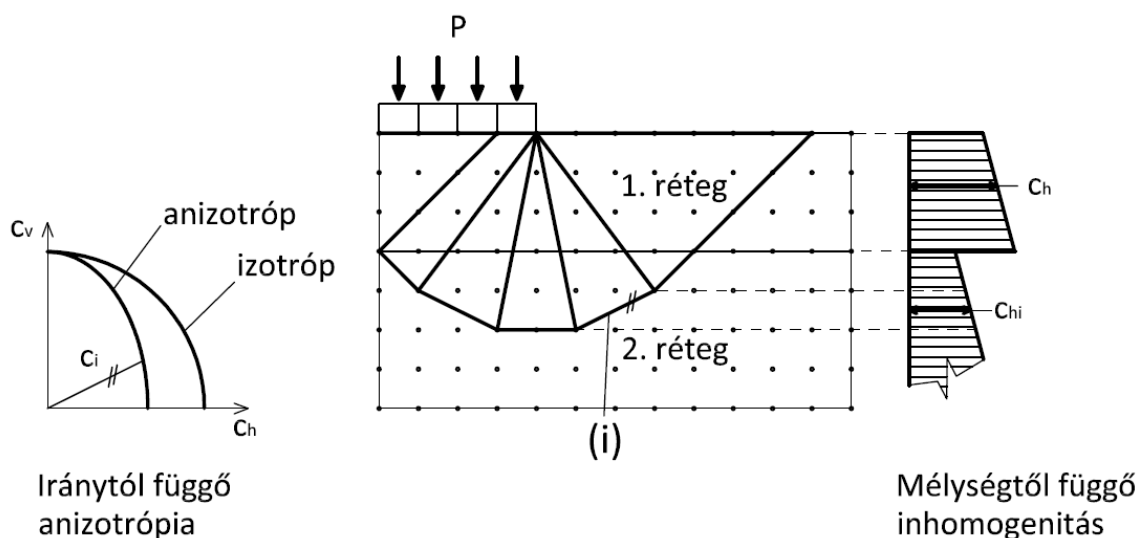
4.6.1. Rétegzett talaj

Számításainkban a réteghatárokat nem metsző lehetséges csúszólapok esetén c_i és φ_i értékét az adott talajréteg talajfizikai jellemzőivel tekintjük azonosnak. Talajréteget metsző esetben c_i értéke a két réteg kohéziójának hossz szerint súlyozott átlaga. A DLO módszere a biztonság értékének felső becslését adja meg, ezért a φ_i értékét oly módon érdemes megválasztanunk, hogy felülbecsülje a valójában meglévő értéket. Az egyszerűség kedvéért a metszett rétegek belső súrlódási szögei közül a legnagyobb értékűt tekintjük a φ_i értékének, így a számítás felső becslés jelleg továbbra is fennáll. Az önsúly számításánál a lehetséges csúszólap fölötti rétegzett talajtömeg súlyát vesszük figyelembe.

4.6.2. Anizotrop talajok

Anizotrop talajok vagy kőzetek esetén a lehetséges csúszólapok talajfizikai jellemzőinek felvételekor a csúszólap irányától függő értéket kell felvenni, tehát ily módon a talaj anizotrop tulajdonsága is figyelembe vehető (Chen, 1975, 1990). Mélységtől függő

inhomogenitás és a csúszólap irányától függő anizotrópia figyelembe vételét a 25. ábra mutatja.



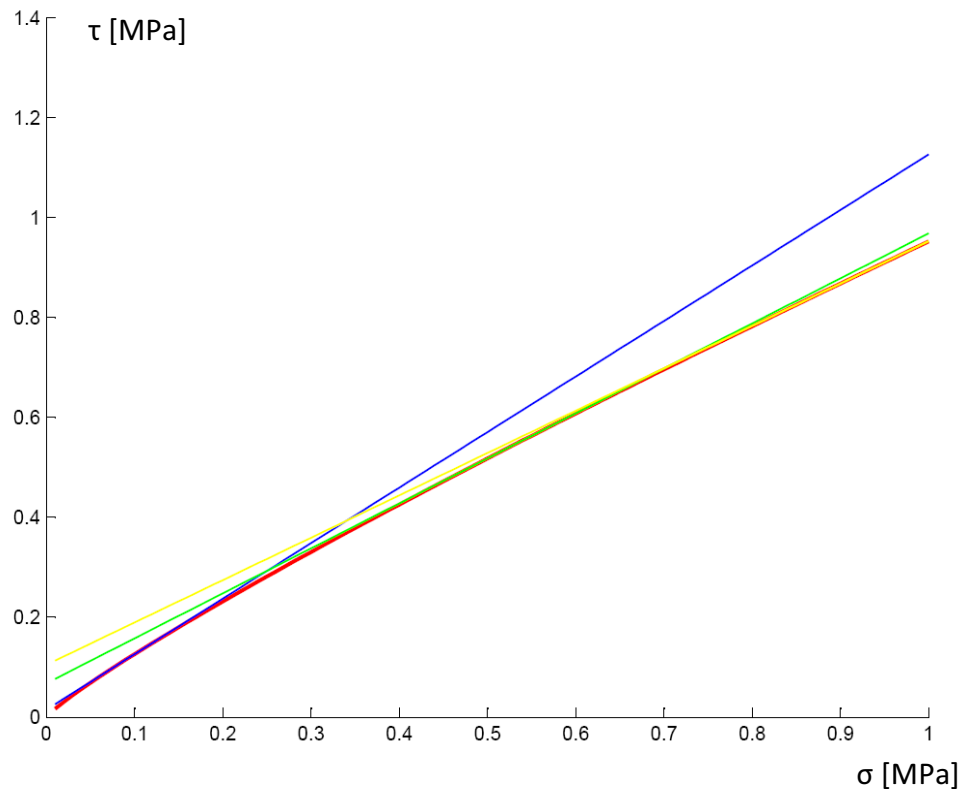
25. ábra: Inhomogén anizotrop talaj

4.6.3. Nemlineáris törési feltétel használata

Eddigi egyenleteinket a legelterjedtebben használt Mohr-Coulomb törési feltételre írtuk fel, bár más törési feltételek is használhatóak, melyeknek az élre ható normálerő és a nyírószilárdság kapcsolatát írják le, és konvexek. E két feltétel teljesülése esetén alkalmazható egy törési feltétel a töréskép optimalizálásban. Nemlineáris törési feltételek esetén vagy nemlineáris programozást használunk, vagy a törési feltételt közelítjük egyenesekkel. A második eset célravezetőbb, mivel a nemlineáris programozási feladatok megoldása sokkal bonyolultabb feladat és számos problémát vet fel.

Példaként a Barton-Bandis törési feltétel közelítését mutatjuk be (26. ábra). Pirossal jelöltük a nemlineáris törési határgörbét, kék, zöld és sárga színnel a közelítő egyeneseket. Nyírószilárdságnak a három egyenes által megadott különböző értékek közül a legkisebbet tekintjük, azaz a nyírófeszültségnek mindhárom közelítő egyenes alatt kell lennie. Az egyeneseket oly módon érdemes felvenni, hogy felülről érintsék a közelítendő függvényt, így a DLO felső becslés jellege nem sérül. A közelítő függvény és a

nemlineáris függvény alatti területek mindössze 0,4%-os eltérést mutatnak, ami kellően pontosnak tekinthető.



26. ábra: Nem lineáris törési feltétel közelítése egyenesekkel

Amennyiben a törési feltétel több egyenesből áll a lineáris (27) törési feltétel a következőképpen módosul:

$$\begin{bmatrix} +1 & \operatorname{tg}(\phi^a) \\ -1 & \operatorname{tg}(\phi^a) \\ +1 & \operatorname{tg}(\phi^b) \\ -1 & \operatorname{tg}(\phi^b) \\ +1 & \operatorname{tg}(\phi^c) \\ -1 & \operatorname{tg}(\phi^c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i \\ N_i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c^a l_i \\ c^a l_i \\ c^b l_i \\ c^b l_i \\ c^c l_i \\ c^c l_i \end{bmatrix}, \quad (31)$$

ahol ϕ^k a k egyeneshez tartozó belső súrlódási szög, c^k a k egyeneshez tartozó kohézió.

A primál formula is megváltozik. A dualitás szabályai szerint a (21) egyenlet a következőképpen alakul:

$$N_i p_i - d_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \operatorname{tg}(\phi^a) & \operatorname{tg}(\phi^a) & \operatorname{tg}(\phi^b) & \operatorname{tg}(\phi^b) & \operatorname{tg}(\phi^c) & \operatorname{tg}(\phi^c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i^{1a} \\ p_i^{2a} \\ p_i^{1b} \\ p_i^{2b} \\ p_i^{1c} \\ p_i^{2c} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_i \\ n_i \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

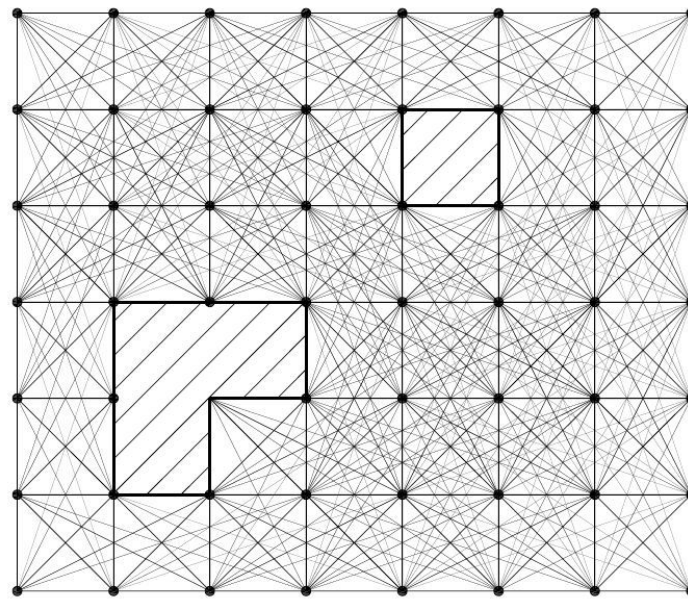
Látható hogy p primál változók száma nőtt, viszont d elmozdulások száma nem változott, azaz egy elmozdulást több képlékeny változó ír le.

4.6.4. Heterogén kőzettest

Annak ellenére, hogy egytengelyű terhelés hatására a kőzetek ridegen viselkednek, háromtengelyű feszültségállapotban képlékeny tulajdonságokat mutatnak. Ezt a tulajdonságot már 1915-ben felismerték (Böker, 1915). Így lehetőség van kőzetek képlékeny törőterhének számítására, a töréskép optimalizálás használatára. (Chan 1975). A képlékeny törőteher számítás helytállóságát bizonyítja, hogy a közvetett húzószilárdság vizsgálatnál és a pont-terheléses vizsgálatnál kialakuló töréskép és teherbírás is meghatározható a képlékeny törőteher számításával (Chan 1970). A kőzetek képlékeny törésekor figyelembe vehető nyírószilárdság értékének meghatározása bármely lineáris vagy nemlineáris törési feltétel alapján történhet Pl.: a Hoek-Brown vagy a Barton-Bandis.

4.6.5. Végtelen nyírószilárdságú elem

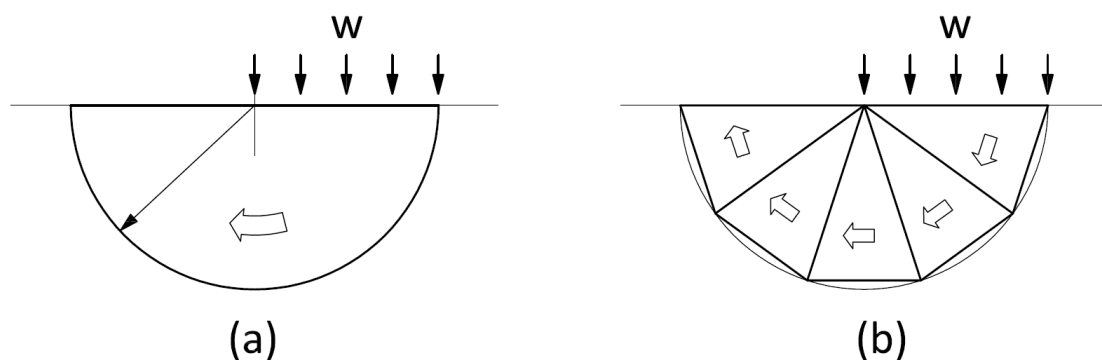
A mérnöki gyakorlatban előforduló feladatokban lehet olyan (pl. mesterséges) elem melynek nyírószilárdsága jóval meghaladja a talaj szilárdságát. Ebben az esetben használható a végtelen nyírószilárdságú feltételezés. Ekkor az elemen átmenő élek törölhetők a lehetséges csúszólapok közül, így azok tönkremenetele nem lehetséges (27. ábra).



27. ábra: Tökéletesen merev elem

4.7. Elforgulni képes elemek

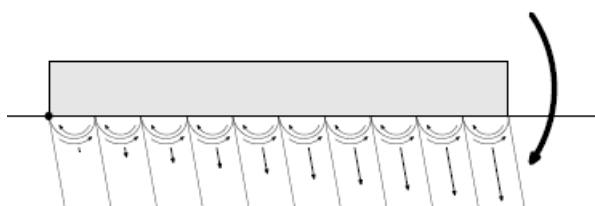
A fent említett formulákkal csak eltolódás jellegű elmozdulásokat tudunk kezelni. Ez talajok vizsgálata során nem okoz problémát, az elfordulás jellegű mozgások a merev testszerű elfordulás helyett eltolódások összességeként jelennek meg, amit az irodalomban *fan mechanism*-ként azaz legyezőszerű elfordulásként emlegetnek (28. ábra)(Alwis, 2000).



28. ábra: Elforguló és eltolódó talaj

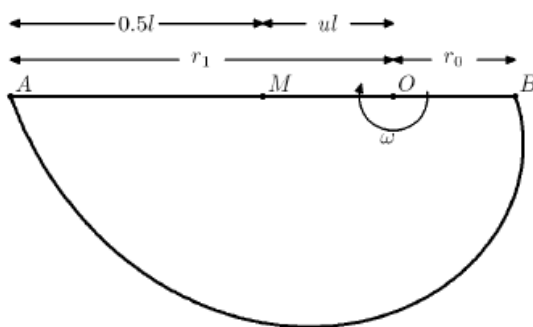
Bizonyos esetekben, például külpontosan terhelt sávalapok vagy támfalak esetén az elfordulások nem elhanyagolhatóak, illetve nem állíthatók elő eltolódások összegeként. Ilyenkor az elemek elfordulását lehetővé tevő számítási eljárásra van szükség.

Az elfordulni képes elemek figyelembevételéhez szükséges az elemekkel történő együttműködés modellezése is, azaz az elforduló él mentén létrejövő eltolódások és a belső erők által az eltolódásokon végzett munkák számítása. Az elfordulást kisméretű elforduló elemek közvetítik az eltolódó területekre (29. ábra).



29. ábra: Elfordulás és eltolódás kapcsolata (Limit State Manual)

Ez a közelítés viszonylag kis hibát okoz az eredményben, elfogadható szinten tartja a keresési tér méretét, és fenntartja a számítás felső becslés jellegét. Az elforduló elemet határoló csúszólap logaritmikus spirál alakú.



30. ábra: Logaritmikus spirál alakú elforduló elem (Limit State Manual)

A vizsgált elem ω fokok elfordulásának hatására a logaritmikus spirál elem is elfordul ω fokkal. Ez az elfordulás nyíró irányú elfordulás lévén normál irányú elmozdulásokat is okoz.

$$n_{\omega} = u l \omega \quad (33)$$

ahol l az elforduló elem szélessége, ω a szögelfordulás és

$$u = 0,5 - \frac{1}{1 + e^{\pi \tan \phi}} \quad (34)$$

A vizsgált elforduló elem mentén létrejövő teljes normál irányú elmozdulások:

$$n = a \tan \phi + u l \omega \quad (35)$$

Az elforduló elemen kívüli részek tisztán eltolódásokat végeznek, melyek nagysága azonos az elforduló elem M pontjának eltolódásaival. Mohr-Coulomb törési feltételnek megfelelő talaj esetén az elfordulásból származó belső munka:

$$W = \frac{u l^2 \omega c}{\tan \phi} \quad (36)$$

A falsúrlódásból származó belső munkát ezen felül külön kell figyelembe venni. A külső erők - azaz a gravitáció elfordulásokon végzett munkáját elhanyagolhatjuk, mivel az elforduló elemek mérete a raszter kiosztás finomításával csökken és elhanyagolhatóvá válik. Az egyenletek lineárisak elfordulásra (ω), így a fenti egyenletekkel bővíthető a 4.2.7 fejezetben leírt összefüggés. Elfordulni képes elemek vizsgálatára a 7.2. fejezetben mutatunk példát.

4.8. Talajvíz figyelembevétele

A DLO használatakor lehetőségünk van a talajvíz hatásának figyelembevételére is. A talajvíznyomás által az AB élen lévő relatív eltolódásokon végzett munka:

$$E_{AB} = U_{AB} n_{AB} \quad (37)$$

ahol E_{AB} : AB élen lévő relatív eltolódásokon végzett munka, U_{AB} : a talajvíznyomásból származó nyomóerő az AB élen, n_{AB} : Az AB él mentén létrejövő normál irányú eltolódás.

A (26) egyenlet kiegészítve a talajvíznyomás által végzett belső munkával:

$$\min \lambda f_L^T d = -f_D^T d + g^T p - u^T d \quad (38)$$

ahol $u^T = \{0, u_1, 0, u_2, \dots, u_m\}$ és u_i az i -ik élre ható talajvíznyomás, ahol $i = 1, \dots, m$.

Az u vektor nem tévesztendő össze a 4.1.3. fejezetben szintén u -val jelölt csomóponti elmozdulásokkal. . Az azonos jelölés zavaró, de a szakirodalomban is ezt használják, így ettől mi sem akartunk eltérni.

5. A megvalósult program

A DLO módszerben rejlő lehetőségek bemutatása és a teljes körű megértése érdekében, egy programot fejlesztettünk MATLAB és C nyelv felhasználásával amit grafikus felhasználói felülettel is elláttuk, így az eredményeink ellenőrizhetők. A program, illetve MATLAB forráskódja a CD mellékleten található meg.

Jelen fejezet célja bemutatni az általunk ajánlott és alkalmazott informatikai megoldásokat. Bár a kód nem minden DLO által nyújtott lehetőséget aknáz ki, a program tervezésekor a későbbi bővítést is szem előtt tartottuk (pl. adattárolási kérdések). A fejezet nem tér ki konkrét megvalósítási kérdésekre, inkább a felmerült problémákkal, és azok megoldásait mutatja be.

5.1. Áttekintés

A modell létrehozásához első lépésben a problémát kell diszkretizálni, amely során a folytonos síkot pontokkal közelítjük, és a lehetséges törésképek a pontokat összekötő élek részhalmazai. Ezáltal a diszkretizálás mértéke adja meg a megoldásunk pontosságát, azaz nagyobb mértékű felbontással pontosabb eredményt kaphatunk. Nagyobb felbontású diszkretizálás azonban jóval nagyobb számítási problémát is jelent amely a program működéséhez természetes módon több erőforrást is igényel. A probléma mérete és a felbontás mértéke nem lineáris kapcsolatban áll egymással.

A minél nagyobb pontosság eléréséhez növelnünk kell a felbontást azaz a számítási probléma méretét, ami számos kérést vet fel:

- Hogyan tároljuk hatékonyan az adatokat?
- Milyen módon tudunk csökkenteni a futási időt?
- Milyen módszer szerint határozzuk meg az LP változókat?
- A megvalósításnál milyen informatikai, szoftveres eszközöket használjunk?

Az első két pont gyakran ellenkező szempontok ugyanis amennyiben az adattárolást szeretnénk csökkenteni, akkor a futási idő nő, ha a futási időt csökkentjük, a memória

kihasználása növekszik. Ezért el kell döntenünk, hogy melyik erőforrással bánhatunk szűkmarkúan, melyikkel bőkezűen.

A harmadik pontban feltett kérdés a lineáris programozási feladat megoldásához felhasznált matematikai módszer megválasztásáról szól. Korábban említettük a szimplex, és a belső pontos módszereket, mint megoldási lehetőségeket. Azt hogy ezek közül melyiket használjuk, felveti a megoldás gyorsaságának, és pontosságának kérdéseit. E mellett a számítási módot gyorsítja az ún. oszlopgenerálás módszere is mert így a megoldás keresése nem a teljes probléma térben történik, azonban ennek alkalmazásával ismételten előkerül a pontosság kérdése.

A negyedik pont a szoftveres eszközök használatára tér ki, aminek a megválaszolásához egyrészt a piacon található lineáris programozási feladatokat megoldó szoftvercsomagok használhatóságát kell megvizsgálni. Másrészt pedig a számítási probléma mérete is jelentősen befolyásolja a megfelelő programozási környezet megválasztását.

5.2. Bemenetek

A kezdeti tervezésnél fontos specifikálni a bemenő adatok körét, amelyeket az alábbi táblázatba gyűjtöttük össze.

4. Táblázat: Bemenő adatok

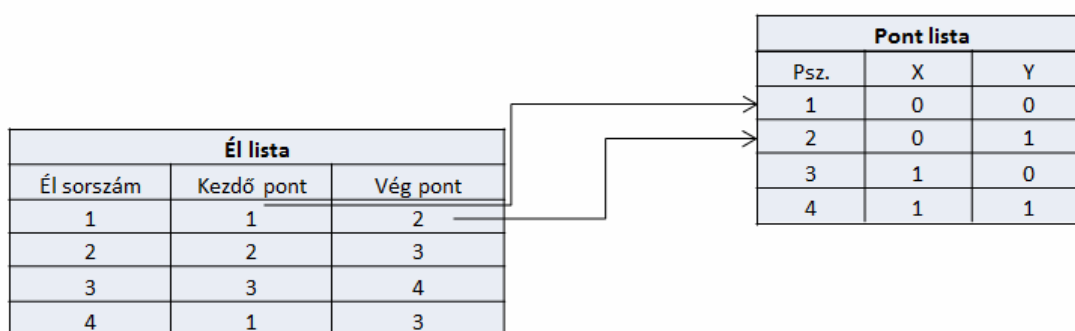
Bemenet	Leírás
Topológia	A topológia tartalmazza a teljes területet, amelyen az adott problémát vizsgáljuk. E mellett megadja a lefedett terület felbontását, azaz a ponthálózatot, így tulajdonképpen meghatároz egy struktúrát, mely a két pont közötti távolságot, és a pontok számát jelenti.
Tervezési terület (<i>design domain</i>)	A tervezési terület adja meg, hogy milyen lehetséges élek vehetők figyelembe, azaz a topológiát szűkíthetjük le vele, miáltal vizsgálhatóak rézsűk, ferde hajlásszögű lejtők.
Hasznos teher (<i>live load</i>)	A hasznos terhek bemenetéhez, egy pontlistának kell társulnia, ami meghatározza azon egymáshoz csatlakozó éleket amelyek mentén hat a teher. Ezen kívül az élhez viszonyítva kell megadni a teher irányát (ld. korábban s, d értékek), valamint azt, hogy ez hajlékony, vagy merev teher. Továbbá azt is jelölni kell, hogy a hasznos teher változó, vagy állandó.
Peremfeltételek (<i>boundary conditions</i>)	A peremfeltételek ugyancsak élek listájaként adható meg, és a peremek típusát is meg kell határozni (szabad, fix, szimmetria tengely).
Törések a talajban (<i>joints</i>)	A talajban megadhatóak szingularitások is amelyeket ugyancsak él listában tárolhatunk a szingularitások talajfizikai jellemzőivel együtt (φ, c).
Talajfizikai jellemzők	A módszerrel különböző fizikai tulajdonságokkal rendelkező talajok vizsgálata is lehetséges. A tervezési területet kisebb régiókra bonthatjuk, a változó talajfizikai jellemzők alapján és a régiókhoz rendeljük a fizikai paramétereket (c, φ, γ)
Beállítások	A fentiekén kívül további beállítások megadása is szükséges lehet az algoritmus számára például: oszlopgenerálást kívánunk-e használni, vagy sem, vagy hogy az önsúly terhet változó vagy állandó teherként kezelje-e a program.

A fenti bemenetek közül nem mindegyik lett megvalósítva az általunk készített programban.

5.3. Topológia tárolásának kérdései

A topológia tárolásának egyik módja, hogy a memóriában nyilvántartjuk a pontok koordinátáit, és a hozzájuk kapcsolódó éleket (31. ábra). Az 5.1 fejezetben ismertettük, hogy a diszkretizálás mértéke befolyásolja a számítási probléma méretét. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy nagy felbontás esetén rengeteg pont koordinátáját, valamint a

pontokhoz tartozó éleket kell tárolnia a számítógépnek. Ennek hátránya, hogy a pont koordinátákból az élek visszakeresése időigényes művelet, e mellett előnye az ilyen adatszervezésnek, hogy átlátható és egyszerű. Igazi előnye akkor mutatkozik meg, amikor a tervezési területet kell kezelnünk, ugyanis ennél a módszernél csupán azt jelenti, hogy azokat az éleket, amelyek nem esnek bele a tervezési területbe, azokat egyszerűen nem vesszük fel az él listába.



31. ábra - Topológia tárolása él-pont listákkal

A másik tárolási lehetőség a helyzet és a kapcsolatok függvénnyel történő leírása. E megoldás előnye hogy egyetlen élet, vagy pontot sem kell tárolnunk a memóriában. Az alábbiakban bemutatjuk, hogy hogyan számolhatóak a pont koordinátái a függvény segítségével (a sorszám és koordináta értelmezését a 32. ábra mutatja):

$$x = \text{mod}(n - 1, dx) * rmx \quad (39)$$

$$y = \left\lfloor \frac{n-1}{dx} \right\rfloor * rmy \quad (40)$$

ahol, x, y a pont koordinátái, n a pont sorszáma, dx a pontok száma az X tengely irányában, rmx, rmy raszter méretek a megfelelő tengelyek irányában. A koordinátákból a pont sorszáma a következő képletekkel számolható:

$$px = \frac{x}{rmx} + 1 \quad (41)$$

$$py = \frac{y}{rmy} + 1 \quad (42)$$

$$n = dx * (py - 1) + px \quad (43)$$

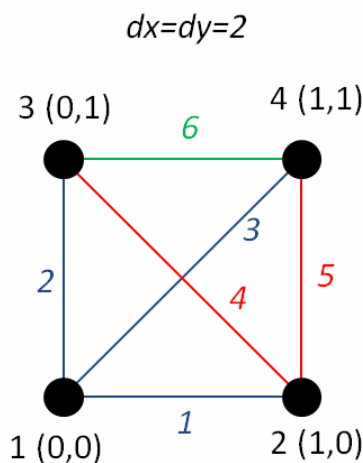
Következőekben vizsgáljuk meg az éleket. Annak érdekében, hogy egy élet úgy tartsunk nyilván, hogy ne legyen kétszer benne a halmazba, úgy célszerű eljárni, hogy először az első pontot összekötjük az összes többivel, majd a másodikat a harmadik ponttól kezdve kötjük össze, ezután a harmadik pontot az negyediktől kezdve, az összes többi ponttal, stb... (32. ábra). Rendezzük az éleket ennek megfelelően táblázatba:

Pont sorszám	Hozzá tartozó élek
1	1,2,3
2	4,5
3	6

Az i -ik ponthoz tartozó kezdő él sorszáma egy csökkenő számtani sort alkot, amit kissé módosítva, a következő kifejezéshez jutunk:

$$e = \frac{(2N - n)(n - 1)}{2} + 1 \quad (44)$$

ahol N , az összes pont száma, és e az n -ik ponthoz tartozó kezdő él sorszáma.



32. ábra - Pontok és élek összekötése

Amennyiben egy adott élhez szeretnénk megadni a kezdő és a végpontjának sorszámait, úgy a fenti egyenletet át kell rendeznünk, ami egy másodfokú egyenlet megoldására vezet. Ennek levezetését nem, csupán az eredményt közöljük:

$$p_k = \left\lfloor \frac{-2N - 1 + \sqrt{(2N + 1)^2 + 4(-2N + 2 - 2e)}}{-2} \right\rfloor \quad (45)$$

$$p_v = e - \frac{(2N - p_k)(p_k - 1)}{2} + p_k + 2 \quad (46)$$

ahol, p_k, p_v az e sorszámú él kezdő és végpontjának sorszámai.

A függvényekkel történő megoldás legnagyobb előnye, hogy nem foglal tárhelyet, továbbá a pont-él, él-pont, koordináta-pont valamint a pont-koordináta transzformációk konstans művelettel végezhetőek el. Nagy hátránya azonban, hogy segítségével nehezen kezelhetőek a tervezési területek. Például elágazásokat kell alkalmaznunk abban az esetben ha élet akarunk kivenni a halmazból, ami kényelmetlen, és a futási időt növeli.

A következő táblázat mutatja a két módszer előnyeit, illetve hátrányait.

5. Táblázat: Memóriatárolási módszerek előnyei illetve hátrányai

	Listás tárolás	Kezelés függvényekkel
Memória igény	Nagy	Nincs
Futás idő egy adott elem eléréséhez	Nincs	Kicsi
Pont-él, él-pont azonosítás	Számottevő	Nincs
Tervezési terület kezelése	Egyszerű	Bonyolult, csak elágazásokkal lehetséges

Megoldásunkban mi a két módszer egy kevert változatát alkalmaztuk (hibrid megoldás). Mivel az oszlopgenerálás esetén teljes problémának csak egy kis részét oldjuk meg, a megoldásban az aktuális éleket eltároljuk egy él listában, amit a lehetséges élek listájának nevezünk. A lehetséges élek listájában, a tervezési terület nem szerepel. A lista egy sora, megadja, hogy melyik él tartozik hozzá a teljes él készletből így ez a fajta leképezés a lehetséges élekről az összes él halmazára képez le, ezáltal az összes él listája a fordított leképezést valósítja meg. Az összes él listájában sem kell mindegyik élet tárolni, hiszen ha azt ritka mátrixként definiáljuk, az elemek száma megegyezik a lehetséges élek számával. Azon élek esetén, amelyek nincsenek a lehetséges élek halmazában, az összes él listájában nulla érték fog szerepelni, így könnyű eldönteni, hogy az adott él lehetséges-e, vagy sem.

Az élek és a pontok közötti kapcsolatot függvények segítségével biztosítjuk, ugyanígy a pontok és koordináták kapcsolatát. Amikor egy él lehetséges él halmazbeli sorszáma alapján meg akarjuk határozni a kezdő és végpont koordinátáit, először meg kell nézni a lehetséges élek listájában a megadott él sorszámánál milyen szám szerepel. Ez a szám lesz az él sorszáma az összes élek halmazában. Erre pedig, már a korábban ismertetett függvény segítségével a kezdő és végpont sorszáma számítható. Ha két végpont sorszáma ismert, és abból szeretnénk megkapni az él lehetséges élbeli sorszámát, akkor meghatározzuk a megadott függvény segítségével a koordinátákból az él összes élbeli sorszámát. Ezután az összes élek listája megadja, hogy az melyik él sorszám a lehetséges élek között.

Látható, hogy a keresési műveletek konstans idejűek, és a tervezési terület is könnyen kezelhető így. Ehhez csupán az összes és lehetséges élek listáit kell karban tartanunk. Hátránya, hogy a listákat tárolnunk kell, azaz a nagy memória igény megmaradt. A futások során azonban ez a probléma nem releváns. A felírandó mátrixoknak ennél lényegesen nagyobb tárhely igényük van.

5.4. Lineáris programozási feladat felírása

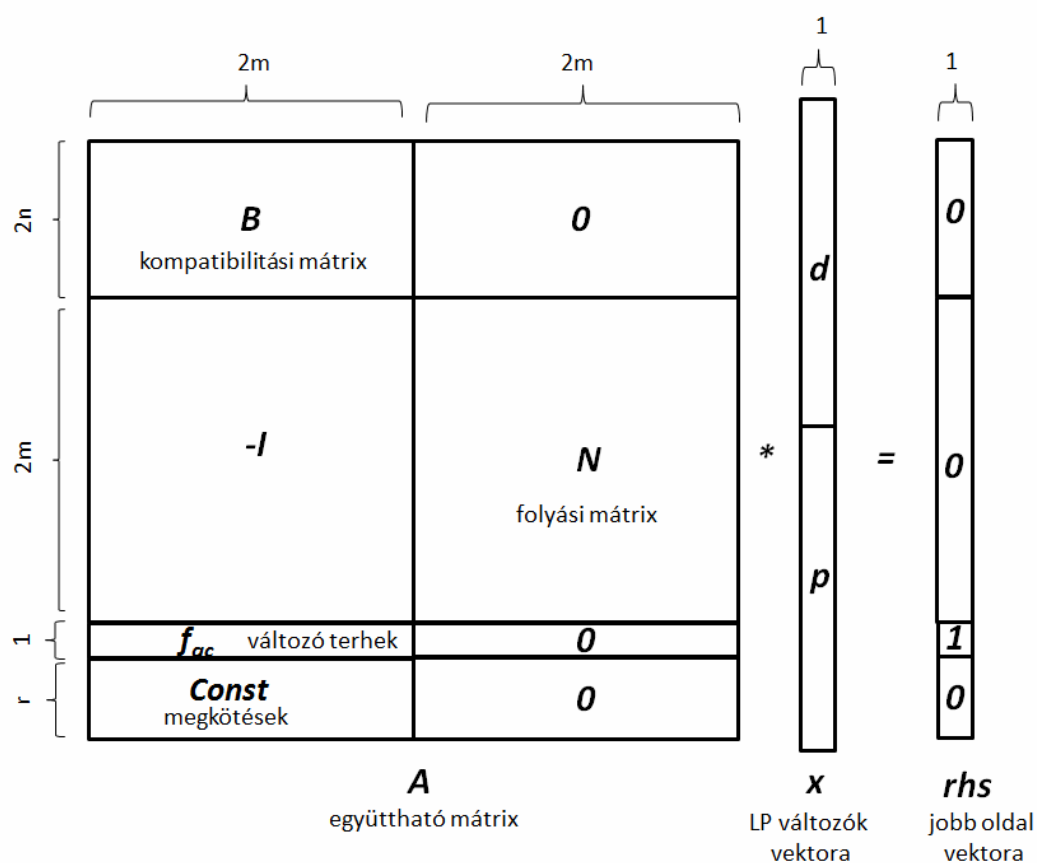
A kialakítandó struktúra a 33. ábrán látható. A mátrixokat ritka mátrixként kell létrehozni, ugyanis ha nem így tennénk, akkor a memória nagyon gyorsan megtelne már kis problémák esetén is.

A feladat felírására két lehetőség van, az egyik hogy az egyes részmátrixokat felírjuk külön-külön, majd azokat egyesítjük egy együttható mátrixban, ezt mutatja a 33. ábra. A másik lehetőség, hogy az egyes mátrixok elemeit élenként írjuk fel, aminek az előnye, hogy egy memória eléréssel megkaphatjuk az egy élhez tartozó információkat, hátránya azonban, hogy a felírás nehezebb. Mi az implementálásnál az első megoldást használtuk.

Amennyiben oszlopgenerálással gyorsítjuk az LP megoldást, úgy az A mátrix megfelelő sorait, és az élek kapcsolatát egy tömbben kell nyilván tartani.

A feladat felírásához gondolnunk kell arra, hogy a kényszerek helyein az N mátrix megfelelő helyeinél a sorokat nem szabad figyelembe venni. Ennek technikáját az LP

megoldók paraméterezésének ismeretében dolgozhatjuk ki. Általánosságban három féle módszert használhatunk: bizonyos esetekben – amikor azt a megoldó támogatja – az operátorokat egy vektorba adhatjuk meg (pl. GLPK), amikor csupán a vektor megfelelő értékét kell beállítani, hogy az szabad sor legyen. Más esetekben viszont ezt nem tudjuk megtenni, ugyanis a megoldó nem paraméterezhető ilyen formában (pl. Matlab, vagy a MOSEK interfész Matlabhoz), ilyenkor vagy töröljük a megfelelő sorokat, vagy minden elemét kinullázuk. A sorok törlésével a korábban említett tömb, mely az élek és a mátrixban lévő sorok kapcsolatát írja le, elcsúszik, melyet így karban kell tartani. Ez nehéz, és időigényes feladat, így a sorok kinullázását javasoljuk.



33. ábra - Felírandó egyenletrendszer

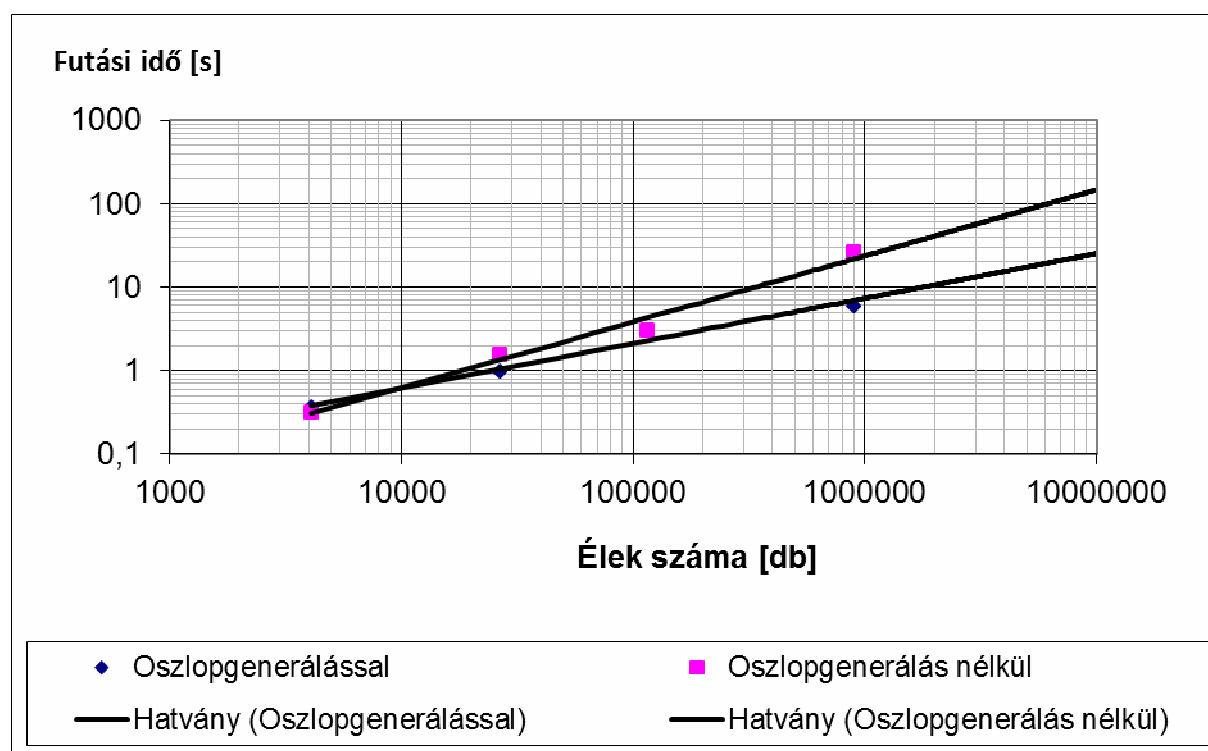
5.5. A lineáris programozási feladat megoldása

A lineáris programozási feladatot a korábbiakban már ismertetésre került két módszer segítségével oldhatjuk meg a szimplex, vagy a belső pontos módszerekkel. A szimplex

módszerrel, ahogy ezt már korábban részleteztük, pontos eredményt kaphatunk a megoldásra, míg belső pontos módszerrel csak közelítőt.

Ezen kívül a megoldáshoz használhatjuk az oszlopgenerálás módszerét, mely egy iterációs eljárás, aminek során egy kezdeti, kisebb problémából indulunk ki, és megadott feltételek mellett minden iterációban újabb éleket adunk a problémához. Ennek részleteit a 4.5.2. fejezetben már ismertettük.

Az oszlopgenerálás már kisebb elemszám esetén is hatékonyabb lehet a hagyományos megoldásnál. A 34. ábra mutatja a futási idők változását a probléma (élek számának) növelésével. A log-log skáláról leolvasható, hogy a futási idők a két módszer esetében aszimptotikusan eltartanak egymástól. Az egyenesek metszéspontja adja meg azt a pontot, ahonnan az oszlopgenerálás már sokkal hatékonyabb, ez pedig már kisebb elemszám esetén is bekövetkezik.



34. ábra – Futási idők oszlopgenerálással és anélkül

A lineáris programozási feladat megoldásához több fajta LP megoldó érhető el. Némelyik fizetős (pl. MOSEK, Matlab), de vannak ingyenes (pl. GLPK) megoldók is. Ezek minősége,

gyorsasága, és a konvergencia pontossága különböző. A dolgozat elkészítésénél az imént említett megoldókat vizsgáltuk meg. A továbbiakban tapasztalatainkat összegezzük.

A Matlab beépített lineáris programozási feladatot megoldó eljárásai, a többi általunk megvizsgált megoldóhoz képest rendkívül lassú. A szimplex megoldója numerikusan stabilnak mutatkozott, még nagy elemszám esetén is, viszont a belső pontos módszere gyenge. Konvergenciája már kisebb méretek esetén is gyenge így rossz eredményeket szolgáltat. E miatt ezzel a megoldóval az oszlopgenerálás módszere sem használható hatékonyan, mivel nem szolgáltat elég pontos duál megoldásokat, így az algoritmus az egyes iterációkban rossz élekkel dolgozik. A dolgozat CD-mellékletében közölt program ezzel a megoldással készítettük el, mivel ennek licenszselése volt megoldható, így a belső pontos módszerrel, mellyel a DLO módszer igazán hatékony lenne, nem tudjuk bemutatni a mellékelt futásokat.

A dolgozatban közölt vizsgálatainkhoz a Mosek lineáris megoldóját használtuk, amely nem ingyenes, illetve nem nyílt forráskódú. Ellenben kutatási célra elérhető egy hónapos verziója, mellyel tetszőleges problémák is megoldhatóak. A megoldót egy programcsomagban kapjuk meg, melyet több felületen keresztül érhetünk el. Számunkra előnyös volt, hogy a Matlabhoz is biztosít felületet, ami szinte teljesen megegyezik a Matlab felülettel, a telepítés után nem érzékeljük a különbséget. Amennyiben rendelkezünk licenc-szel Mosek megoldóhoz, azt a telepítés után azonnal hozzá tudjuk kapcsolni a megoldásunkhoz.

A Mosek megoldója rendkívül stabil, mind szimplex, mind belső pontos módszer esetén 60x60-as pontrácsig, amely fölött valószínűleg a számítógép memória problémái léptek fel. Elmondható, hogy futási időben ez bizonyult a leghatékonyabbnak a többi felhasznált megoldóhoz képest. A programot használva, érezhető volt, hogy ezt a programcsomagot hasonló feladatok megoldására készítették.

A harmadik vizsgált megoldó a GLPK (GNU Linear Programming Kit) program volt, ami egy ingyenes és szabad forráskóddal rendelkező programcsomag lineáris programozási feladatok megoldására. A megoldó C nyelven íródott, több felületet biztosít ahhoz, hogy

más programozási nyelveken is elérjük. A Matlabhoz való csatolását az ugyancsak ingyenes GLPKMEX könyvtárral végeztük el.

Kezdetben a GLPK rendkívül ígéretesnek tűnt, a szimplex módszer rendkívül stabil, futási ideje a többi megoldókéhoz képest a legjobb. Sajnos a belső pontos módszere rendkívül instabil, amit a fejlesztői közösség is elismer. A megoldó nem rendelkezik a korábban már említett, megfelelő *presolverrel*, így nagyon érzékeny az együttható mátrix kondíciójára, ezáltal a belső pontos módszere számunkra használhatatlan.

A későbbiekben bemutatott futási eredményekhez a Mosek lineáris megoldóját használtuk.

5.6. Megvalósított program

Az elkészült program célja, hogy a szakirodalomban megtalálható, és a korábbiakban ismertetett módszert bemutassuk egy futó alkalmazásban, illetve hogy bizonyosságot szerezzünk arról, hogy jól értelmeztük a szakirodalmat.

A megvalósult programba nem írtuk bele az összes lehetőséget, melyet a DLO módszer magában rejt. A következőekben tekintsük át azokat a funkciókat, melyeket beépítettünk a programba:

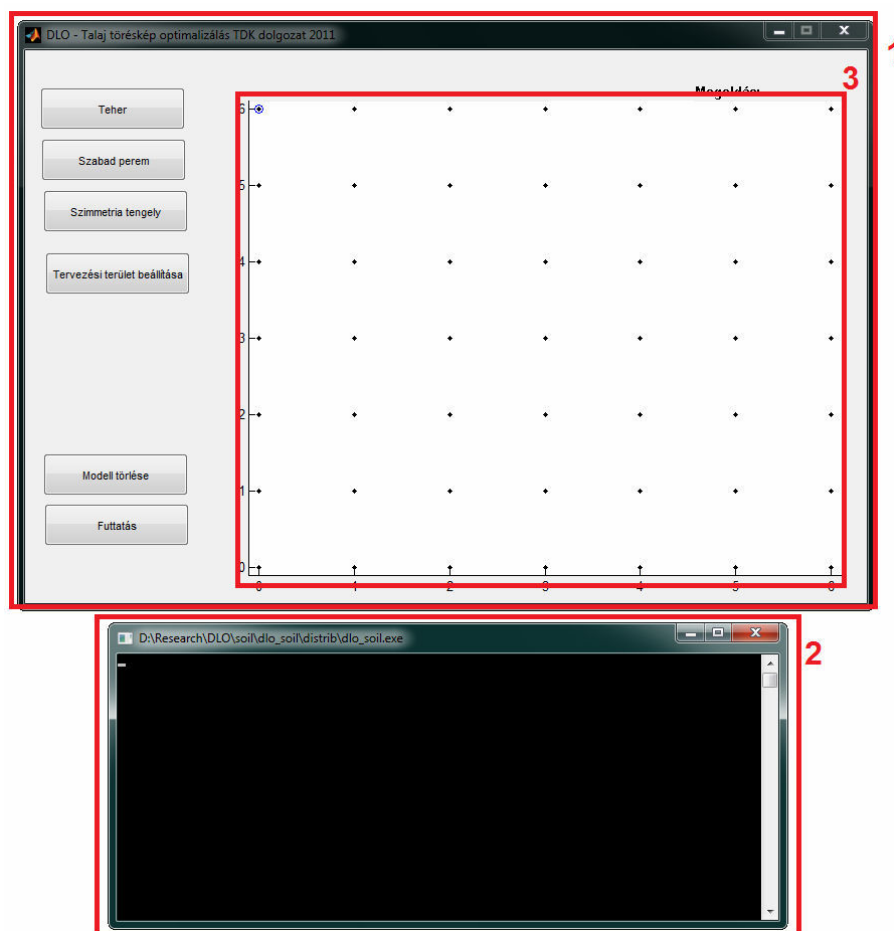
- Téglalap alakú tervezési terület, ferde tervezési terület nem adható meg, így nem vizsgálhatóak részsűk.
- Megadható szimmetria-tengely, így nagyobb problémát is futtathatunk, melynek szimmetrikus a törésképe.
- Több különböző oldalra kijelölhető peremfeltételek, így függőlegesen álló földfalak is vizsgálhatóak.
- Megadható, hogy szimplex, vagy belső pontos módszert használunk-e a feladat megoldásához. A korábban említett problémák miatt, a belső pontos módszer használatához, telepítenünk kellett a Mosek megoldó programcsomagot.
- Egyfajta talajfizikai paraméterekkel rendelkező talajt vizsgálhatunk. Megadhatjuk a talaj önsúlyát, melyet az algoritmus ezután használni képes.

- Megadható hogy az önsúlyt, illetve a hasznos terheket állandó, vagy változó terhekként vegye figyelembe.
- A hasznos terhekkal kapcsolatban megadhatjuk, hogy az a talajjal merev, vagy hajlékony kapcsolatban áll-e.

Programunkat Matlab R2009b szoftverrel készítettük. A megjelenítését, illetve a paraméterezést, azaz a grafikus felhatalnáló felületet (*GUI, Graphical User Interface*) a Matlab saját nyelvén készítettük el. A mátrixok létrehozásának eljárása, illetve az oszlop generálás módszere, annak ellenőrzése C nyelven készült. Ezt MEX fájlok segítségével valósítottuk meg, mely egy módszer, hatékony kódok írására Matlab felülettel C nyelven. Erre azért volt szükség, mert sok kód futási-íő igényes, ciklusokat tartalmaz, így ezen konkurens kódok hatékony implementálást igényeltek.

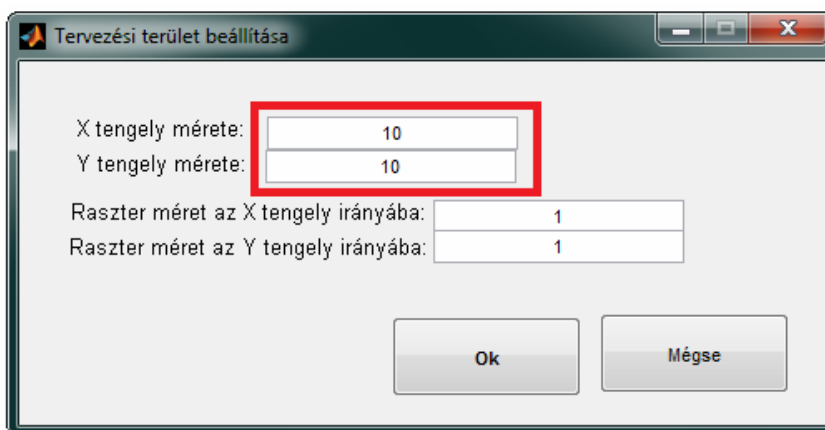
5.7. Program bemutatása

A program működését a Prandtl példa futatásával mutatjuk be, majd létrehozhatunk saját modelleket, amiknek segítségével az elért eredményeink ellenőrizhetővé válnak.



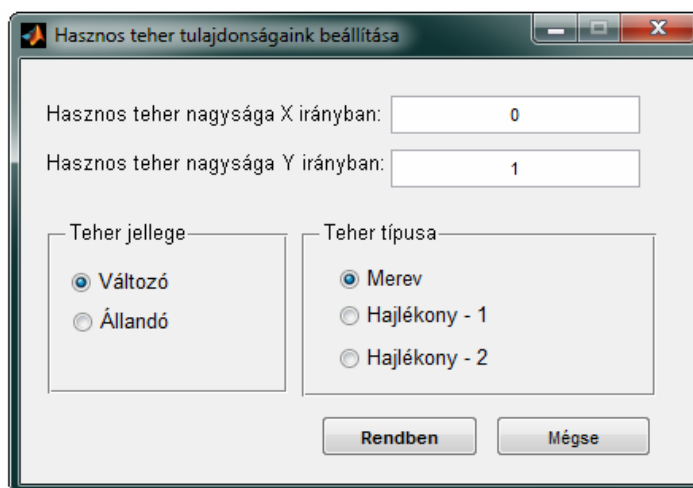
35. ábra - A program az indítást követően

1. A futáshoz, szükséges telepítenünk a Matlab futásidejű fordító könyvtárát (MRC, Matlab Compiler Runtime). Ehhez futassuk a CD mellékleten található MRCInstaller.exe fájlt. További leírást a program telepítéséről a readme.txt fájlban található.
2. A program indításához a CD mellékleten található dlo_soil.exe fájlt indítsuk el. Ekkor a képernyőkép a 35. ábra mutatja. Két ablak jelent meg: a főablak (1), illetve egy konzol ablak (2). A főablakon találjuk a tervezési területet (3).
3. Változtassuk meg a tervezési terület méretét! Ehhez kattintsunk a 'Tervezési terület beállítása' gombra. Ekkor megjelenik a 'Tervezési terület beállítása' párbeszédablak (36. ábra).



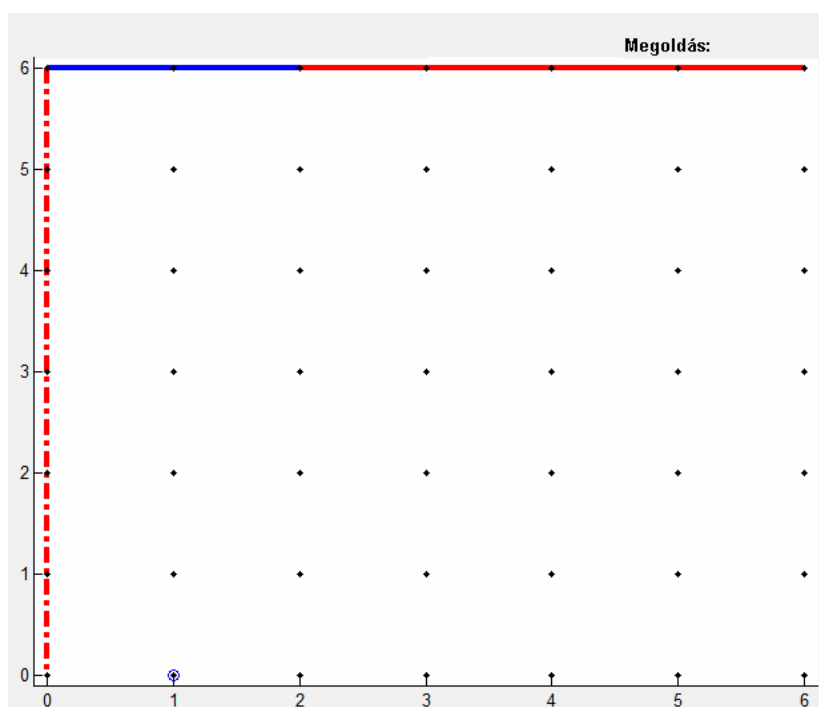
36. ábra – Tervezési terület beállítása párbeszédablak

4. A párbeszédablakon beállíthatók a tervezési terület méretei, illetve a raszterek közötti távolságok mindkét irányban. Állítsuk át az X tengely méretét 7-re, míg az Y tengely méretét 5-re, majd kattintsunk az 'Ok' gombra. Ekkor a tervezési terület méretei megváltoztak.
5. Mozogjunk az egérrel a tervezési terület szélein, ahol egy kör jelzi, hogy melyik raszter ponton állunk. Ezt azért csak a tervezési terület szélein láthatjuk, mert csak itt van értelme peremfeltételek, szimmetria-tengelyek, terhek definiálásának.
6. Kattintsunk a 'Teher' gombra, majd jelöljük ki a tervezési területen a teher helyét. Ehhez egyszer kattintsunk a bal felső pixelre, majd pozícionáljunk (2;5) pontra, és ott is kattintsunk.



37. ábra - Hasznos teher tulajdonságainak beállítása párbeszédablak

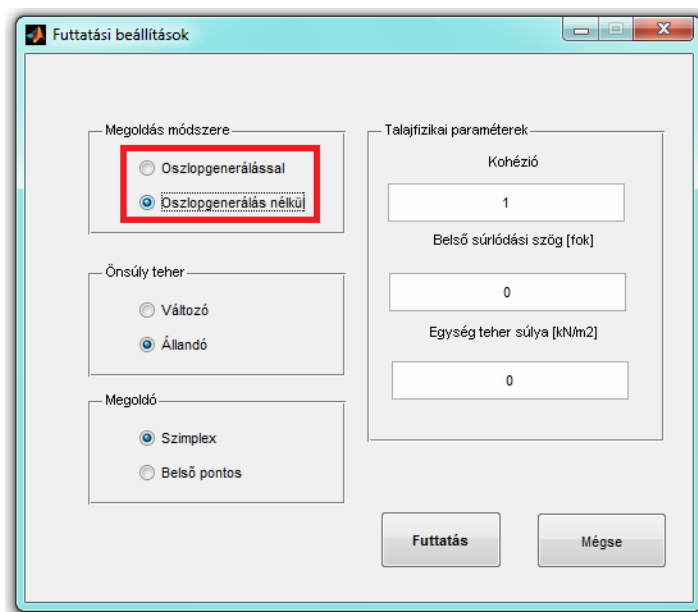
7. Megjelenik a 'Hasznos teher tulajdonságainak beállítása' párbeszédablak (37. ábra). Itt beállíthatjuk a teherrel kapcsolatos tulajdonságokat: megadhatjuk mind két vetületi irányra a teher nagyságát, beállítható, hogy a teher változó, vagy állandó teher-e, illetve, hogy a teher merev, vagy hajlékony módon kapcsolódik-e a talajhoz. Most adjuk meg, hogy a teher hajlékony, azaz a 'Merev' választógombot jelöljük ki. Minden más alapbeállítás most megfelel számunkra. Ezt követően kattintsunk a 'Rendben' gombra.
8. Ahogy azt a tehernél tettük, úgy a szimmetria-tengelyt, és a szabad peremfeltételt is adjuk meg a 38. ábra alapján. Ekkor már egyéb párbeszédablak nem fog megjeleni.



38. ábra – Mintapéllda

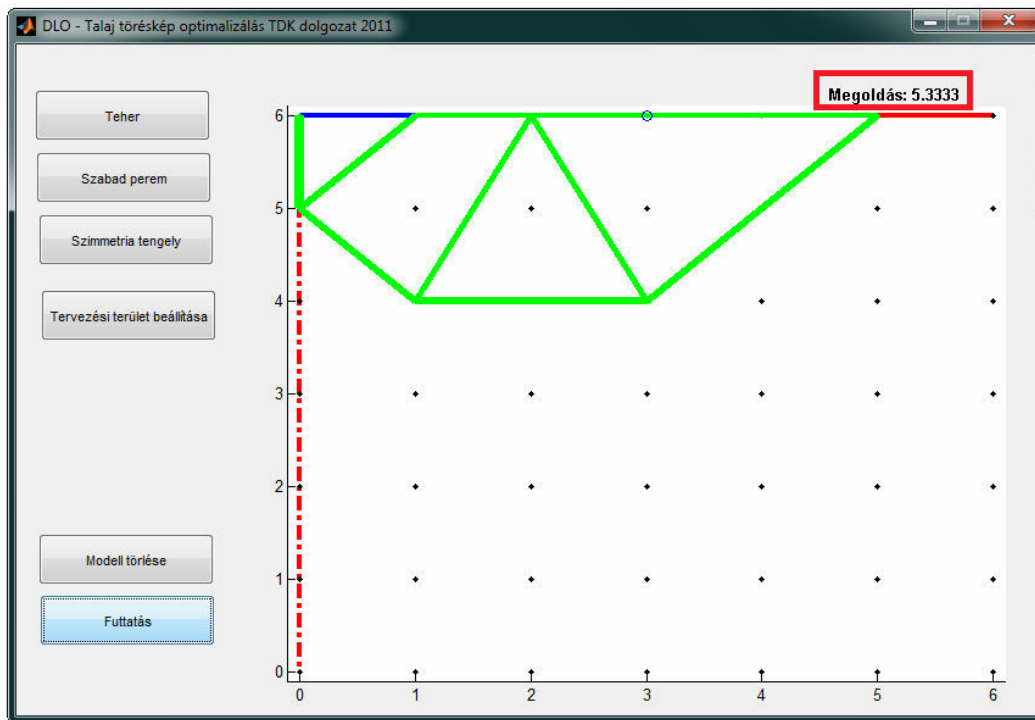
9. Ezután kattintsunk a főablak 'Futtatás' gombjára! Ekkor megjelenik a 'Futtatási beállítások' párbeszédablak (39. ábra), amin beállíthatjuk, hogy a megoldás során az oszlopgenerálás módszerét kívánjuk használni, vagy nem. Ezen kívül megadható az önsúly jellege, illetve a lineáris programozási feladatot megoldó módszer is (szimplex, belső pontos módszer). Továbbá megadhatóak a talaj fizikai

paramétereit is. A példánkhoz a megoldás módszert 'Oszlopgenerálás nélkül'–re állítsuk, és válasszuk a szimplex megoldó, majd kattintsunk a 'Futtatás' gombra.



39. ábra - Futtatási beállítások párbeszédablak

10. A futatást a konzol ablakon követhetjük nyomon. Miután a program elvégezte a számításokat a törés képe megtekinthető a főablakban (40. ábra). A jobb felső sarokban megjelent a biztonsági tényező értéke, mely egység teher esetén a törőteher, illetve ami a programozási feladat megoldása. Az analitikus levezetése a problémának valamivel más megoldást ad (5.1416), mely a diszkretizálás miatt tér el a most kapott végeredménytől. Ezt későbbiekben még részletesen ismertetjük.



40. ábra - Futási eredmény

11. Az eddigi modell törléséhez, illetve új modell létrehozásához a 'Modell törlése' menüpontra kattintsunk.

6. Futások

A megvalósított programot néhány jellemző eseten kívánjuk bemutatni, melyek rövid leírását jelen fejezet tartalmazza. A fejezet megírásakor azt tartottuk szem előtt, hogy olyan közismert példákat mutassunk be, melyek megoldhatóak a töréskép optimalizálás segítségével. Bemutatjuk, hogy a geotechnikai vagy kőzetmechanikai modellek milyen módon fogalmazhatóak meg a töréskép optimalizálás segítségével, azaz egy-egy vizsgálendő jelenség hogyan jelenik meg az LP-formulában.

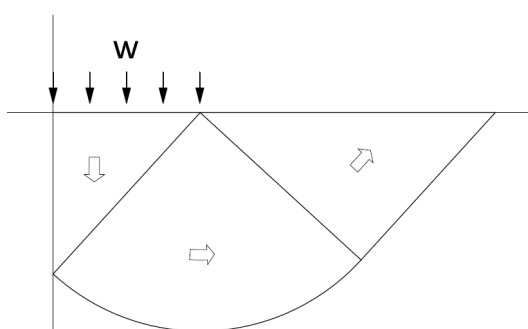
6.1. Sávalap alatti talajtörés önsúly és kohézió nélkül

A futások közül ez a legegyszerűbb eset, ahol önsúlyt és belső súrlódási szöget nem veszünk figyelembe, a kohéziót pedig egységnyiinek tekintjük.

Prandtl dolgozott ki analitikus megoldást (41. ábra) sávalapok alatti talajtörés számítására. A képlékeny törőteher értéke tisztán kohéziós talajok esetén, az önsúly figyelmen kívül hagyásával, térszínen történő terhelés esetén:

$$\frac{Q_{ULS}}{B} = (2 + \Pi) c \quad (47)$$

ahol Q_{ULS} a képlékeny törőteher, B a sávalap szélessége, c a talaj kohéziója.



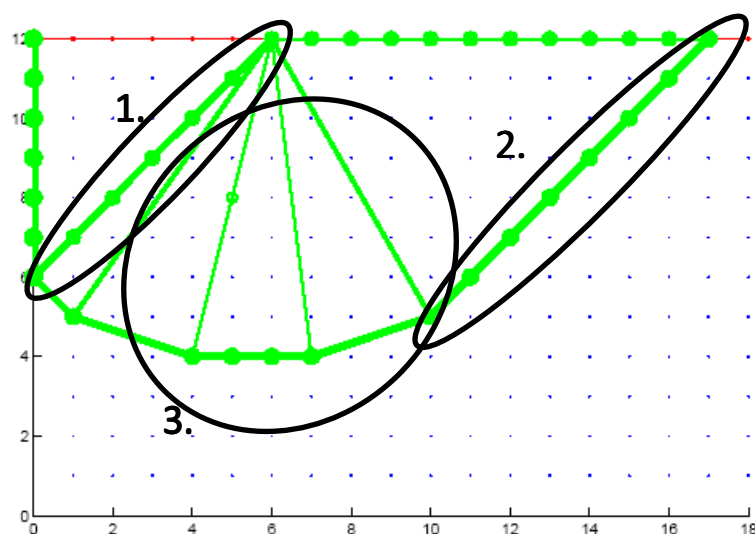
41. ábra: Sávalap alatti talajtörés Prandtl szerint

Egy méter széles sávalap esetén $c = 1 \frac{kN}{m^2}$ kohéziót feltételezve a képlékeny törőteher:

$$Q_{ULS} = (2 + \Pi) 1 \frac{kN}{m^2} 1m = 5,14 \frac{kN}{m}. \quad (48)$$

A számítások során azzal a feltételezéssel élünk, hogy a sávalap tökéletesen merev, azaz az alakváltozásai elhanyagolhatóak, mely a DLO-val történő számításokban is figyelembe vehetünk, mint merev teher.

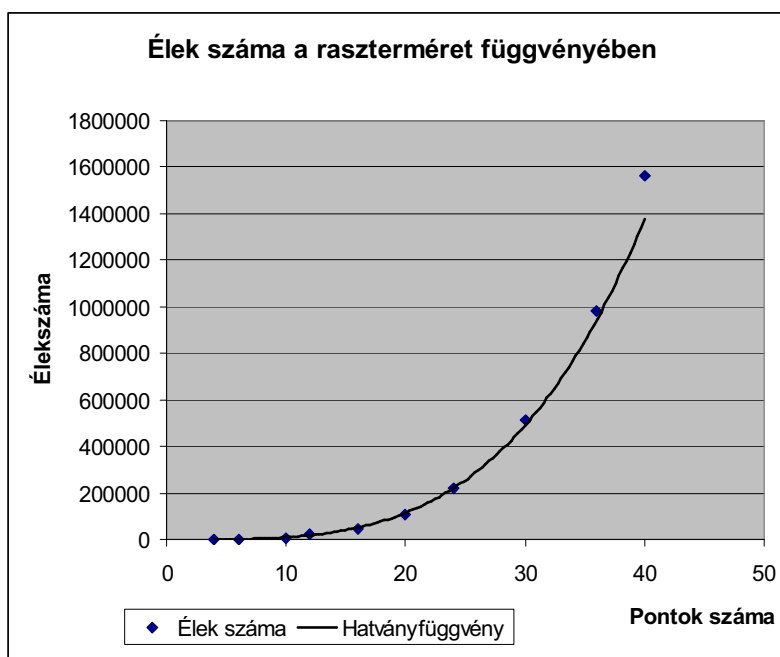
A tervezési tartomány bal oldala szimmetria tengely, felső éle szabad perem. A teher a felső szakasz bal oldalán hat, nagysága egységnyi és merev teher, azaz a függőleges elmozdulások a terhelt élen azonosak. A vizsgált tartomány bal és alsó oldala fix. A végeselemes megoldásokhoz hasonlóan figyelni kell arra, hogy a fix éleken ne legyenek elmozdulások, azaz a tervezési terület nagyobb legyen, mint a tönkremeneteli zóna.



42. ábra: Alap alatti talajtörés, a számított töréskép

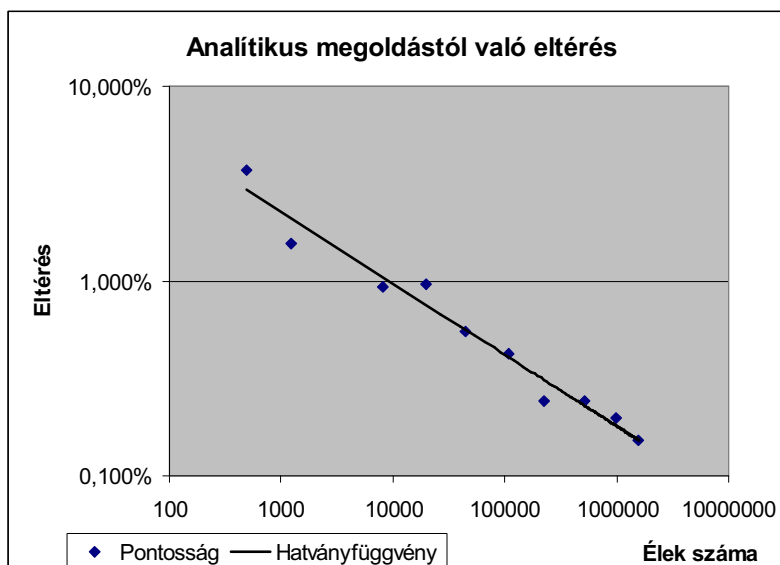
A kialakult töréskép (42. ábra) megfelel a várakozásoknak. Jól megfigyelhető, hogy az 1. és 2. él 45° -os, mivel $\phi=0^\circ$. A hármassal jelölt terület Prandtl szerint elfordulást végez. Itt megfigyelhető a legyező-szerű elfordulás, azaz az eltolódásokból álló elforduló talajtömeg. A kapott állékonysági biztonság 5,198 ami mindössze 1,1%-os felülbecslés. Ez a viszonylag kevés éllel történő közelítés is kellő pontosságú eredményt ad.

A továbbiakban megvizsgáljuk az eredmény pontosságának és a lehetséges csúszólapok számának viszonyát (1. Grafikon).



1. Grafikon: A lehetséges élek száma, az egy méteren lévő raszterpontok számának függvényében

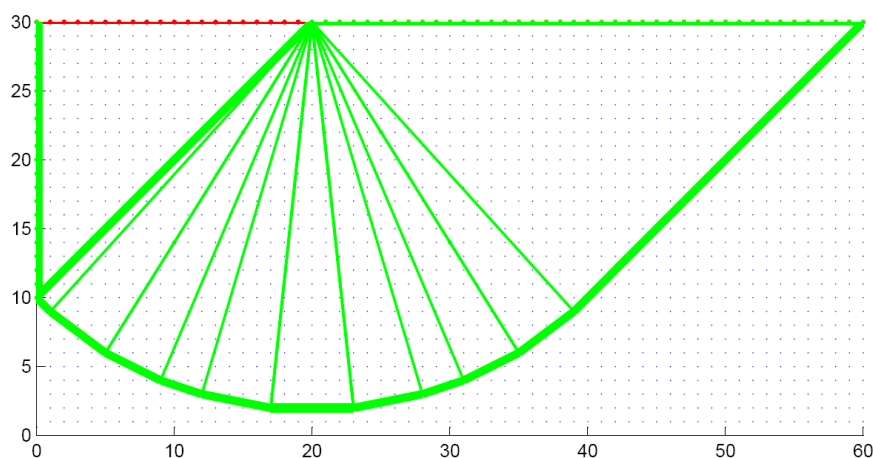
Látható hogy az élek száma hatványozottan emelkedik a felosztás sűrítésével.



2. Grafikon: A hiba nagysága dupla logaritmikus skálán ábrázolva

A felülbecslés mértéke a pontok számának növelésével csökken (2. Grafikon). Természetesen a pontok számán kívül a feladattól is függ a pontosság. A trendvonal alapján az 1%-os hibához megközelítőleg 9000 él szükséges, ami mindössze 13×10 -es

ponthálózattal egyenértékű. A 0,1 %-os hibához a trendvonal alapján 4,9 millió él tartozik, ami 100x30-as ponthálózatnak felel meg.



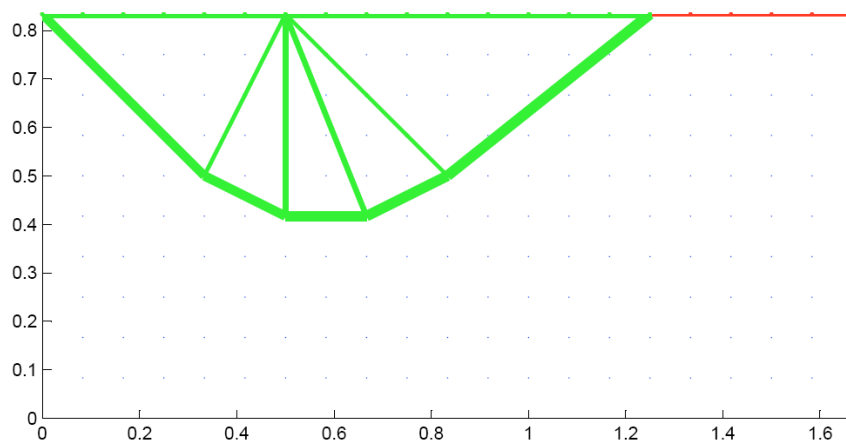
43. ábra: Alap alatti talajtörés, sűrű kiosztású ponthálózattal

Egy 30x60-as kiosztású futtatás hibája 0,15% (43. ábra). Ahhoz, hogy a raszterizálásból fakadó hiba 0,1% körüli érték legyen, nagyon nagy problémákat kell megoldani, ellenben egy meglehetősen ritka kiosztástól is kellően pontos ($\cong 1\%$) eredmény várható, ezért a további futtatásokat megközelítőleg 20x20-as kiosztással végezzük.

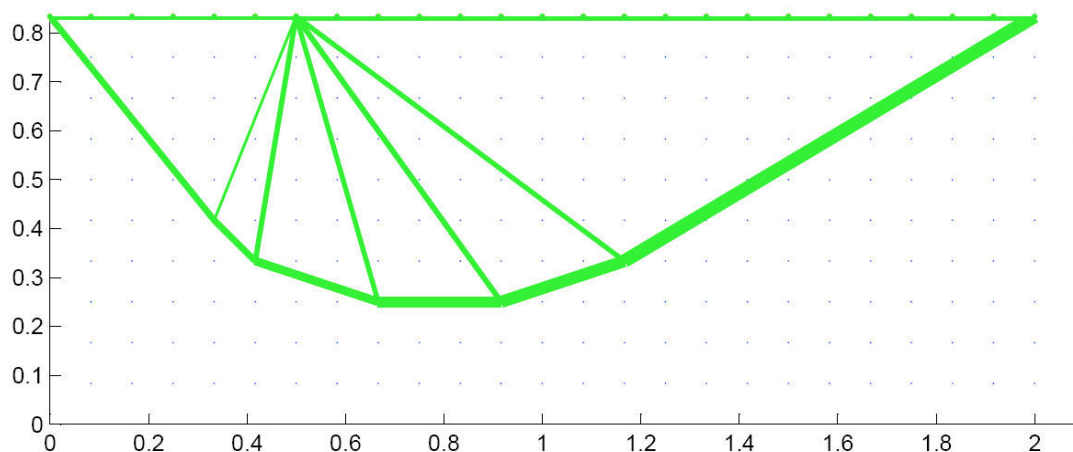
6.2. Sávalap alatti talajtörés önsúly és belső súrlódási szög figyelembevételével

A példa egy drénezett talajon fekvő sávalap, a függőleges terhelés a térszínen hat, a sávalap szélessége 1 méter, a kohézió 30kPa, a belső súrlódási szög 0-40°. A talaj térfogatsúlya 20 kN/m².

A modell felállításához a fenti fejezetben leírtakat kell bővíteni az önsúllyal, ami állandó teher, illetve a belső súrlódási szög módosítja a képlékenységi mátrix értékeit. Az eredmények megfelelnek a várakozásoknak.



44. ábra: Sáv alap alatti talajtörés, $\phi=10^\circ$, törőteher: 262,2 kN/m²



45. ábra: Sáv alap alatti talajtörés, $\phi=30^\circ$, törőteher: 1112,6 kN/m²

Sáv alapok törőterhének meghatározására EuroCode szerint (Szepesházi 2008), a számítás főbb lépései a következők:

Teherbírási tényezők:

$$N_q := \exp(\pi \cdot \tan(\varphi)) \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)^2 = 2.471 \quad (49)$$

$$N_c := \frac{(N_q - 1)}{\tan(\varphi)} = 8.345 \quad (50)$$

$$N_\gamma := 2 \cdot (N_q - 1) \cdot \tan(\varphi) = 0.519 \quad (51)$$

Sávalap lévén az alaki tényezők nagysága 1,00.

$$s_{\gamma} := 1 \quad (52)$$

$$s_q := 1 \quad (53)$$

$$s_c := 1 \quad (54)$$

A terhelés függőlegesen hat, így a teher ferdeségének tényezői szintén egységnyiek.

$$i_q := 1 \quad (55)$$

$$i_c := \frac{i_q \cdot N_q - 1}{N_q - 1} = 1 \quad (56)$$

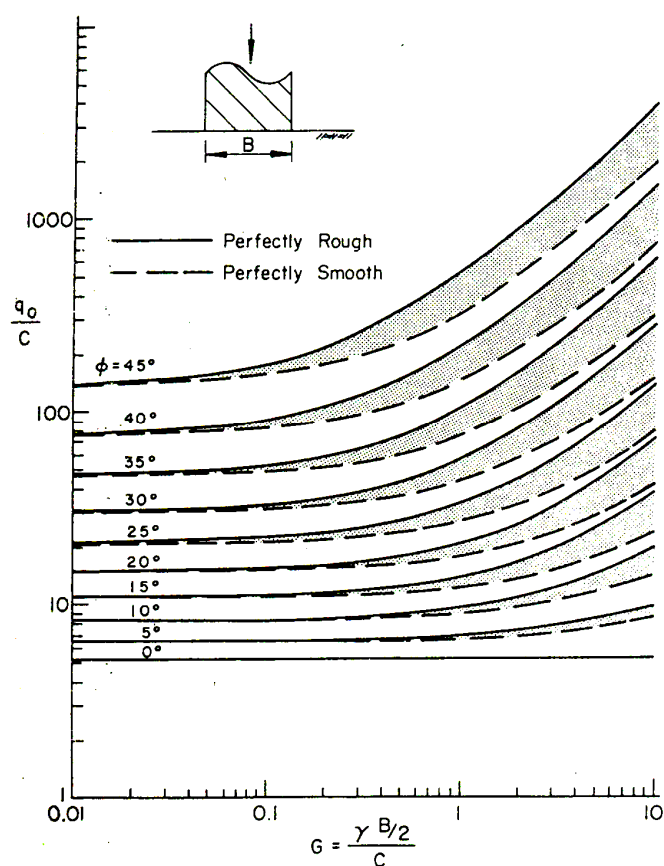
$$i_{\gamma} := (1 - f)^{m_B + 1} = 1 \quad (57)$$

A törőteher nagysága EuroCode szerint:

$$R_k := B \cdot \left(c \cdot N_c \cdot i_c \cdot s_c \cdot b_c + N_q \cdot s_q \cdot i_q \cdot q + 0.5 \cdot \gamma \cdot N_{\gamma} \cdot s_{\gamma} \cdot i_{\gamma} \cdot B \right) = 255.537 \frac{1}{m} \cdot \text{kN} \quad (58)$$

A számításokat többféle belső súrlódási szögre elvégeztük, az eredményeket táblázatos formában ábrázoltuk (6. Táblázat).

A képlékeny határteherbírás vizsgálatával (PLA) is végeztünk számításokat. Chan vezetett le összefüggéseket sávalapok törőterhének meghatározására (Chan 1975), melyeket grafikon formájában közölt:



3. Grafikon: Sávalap teherbírása Chan szerint (Chan 1975)

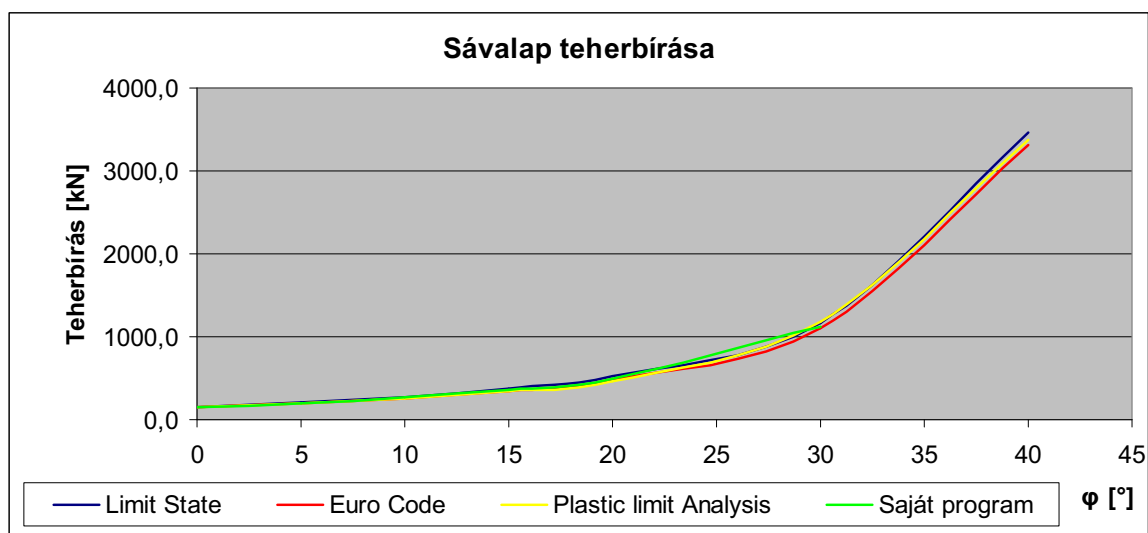
A grafikonról könnyen leolvasható a sávalap teherbírása (3. Grafikon).

LimitState Geo programmal végeztünk összehasonlításra alkalmas számításokat. A LimitState Geo egy a mérnöki gyakorlatban is alkalmazott, töréskép optimalizáláson alapuló program (LimitState Geo Manual, Product description).

Különböző belső súrlódási szögekkel és számítási eljárásokkal kapott eredményeket táblázatban ábrázoltuk (6. Táblázat).

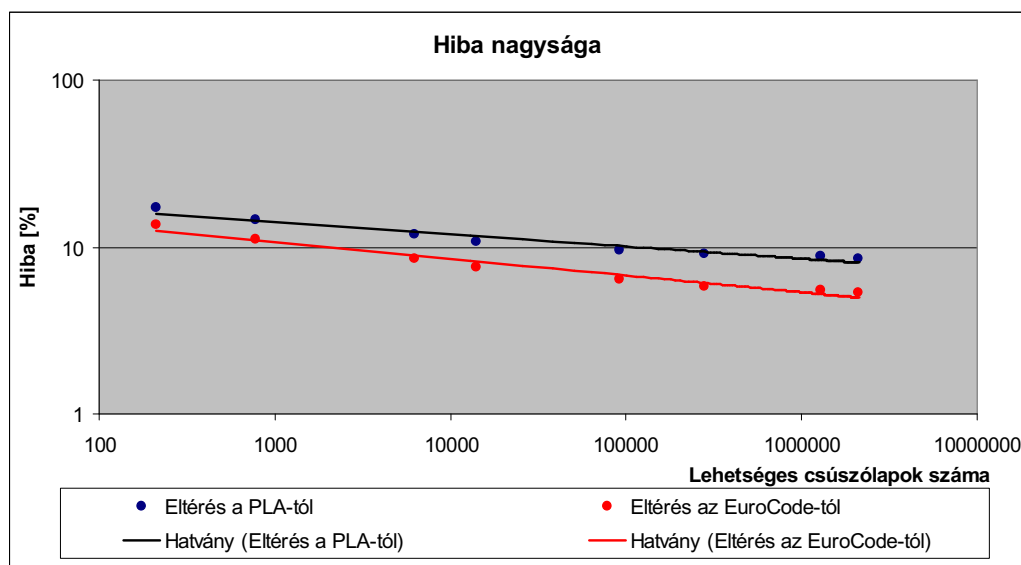
6. Táblázat : Sáv alap teherbírása [kN/m²]

Sorszám	φ [°]	LimitState Geo	EC	PLA	Saját	Eltérés EC	Eltérés PLA
1	0	156,2	154,3	150	155,7	3,8%	1,0%
2	5	202,1	195,7	190	201,4	6,0%	2,9%
3	10	270,3	255,5	250	262,2	4,9%	2,6%
4	15	369,7	345,1	350	351,7	0,5%	1,9%
5	20	524,1	484,4	470	491,0	4,5%	1,4%
7	30	1170,0	1105,0	1180	1112,6	5,7%	0,7%
9	40	3467,0	3320,0	3380			



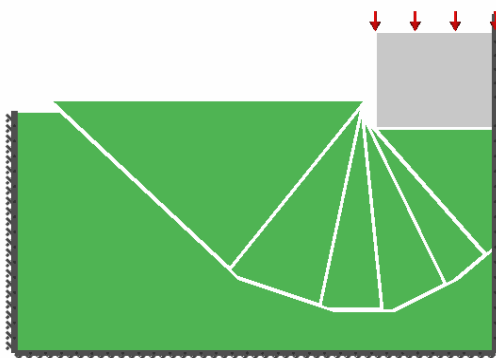
4. Grafikon: Sáv alap teherbírása

A négy eljárással számított eredmények kis eltéréseket mutatnak (4. Grafikon), bár a töréskép optimalizálás eredménye nagyobb eltérést mutat az EuroCode és a képlékeny határteherbírással kapott eredménytől, mint az előző példában tapasztalható volt. Ez az eltérés az elemszám növelésével csökken ugyan, de nem tart nullához (5. Grafikon). Ez azt mutatja, hogy a számítás a diszkretizálás hibáján túl más típusú hibával is terhelt.



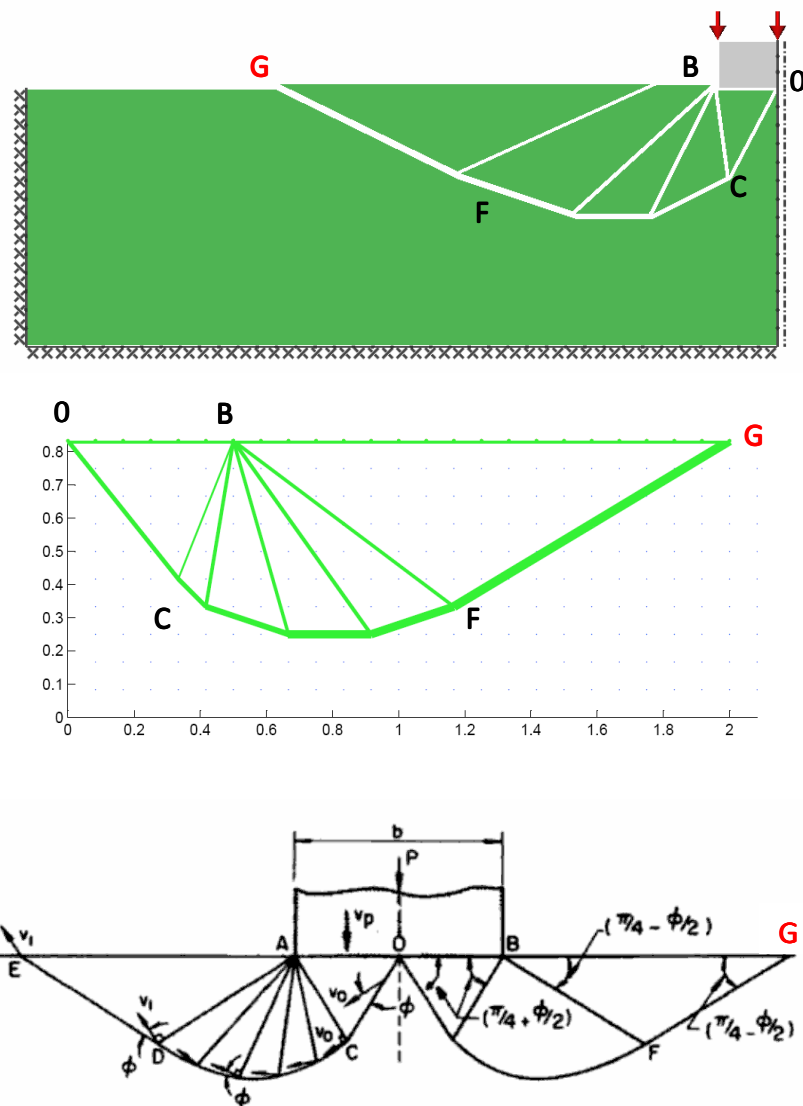
5. Grafikon: A hiba nagysága dupla logaritmikus skálán ábrázolva

A hatványfüggvény típusú trendvonal sem illeszkedik a pontokra, a hiba nem tart nullához. Ennek az oka az úgynevezett geometriai záródás azaz a belső súrlódási szög növelésével a töréskép optimalizálás felülbecslése nő ami a diszkretizálás finomításával sem csökken jelentősen. Ez több feladatban is megjelenik, egy átlagosnak tekinthető kiosztás esetén az ebből adódó hiba nagysága megközelítőleg 5-10% volt. A szakirodalomban csak említésszerűen találkozunk ezzel a jelenséggel, ebben a témában további kutatások szükségesek. Kis belső súrlódási szögek esetén azonban a töréskép azonos a Prandtl-féle alakkal (46. ábra).



46. ábra: A Prandtl mechanizmus

Ahogy a belső súrlódási szög nő, megjelenik a Hill-mechanizmus (47. ábra)(Chan 1975).



47. ábra: A Hill mechanizmus (Chan 1975)

A kapott eredmény nem csak a teher értékében, hanem a töréskép alakjában is közel azonos az analitikus eredményekkel. A **G** pontban lévő szög a számításaink alapján $30^\circ 58'$, míg Hill szerint 30° .

6.3. Megtámasztás nélküli függőleges földfal.

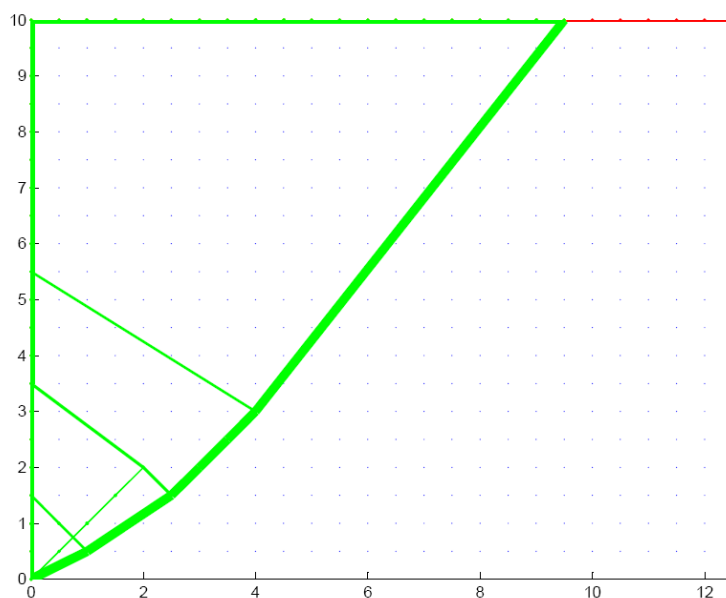
A megtámasztás nélkül kiemelhető függőleges földfal legnagyobb magasságának meghatározására a Rankine által kidolgozott képlet a következő (Farkas 1995):

$$m_0 = \frac{4c}{n\gamma} \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right) \quad (59)$$

ahol c a kohézió, ϕ a belső súrlódási szög, γ a talaj térfogatsúlya és n a biztonsági tényező.

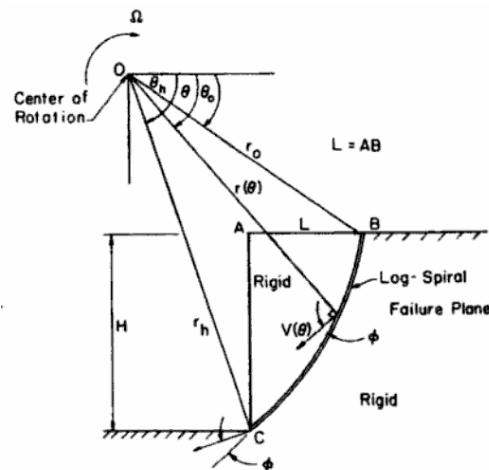
Jelen esetben a belső súrlódási szög $\phi=0^\circ$, a kohézió $c=50$ kPa. A talaj térfogatsúlya $\gamma=20$ kN/m³. A földfal magassága $m_0=10$ m, így a biztonsági tényezőt $n=1,00$.

Számításainkban a tervezési terület felső és bal oldala szabad perem, a jobb és alsó oldala fix. A talajra csak az önsúlyteher hat, ami természetesen változó teher. A kapott állékonysági biztonság 0,95182. Ez 4,8%-kal kisebb, mint az analitikus megoldás. Ez annak tükrében érdekes, hogy a számítási módszerünk felső becslést ad. Ezen felül a töréskép is eltér a várttól ugyanis a földfal nem egyenes mentén csúszik meg (48. ábra).



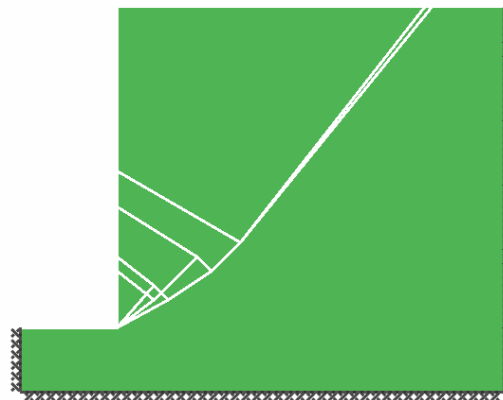
48. ábra: A megtámasztás nélküli földkiemeléskor kialakuló talajtörés számított törésképe

Mivel a Rankine-féle képlet is felső becslés, vélhetően a mi megoldásunk egy ennél kisebb felső becslés. Fellenius számításai ebben a témában már logaritmikus spirálra vonatkoznak (49. ábra), és az állékonyság értékének felső korlátja 0,9575 (Fellenius 1927).



49. ábra: Logaritmikus spirál alakú töréskép (Chan 1975)

Ez mind alakban, mint értékben jobban közelíti a programunkkal számított alakot és állékonyságot. A számításokat elvégeztük a LimitState Geo programmal is (50. ábra), mely 0,9522-et adott eredményül.

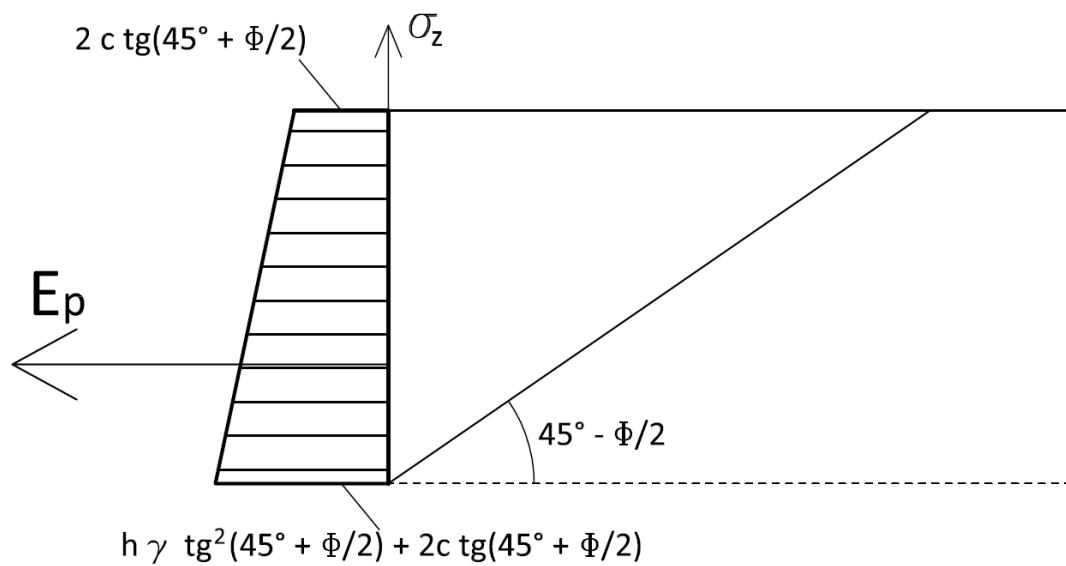


50. ábra: A számított töréskép LimitState Geo-val

Látható, hogy mindkét program alacsonyabb értéket ad a Fellenius-féle eredménynél, azaz ezek kisebb felső korlátot jelentenek.

6.4. Passzív földnyomás

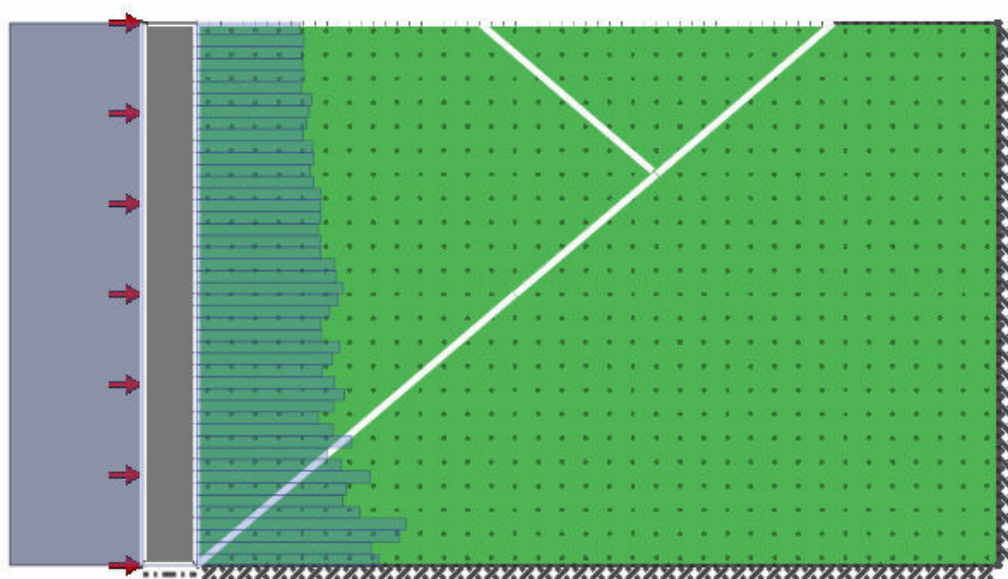
A passzív földnyomás meghatározására Rankine dolgozott ki analitikus megoldást (51. ábra)



51. ábra: Passzív földnyomás meghatározása Rankine szerint

A passzív földnyomásból származó erő (E_p) a vízszintes feszültségi ábra területéből számítható.

A töréskép optimalizálással oly módon számíthatjuk a passzív földnyomást, ha felvesszünk egy tökéletesen merev támfalat, amire vízszintes terhet működtetünk. A talaj önsúlyát állandónak tekintjük, a támfalra ható erő a változó teher és elfordulásokat nem engedünk meg.



52. ábra: Passzív földnyomás meghatározása LimitState Geo-val $\phi=10^\circ$

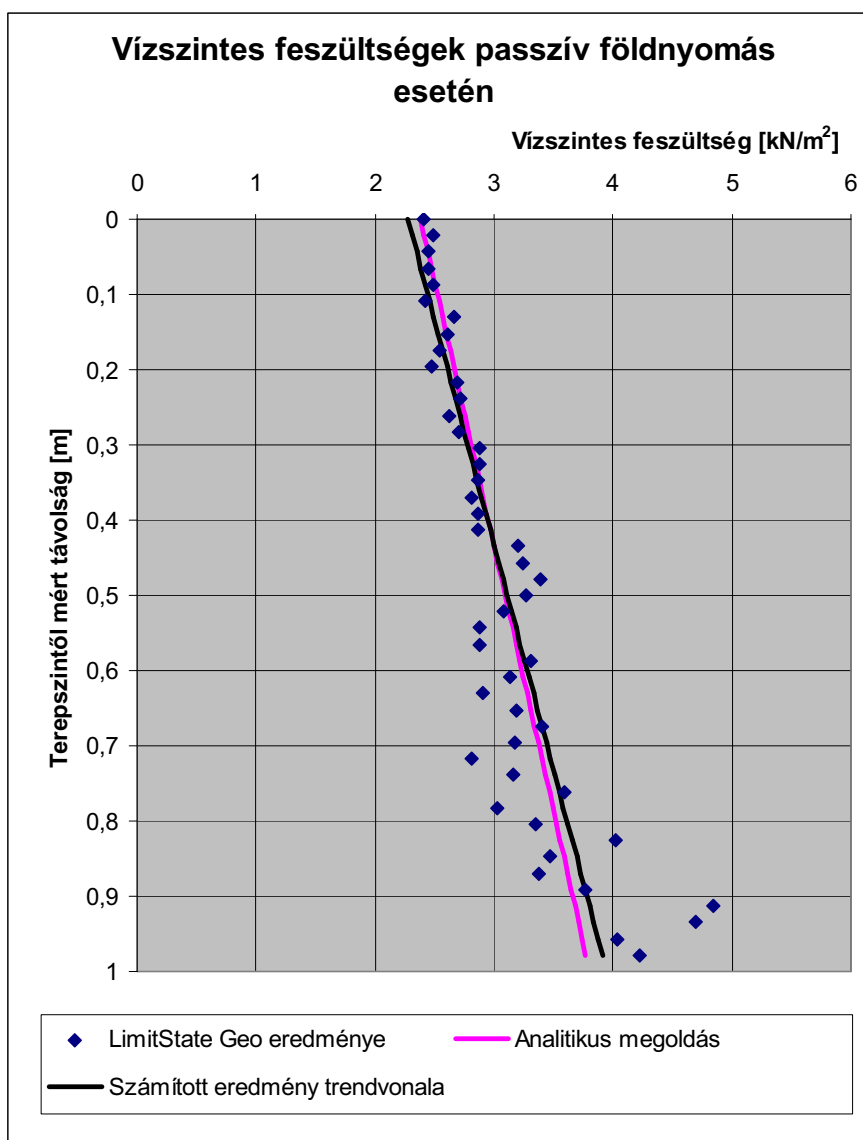
A számításokat többféle belső súrlódási szöggel is elvégeztük (7. Táblázat).

7. Táblázat: A passzív földnyomás értéke $\phi=0-40^\circ$

Sorszám	ϕ [°]	Állékonyság	
		Analitikus	LimitState Geo
1	0	2,500	2,500
2	10	3,094	3,094
3	20	3,876	3,876
4	30	4,964	4,964
4	40	6,588	6,589

Az 6.2. fejezetben tárgyalt példával ellentétben nem jelentkezik a geometriai záródás, a belső súrlódási szög növekedésével sem figyelhető meg számottevő numerikus hiba.

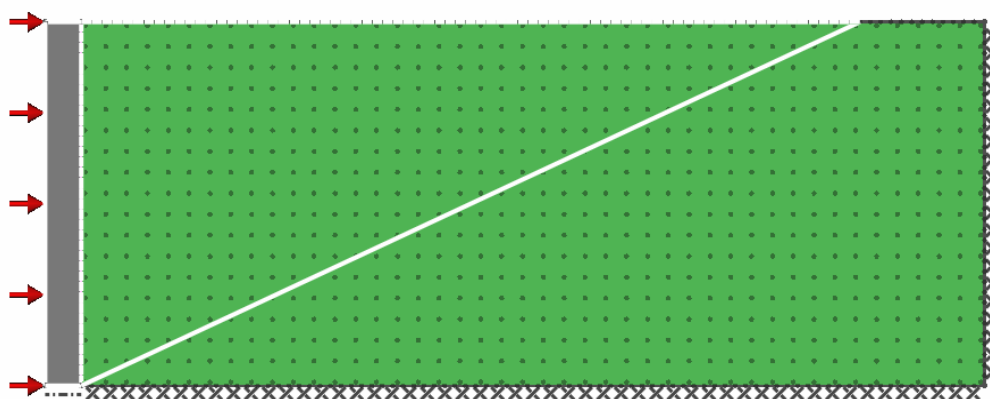
A passzív földnyomásból származó erőn felül a földnyomás értéke is meghatározható (52. ábra). A vízszintes földnyomás értéke nem lineáris, eltérést mutat az analitikus megoldástól. Az eltérés nagyságának vizsgálatához grafikonon ábrázoltuk a LimitState Geo-val kapott földnyomásokat, a számított értékekre illeszthető trendvonalat, illetve az analitikus megoldást (6. Grafikon).



6. Grafikon: Passzív földnyomás nagysága

A számított eredményekre illesztett trendvonal csaknem egybeesik az analitikus megoldással, illetve a két feszültségi ábra területe 5 tizedes jegy pontossággal azonos. A számított vízszintes feszültségek analitikus eredménytől való eltérésének szórása 0,09678.

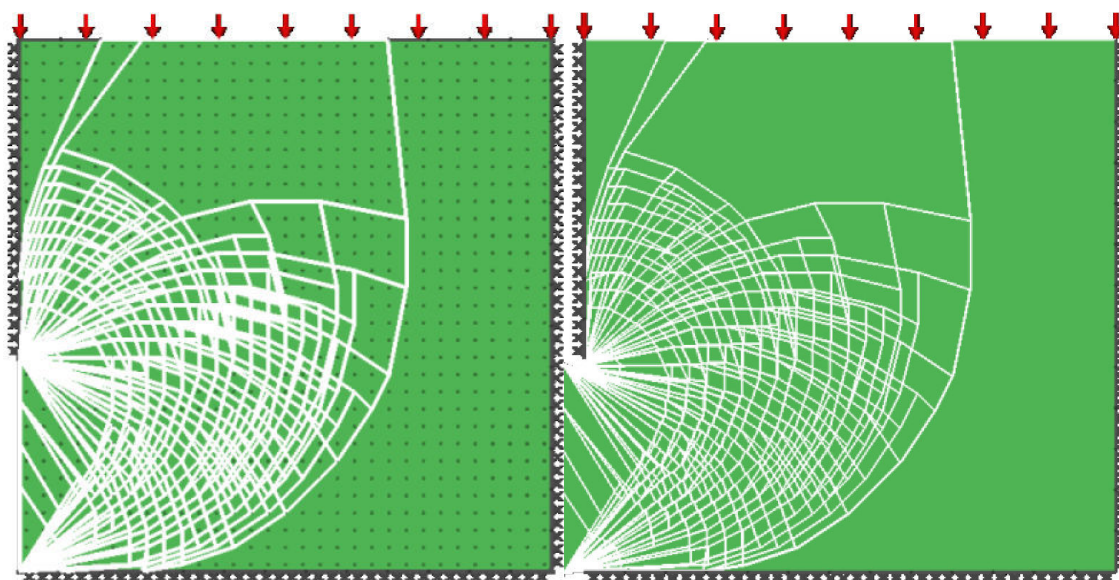
A számított és a Prandtl szerinti töréskép alakjukban azonos (53. ábra), a kialakuló törés szöge számításaink szerint $24^{\circ} 57'$, az analitikus eredmény 25° , tehát az eltérés mindössze $3'$.



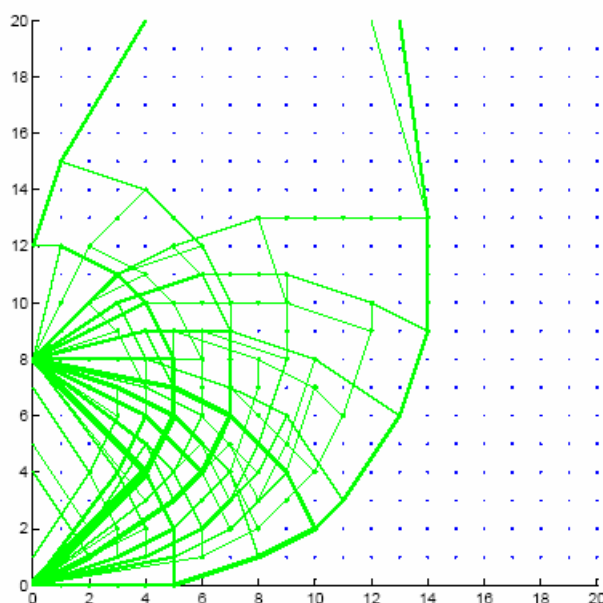
53. ábra: Passzív talajtörés $\phi=40^\circ$ esetén

6.5. Alagútindítás

Egy balról mereven megtámasztott, felülről egységteherrel terhelt talajtömeg látható a képen. Az alsó 8 méteren eltávolították a megtámasztást a felső 12 méter pedig továbbra is megtámasztott. A talaj kohéziója 10 kN/m^2 , belső súrlódási szöge 20° , a térfogatsúlyát egységnyinek feltételezzük. A felszíni teher legnagyobb értékét keressük. A számításokat LimitState Geo szoftverrel végeztük el (54. ábra).



54. ábra: LimitState Geo-val számított töréskép



55. ábra: A saját programmal számított töréskép

A számításokat elvégeztük az általunk készített programmal is (55. ábra). A bemenő paraméterek azonosak voltak, a két modell a ponthálózat sűrűségében tér el, a LimitState Geo esetén sűrűbb rasztert vettünk fel. A felszíni teher értéke $301,3 \text{ kN/m}^2$ -re adódott.

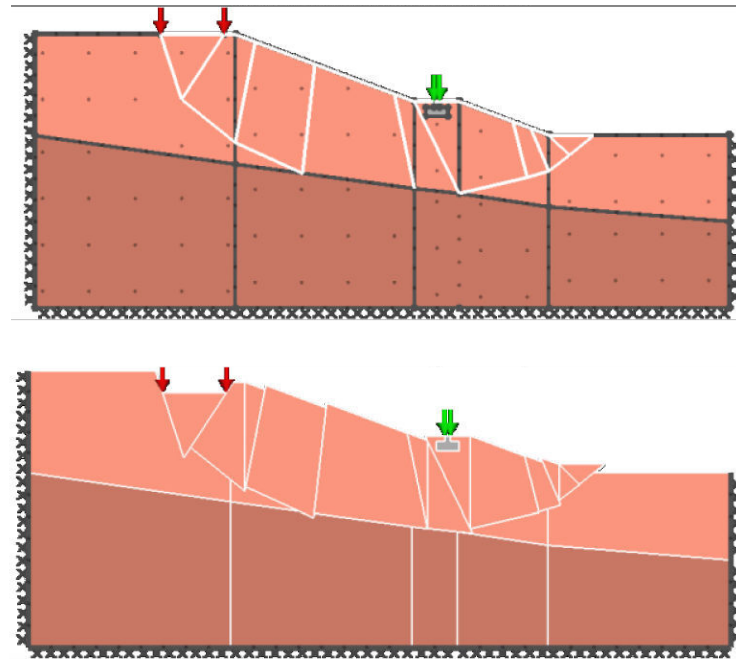
A felszíni teher nagysága esetünkben $309,041 \text{ kN/m}^2$, ami 2,6 %-os különbség. Ez nagyrészt a raszter sűrűségének eltéréséből fakad. A LimitState Geo kisebb raszter mérettel $310,1 \text{ kN/m}^2$ -t ad, ami közel azonos a saját eredményeinkkel. Az ábrákon megfigyelhető, hogy a törésképek jellegükben azonosak.

7. A DLO alkalmazása

Ebben a fejezetben rövid áttekintést adunk a DLO néhány általunk fontosnak tartott alkalmazási területei közül, melyeket nem implementáltunk. A számításokat LimitState Geo programmal végeztük. Fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy a DLO egy igen új módszer és még nem áll rendelkezésre kellő mennyiségű tapasztalat a használatáról. Ezzel a fejezettel célunk az egyes „építőelemek” bemutatása, melyekből egy korrekt geotechnikai modell felépíthető. Szeretnénk kiemelni azokat a funkciókat, amik lehetőséget rejthetnek magukban. Más programokkal és számítási eljárásokkal kevés az összehasonlítás, melyekkel a későbbiekben esetlegesen mi is szeretnénk foglalkozni. Egy számítási eljárás ilyen összehasonlítások során mutatja meg igazi előnyeit. A manapság elterjedt állékonyságszámításnál használt módszerekkel összehasonlítva a következőket lehet elmondani. A kör és sokszögcsúszólapos eljárásokkal szemben óriási előnye a DLO-nak, hogy általános geometriájú feladatokat is meg tud oldani, nem csak részsík vizsgálatára alkalmas. A végeselemes számításokkal szemben viszont az a hátránya, hogy alakváltozások nem számíthatók. Ellenben tönkremeneteli határállapot vizsgálatokor a végeselemes számítások jó alternatívája a DLO. Előnye a véges elemes módszerekkel szemben a tönkremeneteli állapotot nem ϕ -c redukcióval számítja, hanem egy lépésben, ami jelentősen csökkenti a futási időt. A szingularitások akár feszültségben, akár elmozdulásokban könnyen figyelembe vehetők.

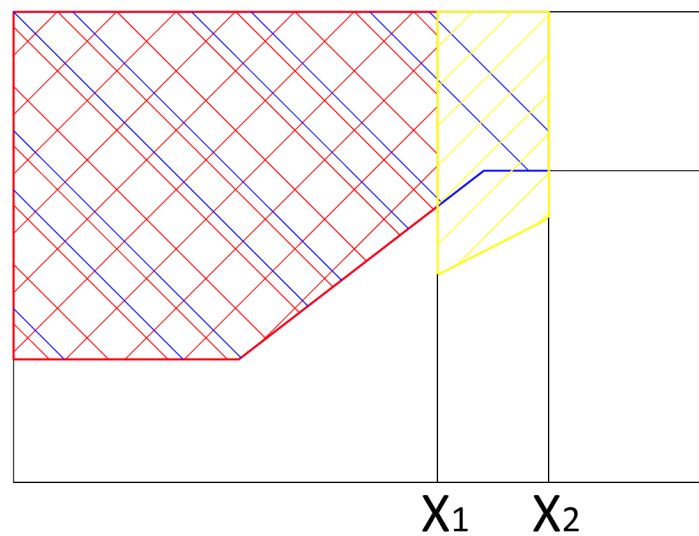
7.1. Részsík vizsgálata

A dolgozatunkban implementált program téglalap alakú földtömeg vizsgálatára alkalmas. A DLO alkalmas általános geometriájú feladatok megoldására is (56. ábra). Ennek megvalósításához a tervezési területen kívüli lehetséges éleket figyelmen kívül kell hagyni, amire szintén alkalmazható több módszer is. A figyelmen kívül hagyott éleket tárolhatjuk listákban, függvényeket is definiálhatunk, melyek bemenete egy él, kimenete igaz vagy hamis aszerint, hogy része-e az él a tervezési területnek.



56. ábra: Rézsű vizsgálata

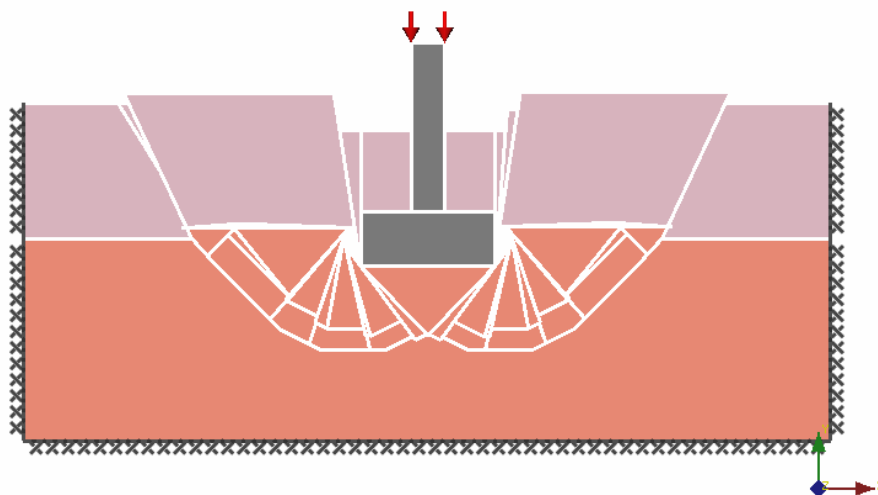
Alkalmazható ennek a két módszernek egy hibrid megoldása is. A program implementálása során kell eldöntenünk, melyiket alkalmazzuk. Az önsúlyszámításkor is figyelembe kell venni a tervezési területet, amire talán a legegyszerűbb módszer (57. ábra), ha a felső határoló él pontjait tároljuk, majd minden ponthoz számítjuk a hossz szerinti numerikus integrált, azaz a felső él adott pontjáig tartó szakasz feletti területet. Egy adott lehetséges él vetülete a felső határoló egyenesen meghatároz két pontot. Ezen két pont fent említett integráljának (kék és piros sraffozott terület) a különbségét kivonjuk az adott él feletti területekből (sárga sraffozott terület), és így megkapjuk a keresett területet.



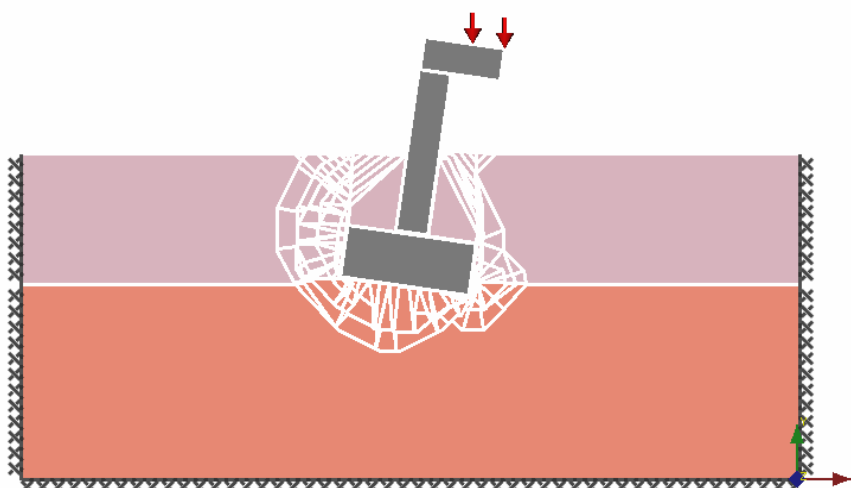
57. ábra: Területszámítás általános alakú tervezési terület esetén

7.2. Sáv alapok elfordulása

Külpontosan nyomott sáv alapok alatti tönkremenetel az elfordulási biztonság segítségével számítható. Ekkor az elforduló alap és a talaj kölcsönhatását az 4.7. fejezetben leírtaknak megfelelően vesszük figyelembe. A talaj egy kemény agyag és egy puha agyag. A LimitState Geo lehetőséget biztosít az elfordulás figyelembevételére.



58. ábra: Központos nyomás: Törőteher 1405 kN/m^2



59. ábra: Külponos nyomás: Törőteher $751,9 \text{ kN/m}^2$

Látható az elforduló és elfordulás nélküli esetek mind törésképben, mind teherbírásban jelentős különbséget mutatnak.

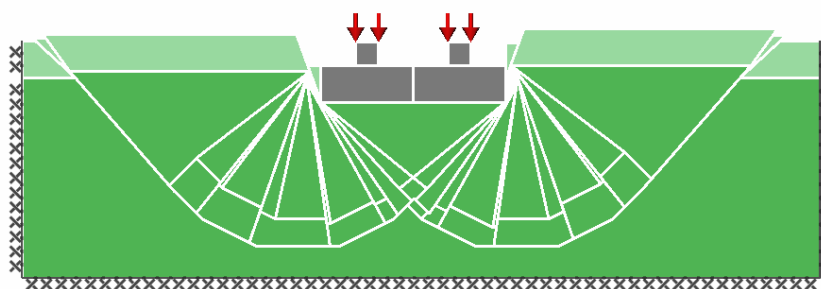
7.3. Talajvíz

A LimitState Geo a piezometrikus nyomásmagasságokból számít talajvíznyomást, amit az 4.8. fejezetben leírtaknak megfelelően vesz figyelembe. A piezometrikus magasságokat az önsúlyszámításhoz hasonlóan a lehetséges él feletti víztömeg súlyaként számítjuk. Mivel az egyenletekben egy élre ható talajvíznyomás értéke szerepel, más módszer is használható a talajvíznyomások vizsgálatára. Példaként emelnénk ki egy említésre méltó megoldást, a Phase Slide programcsomagban található módszert: a talajvízviszonyokat egy egyszerű végeleemes program számítja, míg az állékonyságot sík kör vagy sökszögcsúszólapos számítás adja. Az általunk implementált program bővíthető lenne oly módon, hogy egy talajvízáramlás számítására alkalmas program eredményeit venné figyelembe. További kutatási lehetőség a talajvízáramlás hatásának vizsgálata, mely során a talajvízáramlásból származó tömegező külső teherként felvehető. A hidraulikus gradiens nagysága és iránya egy adott élen számítható több programmal is, amiből már meghatározható az adott élre ható tömegező. Ilyen teher lehet például a záporhatás, ami több esetben is lehet mértékadó (Kézdi 1979, Lazányi 2008).

7.4. Biztonság értelmezése, *adequacy factor*

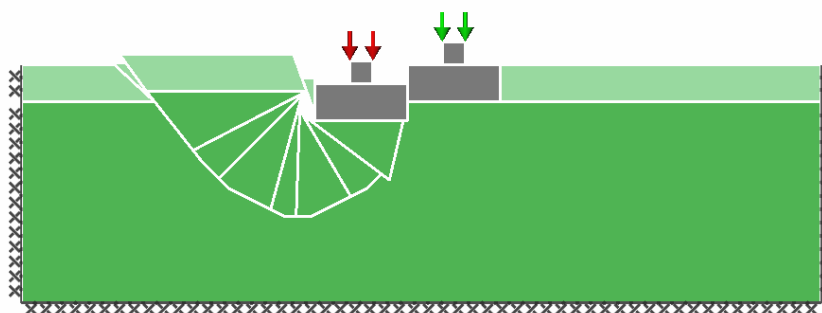
Mint a 4.2.3. fejezetben is kitértünk rá, a terheket két csoportba oszthatjuk: változó és állandó terhekre. A változó terhek nagysága a törés pillanatában a megadott teher λ -szorosa (ahol λ a biztonsági tényező), míg az állandó terhek a megadott értékben szerepelnek. A felhasználó feladata eldönteni, hogy melyik teher tekinthető állandónak, és mely terhekre vonatkoztatva szeretnénk tudni a biztonság értékét. Erre a következő két példát mutatjuk be.

Két egymás mellett lévő sávalap törését akarjuk vizsgálni. Az alapozási síkok egy magasságban vannak. Az egyik sávalap meglévő, és a másikat mellé építjük. A két sávalap közt nem lép fel súrlódás, mind elmozdulásban, mind feszültségben diszkontinuitás van köztük. Ekkor vizsgálhatjuk, hogy mekkora a két sávalap együttes biztonsága, azaz mindkét terhet változó tehernek vesszük fel.



60. ábra: Két változó teher

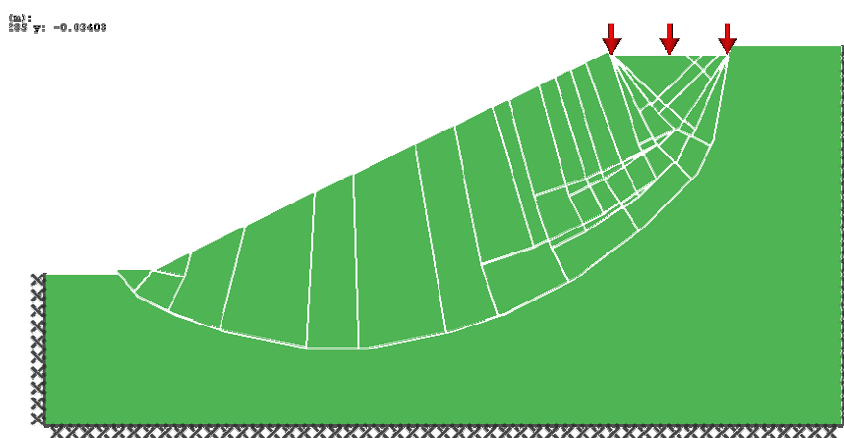
Látható, hogy ekkor a két alap alatt egy közös törés alakul ki, ami nem azonos a két alap alatti törés szuperponálásával (60. ábra). Ekkor a biztonság értéke 1.432, azaz mindkét teher értéke ennyivel növelhető a törésig. Amennyiben a meglévő alapozás terhet állandónak tekintjük (természetesen ha szükséges a megfelelő biztonsági tényező figyelembe vehető), és a melléépített alapozás terhe változó csak a változó teher alatt következik be törés (61. ábra).



61. ábra: Egy változó teher

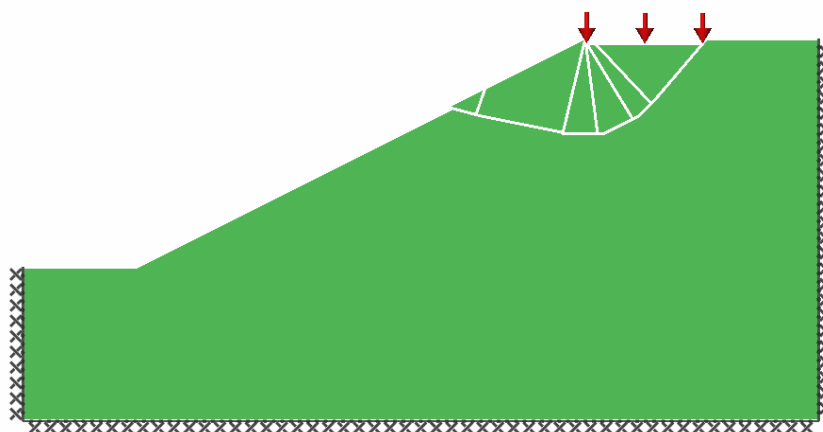
Ebben az esetben a biztonság is nagyobbra (1.632) adódik. Azaz a jobb oldali teher értékét változtatlanul hagyva a bal oldali teher 1.632 szerezéig növelhető a törésig.

Második példánk egy terhelt rézsű. Rézsűk tönkremenetelekor alapvetően úgy definiálható a biztonság, hogy meddig növelhető a talaj önsúlya, míg bekövetkezik a tönkremenetel. Az első példában az önsúly és a megoszló teher is változó teher (62. ábra). Ekkor a terhelt rézsű biztonságát kapjuk eredményül, értéke 2,22.



62. ábra: Az önsúly mint változó teher

Amennyiben az önsúlyt állandó tehernek tekintjük teljesen más jellegű tönkremenetelt kapunk.



63. ábra: Önsúly mint állandó teher

A tönkremeneteli mód egy rézsúcsúszás helyett egy ferde térszín esetén bekövetkező alap alatti talajtörés jellegzetességeit hordozza magán (63. ábra). A biztonság értéke is jóval magasabb, értéke: 3,929. Ez az eredmény egy rézsű vizsgálatakor mindenképpen fenntartásokkal kezelendő, abban az esetben tekinthető elfogadhatónak, ha ténylegesen illeszkedik a módszert használó mérnök által felállított geotechnikai modellel. Összességében elmondható, hogy a terhek változó és állandó tehercsoportokká történő szétválasztása előnyös abban az esetben, ha terhek hatásait elkülönítve kívánjuk vizsgálni, de minden esetben át kell gondolni, hogy igazodik-e a geotechnikai modellünkhöz a terhek besorolása.

8. Futási eredmények értékelése

8.1. A töréskép optimalizálás helytállóságáról

A módszer és a programunk helytállóságának alátámasztására több esetet vizsgáltunk. Eredményeink azt mutatják, hogy a program kellően pontos eredményt ad. Mindazonáltal további futtatások és összehasonlítások szükségesek a teljes validáláshoz. A vizsgált esetekben a numerikus hiba elfogadható szinten volt.

8.2. Modellezési hibák

Fontosnak tartjuk összegezni, hogy a bemutatott és implementált numerikus módszer milyen hibákkal terhelt. Ez pusztán becslés, mely a vizsgált esetek eredményei alapján elvégezhető, nem matematikailag korrekt hibaszámítás.

8.2.1. Geotechnikai vagy kőzetmechanikai modell

Természetesen a talajmechanikai vagy kőzetmechanikai modell hibákkal terhelt, közelítéseket tartalmaz. Az alkalmazott törési feltételek, a képlékeny feltételezés, a geometria felvétele és számos további paraméter közelítések és elhanyagolások eredményeként jöttek létre. Az alkalmazott modellek helyességének megítélése nem feladata dolgozatunknak, így a geotechnikai modelleket mint referenciát használjuk. Summázzuk a feltételezett (a módszer jellegéből és megvalósításából származó) hibákat, majd vizsgáljuk, hogy a talaj vagy kőzetfizikai jellemzők mekkora változása (hibája) okoz hasonló eltérést az eredményben. Így kívánunk képet adni arról mekkora felülbecslésre/pontatlanságra lehet számítani az elkészült programunk használata során.

8.2.2. Diszkretizálás

A 0. fejezetben megmutattuk, hogy egy aránylag kisméretű probléma (20 x 20 pontból álló hálózat) is elfogadható hibát ($\cong 1\%$) eredményez. Ez az érték a talaj-, kőzetfizikai jellemzők meghatározásának hibahatárán belül van, azaz nem számíthatunk arra, hogy a fizikai jellemzők értéke ennél pontosabb. Az 1%-os nagyságrendű hiba ténylegesen elhanyagolható.

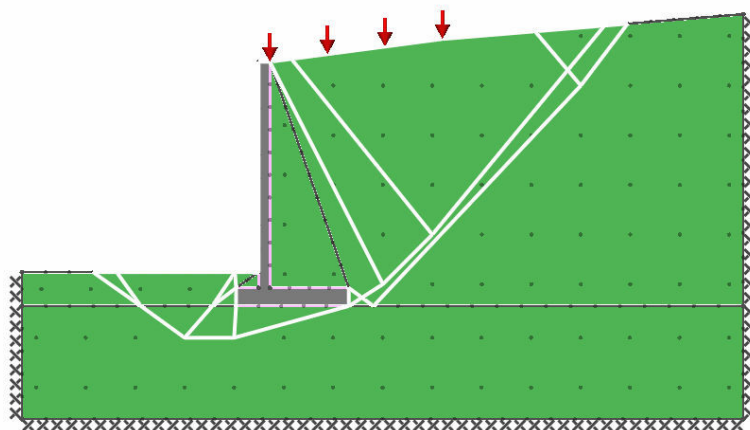
8.2.3. Geometriai záródás

A 6.2. fejezetben bemutattuk, hogy a belső súrlódási szög növelése esetén a töréskép optimalizálás egyes esetekben felülbecsli a törőterhet. A felülbecslés mértéke a raszter kiosztás finomításával csökken ugyan, de nem jelentősen. Az általunk vizsgált esetekben mértéke 5-10% körüli volt. A szakirodalomban nem lelhető fel kellő számú és részletességű vizsgálat a témában, további kutatások szükségesek.

8.2.4. A hibák hatása

A fentebb felsorolt hibák megközelítőleg 0-10%-os pontatlanságot okoznak a modellünkben. Számításokat végeztünk, melyekkel meghatározzuk, hogy a talajfizikai jellemzők mekkora eltérése okoz hasonló méretű felülbecslést.

A bemutatott eset egy szögtámfal vizsgálata, ahol a talaj önsúlya 20 kN/m^3 , kohéziója 40 kN/m^2 , belső súrlódási szöge 10° , a felszíni teher nagysága pedig 5 kN/m^2 .



64. ábra: Szögtámfal

Az állékonysági biztonság értéke 1,589-re adódott és kerestük az ennél 10 %-kal kisebb állékonysághoz (1,431) tartozó talajfizikai jellemzőket (8. Táblázat).

8. Táblázat: Hibák hatása

eset	%	Talajfizikai jellemzők			Állékonyság
		ϕ [°]	c [kN/m ²]	γ [kN/m ³]	
1	0,0%	10	40	20	1,589
2	10,0%	9	36	22	1,246
3	5,0%	9,5	38	21	1,414
4	4,5%	9,55	38,2	20,9	1,43

A számítások alapján elmondható, hogy a talajfizikai jellemzők 4,5%-os változása okoz a geometriai záródás 10 %-os eltéréseivel azonos nagyságú hibát, ami szintén elfogadható nagyságú hiba.

8.3. Felírt feladatok megoldhatóságáról

Dolgozatunkban bemutattuk, hogyan kell felírni a töréskép optimalizálás lineáris programozási feladatát, a megoldási lehetőségeket. Ebben a fejezetben foglaljuk össze azokat az eseteket, amikor a felírt egyenletek nem oldhatóak meg. A 4.2. fejezetben azt foglaltuk össze milyen megoldásai lehetnek egy lineáris programozási feladatnak. Ezek a töréskép optimalizálás számításakor a következőképpen jelennek meg:

- Primál formulának nem korlátos a célfüggvénye. Ebben az esetben az elmozdulások korlátozás nélkül növelhetőek, a feladat nem stabil, például egy önsúllyal terhelt rézsű, ahol a kohézió zérus és a rézsűhajlás nagyobb mint a belső súrlódási szög. Ekkor a duál problémának nincs megoldása. A LimitState Geo ekkor *unstable* hibaüzenettel leáll.
- A primál formulának nincs fizibilis eredménye, ekkor nincs olyan elmozdulás-rendszer, ami kielégítené a kinematikai egyenleteket. A duál formulának ekkor nem korlátos a célfüggvénye, azaz a teher értéke korlát nélkül növelhető anélkül, hogy a feszültségek megsértenék a Mohr-Coulomb törési feltételt. Ez az eset például akkor áll fenn, ha egy rézsű hajlásszöge kisebb, mint a belső súrlódási szög. A LimitState Geo a *locked* hibával áll le.

- Numerikus instabilitás lép fel, amikor a felírt feladat elvileg megoldható ugyan, de az LP-megoldó nem konvergál, a feladatot numerikus problémák miatt nem tudjuk megoldani. Az általunk és a LimitState Geo által használt Mosek megoldó igen robusztus, a felírt problémákat elő-feldolgozza (pre-solver) és megfelelő kondíciószerű feladattá alakítja át. Ennek ellenére előfordulhat, hogy nem oldható meg egy feladat, ilyenkor érdemes olyan változtatásokat eszközölni a modellben, ami a kapott eredményt nem befolyásolja. Olyan helyen módosítani a geometriát, ahol várhatóan nem következik be törés, az összes változó teher értékét szorozni egy adott konstanssal, majd a kapott eredményt visszaosztani vele. Ezek az eredményt nem befolyásoló változtatások általában elegendőek, hogy a megoldó képes legyen elvégezni a számításokat, így a felírt LP-probléma megoldhatóvá válik. A LimitState Geo ilyenkor az *unknown* jelzés mellett leáll.

9. Későbbi kutatási lehetőségek

Mint már a dolgozatunk korábbi részeiben is utaltunk rá sok terület van a DLO-val kapcsolatban, amit érdemes vagy szükséges vizsgálni . Ezek közül csak néhányat emelnénk ki, melyek megvalósítása terveink közt szerepel, pontosabban melyek közül előreláthatólag kiválasztjuk további kutatásaink tárgyát.

A jelenleg használatos módszerekkel történő teljesebb összehasonlítás. Ehhez kapcsolódóan a DLO használatából fakadó hibák pontosabb becslése, számos és sokféle esetet vizsgálva.

Kísérleti eredményekkel illetve bekövetkezett tönkremenetelek tapasztalataival történő összehasonlítások. Megjegyeznénk, hogy voltak már efelé mutató biztató eredmények (Lee, 2008, Borbély 2010).

A 3 dimenziós vizsgálatokra történő kiterjesztés, elméletének kidolgozása, és implementálása is sok lehetőséget rejt magában. Vélhetően a számítási kapacitás végeességéből fakadó informatikai problémák megoldása az egyik legnagyobb akadálya az ilyen típusú számítások elvégzésének.

A talajvízáramlás által kifejtett tömegerő figyelembevétele rézsúállékonysági problémák esetén. Ebben az esetben a módszer nagy előnye lehet az egyszerűsége. Mivel egy hosszú gátszakasz vizsgálata számos futtatást jelent egy egyszerű és megfelelő eredményt adó eljárás előnyös lehet.

Geometriai záródás hatásának és megszüntetésének vizsgálata, véleményünk szerint az egyik legsürgetőbb feladat a töréskép optimalizálás kapcsán. Számításainknál a nagy belső súrlódási szögű talajok esetén előforduló záródás okozta a legnagyobb numerikus hibát (5-10%).

10.Összefoglalás

A tönkremeneteli határállapot számítására jelenleg két fő módszer áll a mérnökök rendelkezésére: a végeselemes modellezés és a különböző sík és sokszög-csúszólapos eljárások. A csúszólapos eljárások (Bishop, Janbu, Morgenstern and Price, stb.) nagy hátránya, hogy csak részüik vizsgálatára képesek. A végeselemes modellezés hatékonysága vitán felül áll, ellenben a tönkremeneteli határállapot számításakor alkalmazott iterációs eljárás sok időt emészt fel. Sok esetben szükségtelen a végeselemes számítások végrehajtása, ezt mi sem bizonyít jobban, mint az, hogy a legtöbb geotechnikai tervezőiroda rendelkezik egyszerűbb eljárásokat használó programokkal.

Gilbert (és munkatársai) kutatásaik során kifejlesztettek egy gyorsan működő és megbízható korlátot adó eljárást, amely a talajmechanikai feladatok széles körében képes a képlékeny törőteher, az EuroCode GEO tönkremeneteli módjának meghatározására.

Dolgozatunkban részletesen bemutattuk a DLO elméleti hátterét, továbbá készítettünk egy programot, ami ezen módszeren alapszik. A programunk segítségével figyelembe vehető önsúly, Mohr-Coulomb típusú anyag, definiálhatók változó illetve állandó terhek, megközelítőleg egymillió éllel történő közelítés vehető fel. Peremfeltételként megadható fix illetve szabad perem és szimmetriatengely. A tervezési terület a jelenlegi verzióban téglalap alakú lehet. Az elkészített program továbbfejleszthető a jövőben tervezzük: talajvíz figyelembevételének, nemlineáris törési feltétel közelítésének, általános alakú tervezési terület vizsgálatának valamint az elfordulni képes elemek vizsgálatának(támfal, külpontosan nyomott sávalap...) beleépítését.

A programíráskor szerzett tapasztalataink segítették a témában való elmélyülést, így a ma fellelhető szakirodalomnál részletesebben ismertettük a fent említett feladatok megoldását. Megmutattuk, hogy az egyes számítási lehetőségek, hogyan jelennek meg a lineáris programozási formulában, továbbá összefoglalást adtunk a lineáris programozás matematikai alapjairól, illetve a nagyméretű LP-feladatok megoldási lehetőségeiről. Megmutattuk, hogy a fent említett számítási lehetőségek hogyan használhatóak egy

modell részeként. Összefoglaltuk a töréskép optimalizálás kutatásához és érteve használatához szükséges alapvető ismereteket.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnénk megköszönni konzulensünknek Dr. Görög Péternek a nélkülözhetetlen segítségét, melyet dolgozatunk elkészítéséhez nyújtott.

A felhasznált programok

Matlab:

Verzió: 7.11.0.584 (R2010b)

Honlap: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

Mosek

Verzió: 6.0 (Revision 119)

Honlap: <http://mosek.com/products/mosek/>

Egyetemi e-mail címről (...@mail.bme.hu) egy hónapos, bármikor megújítható, teljes és ingyenes verzió igényelhető.

Glpk

Verzió: Niels Klitgord Feb 2011

Honlap: <http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html>

Ingyenesen használható és szerkeszthető program.

Open Office Calk:

Verzió: OpenOffice.org 3.2.1; OOO320m19 (Build:9505)

Honlap: <http://hu.openoffice.org/>

Ingyenesen letölthető programcsomag.

LimitState Geo:

Verzió: 2.0f.11094

Honlapcím: <http://www.limitstate.com/download/geo>

Egyetemi hálózaton belül ingyenes és teljes oktatási verzió érhető el.

Hivatkozásjegyzék

- Chen, W.F.** (1975) *Limit Analysis and Soil Plasticity, Developments in Geotechnical Engineering 7*. Elsevier.
- Chen, W.F. and Liu, X.L.** (1990) *Limit Analysis in Soil Mechanics, Developments in Geotechnical Engineering 52*. Elsevier.
- Dorn, W.S., Gomory, R.E. and Greenberg, H.J.** (1964) Automatic Design of Optimal Structures, *J. de Mechanique*, 3: pp. 25 – 52.
- Gilbert, M. and Tyas, A.** (2003) *Layout Optimization of Large-Scale Pin-Jointed Frames*, *Eng. Comp*, 20(8): 1044 – 1064.
- Hemp, W.S.** (1958) *Theory of structural design*. College of aeronautics Report No 115, Cranfield
- Kawamura, H., Ohmori, H. and Kito, N.** (2002), *Truss topology optimization by a modified genetic algorithm*, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 23 No. 6, pp. 467 – 72.
- Lee, Y., Smith, C. & Cheuk, C. Y.** (2008) *Bearing capacity of embedded foundations*, 2nd International Conference on Foundations, ICOF 2008, Dundee, pp. 961–972.
- Prager, W.** (1959) *On a problem of optimal design*, *Proc. IUTAM Symposium on non-homogeneity in elasticity and plasticity*, Warsaw, London: Pergamon, pp. 125 – 132.
- Smith, C.C. and Gilbert, M.** (2007) Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems. *Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463 (2086), pp 2461 – 2484.
- Smith, C. C. & Gilbert, M.** (2007b) *New upper bound solutions for layered soil bearing capacity problems using discontinuity layout optimization*, 10th Australia New Zealand Conference on Geomechanics, Brisbane, pp. 250–255.

Smith, C. & Gilbert, M. (2008) *Limit analysis of the stability of foundations on inclined ground*, 2nd International Conference on Foundations, ICOF 2008, Dundee, pp. 1683–1692.

Strang, G. & Kohn, R.V. (1983) *Hencky-Prandtl nets and constrained Michell trusses*. Appl. Mech. Review 36, 207 – 222.

Clarke SD, Smith CC and Gilbert M (2010) *Analysis of the stability of sheet pile walls using discontinuity layout optimization*. In Proc. 7th European Conference in Numerical Methods in Geotechnical Engineering, Trondheim, June, pp 163-168.

Green, A.P. (1951) *A Theoretical investigation of the compression of a ductile material between smooth flat dies*. Philos. Mag., 42: 900-918.

Alwis, W.A.M., (2000) *Discrete element slip model of plasticity*. Engineering Structures 23, 1494–1504.

Pritchard, T.J., Gilbert, M. and Tyas, A. (2005) *Plastic Layout Optimization of Large-Scale Frameworks Subject to Multiple Load Cases, Member Self-Weight and with Joint Length Penalties*. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization Rio de Janeiro

Karmarkar, N. (1984). *A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming*, Combinatorica, Vol 4, nr. 4, p. 373–395.

Szepesházi, R. (2008) *Geotechnikai tervezés*, Business Media Magyarország Kft.

Abramson, L. W., Lee, T.S., Sharma, S., Boyce, G.M. (2002) *Slope stability and stabilization methods*, John Wiley & Sons Inc

Manzari, M. T. & Nour, M. A. (2000) *Significance of soil dilatancy in slope stability analysis*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering 126(1), 75–80.

Michell, A.G.M., (1904) *The Limits of Economy of Material in Frame-Structures*, Phil. Mag., 8: 589 – 597.

Böker, R. (1915) *Die Mechanik der bleibenden Formänderung in kristallinish aufgebauten Körpern*. Mitteilungen über forschungsarbeiten, 175: 1-51.

Chan, W.F. (1970) *Extensibility of concrete and theorems of limit analysis*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 96 (EM3), Proc. Pap., 7369: 341-352.

LimitState Geo Manual, url.: http://www.limitstate.com/files/pdf/geo/GEO_Manual.pdf
(Megtekintés dátuma: 2011. 05. 10.)

LimitState Geo Product description, url.:
http://www.limitstate.com/files/pdf/geo/GEO_Product_Description.pdf (Megtekintés
dátuma: 2011. 05. 10.)

Farkas, J. (1995): *Alapozás: előadási jegyzet*, Műegyetemi K.

Gale, D., Kuhn, H. W., Tucker, A. W., (1951) *Linear programming and the theory of games*, Activity Analysis of Production and Allocation, pp. 317–329.

Illés, T., Rapcsák, T., Terlaky, T. (2002) *Interior Point Methods, Feature Issue*, European Journal of Operational Research, Vol. 143, no. 2.

Bertsimas, D., Tsitsiklis, J. N. (1997) *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, ISBN-13: 978-1-886529-19-9

Lazányi, I. (2008) *Árvízvédelmi töltések rézsűsuvadásának kezelése – versenyfutás az idővel*, Dr Kézdi Árpád Emlékkonferencia, Budapest, pp. 62-76.

Kézdi Á. (1979) *Talajmechanika II*. Negyedik kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest

Borbély, D. (2010) *A Hasznosi völgyzárógát mérnökgeológiai vizsgálata és számítógépes modellezése*, Diplomamunka, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

Ábrák grafikonok és táblázatok jegyzéke

Ábrák

1. ábra: A képlékeny modell.....	15
2. ábra: A súrlódó modell.....	16
3. ábra: Elmozdulások a töréskor képlékeny és súrlódó modell esetén.....	16
4. ábra: Alsó és felső becsléshez szükséges erő illetve elmozdulás-rendszer	17
5. ábra: Alsó és felső becslés, illetve az egzakt megoldás (Chan 1975)	18
6. ábra: Lineáris programozási feladat megoldhatósága	21
7. ábra: Szimplex tábla	23
8. ábra: Belsőpontos módszer.....	24
9. ábra: Az oszlopgenerálás.....	25
10. ábra: Törésképp optimalizálás eredménye: a kialakult törésképp (Clarke SD, 2010).....	28
11. ábra: Rácsos tartók képlékeny topológiai optimalizálásának diszkretizálása és az eredmény	28
12. ábra: Egyensúlyi egyenletek (a) és az egyensúlyi mátrix (b).....	29
13. ábra: A törésképp optimalizálás során alkalmazott diszkretizálás és a kapott eredmény	31
14. ábra: A kompatibilitási egyenletek (a) és a kompatibilitási mátrix (b)	32
15. ábra: A feladat és a diszkretizálása	34
16. ábra: Rácsostartó optimalizálási feladat megoldása.....	34
17. ábra: A törésképp optimalizálási feladat és a diszkretizálása	35
18. ábra: A törésképp optimalizálási feladat megoldása	35

19. ábra: Hídépítő verseny, optimált topológia	36
20. ábra: A megvalósult híd.....	36
21. ábra: A kompatibilitási egyenletek.....	38
22. ábra: Open Office Calc Megoldó	46
23. ábra: Tönkremeneteli mód	46
24. ábra: Adott élre ható erők (Gilbert 2007)	49
25. ábra: Inhomogén anizotrop talaj.....	53
26. ábra: Nem lineáris törési feltétel közelítése egyenesekkel	54
27. ábra: Tökéletesen merev elem.....	56
28. ábra: Elforduló és eltolódó talaj.....	56
29. ábra: Elfordulás és eltolódás kapcsolata (Limit State Manual).....	57
30. ábra: Logaritmikus spirál alakú elforduló elem (Limit State Manual).....	57
31. ábra - Topológia tárolása él-pont listákkal.....	63
32. ábra - Pontok és élek összekötése	64
33. ábra - Felírandó egyenletrendszer	67
34. ábra – Futási idők oszlopgenerálással és anélkül.....	68
35. ábra - A program az indítást követően.....	72
36. ábra – Tervezési terület beállítása párbeszédablak.....	73
37. ábra - Hasznos teher tulajdonságainak beállítása párbeszédablak	74
38. ábra – Mintapélda	74
39. ábra - Futtatási beállítások párbeszédablak	75

40. ábra - Futási eredmény	76
41. ábra: Sávalap alatti talajtörés Prandtl szerint	77
42. ábra: Alap alatti talajtörés, a számított töréskép	78
43. ábra: Alap alatti talajtörés, sűrű kiosztású ponthálózattal	80
44. ábra: Sávalap alatti talajtörés, $\phi=10^\circ$, törőteher: 262,2 kN/m ²	81
45. ábra:Sávalap alatti talajtörés, $\phi=30^\circ$, törőteher: 1112,6 kN/m ²	81
46. ábra: A Prandtl mechanizmus	85
47. ábra: A Hill mechanizmus (Chan 1975)	86
48. ábra: A megtámasztás nélküli földkiemeléskor kialakuló talajtörés számított törésképe.....	87
49. ábra: Logaritmikus spirál alakú töréskép (Chan 1975).....	88
50. ábra: A számított töréskép LimitState Geo-val	88
51. ábra: Passzív földnyomás meghatározása Rankine szerint.....	89
52. ábra: Passzív földnyomás meghatározása LimitState Geo-val $\phi=10^\circ$	90
53. ábra: Passzív talajtörés $\phi=40^\circ$ esetén	92
54. ábra: LimitState Geo-val számított töréskép	92
55. ábra: A saját programmal számított töréskép	93
56. ábra: Rézsű vizsgálata	95
57. ábra: Területszámítás általános alakú tervezési terület esetén	96
58. ábra: Központos nyomás: Törőteher 1405 kN/m ²	96
59. ábra: Külponos nyomás: Törőteher 751,9 kN/m ²	97
60. ábra: Két változó teher	98

61. ábra: Egy változó teher	99
62. ábra: Az önsúly mint változó teher	99
63. ábra: Önsúly mint állandó teher	100
64. ábra: Szögtámfal.....	102

Grafikonok

1. Grafikon: A lehetséges élek száma, az egy méteren lévő raszterpontok számának függvényében.....	79
2. Grafikon: A hiba nagysága dupla logaritmikus skálán ábrázolva	79
3. Grafikon: Sávalap teherbírása Chan szerint (Chan 1975)	83
4. Grafikon: Sávalap teherbírása	84
5. Grafikon: A hiba nagysága dupla logaritmikus skálán ábrázolva	85
6. Grafikon: Passzív földnyomás nagysága.....	91

Táblázatok

1. Táblázat: A töréskép optimalizálás és a képlékeny topológiai optimalizálás analógiája (Gilbert 2007)	33
2. Táblázat: Pont és él lista	43
3. Táblázat: Töréskép Optimalizálás Open Office Calc segítségével	47
4. Táblázat: Bemenő adatok	62
5. Táblázat: Memóriatárolási módszerek előnyei illetve hátrányai	65
6. Táblázat : Sávalap teherbírása [kN/m^2]	84
7. Táblázat: A passzív földnyomás értéke $\phi=0-40^\circ$	90
8. Táblázat: Hibák hatása	103

