

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

AGYI ANEURYSMÁK KIALAKULÁSÁÉRT FELELŐS MECHANIKAI PARAMÉTEREK ÉRTÉKELÉSE NUMERIKUS MÓDSZEREKKEL

XXXI. ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA

KÉSZÍTETTE

Nagy Róbert

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építőmérnöki Kar, Szerkezet-építőmérnök mesterszak
Tartószerkezet- és geotechnika-mérnöki szakirány
II. évfolyam

KONZULENSEK

Dr. Bojtár Imre

Egyetemi tanár
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építőmérnöki Kar
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Dr. Nyáry István

Egyetemi tanár
Semmelweis Egyetem
Általános Orvostudományi Kar
Idegsebészeti Tanszék

2011. szeptember

TARTALOMJEGYZÉK

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	5
JELMAGYARÁZAT	6
1. BEVEZETÉS	7
1.1. ÁLTALÁNOS BEVEZETŐ	7
1.2. TARTALMI ÖSSZEFOGLALÁS.....	8
2. ÉLETTANI ÁTTEKINTÉS	9
2.1. A VÉRKERINGÉSI RENDSZER.....	9
2.1.1. A vérkeringési rendszer élettani szerepe	9
2.1.2. A vérkeringési rendszer funkcionális felépítése.....	9
2.1.2.1. A vér	10
2.1.2.2. A Szív	10
2.1.2.3. Az érszakaszok	11
2.1.3. Az érfal szerkezete.....	12
2.1.3.1. Az érfal Általános felépítése	13
2.1.3.2. Az érfal Alkotóinak Mechanikai tulajdonságai	13
2.1.4. A keringés biológiai szabályozórendszere.....	15
2.2. A KÖZPONTI IDEGRENDSZER VÉRELLÁTÁSA.....	16
2.2.1. Általános adatok	16
2.2.2. A belépő ágak.....	16
2.2.3. A Willis-gyűrű.....	17
2.2.4. Az agyi keringés speciális tulajdonságai	18
2.2.4.1. Elhelyezkedés	18
2.2.4.2. Érfal	18
2.2.4.3. Anyagcsere	18
2.2.4.4. Szabályozás	18
2.3. ANEURYSMÁK.....	19
2.3.1. Az aneurysmák fogalma és csoportosítása	19
2.3.1.1. Érfalállapot szerinti besorolás	19
2.3.1.2. Morfológia szerinti besorolás	19
2.3.1.3. Topológia szerinti besorolás	20
2.3.1.4. Elhelyezkedés szerinti besorolás	20
2.3.2. Az aneurysmák kialakulása	20
2.3.2.1. A kialakulás okai	20
2.3.2.2. Agyi aneurysmák megjelenési formái	21
3. MECHANIKAI ÁTTEKINTÉS	22
3.1. HIDRODINAMIKAI LEÍRÁS	22
3.1.1. Jelölésrendszer.....	22
3.1.2. A folyadékok állapotjelzői.....	23
3.1.3. Megmaradási tételek	23
3.1.4. Transzportegyenletek	23
3.1.4.1. Az általános transzportegyenlet	24
3.1.4.2. tömegtranszport egyenlet	25
3.1.4.3. lendülettranszport egyenletek	25
3.1.4.4. energiatranszport egyenlet	25
3.1.5. Anyagmodell	25
3.1.6. Állapotegyenletek	26
3.1.7. Kezdeti- és peremfeltételek	26
3.1.7.1. A feladatok osztályozása	27
3.1.7.2. A fizikai peremfeltételek interpretációja	27
3.1.8. Összenyomhatatlan, viszkózus folyadékok	28
3.2. A VÉGES TÉRFOGATOK MÓDSZERE	28
3.2.1. A vizsgálati tartomány diszkretizálása	28
3.2.2. Az algebrai egyenletek felírása.....	29
3.2.3. Az egyenletrendszer összeállítása és megoldása.....	30

3.2.4.	Folyadékok vizsgálata.....	30
3.2.4.1.	Az elemi cellák jelölésrendszere.....	30
3.2.4.2.	Az operátorok diszkrétizált változatai.....	30
3.2.4.3.	A nyomás- és a sebességmező kapcsolata.....	31
3.3.	SZILÁRDSÁGTANI LEÍRÁS.....	32
3.4.	A VÉGESELEMEK MÓDSZERE.....	33
3.5.	MECHANIKAI TULAJDONSÁGOK.....	33
3.5.1.	Az érfal anyagának matematikai leírása.....	33
3.5.1.1.	Közelítések.....	34
3.5.1.2.	Általános anyagmodellek.....	35
3.5.2.	A mikroszerkezeten alapuló modellek.....	38
3.5.3.	A vér viselkedésének matematikai leírása.....	40
3.5.4.	A környezet jellemzése.....	40
3.6.	A MODELLKÉSZÍTÉS SZINTJEI.....	40
3.6.1.	Koncentrált paraméterű modellek.....	40
3.6.2.	Egydimenziós modellek.....	41
3.6.3.	Két- és háromdimenziós modellek.....	42
3.6.3.1.	Monolitikus eljárás.....	42
3.6.3.2.	Partícionált csatolás.....	43
3.6.3.3.	Matematikai modell.....	44
4.	KUTATÁSI IRÁNYZATOK	46
4.1.	A PATOGENEZIS FOLYAMATA.....	46
4.1.1.	Kialakulás.....	46
4.1.2.	Növekedési fázis.....	46
4.1.2.1.	A gyors áramlás hipotetikus hatásai.....	47
4.1.2.2.	A lassú áramlás hipotetikus hatásai.....	47
4.1.3.	A biológiai hatások figyelembevétele.....	47
4.1.3.1.	Az alakváltozás-energia függvény.....	47
4.1.3.2.	Az adaptáció folyamata.....	47
4.2.	RUPTÚRA.....	48
4.2.1.	A tárgyat veszélyességének megítélése.....	48
4.2.2.	In vitro kísérletek.....	49
4.2.3.	Modelltípusok.....	49
5.	A SAJÁT MODELL BEMUTATÁSA	51
5.1.	A MODELLEZÉS FÁZISAI.....	51
5.2.	A MODELL FELTÉTELEZÉSEI.....	52
5.2.1.	Fizikai feltételek.....	52
5.2.2.	Geometriai feltételek.....	52
5.2.3.	Biológiai feltételezések.....	53
5.3.	A GEOMETRIAI ADATBÁZIS.....	53
5.3.1.	Mért adatok.....	53
5.4.	A VIZSGÁLATI GEOMETRIA.....	55
5.5.	A PARAMÉTER TARTOMÁNY.....	55
5.6.	A MODELL EGYENLETEI.....	56
5.6.1.	Az áramlási tér.....	56
5.6.2.	A szilárd test.....	57
5.7.	A NUMERIKUS MEGOLDÁS.....	57
5.7.1.	A programkörnyezet.....	57
5.7.1.1.	Preprocesszor.....	58
5.7.1.2.	Solver.....	58
5.7.1.3.	Posztprocesszor.....	58
5.7.2.	A numerikus technika paramétereit.....	58
5.7.2.1.	Az áramlási tér.....	58
5.7.2.2.	A szilárd rész.....	60
5.7.2.3.	Az időlépések.....	60

6. NUMERIKUS VIZSGÁLATOK	60
6.1. VERIFIKÁCIÓ.....	60
6.1.1. Analitikus megoldás.....	61
6.1.2. A numerikus megoldás.....	62
6.2. KVALITATÍV ELEMZÉS	63
6.2.1. Hálótanulmány.....	63
6.2.2. A feszültségértékek eloszlása	65
6.2.2.1. Eredmények	65
6.2.2.2. Értékelés	65
6.2.2.3. Következtetések	66
6.3. GLOBÁLIS JELLEMZŐK.....	66
6.3.1. Szimmetrikus modell	67
6.3.1.1. Nyomáskeresés	67
6.3.1.2. Az elágazás hatásfoka	68
6.3.1.3. A torlóponthi nyomás	69
6.3.1.4. A maximális fal nyírófeszültség	71
6.3.1.5. Összegzés	72
6.3.2. Aszimmetrikus modell	72
6.3.2.1. Aszimmetria a szögben	72
6.3.2.2. Aszimmetria az átmérőarányokban	73
6.3.2.3. Összegzés	74
6.4. LOKÁLIS JELLEMZŐK TÉRBELI ELOSZLÁSA.....	75
6.4.1. A nyomás kalibrálása	75
6.4.1.1. Lehetőségek	75
6.4.1.2. Az impulzusforrás	75
6.4.1.3. A nyomásértékek beállítása	76
6.4.2. Az ellenállást is tartalmazó modell	77
6.5. LOKÁLIS JELLEMZŐK IDŐBELI VÁLTOZÁSA	79
6.6. A FAL HATÁSA RUGALMASSÁGÁNAK HATÁSA.....	81
6.6.1. A modell.....	81
6.6.1.1. Az anyagmodell	81
6.6.1.2. A fal peremfeltételei	81
6.6.2. A geometria	82
6.6.3. A paraméterek.....	82
6.6.4. Az eredmények	82
6.6.4.1. A falra ható nyomás	82
6.6.4.2. A nyírófeszültségek	83
6.6.4.3. Az elmozdulások	83
6.6.4.4. A falban ébredő feszültségek	83
7. ÖSSZEFOGLALÁS	84
7.1. ÁLTALÁNOS ÉRTÉKELÉS	84
7.2. AZ EREDMÉNYEK	84
7.3. TOVÁBBI VIZSGÁLATOK	85
8. IRODALOMJEGYZÉK	86

9. FÜGGELÉK	90
9.1. ÉLETTANI KIEGÉSZÍTÉS.....	90
9.1.1. A vér alkotói.....	90
9.1.1.1. Sejtes elemek	90
9.1.1.2. Vérplazma	90
9.1.2. Az érszakaszok funkciói.....	91
9.1.2.1. Szélkazanerek	91
9.1.2.2. Prekapilláris rezisztenciaerek	91
9.1.2.3. Prekapilláris sphincterek	92
9.1.2.4. Kapillárisok	92
9.1.2.5. venulák	93
9.1.2.6. Shönt-erek	93
9.1.2.7. Vénák	93
9.1.3. Az érfal réteginek részletes felépítése.....	93
9.1.3.1. tunica intima	93
9.1.3.2. tunica media	93
9.1.3.3. tunica adventitia	94
9.1.4. Az érszakaszok speciális tulajdonságai.....	94
9.1.5. Az aneurysmák tünetei és veszélyei.....	96
9.1.6. Az aneurysmák kezelése.....	97
9.1.6.1. Az aneurysmák felismerése	97
9.1.6.2. Kezelési lehetőségek	99
9.1.6.3. Döntési folyamat	100
9.2. TRANZPORTEGYENLETEK.....	101
9.2.1. Tömegtranszport.....	102
9.2.2. „Anyagi” idő szerinti derivált.....	103
9.2.3. A Reynolds-féle transzportegyenlet.....	103
9.2.4. Lendülettranszport.....	104
9.2.4.1. A lendületváltozás	104
9.2.4.2. A környezet által kifejtett erők	105
9.2.4.3. Összegzés	106
9.2.5. Energiatranszport.....	106
9.2.5.1. Az energiaváltozás sebessége	106
9.2.5.2. A környezet által végzett teljesítmény	106
9.2.5.3. A környezet által közölt hőmennyiség	107
9.2.5.4. Összegzés	108
9.2.6. A viszkozitási modell.....	108
9.2.7. Navier-Stokes-egyenletek.....	109
9.2.8. Az energiatranszport egyenlet.....	110
9.2.9. A parciális differenciálegyenletek típusai.....	111
9.2.9.1. Elliptikus másodrendű PDE	111
9.2.9.2. Parabolikus másodrendű PDE	111
9.2.9.3. Hiperbolikus másodrendű PDE	111
9.2.9.4. Függőségi tartományok	112
9.3. GEOMETRIAI ADATOK.....	113
9.3.1. Basilaris csúcs.....	113
9.3.2. Carotis bifurcatio.....	115
10. GLOSSZÁRIUM	118
10.1. ORVOSI KIFEJEZÉSEK.....	118

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek, **dr. Bojtár Imrének** és **dr. Nyáry Istvánnak** értékes iránymutatásaikért és tanácsaikért, valamint **dr. Szikora Istvánnak** és **dr. Marosfői Miklósnak**, hogy az Országos Idegtudományi Intézetben készített angiográfiás felvételekkel lehetővé tették számomra az adatgyűjtést.

JELMAGYARÁZAT

OPERÁTOROK

$\text{div}()$	divergencia
$\text{div}(\text{grad}())$	Laplace-operátor
$\text{grad}()$	gradiens

SKALÁROK

A	$[\text{m}^2]$	felület
De	$[-]$	Dean-szám
E	$[\text{N}/\text{m}^2]$	Rugalmassági modulus
p	$[\text{Pa}]$	nyomás
Re	$[-]$	Reynolds-szám
t	$[\text{s}]$	idő
T	$[\text{K}]$	hőmérséklet
V	$[\text{m}^3]$	térfogat
Wo	$[-]$	Womersley-szám
λ^s	$[\text{N}/\text{m}^2]$	első Lamé-paraméter
μ^s	$[\text{N}/\text{m}^2]$	nyírási modulus, második Lamé-paraméter
μ^f	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	dinamikus viszkozitási együttható
ρ	$[\text{kg}/\text{m}^3]$	tömegsűrűség

TENZORMENNYISÉGEK

d_i	$[\text{m}]$	elmozdulásvektor
u_i	$[\text{m}/\text{s}]$	sebességvektor
s_{ij}	$[\text{1}/\text{s}]$	deformáció-sebesség tenzor
x_i	$[\text{m}]$	anyagi pont helyvektora Euleri-rendszerben
b_{ij}	$[\text{Pa}]$	bal Cauchy-féle alakváltozás-tenzor
C_{ij}	$[\text{Pa}]$	jobb Cauchy-féle alakváltozás-tenzor
E_{ij}	$[-]$	Euler-Green-féle alakváltozás-tenzor
P_{ij}	$[\text{Pa}]$	1. Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor
S_{ij}	$[\text{Pa}]$	2. Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor
δ_{ij}	$[-]$	Kronecker-delta tenzor
ε_{ijk}	$[-]$	Levi-Civita-szimbólum
σ_{ij}	$[\text{Pa}]$	Cauchy-féle feszültségtenzor
τ_{ij}	$[\text{Pa}]$	folyadék feszültségtenzorának deviátoros része
C_{ijkl}	$[\text{Pa}/\text{s}]$	viszkozitási tenzor

RÖVIDÍTÉSEK

1D, 2D, 3D	egy, két és három dimenzió.
FSI	Fluid-Structure Interaction: a folyadék és a szilárd test kölcsönhatását kezelő eljárás.
GDC	Guglielmi Detachable Coil: katéteres beavatkozások alkalmával az aneurysmák kitöltésére alkalmazott spirál alakú emlékező fém.
VEM	végeselemek módszere.
VTM	véges térfogatok módszere.
WSS	wall shear stress: fali nyírófeszültség.

1. BEVEZETÉS

1.1. ÁLTALÁNOS BEVEZETŐ

A Tartószerkezetek Mechanikája Tanszéken ebben az évben lehetőségem volt bekapcsolódni egy több intézményt és kutatót mozgósító kiterjedt projektbe, amelynek központi témáját az agyi erek falain kialakuló lokális patológiás tágulatok, az úgynevezett **aneurysmák** képezik.

Az aneurysmák alkotják az agyi artériás megbetegedések és halálokok legnagyobb hányadát (Wardlaw és White [2000]). Orvosi kezelésük lehetséges, azonban meglehetősen nagy kockázattal jár (Johnston [2000, 2001]), így elengedhetetlen, hogy a gyakorló orvosok kezébe a betegségről megfelelő ismeretanyag és a lehető legmegbízhatóbb döntési eljárás kerüljön. Ennek megfelelően a téma mechanikai vonatkozásokkal is rendelkező kutatási irányainak fő vonalát a már meglévő tágulatok veszélyességének megítélése adja. A fejlett orvosi képalkotó eljárások pedig lehetőséget biztosítanak ennek paciens-specifikus kivitelezésére. A jelen kutatási tendenciái ezzel tökéletes összhangban állnak.

Ebben a dolgozatban azonban egy jóval kevésbé kutatott, az előzőekkel mégis szorosan összefüggő, és azoknak szilárd megközelítési alapokat nyújtó kérdéskörre, a **patogenezis folyamatára** helyezem a hangsúlyt, és arra keresem a választ, hogy milyen mechanikai tényezők játszanak **oksági szerepet** az érfal ilyen jellegű kóros elváltozásában.

A folyamat leírásához agyi artériás érrendszer aneurysmáinak egy meglehetősen gyakori, és a felhasadás szempontjából egyik legveszélyesebb előfordulási helyét, az úgynevezett **carotis bifurcatiót** veszem alapul.

Ez az érszakasz mechanikai és áramlástani modelljét tekintve meglehetősen összetett, ezért – és a jelenségek pontosabb megértése végett – vizsgálataimat **induktív** módon végeztem. Ennek előnyös következményeképp a kutatás felépítésének végső váza szakorvosokkal konzultálva a munka során folyamatosan alakult ki. A dolgozatban tehát a szakirodalomban megtalálható, valamint saját méréseken alapuló valós élettani adatokból kiindulva szisztematikusan az **egyszerűbbtől az összetettebb modellek felé** haladva kísérem meg az érszakasz falának szilárdságtani, valamint az áramlási tér hidromechanikai modellezését egyelőre kétdimenziós leírásra korlátozódva. Kiindulok a lehető legegyszerűbb peremfeltételekkel rendelkező, stacioner, merev érfalú szimulációtól, és eljutok egy pontosabb peremfeltételekkel bíró tranziens áramlás elemzéséig, ahol az érfalat már rugalmas, deformációra képes anyagként veszem figyelembe.

Számításaimhoz olyan **numerikus módszert** használok, amely magába foglalja az áramlás vizsgálatára használt véges térfogatok módszerét (VTM) a szilárd testek esetén alkalmazott végeselemes módszerrel (VEM) egyetlen közös, iteratív módon kapcsolt rendszerben. Ez az úgynevezett Fluid-Structure Interaction (FSI) számítási eljárás lehetőséget ad a két rész kölcsönhatásának figyelembe vételére.

Végeredményképpen a rendszer **geometriája**, az **áramlás jellemzői** és az érfal **rugalmasságának** függvényében becslést adok az aneurysmák kialakulását legvalószínűbben előidéző mechanikai **paraméterkombinációkra**. Munkám hasznos eszközzé válhat az idegsebészek számára, segítséget nyújtva a kóros elváltozás kialakulásának megelőzésében.

1.2. TARTALMI ÖSSZEFOGLALÁS

A **2. fejezet** egy **élettani bevezetőt** tartalmaz, ahol először röviden áttekintem a teljes keringési rendszer általános jellemzőit, bemutatom annak fő részeit, azok felépítését és funkcióit, valamint a működését befolyásoló hatásokat. Ezt követi a központi idegrendszer vérellátásának jellemzése, nagyobb hangsúlyt fektetve az ott előforduló speciális jelenségekre, és élettani hatásokra, mindvégig a modellalkotás elősegítésére koncentrálva. Itt adom meg az érfal viselkedésének legfontosabb tulajdonságait is. Végül rátérek magának a betegségnek az általános bemutatására, kezelési lehetőségeire és a kapcsolódó aktuális problémák ismertetésére.

A **3. fejezet**, a modellkészítés **mechanikai alapjait** foglalja össze, ezen belül is külön a hidrodinamikai és a szilárdságtani ismereteket, valamint az ezek megoldására alkalmazott véges térfogatok módszere illetve a végeselemes eljárás alapvető jellemzőit. Végezetül bemutatom a modellkészítés lehetséges szintjeit és azok alkalmazhatóságainak feltételeit.

A **4. fejezetben** a vizsgált betegséggel kapcsolatos **meglévő kutatási eredményeket** és új irányzatokat foglalom össze mind orvosi, mind szilárdtest-mechanikai és áramlástan szempontból. Itt gyűjtöttem össze a jelenség jellemzésére használt mennyiségeket és azok élettani hatását.

Az **5. fejezet** a vizsgálataim során elkészített **saját modell** általános tulajdonságait mutatja be. Először magát a modellalkotás folyamatát, és a közelítés során alkalmazott feltételezéseket ismertetem, majd a vizsgált paraméterteret a szükséges perem- és kezdeti feltételeket fogalmazom meg, végül a számításhoz használt numerikus eljárást fejtem ki részletesen.

A **6. fejezet** a **numerikus vizsgálatok leírását** tartalmazza. Itt található a számítások alapjául szolgáló bemenő adatok többdimenziós paramétertere, a fizikai jelenség leírására alkalmazott modell egyes változatainak részletekbe menő bemutatása, az eredmények kiértékelése és a belőlük levonható következtetések, hipotézisek leírása.

A **zárófejezet** tömören egységes rendszerbe foglalja az előző részek **eredményeit**, elhelyezi azokat a jelenlegi ismeretanyagok között, és kitekintést nyújt a további kutatási lehetőségek felé.

A **Függelékben** található kiegészítések teszik teljessé a 2. és a 3 fejezetben leírt összefoglalást mind élettani, mind mechanikai vonatkozásban. Továbbá itt található a geometriai jellemzők felvételéhez alapot nyújtó, az Országos Idegtudományi Intézetben készített angiográfiás felvételek is.

2. ÉLETTANI ÁTTEKINTÉS

A téma **interdiszciplinaritása** megköveteli egy közös szemléletmód és nyelvezet kialakítását, valamint a vizsgálati környezet kölcsönös ismeretét. Ennek szellemében ez a fejezet az alapvetően szükséges orvosi ismeretanyagot hivatott összefoglalni. Először a globális vérkeringési (cardiovascularis) rendszer általános ismertetését, majd a központi idegrendszer vérellátásának leírását, végül pedig az érfal tárgulatok jellemzését találja az olvasó ebben a fejezetben.

2.1. A VÉRKERINGÉSI RENDSZER

Magyar és angol nyelven is több részletes - általános és speciálisan csak a vérkeringés biomechanikai aspektusaival (hemodinamikával) foglalkozó - élettani összefoglaló kötetet találhat az érdeklődő olvasó. Ezt a fejezetet *Bronzino* [1995], *Guyton és Hall* [2006], *Fonyó* [1999] és *Monos* [2001] munkáit felhasználva állítottam össze.

2.1.1. A VÉRKERINGÉSI RENDSZER ÉLETTANI SZEREPE

A szervezet stabil működését a külső hatások széles spektrumában biztosítani csak úgy lehet, ha a működéséért felelős mechanizmusokat elhatároljuk azoktól, és szűrőként keresztül engedjük interakcióba lépni vele. Ennek folyamánként a szervezet sejtjei valóban nincsenek közvetlen kölcsönhatásban a külső környezettel. Szükség van egy hálózatra, amely ellátja ezt a mediátor funkciót. Ezek közül a legváltozatosabb szerepet és a legnagyobb forgalmat a vérkeringési rendszer látja el.¹ Szerepe azonban nem merül ki ennyiben, különböző kémiai vegyületeken keresztül – információs sztrádaként – a belső működés szabályozásában is részt vesz.

A kardiovaszkuláris rendszer tehát a szervezet ellátórendszerének (alimentációs rendszerének) **anyag-, energia- és információ elosztó** egységeként fogható fel, melynek fő célja a szövetek **homeosztatikus miliójének fenntartása**. Ez a szó szerint „hasznos környezetként” fordítható kifejezés teljesen általánosan a sejtek számára az optimális működéshez szükséges feltételek állandóságának biztosítását jelenti. Ezt pedig nagy részben a vérkeringési rendszer teszi lehetővé a megfelelő tápanyag ellátás, az anyagcseretermékek elszállítása, a kémiai információt tartalmazó hormonok transzportja és a test hőenergiájának elosztása révén.

2.1.2. A VÉRKERINGÉSI RENDSZER FUNKCIONÁLIS FELÉPÍTÉSE

A vérkeringési rendszer² a szervezetben teljes kört képez. Központja a periodikusan működő **pumpa állomás** (szív) amely az áramoltatott **szállító folyadékot** (vért) folyamatos mozgásban tartja a szöveteket rendkívül sűrűn, akár 10 µm-es távolságig is behálózó rugalmas falú elosztó és gyűjtő **csövek** (vérerek) összetetten elágazó hálózatában, melynek viselkedését kifinomult, belső és külső ingerek által vezérelt, **szabályozó mechanizmusok** befolyásolják. A következő alfejezetek e négy kiemelt fő alkotó részletes tulajdonságait mutatják be.

¹ A másik fontos, hasonló elvi funkciót betöltő rendszer a nyirokkeringés.

² A teljes vérkör felfedezője a modern orvosi élettan úttörője William Harvey volt, aki 1628-ban „Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus” című művében publikálta kísérletekkel is alátámasztott észrevételeit.

2.1.2.1. A VÉR

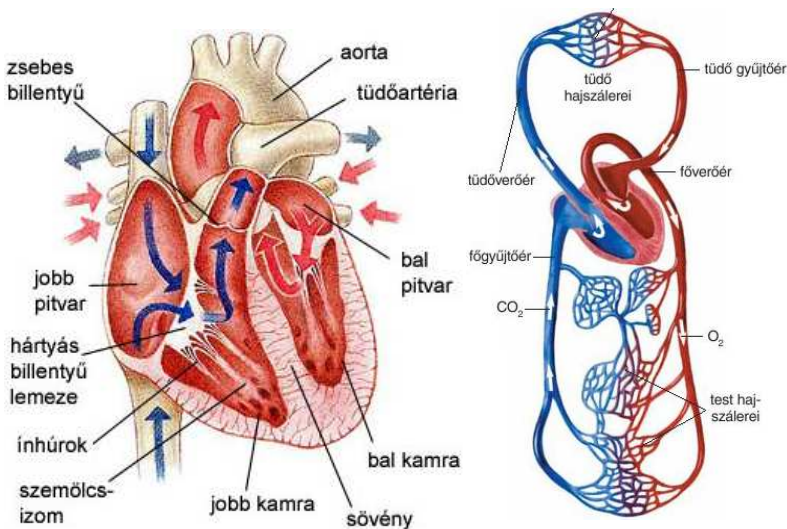
A vér a **vérplazmának** nevezett sárgás színű folyadéknak, és a benne diszpergált **sejtes elemeknek** (hematociták) nevezett szilárd fázisú részecskék heterogén szuszpenziója. A teljes testtömeg megközelítőleg $8\pm 1\%$ -át teszi ki, így átlagosan egy felnőtt ember szervezetében 5,5 l kering belőle. Átlagos sűrűsége a vízéhez közeli ($1057\pm 7 \text{ kg/m}^3$), átlagos dinamikai viszkozitása pedig annak három és hatszorosa közt változhat (jellemző értéként $0,003 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ jó közelítésnek mondható). Az alkotóelemek részletes jellemzése a Függelék 9.1.1. pontjában olvashatók.

2.1.2.2. A SZÍV

A szív (cor) a vérkeringési rendszer **motorja** és központja. Méreteit tekintve körülbelül 12 cm magas és legszélesebb részén 7 cm átmérőjű fordított kúp, körülbelül ökölnyi nagyságú. Tömege a teljes testnek a $0,5\%$ -át teszi ki (kb. 325 g). A mellkasüregben, a harmadik és a hatodik borda közt található. Periodikus összehúzódásai (systole) és ellazulásai (diastole) által tartja keringésben a vért. Az emberi szív négy üregből áll, amelyben az elhasznált (vénás) vér, valamint a friss (arterializált) vér egymástól elkülönül. Az előbbi a jobb, míg utóbbi a bal szívfélre korlátozódik, így a teljes keringési rendszert két, egymáshoz sorosan kapcsolódó szakaszra, a **kisvérkörre** (pulmonáris vagy tüdőkeringés) és a **nagyvérkörre** (szisztémás keringés) osztja.

A perifériáktól (szervekből, végtagokból, stb.) összegyűlő elhasznált vér a szív **jobb pitvarába**, majd a kisvérkör kiindulópontjába, a **jobb kamrába** jut. A jobb kamra összehúzódása a tüdőbe továbbítja a vért. Itt a tüdő vénái összegyűjtik, és eljuttatják a **bal pitvarba** a már oxigéndús friss vért. Ezt követően a nagyvérkör kezdetét jelentő **bal kamrába** kerül, amelynek összehúzódása eljuttatja azt a perifériás szövetekhez, bezárva ezzel a kört.

A szív tömegének legnagyobb részét **harántcsíkt szívmusclek** alkotják. Ezek közös burokkal körbevett láncolata alkotja a szerv funkcionális alapegységét, a szívizomrostot, melyeket alacsony elektromos ellenállású részekapcsolatok kötnek össze, és alkotnak egy ingerület átvitel szempontjából fontos egységet, a syncytumot. Az emberi szívben két ilyen



1. ábra - A szív és a teljes keringési rendszer felépítésének sematikus vázlata

egymástól elkülönült egység található, a pitvarban illetve a kamrában. Köztük egy ingerület átvivő keskeny szál, a His-köteg létesít kapcsolatot. Az izomrostok két különböző fajtája található a szívben. Az első a nagy kontrakciós erővel rendelkező **munkaizomzat**, a másik pedig a szív összehúzódásaiért felelős impulzusok kialakulásának helye, a **nodális szövet**.

Nyugalomban a szív percenként 75 összehúzódást végez, ez **0,8 s-os periódusidőt** jelent. Ehhez **0,27 s systolés** összehúzódási, és **0,53 s diastolés** ellazulási idő tartozik. Fizikai aktivitás hatására a megnövekedett szöveti (főleg vázizomzatbeli) anyagcsereigény kielégítésére az összehúzódások száma jelentősen megnő (akár 180 1/min értékre). A systole időtartama azonban ekkor sem változik jelentősen (0,25 s-ra csökken), helyett a diastole

időtartama rövidül radikálisan (akár 0,15 s-ra). Ez jelentős problémákat és egyben biológiai korlátot is felvet:

- A szív sejtjei folyamatos oxigénellátást igényelnek, melyet a szív saját vérellátása, a coronariakeringés biztosít. A bal pitvar systole alatti erős összehúzódása miatt ez nagymértékben csupán a diastole időtartamára korlátozódik, amelynek a fent említettnél nagyobb mértékű csökkenése már gondot okozhat.
- Az erősen megrövidült diastole alatt a szív nem tud telítődni.

Dawson [1991] tapasztalati alapokon, a testtömeg függvényében a pulzusszám és a szív által percenként kilökött vér térfogatának átlagos értékére a következő közelítéseket javasolta:

$$CO = 224 \cdot W^{\frac{3}{4}}, \quad (2.1.)$$

$$HR = 229 \cdot W^{-\frac{1}{4}}, \quad (2.2.)$$

ahol CO a nyugalmi állapotban a bal kamrából egy perc alatt kilöködő vér térfogata ml-ben mérve, HR a nyugalmi állapotban a szív percenkénti pulzusszáma, W a teljes testtömeg kg-ban mérve.

Tájékoztató értéként megjegyzem, hogy a szív átlagosan **percenként 5,2 l vért pumpál** ki magából nyugalmi állapotban, hanyatt fekvő helyzetben. Ez az érték fizikai erő kifejtés alatt akár 5-6-szorosára is növekedhet. A szív teljesítményének számításához fontos adat az **egy szív ciklus alatt kipréselt vér** mennyisége, ami a fenti adatok alapján **75 ml**-re adódik.

2.1.2.3. AZ ÉRSZAKASZOK

A következőekben a sorba kapcsolt érszakaszok (vasa sanguinea) funkcionális sajátosságait vázolom be a nagyvérkör példáján keresztül, a részletes ismertetést a Függelék 9.1.2. pontja tartalmazza. A kisvérkör, bár részleteiben több eltérés is előfordul, globálisan hasonló rendszer szerint épül fel.

Fő jellegzetességeit tekintve a vérkeringési rendszer az alábbi három szakaszra osztható:

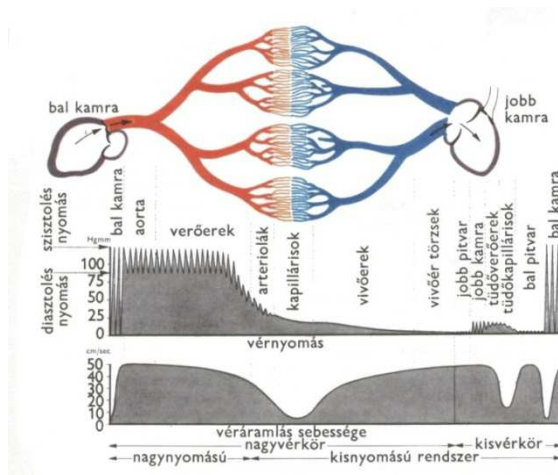
1. a szívből kiinduló nagy nyomású **artériás részre**, ahol a vastag viszkoelasztikus falú csőszakaszok a vért a perifériák felé szállítják;
2. a szöveteket behálózó, az ottani anyagcserét lehetővé tevő vékony falú mikroszkopikus **kapillárisok rendszerére**;
3. az alacsony nyomású **vénás részre**, ahol a nagy átmérőjű, az artériáknál vékonyabb falú gyűjtőerek a vért újra a szív felé vezetik.

A bal kamrából kiindulva ezek elemei sorrendben az alábbiak:

- hidraulikus nyomás- és áramlásgenerátor pumpa (a megfelelő szívfél),
- szélkázánerek (aorta és annak elsőrendű főágai),
- prekapilláris rezisztenciaerek (kis artériák és arteriolák),
- prekapilláris sphincterek,
- az anyagcsere erei (kapillárisok, részben pedig a proximális venula szakaszok),
- shönt-erek (összeköttetések a pre- és poszt kapilláris erek között),
- poszt kapilláris rezisztenciaerek (venulák),
- kapacitás, vagy volumen erek (venulák és vénák).

A következő ábrán látható a teljes nagyvérkör kiterített sematikus vázlata, alatta az erekben kialakuló átlagos nyomás és nyomás amplitúdó, legalul pedig az áramlási sebesség a megfelelő érszakaszokon.

Megállapítható a szív pumpafunkciója a nagy nyomáspulzációval és a sebesség növekedésével, valamint az ezt követő **rugalmas** szélkázánerek nyomásváltozást csillapító és az áramlást egyenletesebbé tevő hatása. Itt érkezünk az arányaiban egyre több simaizom sejtet tartalmazó **muszkuláris artériákon** keresztül a nagy nyomású **artériás szakasz** végéhez, a **prekapilláris rezisztenciaerekhez** (arteriolákhoz), ahol a nyomásgradiens meredeken nő, az átlagnyomás leesik, az áramlás lassul. Az artériás szakasz végén, a kapillárisok kezdetén helyezkednek el a **prekapilláris sphincterek**, amelyek spontán periodikus összehúzódásaik révén képesek a nyomáspulzációt csökkenteni, valamint a megnövekedett szöveti anyagcsereigényt gyorsan kielégíteni.



2. ábra - A nagyvérkör érszakaszainak nyomás és sebességeloszlása (Csandra [1982]).

A mikrocirkulációnak nevezett **kapillárisok** alkotta szakaszon a nyomás közel állandónak vehető. Ezekben a vékony csövekben a vörösvértestek végül egyesével, a vérplazmával dugókat képezve haladnak. Itt játszódik le a szöveti anyagcsere. Ezen a szinten található az artériás szakasz végét és a vénás rész elejét összekötő, anyagcsere funkcióval nem rendelkező **shönt erek** is, amelyek például a bőrben fő feladata a hőcsere megvalósítása.

Az „elhasznált” vért az alacsony nyomású **vénás szakasz** kezdetét adó **posztkapilláris rezisztenciaerek** (venulák) gyűjtik össze. Ezen a szakaszon az ellenállás szintén megnő, azonban az arteriolák szakaszához képest jóval kisebb mértékben. Az összkeresztmetszet innen már fokozatosan csökken, és ez által az áramlási sebesség emelkedik. Végül elérkezünk a nagy **vénákhoz**, ahol a keringő vértérfogat jelentős hányada található, amely ezáltal gyorsan mozgósítható vérraktárként is szolgál. Ezek vezetnek a szív jobb pitvarához, elkezdve a kis vérkört áramlást, melynek felépítése az előzőhöz nagyban hasonlít.

Az előző ábrát kiegészítve a következő táblázat a rendszer alkotóit funkcionális csoportonként számszerűen is összehasonlítja:

Érszakasz	Átmérő [mm]	Ágak száma [db]	Teljes km.-i terület [cm ²]	Átlagos áramlási sebesség [cm/s]
Aorta	24	1	4,5	23
Artériák	4	160	20	5
Arteriolák	0,03	5,70E+07	400	0,25
Kapillárisok	0,007	1,20E+10	4500	0,022
Venulák	0,02	1,30E+09	4000	0,025
Vénák	5	200	40	2,5
Vena cavae	34	2	18	6

1. táblázat- Az érrendszer morfológiai adatainak összefoglalása

2.1.3. AZ ÉRFAL SZERKEZETE

Az érfal felépítése a különböző fent említett érszakaszokon eltéréseket mutat, igazodva azok élettani szerepéhez. Ebben a szakaszban csupán a legáltalánosabb felépítést szeretném bemutatni. Kiegészítésképpen ajánlom a Függelék X. és X. pontjainak elolvasását, ahol az egyes érszakaszok speciális tulajdonságaira is kitérek.

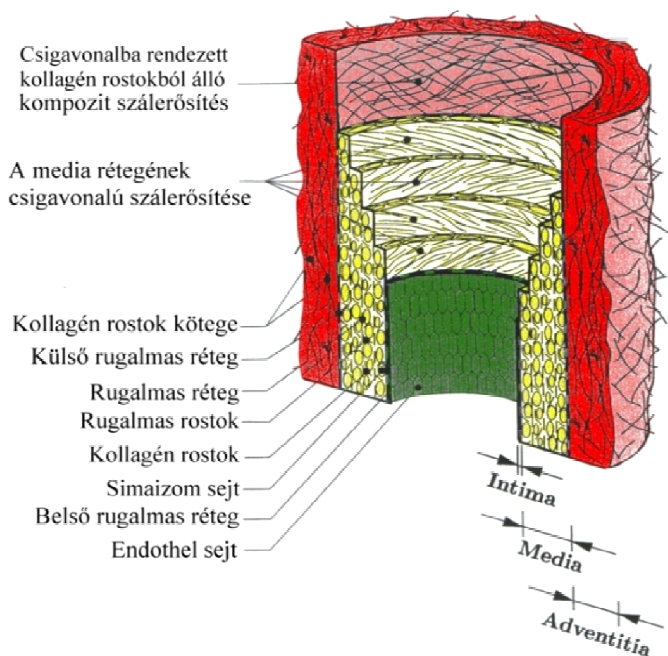
2.1.3.1. AZ ÉRFAL ÁLTALÁNOS FELÉPÍTÉSE

Az artériák és a vénák fala, eltekintve a vastagság- és összetételbeli különbségektől ugyanazon három, funkciójában és felépítésében is egymástól jól elkülönülő gyűrűből épül fel. E három réteg összmenyisége és egymáshoz viszonyított aránya szabja meg a viszkoelasztikus fal legfontosabb mechanikai tulajdonságait. Belülről kifelé haladva ezek a következők.

A legvékonyabb réteg, a főleg biokémiai és áramlástanai funkciókkal bíró **tunica intima**. Egy réteg lapos, hámszerű endothelsejtből áll, melyet poliszaharidokból álló sejtközi mátrix ragasztószzerűen tart egyben a bazális membrán felületén, így képezi az érfal folytonos borítását, melyet egy körkörös elhelyezkedő rugalmas szálakat tartalmazó szubendothel réteg vesz körbe. A következő funkcionális rétegtől egy vastag rugalmas szalagokból felépülő réteg, a **membrana elastica interna** (MEI) választja el.

A legvastagabb alkotó, és szerkezeti szempontból legfontosabb rész a **tunica media**, amelyre a mechanikai terhek legnagyobb része hárul. Számos spirális lefutású kollagén rost és simaizom sejt valamint az ezeket átszövő rugalmas szálak halmaza alkotja. Az alkotók aránya az ér funkciójától függően változik, így a szívhez közel a rugalmas rostok, míg attól távolodva a simaizom sejtek száma dominál. A külső rétegtől az előző határoló réteggel megegyező **membrana elastica externa** (MEE) választja el.

A külső réteg a határoló funkciókkal bíró **tunica adventitia**, ez főként kollagén rostokból és kötőszövetekből áll, és az érfalra ható (transzmurális) nyomás patológiásan nagy értékei mellett merev köpenyként viselkedik. A nagyobb artériák és vénák fala olyan vastag, hogy saját vérellátó rendszerrel rendelkezik. Ez a **vasa vasorum**, amely a külső rétegben haladó kicsiny vérereket foglalja magába.



3. ábra - Az érfal rétegeinek általános, sematikus vázlata (Holzapfel et al. [2000])

2.1.3.2. AZ ÉRFAL ALKOTÓINAK MECHANIKAI TULAJDONSÁGAI

KOLLAGÉN ROSTOK

A kollagén molekula az emberi szervezetben előforduló α -aminosav - főként glicin, hidroxiprolin, prolin és alanin - szekvenciákból álló hármas hélix szerkezetű protein molekulák (fibrillumok) összessége. A fibrillumok hossza 280 nm, szélességük 1,5 nm. Ezek együttese alkotja a kollagén rostot, amelyeket másodrendű hidrogén-kötések tartanak össze. Vastagságuk 50-200 nm közt változhat. A kollagén rost elektronmikroszkópos képen megfigyelhető sávok arról árulkodik, hogy az alkotó molekulák egymást hosszirányban meghatározott térközönként (64 nm) követik.

A kollagén rost kis terhelés alatt hullámosan gyűrődött állapotban van, azonban a növekvő húzófeszültség hatására a szálak először kiegyenesednek, a húzóerő iránya felé orientálódnak, továbbá a fibrin szálak egymáson való elcsúszása révén a rajtuk végzett munka nagy része disszipálódik. Így magyarázható a kezdeti szakasz viszkoelasztikus viselkedése. A

húzófeszültség további növelése esetén már a helikális szerkezetet fenntartó molekulák közti keresztkötések hatása dominál, és rugalmasan írható le az anyagi viselkedés. Végül a tönkremenetel e keresztkötések felszakadásával következik be, és a rost alkotóelemeire esik szét.

A kollagén rost mechanikai viselkedését makroszkopikusan leíró Young-modulusa 3 GPa köré tehető. Ez azonban jelentősen függ az életkortól és a környező közeg kémhatásától. Silver [2002] cikkében ennek csökkenéséről számol be mind savas, mind lúgos közegben. Szakítószilárdsága jelentősen függ a rost méretétől (mérethatás). Egy 1 mm² átmérőjű szál szakítási határereje a 60 N-t is elérheti (60 GPa). Fő funkciója az **érfal merevítése**.

ELASZTIKUS ROSTOK

Ezek a kollagénnél jóval vékonyabb, közel egyenletes vastagságú rostok. Helyenként villaszerűen elágaznak, esetleg újra egyesülnek. Rendeződhetnek rostok, vagy lapos membránok formájába. Ilyen membrán például az artériák MEI rétege, vagy az aorta falában megtalálható – annak rugalmasságáért felelős – 30-40 egymással párhuzamos elasztikus rost réteg.

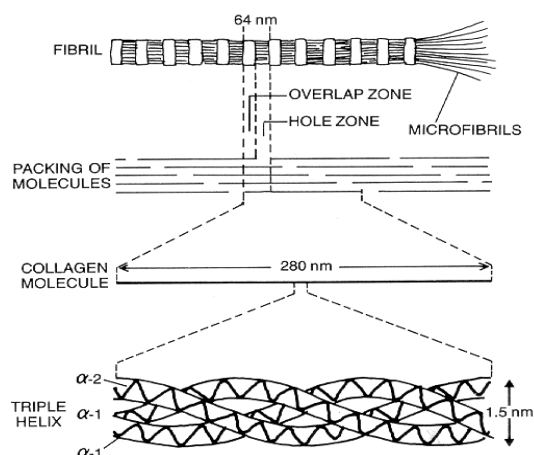
Lineárisan rugalmasnak tekinthető mechanikai viselkedésük a gumikéhoz hasonlít, csekély relaxációt mutat, és térben rendezetlen elhelyezkedésük miatt makroszkopikusan izotrop tulajdonságokkal írható le. Jelentős nyúlások hatására is reverzibilis (rugalmas) viselkedést mutatnak, így akár 1,5-szörös megnyúlás után is visszanyerik eredeti alakjukat. Éppen ezért fő funkciójuk a rajtuk végzett mechanikai munka rugalmas potenciális energiává alakítása és tárolása. Ez jut érvényre az aorta szélkázán funkciójában.

Az elasztikus rostok finom, szálás elrendezésű fibrillinből álló szélső rétege egy belső amorf részt zár közre. Ez tartalmazza a rost gumiszerűen rugalmas anyagát, az elasztint. A rost anyagát a fibroblasztok és a simaizom sejtek termelik.

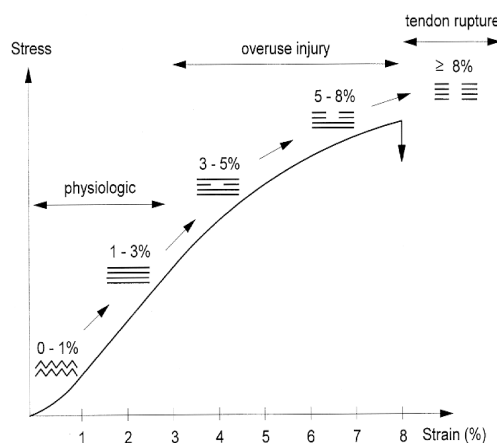
SIMAIZOM SEJTEK

Az izomszövetek legősbibb és legegyszerűbb formája. Összehúzódása lassú folyamat, azonban ezt az állapotot hosszú ideig képes fenntartani. Ereje elérheti a vázizomzatot alkotó harántcsíkolt izomrostokét, de jóval kevesebb energiát igényel. Működését a vegetatív idegrendszer irányítja.

A simaizom rost szövettani alkotóegysége az egymagvú simaizom sejt (myocita). Ennek hossza 15-300 µm között változhat. Orsó alakú, a közepén 3-8 µm-es kidomborodással. A fibroblasztokkal való rokonságát bizonyítja, hogy képes kollagén és elasztin termelésére.



4. ábra - A kollagén rost felépítése.



5. ábra - A kollagén rostok sematikus feszültség-megnyúlás diagramja.

2.1.4. A KERINGÉS BIOLÓGIAI SZABÁLYOZÓRENDSZERE

A keringési rendszer minden perifériás részhálózata az ottani szövetek különböző hatásoktól függő, és jelentős változásokat mutató **anyagcsere igényének** megfelelő szöveti perfúziót kell, hogy biztosítson. Az **erőforrások szűkössége** miatt kivitelezhetetlen, hogy minden sejt egyformán, minden időpillanatban a maximális igényeinek megfelelő ellátásban részesüljön, így a vér elosztása a következő három prioritási alapelv szerint történik:

1. Mennyire fontos az adott szerv az élet fenntartásához? Ilyen szempontból például az agy, a szív, a vese és a tüdő előnyben részesül a végtagokkal szemben.
2. Mennyire fontos szerepet tölt be az adott szerv az életet fenyegető behatásra adott válaszok során? Ezen a téren pl. az emésztő rendszer hátrányban marad a vázizomzattal szemben menekülési helyzetben.
3. Mennyi ideig képes a szövet életben maradni csökkent vérellátás esetén?

Ezen az általános prioritási rendben alapulva a vérkeringési rendszer működését egyrészt az egyes szövetek saját **belső mechanizmusai** (pl. a prekapilláris sphincterek szabályozása), másfelől idegi és kémiai információközvetítő vegyületek által történő **külső ingerek** (pl. az arteriolák simaizom sejtjeit vezérelve) kontrollálják. Ezeket a tisztán mechanikai hatásokkal együtt szintén figyelembe kell venni a modellezési folyamataink során.

A szabályozás az alábbi négy fő fiziológiai paraméteren keresztül történik:

Az első a **vérnyomás**, melyet az arteriolák ellenállásának növelésével képes növelni a szervezet. A szemléletesség kedvéért itt emlitem meg a vérkeringési hálózat rendszer szintű modellezésének legelterjedtebb változatát, amely a folyadék mozgását egy dimenzióban, a véretek tengelyének irányában írja le, és analóg egy ellenállásokat és kondenzátorokat tartalmazó váltakozó áramú áramkör leírásával. Itt az áramforrás szerepét a szív, az ellenállások és a kondenzátorok szerepét pedig a rugalmas falú csövek töltik be. A nyomásgradiens - mint hajtóerő - pedig a potenciálkülönbségnek feleltethető meg. Ha a csőfalak tágulékonyságától eltekintünk, az egész rendszer leírása Ohm-törvényére egyszerűsödik. Összehasonlítva:

elektromos áram
$$U = I \cdot R, \quad (2.3.)$$

folyadékáram
$$\Delta P = CO \cdot PR, \quad (2.4.)$$

ahol U az áramforrás két sarka közti potenciálkülönbség, I az áramerősség a főágban, R az eredő ellenállás, ΔP a nagyvérkör esetén a bal kamrában és a jobb pitvarban lévő nyomásértékek különbsége, CO a bal kamrából egy perc alatt kilökődő vér térfogata ml-ben mérve, PR az érszakaszok eredő perifériás ellenállása.

Mint a 2.4. egyenletből kitűnik, a vérnyomás a perifériás ellenállás növelésével emelhető. Ezt a **vazomotoros** (az érszakaszok ellenállását biológiaiilag szabályozó) reakciók központja, a **nyúltvelő** szabályozza az érfalak - főképp az éppen emiatt prekapilláris rezisztenciaereknek is nevezett arteriolák falának- **simaizom sejtjein** keresztül.

A következő tényező a **szívből időegység alatt kiáramló vér mennyisége**. Ezt a **pulzusszám** növelésével, a **bal kamra diastole végén mért térfogatának** növelésével, és a **systole végén mért térfogatának** csökkentésével lehet növelni, akár az eredeti érték 5-6-szorosára is.

A harmadik fiziológiai paraméter a **teljes vérmennyiség**, amely a **vese** kiválasztó funkcióján keresztül szabályozódik, például a vizelet kiválasztás hormonális visszafogása a vérplazma térfogatát növeli és fordítva, magas vérnyomás érték esetén a kiválasztás felélénkül.

Végül a **vér összetétele** adja az egyik legfontosabb, legösszetettebb és legbőségesebb fiziológiai paramétersereget. Ennek részletes leírása megtalálható Fonyó [1999] könyvében.

Ezek többnyire belső elválasztású mirigyek által termelt, közvetlenül a véráramba juttatott kémiai információcsomagok (endokrin hormonok).

2.2. A KÖZPONTI IDEGRENDSZER VÉRELLÁTÁSA

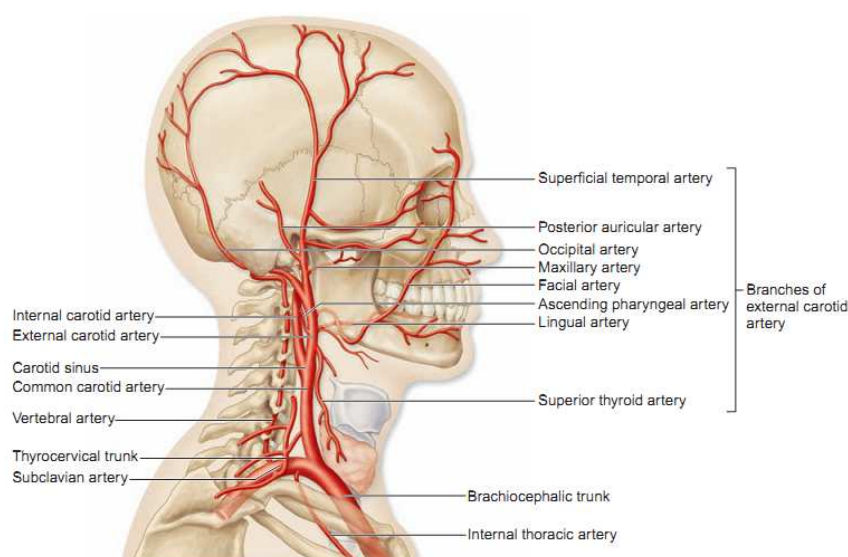
A keringési rendszer egészének globális megismerése után a vizsgált betegségtípus előfordulásának helyét, az agy fő artériáinak hálózatát mutatom be *Ganong* [1990] könyve alapján.

2.2.1. ÁLTALÁNOS ADATOK

A folyamatos vérellátás az agy számára az összes többi szervnél fontosabb, ha az megszűnik, az agy működésében 5 mp-en belül súlyos zavar keletkezik, 3 percen belül reverzibilisen ugyan, de megszűnik az idegsejtek működése, ezután maradandó működési zavarokkal kell számolni, és 6 percnél hosszabb szünet irreverzibilis idegrendszeri károsodást okoz. Az agy tömege átlagosan 1400 g, a teljes testtömeg közel 2%-a. Az agyi véráramlás 750-800 l/perc, a nyugalmi perctérfogat 15%-a. Az agy a teljes nyugalmi oxigénfelvétel 25%-át fogyasztja el.

2.2.2. A BELÉPŐ ÁGAK

Az emberi agy fő vérellátása összesen **négy artérián**, az elülső oldalt ellátó (anterior keringés) kétoldali belső feji verőéren (arteria carotis interna - ICA) és a hátsó részt ellátó (posterior keringés) szintén kétoldali gerincmenti verőéren (arteria vertebralis - VA) keresztül történik, amelyek az agyalapon, a pókhálókárpát alatti (subarachnoidealis) térben



6. ábra - Az agyat tápláló artériák. (McKinley [2011])

helyezkednek el, ahol a hat érszakaszból álló

Willis-féle agyalapi artériás anasztomózis gyűrű (circulus arteriosus cerebri - CoW) által anyagáramaik összeköttetésben vannak.

A **belső fejverőér** a külső fejverőérrel (arteria carotis externa) egy pontból, a közös fejverőér (arteria carotis communis - CCA) bifurkációjától indul, ahol általában lokális tágulata van, ezt hívják sinus caroticusnak. A nyakon felfelé vezetve a koponyaalapon kezdődő saját csatornáján (canalis caroticus) keresztül lép be a koponyaüregbe, majd a barlangos vénás öblön (sinus cavernosus) keresztül a pókhálókárpát alatti térbe jut. Itt oszlik ketté az elülső agyi verőérre (arteria cerebri anterior - ACA) és a középső agyi verőérre (arteria cerebri media - MCA).

A **gerinc menti verőér** a felső hat nyaki csigolya haránt nyúlványaiban lévő lyukakon fut felfelé, majd az öreglyukon (foramen magnumon) keresztül jut a pókhálókárpát alatti

térbe, ahol a kétoldali ág egyesülve az alapi verőeret (arteria basilaris - BA) alkotja, amely a Willis-gyűrű részét képezve kettéoszlik a két hátsó agyi verőérre (arteria cerebri posterior - PCA).

Az előzőekben említett három elágazási pont - sorrendben a közös és a belső nyaki verőér, valamint az alapi verőér - csúcsai **a dolgozat tárgyát képező érfal tárgulatok jellemző előfordulási helyei.**

2.2.3. A WILLIS-GYŰRŰ

Az előző szakaszban bemutatott, az agy vérellátását biztosító két pár artéria, egy élettanilag fontos szerepet betöltő formációba, az agyalapi agykocsányok közötti árokban (fossa interpeduncularis) fekvő **anasztomózis gyűrűbe** torkollik. Ez a sajátos topológia lehetővé teszi, hogy a vér valamelyik fő belépő ágból érkezve eljuthasson az agy bármelyik részéhez, így biztosítva e területek folyamatos vérellátását az egyes ágak sérülése esetén is, bár normál esetben a szimmetriából következő kétoldali közel azonos nyomás miatt az adott oldali artéria túlnyomóan csak a megfelelő agyféltekét látja el friss vérrel.

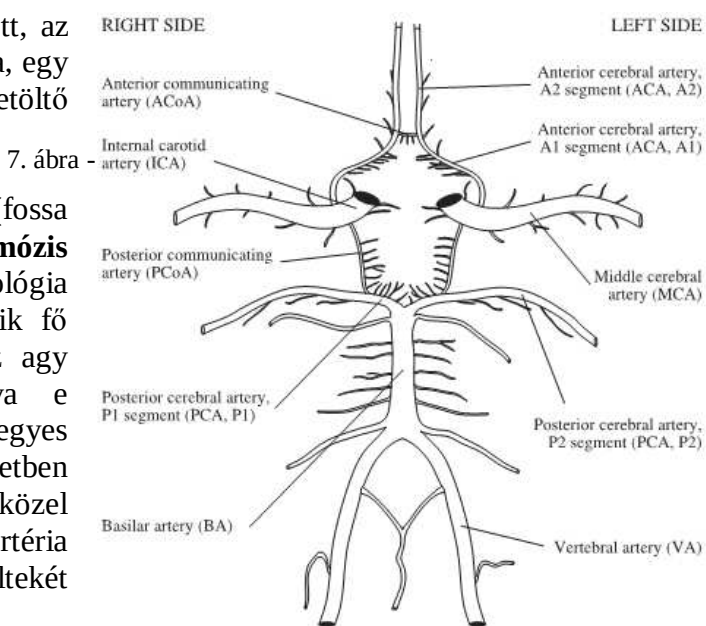
A gyűrűt alkotó hat fő érszakasz az elülső összekötő artéria (arteria communicans anterior), az elülső agyi verőér (arteria cerebri anterior), a belső fejverőér (arteria carotis interna), a hátsó összekötő artéria (arteria communicans posterior), a hátsó agyi ér (arteria cerebri posterior) és az alapi artéria (arteria basilaris).

Különböző szerkezeti variációi léteznek egészséges emberekben is, most azonban csupán a tipikus felépítés bemutatására szorítkozom.

A gyűrűbe torkolló kétoldali belső fejverőerek ott bifurkációt (carotis bifurcatio) képezve a jobb és bal oldali középső és elülső agyi verőérre (arteria cerebri media - MCA illetve arteria cerebri anterior - ACA) oszlanak, és az agy elülső részének vérellátásáért felelnek. A két félteke közt az elülső összekötő artéria (arteria communicans anterior - ACoA) teremt kapcsolatot.

A gerinc menti verőerek az alapi artériában egyesülnek, összekötve a jobb és bal féltekét, majd az abból a két agyfélteke felé induló hátsó agyi verőér (arteria cerebri posterior - PCA) által az agy hátsó részének vérellátásáért felelnek.

A féltekék két artériájának vérárama is kapcsolatban van egymással a hátsó összekötő artéria (arteria communicans posterior - PCoA) által. Ideális esetben ezen az összekötő szakaszokon is kevés vér áramlik, mivel közel azonos nyomású pontokat kötnek össze.



8. ábra - A Willis-gyűrű vázlata az alkotó artériák elnevezésével.

2.2.4. AZ AGYI KERINGÉS SPECIÁLIS TULAJDONSÁGAI

Fonyó [2004] könyve alapján, felsorolás szintjén álljon itt néhány fontosabb megjegyzés az agy vérellátásának speciális jellemzőiről, amelyre a mechanikai modellezésnél is szükségem lesz.

2.2.4.1. ELHELYEZKEDÉS

Az agy **zárt térben**, a koponyaüregben helyezkedik el. Maga a szövet rendkívül érzékeny a nyomásváltozásra, így az állandó nyomást igyekszik fenntartani. A koponyaüreget kitöltő három fő elem a vér, az agyvíz (liquor cerebrospinalis - CSF) és az agyszövet. E három alkotóelem térfogatának összegének tartósan állandónak kell lennie, ezt az agyi keringés autoregulációjának megértéséhez fontos elvet nevezik **Monroe-Kelly hipotézisnek**.

2.2.4.2. ÉRFAL

Az artériák tekintetében a fő különbség a test többi részén elhelyezkedő verőerektől, hogy itt teljes egészében **hiányzik** az elasztikus rostokból álló, a mediát az adventitiától elválasztó réteg, a **membrana elastica externa**, azonban az intimát a mediától elválasztó hasonló réteg, a **membrana elastica interna** a megszokottól **vastagabb**. A **media rétegben** is a test többi részétől eltérő módon meglehetősen **kevés elasztikus rost** található, és az **adventitia is jelentősen vékonyabb**.

A kapillárisok szintjén is jelentős különbség mutatkozik, ugyanis itt az endothelsejtek közötti kapcsolatok jóval szorosabbak, mint bárhol máshol a testben, így nincs közvetlen anyagcsere a vérplazma és a sejtközi folyadék közt. Ezt nevezik **vér-agy gátnak**.

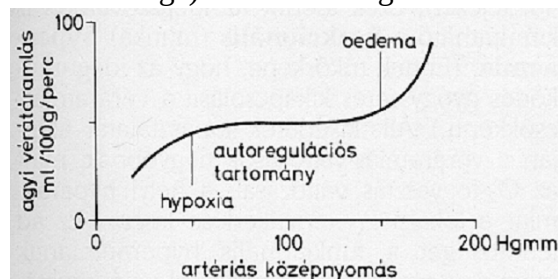
2.2.4.3. ANYAGCSERE

Mivel az idegsejtek számára a homeosztázis stabil fenntartása a többi sejttel összehasonlítva kiemelten fontos, az anyagcsere nem közvetlen módon zajlik. Vagyis a sejtközi folyadék nem a vérplazma ultrafiltrátuma, hanem az endothelsejtek kiválasztásának (szekréciójának) fehérjeszegény terméke.

2.2.4.4. SZABÁLYOZÁS

Az agyi keringés nem vesz részt a vegetatív idegrendszer közvetítette általános érszűkítő (vérnyomásemelő, presszor) és értágító (vérnyomáscsökkentő, depresszor) reakciókban. Kimutatható, hogy nincs szimpatikus vazomotortónus, a szimpatikus beidegzés kikapcsolását nem követi értágulat. Így a véráramlást lokális tényezők és a perfúziós nyomás (a belépő artériák és a kilépő vénák középnyomásának különbsége) határozza meg.

Az agy vérellátását biztosító artériás középnyomás átlagosan 80-100 Hgmm (10,7-13,3 kPa), a vénás nyomás 5-7 Hgmm (0,67-0,93 kPa) közt változik, így a perfúziós nyomás 75-95 Hgmm (10,0-12,7 kPa) között van. Ez szolgáltatja az agy 750-800 ml/perc vérellátását. A normális működéshez 550-600 ml/perc térfogatáram szükséges. Ennek biztosításáról az agyi keringés **autoregulációja** gondoskodik, amely 60-160 Hgmm (8,0-21,3 kPa) közt közel állandó vérellátást biztosít. Pontos mechanizmusa nem tisztázott. Fiziológiai nyomásértékek mellett nem idegi eredetű. A miogén teória szerint a megnövekedett transzmurális nyomás (az érfalra ható belső és külső nyomások különbsége) hatására a simaizomsejtek összehúzódnak, növelve ezzel a perifériás ellenállást, ez a **Bayliss-**



9. ábra - Az agyi áramlás autoregulációja.

effektus. Kóros esetben, tartósan megnövekedett artériás középnyomás esetén, viszont a szimpatikus beidegzés az autoreguláció határát felfelé kiszélesíti.

A koponyán belüli (intracranialis) nyomás közel egyenlő a vénás nyomással, azonban az agyban keletkező tumor, vagy aneurysma térfoglalása megnöveli azt, melynek következtében a transmuralis nyomás, és az agyi véráramlás lecsökken. Ekkor lép működésbe az artériás nyomás nagymértékű emelkedésével járó **Cushing-reflex**.

A **széndioxid** koncentráció növekedése emeli, míg az **oxigén** koncentráció növekedése csökkenti az agyi véráramlást. A nagyobb idegi aktivitást mutató területeken lokálisan megnő a vérellátás (**funkcionális hyperaemia**), amely kihat az odavezető kisebb artériákra is, ez a **retrográd vasodilatatio**, melyet a megnövekedett áramlás indukál. A fali nyírófeszültség növekedése révén a **nitrogénoxid** termelődik, amely ellazítja a simaizomsejteket.

2.3. ANEURYSMÁK

Az orvosi bevezető záró alfejezetével elértünk magához a betegség bemutatásához. Ebben az alfejezetben definíciószerűen meghatározzuk a betegséget, kategorizáljuk azt típusonként, ehhez kapcsolódóan bár - de csak a Függelékben helyet kapva - bemutatjuk élettani hatásait és veszélyeit. Ugyanitt kezelési lehetőségekről és az orvosi döntést segítő módszerekről is szó esik.

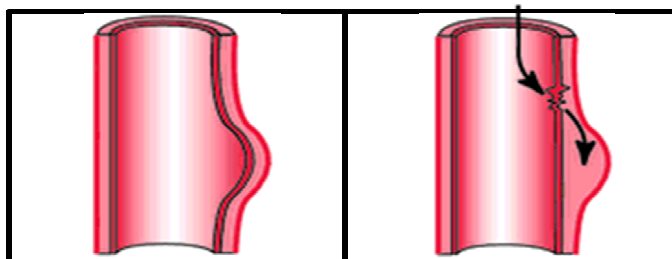
2.3.1. AZ ANEURYSMÁK FOGALMA ÉS CSOPORTOSÍTÁSA

Az aneurysma szó az ógörög *ἀνεύρυσμα* (aneurusma) kifejezésből ered, és tágulatot jelent. Az orvosi szaknyelvben az artéria falának lokális patológiás tágulatát nevezik így. Ez az általános definíció több különböző szempont szerint elkülöníthető csoportot foglal magába.

2.3.1.1. ÉRFALÁLLAPOT SZERINTI BESOROLÁS

Aszerint, hogy a tágulat az érfal rétegeit érinti, és valóban az képezi a tágulat határoló felületét, vagy az érfal teljes átszakadásának következtében a zsákszerű formáció a környező szövetek üregeiben jön létre, megkülönböztetünk **valódi és ál**

aneuryszmákat. Fontos, hogy az utóbbi típusnál a zsákba jutó pangó vér zárt térbe kerül, és a fő áramlással mindvégig kapcsolatban marad. Az első típust tovább oszthatjuk, mely szerint az esetek túlnyomó többségében az egyik érfal réteg folytonossága sem szűnik meg, és a vér az éren belül marad, addig a második, ritkábban előforduló esetben az intima és a media átszakad, és a vér a lumenből az érfal rétegek közé jut.

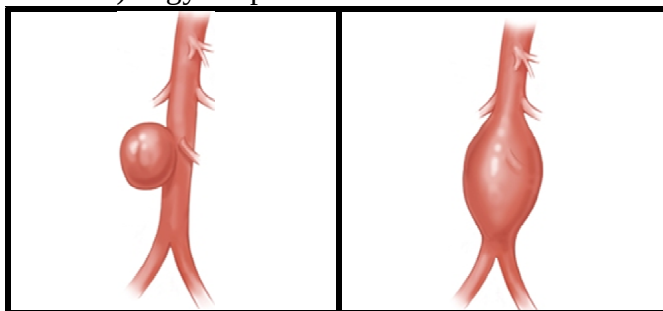


10. ábra - A valódi aneurysmák két alap formációja. Bal oldalt a leggyakoribb típus, ahol az érfalak folytonossága megmarad, jobb oldalt a belső két érfalréteg felhasadásával járó eset látható.

2.3.1.2. MORFOLÓGIA SZERINTI BESOROLÁS

A tágulat morfológiáját tekintve szintén két csoportot különböztetünk meg, az első a fal egyik oldalán helyezkedik el és **zsákszerű** (sacciformis) formát alkot, míg a másik az előzőnél nagyobb érszakasz egészére kiterjedő **orsó alakot** (fusiformis) képez. Az előbbi főleg az agyban található és mérete maximálisan 2-3 cm-ig terjed ki, utóbbi tipikusan a gerinc

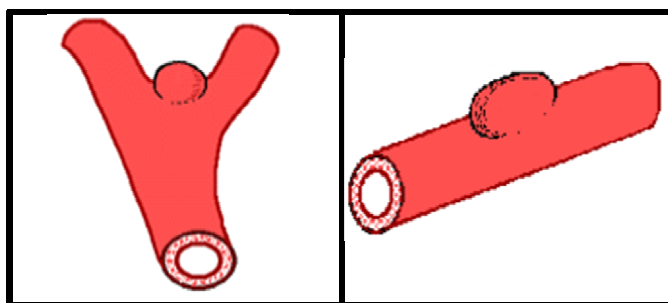
mellett leszálló hasi aortán alakul ki és elérheti akár a 10 cm-es nagyságot is. Elképzelhető a két típus egymásra halmozódásával (saccifusiformis) vegyes típus is.



11. ábra - Zsákszerű és orsó alakú aneurysma.

2.3.1.3. TOPOLOGIA SZERINTI BESOROLÁS

Aszerint, hogy az érhalózat mely topologikus pontjain jön létre, megkülönböztetünk **érelágazások csúcspontjaiban** (bifurcatio) és erősebb érkanyarulatokat követő **elágazás nélküli érszakaszokon** kialakuló aneurysmákat. Előbbi szintén az agyi artériákon, míg utóbbi főleg testüregekben futó nagyobb verőereken található.

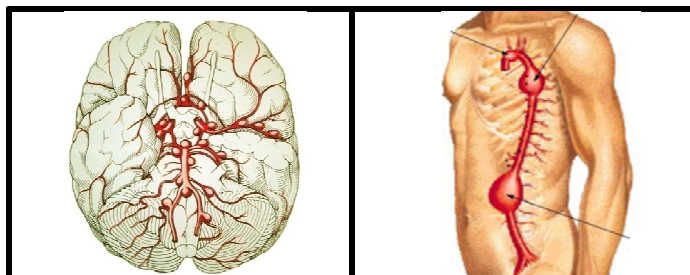


12. ábra - Bifurkációnál és elágazás nélküli érszakaszon kialakuló aneurysmák.

2.3.1.4. ELHELYEZKEDÉS SZERINTI BESOROLÁS

A testben szinte kizárólag az artériás rendszeren találkozunk ilyen jellegű érfal tágulatokkal. Ezen belül is a két fő előfordulási terület az **agy**, valamint a **mellkas és a hasüreg**.

13. ábra - Az agy valamint a mellkas és a hasüreg aneurysmái.



2.3.2. AZ ANEURYSMÁK KIALAKULÁSA

2.3.2.1. A KIALAKULÁS OKAI

Az aneurysmák kialakulásának pontos folyamata mindmáig ismeretlen, azonban több tényezőről biztosan kijelenthető, hogy szerephez jut benne. Az egyik leggyakoribb ilyen faktor az **érelmeszesedés** (arteriosclerosis), melynek következtében az érfal jelentősen veszít rugalmasságából. Kialakulásához hozzájárulhat továbbá **bakteriális fertőzés** is, amelyet félrevezető módon mycotikus eredetűnek neveznek, bár a Gram-pozitív cocci baktériumok felelősek érte. Ez az ok csupán a tágulatok 2-3%-áért felelős, és leggyakrabban a mellkasi aortán okoz elváltozást. Mechanizmusát tekintve két hipotézis létezik, az első az endothel réteget jelöli meg kiindulópontnak, ahol valamilyen okból gyulladás keletkezik, és az érfal ronccsolódik, ennél valószínűbb azonban, hogy a vasa vasorumon keresztül a baktérium az adventitiát és mediabeli simaizom sejteket károsítja, gyengítve ezzel az érfalat. Kezelésük tekintetében jó eredményeket értek el 4-6 hetes antibiotikum kúrákkal, amit egy éves

megfigyelési periódus kell, hogy kövessen. Így a kisebb érzsákok visszahúzódását is el lehet érni. A kialakulásnak **örökletes és veleszületett** vonatkozásai is lehetnek, például abban az esetben, ha az érfal rugalmas elemei ezen okok miatt nem megfelelőek. Ezen felül az esetek 1%-a **traumatikus**, ennél is kevesebb pedig **onkotikus** eredetűek okokra vezethető vissza. A fent felsorolt okok mellett legalább ilyen fontos az **áramlási tényezők** kedvezőtlen hatása, ugyanis tipikusan olyan geometriájú helyeken találunk aneurysmákat, ahol a falra átadódó feszültségkoncentrációkkal, és nagyobb feszültség-gradiensekkel találkozunk. Ez utóbbi **kiindulást** befolyásoló paraméter a **kialakulás** folyamatában még nagyobb szerephez jut.

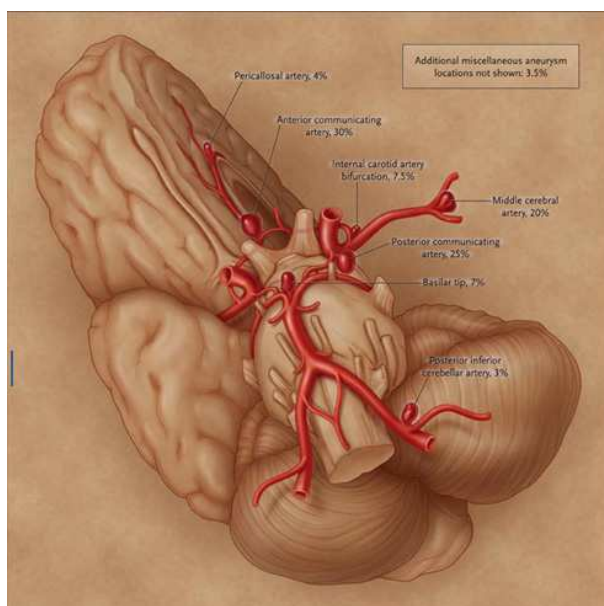
2.3.2.2. AGYI ANEURYSMÁK MEGJELENÉSI FORMÁI

Az **agyi aneurysmákra** vonatkozó főbb előfordulási és statisztikai adatok ismerete elengedhetetlen a betegség megértése és a további kutatások szempontjából.

Az agyi aneurysmák, mivel nagy részük tünetmentes, valódi előfordulási gyakoriságára csak becslésekkel élhetünk. Wiebers [2003] ezt az **emberiség 1-6%-ára** teszi, melyben a **nők és férfiak aránya 5:1**. Brisman [2006] munkája alapján megállapítható, hogy az agyi aneurysmák az esetek **10-30%-ában multiplicitással**, azaz több helyen is egyszerre kialakulnak. Ezen esetek 75%-ában 2, 15%-ában 3, 10%-ában ennél is több előfordulást regisztráltak. Ugyanekkor, a több érfal tágulattal rendelkező betegek nem szerinti eloszlásában még erősebb nő-férfi arány eltolódást tapasztalunk, az érték 11:1-re nő.

Greenberg [2001] munkája alapján kijelenthető, hogy az aneurysmák tüneteket tipikusan a 40-60 éves korosztály körében produkálnak, és agyvérzéshez (Sub Arachnoidal Haemorrhage - SAH) vezető **felhasadásuk** (ruptúra) az **55-60 év** közötti emberek esetében a leggyakoribb. Gyerekkorban nagyon ritkán fordulnak elő, számszerűen az összes eset csupán 2%-ában, méretük viszont a felnőtt korban kialakultnál nagyobb, átlagosan 17 mm átmérőjű. Eredetük ekkor mycotikus, vagy traumatikus, és a nemek aránya is kiegyenlítetté válik.

Az agyban fő előfordulási helyeik a nagyobb artériák **elágazásainak csúcspontjai**. Ezek elhelyezkedését szemlélteti a fenti ábra, az előfordulások relatív gyakoriságát pedig a következő táblázatban foglaltam össze. A betegség tüneteiről, veszélyeiről és a kezelési lehetőségekről a Függelék 9.1.5. és 9.1.6. pontjaiban található részletesebb információ.



14. ábra - Az ábrán a bal agyfélteke látható és a Willis-gyűrű térbeli elhelyezkedése a tágulatok tipikus kialakulási helyeinek és azok gyakoriságának megjelölésével, amit a következő táblázat foglal össze. (Neurosurgery for Cerebral Aneurysm, Medline)

Anterior keringés	ACoA	30,0%	86,50%
	ICA a PcoA kiindulásánál	25,0%	
	MCA elágazása	20,0%	
	ICA elágazása	7,5%	
	Pericallosális/Callosomarginális artériák elágazása	4,0%	
Poszterior keringés	Baziláris csúcs	7,0%	10%
	PICA kiindulása	3,0%	
Egyéb helyek	AICA	3,5%	3,50%

2. táblázat - Az agyi aneurysmák előfordulási helyei és relatív gyakoriságuk.

3. MECHANIKAI ÁTTEKINTÉS

Az előző fejezet az **orvosi ismeretanyagot**, a probléma hátterét és mibenlétét volt hivatott összefoglalni. A most következő rész a válaszok keresése során felhasználható **mérnöki tudásbázist** rendszerezi. Ennek segítségével a jelenséget befolyásoló főbb folyamatok matematikai formába önthetők, melynek célja olyan modellek megalkotása, amelyek a már megfigyelt jelenségeket visszaadják, továbbá képesek új hatások mechanizmusaira fényt deríteni.

A dolgozat alapvető ismeretanyagát a mechanikán belül is két nagy terület, a **hidromechanika** és a **szilárd testek mechanikája** képezi, így építem fel ezt a fejezetet is. Az első témakörre a feltételezett olvasókör figyelembevételével nagy hangsúlyt fektetek, míg a másodikat – feltételezve annak előzőekhez képest részletesebb ismeretét – csak röviden érintem.

3.1. HIDRODINAMIKAI LEÍRÁS

Tekintettel arra, hogy a dolgozat olvasói többnyire a szilárd testek mechanikájában járatos építőmérnökök lesznek, ezt a részt a folyadékok mozgásának jellemzésére használt matematikai alapok tömör összefoglalásának szentelem. A leírást a Függelék 9.2. pontjában található levezetések teszik teljessé.

3.1.1. JELÖLÉSRENDSZER

A továbbiakban indexes jelölésmódot fogok alkalmazni, ortonormált bázisrendszerben, ahol a kovariáns és a kontravariáns bázisvektorok megegyeznek, tehát nem teszek köztük különbséget, és csupán alsó indexeket használok. Ezeket i, j, k, l, m, n betűkkel jelölöm, melyek értékei a vizsgált tér dimenziószámáig terjedő pozitív egész számok lehetnek ($i_{3D} \in \{1, 2, 3\}$ és $i_{2D} \in \{1, 2\}$), ezért ennek kiírását a rövidség kedvéért elhagyom. A különböző mennyiségek jelölése: skalár: a , vektor: a_i , másodrendű tenzor: A_{ij} , σ_{ij} , negyedrendű tenzor: C_{ijkl} .

Nevezetes kifejezések:

- Kronecker delta:
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j, \end{cases} \quad (3.1.)$$

- Levi-Civita szimbólum:
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3 \text{ páros permutiója,} \\ -1, & \text{ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3 \text{ páratlan permutiója,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (3.2.)$$

Ha egy szorzat, hányados, vagy parciális derivált jellegű kifejezésben valamelyik index betű kétszer fordul elő, akkor az az Einstein-féle szumma konvencióval összhangban arra való összegzést jelent. Példaként álljon itt két háromdimenziós vektor skalár szorzatának jelölése és kifejtése.

$$a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^3 (a_i \cdot b_i) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (3.3.)$$

A nevezetes vektor differenciáloperátorok:

skalármező gradiense:
$$\text{grad}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (3.4.)$$

$$\text{vektormező gradiense:} \quad \text{grad}(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (3.5.)$$

$$\text{vektormező divergenciája:} \quad \text{div}(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (3.6.)$$

$$\text{vektormező rotációja:} \quad \text{rot}(u_i) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad (3.7.)$$

$$\text{Laplace-operátor:} \quad \text{div}(\text{grad}(\varphi)) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (3.8.)$$

3.1.2. A FOLYADÉKOK ÁLLAPOTJELZŐI

A folyadékokat folytonos közegnek tekintjük, vagyis az itt alkalmazott kontinuum leírás alatt azt értjük, hogy a folyadék elemi cellájának mérete a vizsgálati tartományhoz képest elegendően kicsi, mégis elegendően sok molekulát tartalmaz ahhoz, hogy azok tulajdonságainak átlagértékével számolhassunk, és ne legyen rá befolyással egyetlen molekula állapotának megváltozása. A cella így matematikailag egy olyan pontként fogható fel, ahol a folyadék állapotát jellemző változók (állapothatározók) függvénye, és azok térbeli- és idő szerinti deriváltjai folytonosak.

A mozgó folyadék állapotát egyértelműen meghatározza a sebességeloszlását leíró $u_i(x_i, t)$ függvény és két tetszőleges termodinamikai mennyiség, például a sűrűség $\rho(x_i, t)$ és a nyomás $p(x_i, t)$ ismerete. A feladatunk tehát általános, háromdimenziós esetben 5 mennyiség megadása lesz. Ezek a mezőváltozók minden esetben négy paraméter, a három helykoordináta és az idő függvényei. A továbbiakban ezt nem írom ki külön, vagyis például az $u_i(x_i, t)$ helyett egyszerűen u_i -t használok.

3.1.3. MEGMARADÁSI TÉTELEK

A folyadékok mozgását leíró matematikai egyenletek fizikai háttérét a klasszikus mechanika öt megmaradási egyenlete adja.

- A **tömegmegmaradás** tétele szerint egy folyadékrészecske tehetetlen tömege időben állandó.
- A **lendületmegmaradás** tétele Newton második axiómáját jelenti, mely szerint egy részecske lendületváltozásának pillanatnyi sebessége megegyezik az abban a pillanatban rá ható erők eredőjének összegével. Ez – vektormennyiség lévén – a tér dimenziószámával egyező, esetünkben *három* egyenletre vezet.
- A termodinamika első főtétele az **energiamegmaradás** egyenletében jut kifejeződésre. Eszerint a folyadékrészecske energiájának időegységre eső megváltozása megegyezik a környezet által időegység alatt rajta végzett munkának és vele közölt hőmennyiségnek az összegével.

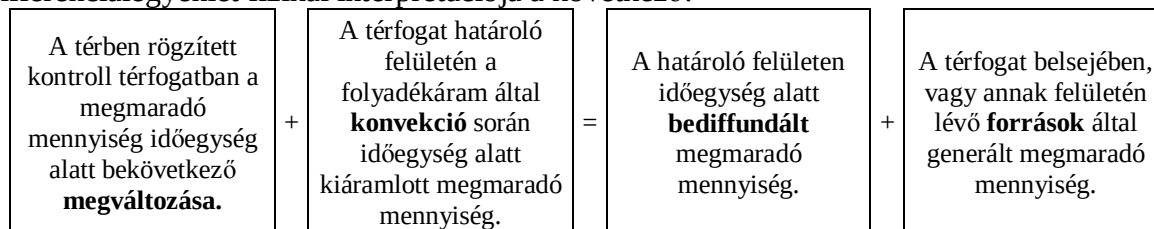
3.1.4. TRANSZPORTEGYENLETEK

Az előző pont tételeit az **anyaghoz rögzített** vonatkoztatási rendszerben mondtuk ki, vagyis a szilárd testek mechanikájában jól ismert **Lagrange-i leírást** alkalmaztuk, és az **anyagi részecske** megfogalmazást használtuk. A folyadékok mozgásának jellemzésére azonban célszerű áttérni a **térhez rögzített Euleri leírásmódra**. Ekkor **térbeli pontként**

utalunk a helyvektor végpontjára. A fenti megmaradási egyenletek így kapott új alakját **transzportegyenleteknek** nevezzük.

3.1.4.1. AZ ÁLTALÁNOS TRANZPORTEGYENLET

Egy tetszőleges megmaradó mennyiség – esetünkben ez a tömeg, a lendületvektor három komponense (ezek térben és időben változatlan koordináta-rendszer bázisvektorok esetén szintén skalárként kezelhetők) vagy az energia lehet – változását kifejező parciális differenciálegyenlet fizikai interpretációja a következő:



15. ábra – Megmaradó mennyiség transzportegyenletének általános alakja.
A részletes levezetések a Függelék 9.2. pontjában találhatóak.

Egy rögzített térrészben a megmaradó fizikai mennyiség csak a folyadék általi **konvekció**, a kapcsolódó intenzív mennyiség koncentrációkülönbsége által hajtott **diffúzió** és a térrészben, vagy annak határoló felületén lévő **források vagy nyelők** hatására változhat meg. Matematikai formában ez a tér minden pontjára érvényes kijelentés a következő **differenciális alakot** ölti:

$$\frac{\partial(\rho^f \cdot \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^f \cdot \varphi \cdot u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial S_{A\varphi}}{\partial x_i} + S_{V\varphi}, \quad (3.9.)$$

Az egyenlet tagjai megfeleltethetők a 15. ábra bekeretezett elemeinek. Itt a megmaradó mennyiség tömegegységre eső hányadát jelöli φ (ez térfogategységre vetítve $\Phi = \rho \cdot \varphi$). A bal oldal első tagja a megmaradó mennyiség időegység alatti megváltozása az adott térbeli pontban, míg a második a divergencia értelmezése szerint annak a térbeli pont körüli elemi hasábból kiáramló fluxusa. A jobb oldal elő tagja szerint – a gradiens jelentése alapján – a φ mennyiség a legnagyobb növekedéssel ellentétes irányba¹ áramlik (ez a diffúzió jelensége), mely sebességének ellentettjét a Γ diffúziós együtthatóval behangolva, és annak divergenciáját képezve megkapjuk a pont körüli elemi hasábra bediffundált mennyiséget. Az utolsó tagok a felületi ($S_{A\varphi}$) és térfogati ($S_{V\varphi}$) forrásokat veszi figyelembe.

A (3.9.) egyenlet térben rögzített térfogatra vett integrálásával a megmaradási egyenletek **konzervatív alakját** kapjuk meg. Ez a felírási mód jelenti a megoldás során leggyakrabban alkalmazott numerikus eljárás, a **véges térfogatok** módszerének alapját, és legnagyobb előnyeinek forrását, és pontosan ez különbözteti meg a véges differenciák módszerétől. Ehhez fel kell használnunk a Gauss-Ostrogradszkij-féle integrál átalakítási tételt, amely egy térfogati integrál és az azt körbezáró felületre vett integrál közt teremt kapcsolatot a divergencia fogalmán keresztül:

$$\iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \oint_{\partial V} n_i u_i dA. \quad (3.10.)$$

Itt n_i a felület adott pontbeli normálisa.

¹ A diffúziót kifejező törvény – $\text{grad} \varphi$ alakú, a divergencia pedig az elemi hasábból kiáramló fluxust adja meg. A negatív előjel elhagyásával az elemi hasábra bediffundált mennyiséget kapjuk.

Az általános konzervatív alak:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho^f \cdot \varphi \cdot dV + \oint_{\partial V} n_i (\rho^f \cdot \varphi \cdot u_i) dA = \oint_{\partial V} n_i \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + S_{A\varphi_i} \right) dA + \iiint_V S_{V\varphi} \cdot dV. \quad (3.11.)$$

A tagok jelentése az előzőekkel megegyezik, azonban itt nem elemi hasábra, hanem tetszőleges térbeli rögzített tartományra vonatkoztatjuk őket. A következő alpontokban részletesen kifejtem az öt szükséges transzportegyenlet differenciális alakját, megadva az előzőekben φ -vel jelölt általános változó értelmezését.

3.1.4.2. TÖMEGTRANSZPORT EGYENLET

Ekkor $\varphi=1$, $S_{A\varphi}=0$, $S_{V\varphi}=0$.

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^f \cdot u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.12.)$$

3.1.4.3. LENDÜLETTRANSZPORT EGYENLETEK

Ekkor φ szerepét u_i , vagyis a három sebességkomponens tölti be. A megszokott jelöléssel élve, ebben az esetben a forrástagok nem különülnek el felületi és térfogati jellegük szerint, ugyanis a térfogati forrástagot (S_{m_i}) összevontam a viszkozitásból eredő kisebb hatással bíró tagokkal. Ezt az összeget $\widehat{S}_{m_i}$ jelöli, melynek előnye, hogy nem tartalmazza a nyomást.

$$\frac{\partial (\rho^f \cdot u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^f \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu^f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \widehat{S}_{m_i}, \text{ ahol} \quad (3.13.)$$

$$\widehat{S}_{m_i} = S_{m_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu^f \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda^f \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right). \quad (3.14.)$$

Ez a **Navier-Stokes egyenleteknek** nevezett egyenletcsoport már tartalmazza az anyagmodellt is.

3.1.4.4. ENERGIATRANSZPORT EGYENLET

Ebben az esetben $\varphi=E_b$, vagyis a tömegegységre vonatkoztatott belső energia:

$$\frac{\partial (\rho^f \cdot E_b)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^f \cdot E_b \cdot u_i)}{\partial x_i} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu^f \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Theta + S_{VE_b}. \quad (3.15.)$$

Itt a disszipációs függvénynek nevezett forrástagként értelmezhető Θ a viszkozitásból eredő energianyereséget foglalja magában, és a folyadékra jellemző lineáris (μ^f) , valamint térfogati viszkozitási (λ^f) együtthatókat tartalmazza.

$$\Theta = \mu^f \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) + \lambda^f \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right). \quad (3.16.)$$

3.1.5. ANYAGMODELL

Az előző egyenletekbe már beépítettük az anyagmodellt is, ami megadja a folyadékokban létrejövő deformációk hatására kialakuló feszültségkomponenseket. A feszültség-tenzor deviátoros része (τ_{ij}) a termodinamika második főtételenek következményeképp szimmetrikus, így hat független komponensből áll. Ez és a sebesség-

gradiens tenzor közt teremt kapcsolatot, a Newton-féle viszkozitási törvény háromdimenziós általánosításaként, az alkalmazott **lineáris viszkozitási modell**.¹ Izotrop, összenyomható folyadéknál két anyagállandó szükséges a lineáris kapcsolat leírásához, a lineáris (μ^f), és a térfogati (λ^f) viszkozitási együtthatók. Az utóbbi összenyomhatatlan folyadék esetén eltűnik. Az izotrop lineáris feszültség modell:

$$\tau_{ij} = \left[\mu^f (\delta_{mi} \delta_{nj} + \delta_{mj} \delta_{ni}) + \lambda^f \cdot \delta_{ij} \delta_{mn} \right] \frac{\partial u_m}{\partial x_n}. \quad (3.17.)$$

A gömbölyű zárójelben a negyedrendű egységtenzor és a transzponálás tenzorának összege szerepel, ami ebből kifolyólag szimmetrikus. A szögletes zárójelben lévő harmadik tag szintén szimmetrikus, mivel két másodrendű egységtenzor tenzoriális szorzata. Mivel minden másodrendű tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antimetrikus tag összegére, így a sebesség-gradiens tenzor aszimmetrikus része kiküszöbölhető a modellből. Ez utóbbi felírás elterjedtebb, most azonban a transzportegyenletekbe való könnyebb beépíthetőség végett ezt nem követjük. Részletes levezetés a Függelék 9.2.6. pontjában található. A (3.17.) egyenlet kifejtésében megjelöltem az összenyomhatatlan folyadékok esetén eltűnő térfogati viszkozitási tagot:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\mu^f \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \underbrace{\lambda^f \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_0, & \tau_{22} &= 2\mu^f \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \underbrace{\lambda^f \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_0, & \tau_{33} &= 2\mu^f \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \underbrace{\lambda^f \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_0, \\ \tau_{21} = \tau_{12} &= \mu^f \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \tau_{13} = \tau_{31} &= \mu^f \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), & \tau_{23} = \tau_{32} &= \mu^f \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.18.)$$

3.1.6. ÁLLAPOTEGYENLETEK

Az anyagmodell segítségével sikerült kifejeznünk a feszültségtenzor hat ismeretlen komponensét, a sebesség-gradiens tenzor és két anyagállandó függvényében, azonban még mindig határozatlan az egyenletrendszerünk, öt egyenletre hat ismeretlen jut: a három sebességkomponens és az állapotjelzők közül a nyomás, a sűrűség és az energia. Ennek feloldására ki kell használnunk, hogy az **állapotjelzők közül csak kettő független**, így az állapotegyenleteket felhasználva a többi ezek segítségével kifejezhető. Általános esetben:

$$p = p(\rho^f, T), \quad E_b = E_b(\rho^f, T). \quad (3.19.)$$

Ezzel teljessé vált a jelenséget leíró differenciálegyenlet-rendszer.

3.1.7. KEZDETI- ÉS PEREMFELTÉTELEK

A feladat megfogalmazásához szükségünk van az előzőeken felül a **tranziens** esetben a kiindulási állapot megadására, ezt **kezdeti feltételekkel** adhatjuk meg:

$$u_i(x_j, t) = u_{0i}, \quad p(x_i, t) = p_0, \quad T(x_i, t) = T_0, \quad (3.20.)$$

ugyanakkor ismernünk kell a vizsgálati tartomány határainak viselkedését leíró **peremfeltételeket** is minden esetben. Ezt megtehetjük a mezőváltozók értékeinek (1. fajú, **Dirichlet-féle** peremfeltétel), vagy azok peremre merőleges deriváltjainak előírásával (2. fajú, **Neumann-féle** peremfeltétel), esetleg tartományonként felváltva alkalmazva a kettőt (**vegyes** peremfeltétel).

¹ Általában az anyagmodellt a sebesség-gradiens tenzor szimmetrikus részével (alakváltozás-sebesség tenzor) fejezik ki, azonban a lendületmegmaradás egyenletébe könnyebben beépíthető a most bemutatott alak.

3.1.7.1. A FELADATOK OSZTÁLYOZÁSA

Egy N változós $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ függvény másodrendű, nem feltétlenül állandó együtthatós parciális differenciálegyenletének (PDE) kanonikus alakja egy szimmetrikus mátrix $(A_{ij}=A_{ji})$ segítségével adható meg az alábbi alakban, ahol i és $j = 1..N$:

$$A_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (3.21.)$$

Ha a mátrixnak van zérus sajátértéke (szinguláris), akkor a PDE **parabolikus**; ha minden sajátértéke egyező előjelű (pozitív, vagy negatív definit), akkor **elliptikus**; ha pedig egyik sajátértéke sem nulla, és egy kivételével mind előjele megegyezik, akkor **hiperbolikus** a PDE.

Az előző részekben előállított, a folyadékok mozgását leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer másodrendű PDE-kből áll, melyek megfelelő változók bevezetésével elsőrendű rendszerré redukálhatók és mátrixát hasonló szempontok szerint vizsgálva a fenti csoportok egyikébe sorolható. Ezekre illusztráló példák, és a legfőbb tulajdonságaik ismertetése a Függelék 9.2.9. pontjában található.

3.1.7.2. A FIZIKAI PEREMFELTÉTELEK INTERPRETÁCIÓJA

A valóságban előforduló jelenségek komplex ötvözetei a három egyenlet-alaptípusnak (elliptikus, parabolikus és hiperbolikus), melyek a hely és az idő függvényében változhatnak (nem állandóak a differenciálegyenlet együtthatói). A **szükséges** peremfeltétel típusok és az azonos tartományon lehetséges **peremfeltétel csomagok** kérdésköre jelenleg is megoldatlan problémákat tartalmaz az elmélet oldaláról, azonban a modellezési feladatok megoldása során szerzett tapasztalatok az alább részletezendő eredményekre vezettek:

KEZDETI FELTÉTELEK

A parabolikus típusú PDE-vel leírható összenyomható viszkózus áramlás esetén kezdeti feltételként - mint azt az előző pont is tartalmazta - meg kell adnunk $t=0$ időpillanatban mind az öt mezőváltozó értékét a teljes tartományon.

PEREMFELTÉTELEK

Merev fal esetén az érintkezési pontban a fal sebessége meg kell, hogy egyezzen a folyadék sebességével (**csúszásmentes fal modell**) $u_{wi} = u_i$. Amennyiben az energia egyenletet is megoldjuk, akkor vagy a **hőmérséklet egyezését** $T=T_w$, vagy **hőáram fluxust** $k \frac{\partial T}{\partial n} = -q_w$ kell előírunk.

Belépő peremen a **sebességvektort**, a **sűrűséget** és a **hőmérsékletet** kell megadnunk a hely függvényében.

Kilépő peremen a **feszültségek folytonosságát** kell biztosítani, ezt a $-p + \mu^f \frac{\partial u_n}{\partial n} = F_n$ és a $\mu^f \frac{\partial u_t}{\partial n} = F_t$ feltételpáros hivatott biztosítani, azonban a gyakorlatban a modellek megalkotásánál a határfelületeket elég távol vesszük fel a vizsgált zónától, hogy ott a peremre merőleges irányú változás már ne lépjen fel, vagyis az irány menti deriváltak eltűnnek és elegendő a **statikus nyomásra** előírást adni.

Szimmetriát kifejező perem esetén tetszőleges φ mezőváltozóra igaz, hogy $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

Ciklikus peremnél a két kapcsolatban lévő felület mezőváltozóinak értékeit kell egymással egyenlővé tennünk.

3.1.8. ÖSSZENYOMHATATLAN, VISZKÓZUS FOLYADÉKOK

Ebben a pontban az összenyomhatatlan viszkozus folyadékok speciális egyenleteit írom fel, mivel kifejezetten ezekre lesz szükségünk a későbbi modellben. Mivel a folyadék összenyomhatatlan, így sűrűsége minden pontban állandó, vagyis a **kontinuitási egyenlet** a sebességmező forrásmentességének kijelentésére redukálódik:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.22.)$$

A **Navier-Stokes-egyenletek** is tovább egyszerűsödnek:

$$\rho^f \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + S_{m_i}. \quad (3.23.)$$

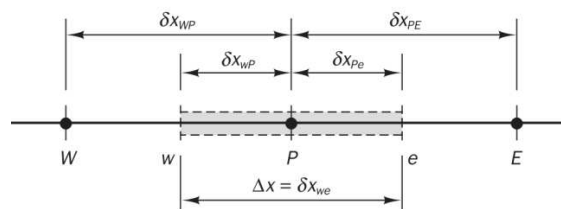
Az **energiaegyenletre nem lesz szükségünk**, ugyanis lamináris áramlást vizsgálunk hőmérsékleti hatások nélkül, vagyis két dimenzióban három darab másodrendű parciális differenciálegyenletből álló rendszert kell megoldanunk.

3.2. A VÉGES TÉRFOGATOK MÓDSZERE

Az előzőekben felírtuk a hidrodinamika általános egyenleteit **differenciális alakban**, majd a Gauss-Osztrogradszkij-tétel alapján előállítottuk ezek konzervatív, kontrolltérfogatra vett **integrál alakját**. A következőekben innen indulunk tovább, és bemutatom az ezen feladattípus megoldásra jelenleg legelterjedtebb numerikus megoldási technikának, a véges térfogatok módszerének főbb sajátosságait, és néhány szót ejtek népszerűségét okozó legnagyobb előnyeiről, nevezetesen a lokális konzervativitás és a szemléletes fizikai tartalom megőrzéséről.

3.2.1. A VIZSGÁLATI TARTOMÁNY DISZKRETIZÁLÁSA

Numerikus módszerről lévén szó, algebrai egyenletek felírása a célunk, így első lépésben a vizsgált tartományt fel kell osztanunk diszkrét **kontroll cellákra**, véges térfogatokra. Ezt a lépést háló generálásnak nevezzük. Minden cella **középpontjában** egy **kontroll pontot** definiálunk, és a cellára jellemző információkat ezzel a ponttal jellemezzük. Az alábbi ábrán a cellák konvencionális jelölése látható egydimenziós esetben. A cella középpontját P , a szomszédos cellát az angol égtáj elnevezések megfelelő nagy kezdőbetűje, ez esetben W és E , a cella határait a szomszédos cella kontrollpontjának megfelelő kisbetű (w és e) jelöli. Az oldalak és a csomópontok távolságát pedig a megfelelő indexszel ellátott, koordináta megváltozást kifejező δx szimbólum adja meg, a cella oldalhosszát Δx szimbolizálja.



16. ábra - A geometriai diszkretizáció során alkalmazott elemi cella konvencionális jelölései.

Tranziens jelenségek esetén nem elég a fent leírt geometriai diszkretizáció, a negyedik dimenzió, az idő koordináta mentén is részekre kell osztanunk az értelmezési tartományt, vagyis időlépcsőket kell definiálnunk.

3.2.2. AZ ALGEBRAI EGYENLETEK FELÍRÁSA

A véges térfogatok módszerének lényege és erőssége a diszkretizált egyenletek konzervativitásában rejlik, ugyanis a leíró differenciálegyenleteket minden cellára integráljuk, így a mezőváltozókat a cella középpontba redukáljuk. A lokális integrálás miatt a megmaradási törvények minden cellára kielégülnek. Például mutatjuk be a legegyszerűbb, egy dimenziós stacioner hővezetés esetét, ahol φ a hőmérséklet, Γ a hővezetési együttható, S_φ a térfogati hőforrás szerepét tölti be:

A **differenciális alak**:

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + S_\varphi = 0. \quad (3.24.)$$

Az **integrál alak** ΔV térfogatú kontroll térfogatra vonatkoztatva:

$$\iiint_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dV + \iiint_{\Delta V} S_\varphi dV = 0. \quad (3.25.)$$

A **diszkretizált alak**, ahol A jelöli a keresztmetszeti területet, $\bar{S}_\varphi$ a hőmérséklet térfogati átlagát, a kisbetűs indexek pedig a megfelelő cellahatárokat:

$$\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} A \right)_w + \bar{S}_\varphi \cdot \Delta V = 0. \quad (3.26.)$$

Itt látszik a módszer másik előnye, nevezetesen, hogy a fenti diszkretizált **mérlegegyenletben** az egyes tagok jól meghatározott, és szemléletből is adódó fizikai jelentéssel bírnak, nevezetesen a bal oldali határlapon kilépő és a jobb határlapon belépő diffúziós hőáram különbsége egyenlő a térfogatban keletkező hőmennyiséggel. A **mezőváltozókat a cellaközéppontban tároljuk**, így a fenti egyenlet használható formába öntéséhez az első két tagot (általános esetben a divergenciával kifejezett tagokat, a jelenlegi határoló lapokon kifejezett hővezetési tényező és hőmérsékleti gradiens értékeket) meg kell adnunk ezek segítségével. Ezeket különböző **interpolációs eljárások** (differencia sémák) segítségével tehetjük meg. A gradiens határlapokon történő meghatározására példaként álljon itt a legegyszerűbb, lineáris összefüggést jelentő **centrális differencia séma** azonos méretű elemekből álló háló esetére:

$$\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} A \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_{PE}} \right), \quad \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} A \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta x_{WP}} \right). \quad (3.27.)$$

Hasonlóan a hővezetési tényezőt is lineárisan interpolálhatjuk a határookra.

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E - \Gamma_P}{2}, \quad \Gamma_w = \frac{\Gamma_P - \Gamma_W}{2}. \quad (3.28.)$$

Az A érték a háló geometriájából számítható, azonban célszerű megengedni a forrástag mezőváltozótól való függését, ezt általában egy lineáris taggal teszik meg:

$$\bar{S} \cdot \Delta V = S_U + S_P \cdot \varphi_P. \quad (3.29.)$$

Itt S_U és S_P már a kontroll térfogatra jellemző geometriai adatokat is tartalmazzák.

A diszkretizált egyenlet végső alakja:

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_U + S_P \cdot \varphi_P) = 0. \quad (3.30.)$$

Ezt a mezőváltozók szerint csoportosítva:

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P \right) \varphi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \varphi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \varphi_E + S_U \quad (3.31.)$$

A mezőváltozók együtthatóit átnevezve az egyenlet **általános alakja**:

$$a_p \cdot \varphi_p = a_p \cdot \varphi_p + a_E \cdot \varphi_E + S_U. \quad (3.32.)$$

3.2.3. AZ EGYENLETRENDSZER ÖSSZEÁLLÍTÁSA ÉS MEGOLDÁSA

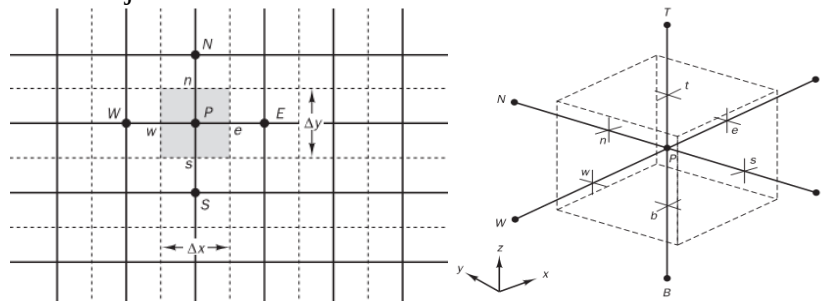
Az előző pont egyenletét minden cellára felírva és a megfelelőeket azonosítva összeállítható a rendszert leíró **lineáris egyenletrendszer**. A peremen lévő pontoknál ez különböző peremfeltételek előírásával tehető teljessé, itt csak illusztrációképp csak annyit jegyzek meg, hogy a vizsgált tartományt fiktív, úgynevezett **árnyékcellákkal** vesszük körül, amelyben a mezőváltozó értéke a peremcellákban tárolt mezőváltozó értékétől függ. Például Dirichlet-féle peremfeltételnél $\varphi_{P'} = \varphi_P$, míg Neumann-féle peremfeltételnél $\varphi_{P'} = -\varphi_P$, ahol P' az árnyékcella középpontjára utal. Ezzel a lineáris egyenletrendszer határozottá vált, melyből különböző direkt, vagy iteratív mátrix megoldó technikák segítségével megkaphatjuk a mezőváltozó térbeli eloszlását. A végigkövetett egydimenziós példa esetében egy tridiagonális együtthatómátrixot kapunk, melyre célszerű megoldási technika a **Thomas-algoritmus** (TDMA, lásd: Versteeg [2007]), amely ebben az egyszerű esetben direkt módszer, azonban kiterjeszthető vonalankénti megoldással többdimenziós esetre is, az egyik legelterjedtebb iteratív megoldási technikává.

3.2.4. FOLYADÉKOK VIZSGÁLATA

Az előzőekben vázolt teljes eljárás, amely nagy vonalakban végigkövette egy egydimenziós stacioner hővezetési feladat lépéseit, könnyen kiterjeszthető az esetünkben szükséges több **dimenzióra**.

3.2.4.1. AZ ELEMI CELLÁK JELÖLÉSRENDSZERE

Az **elemi cellák** jelölésrendszere az alábbi ábrán látható:



17. ábra - Az elemi cellák síkbeli illetve térbeli problémák esetére.

3.2.4.2. AZ OPERÁTOROK DISZKRETIZÁLT VÁLTOZATAI

A következő pontokban felsorolom a vektor operátorok legegyszerűbb diszkretizált alakját.

DIVERGENCIA

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel felhasználásával a divergencia térfogati átlaga közelíthető pusztán a cella adataival:

$$\overline{\text{div}(u_i)} = \frac{n_{k_j} \cdot u_j \cdot dA_k}{\Delta V}. \quad (3.33.)$$

A k futó változó a vizsgált cella összes határoló lapján végigfut.

GRADIENS

Hasonlóan az előzőhöz, a gradientsre is elfogadható közelítést ad az alábbi képlet:

$$\overline{\text{grad}_i(\varphi)} = \frac{n_{k_i} \cdot \varphi \cdot dA_k}{\Delta V}. \quad (3.34.)$$

LAPLACE-OPERÁTOR

A Laplace-operátort szintén kifejezhetjük az előző módszerek kombinációjaként:

$$\overline{\text{div}(\text{grad}(\varphi))} = \overline{\text{div}(\overline{\text{grad}_i(\varphi)})}, \quad (3.35.)$$

azonban ehelyett egy renddel pontosabb közelítéssel célszerű élni a szomszédos cellák adatainak felhasználásával:

$$\overline{\text{div}(\text{grad}(\varphi))} = A_p \cdot \varphi_p + \sum_K A_K \cdot \varphi_K, \quad (3.36.)$$

ahol az A együtthatók a hálóra jellemző konstansok, a φ mezőváltozók pedig a cellaközéppontbeli értékükkel szerepelnek. A K futó változó az összes szomszédos cellán végigfut.

3.2.4.3. A NYOMÁS- ÉS A SEBESSÉGMEZŐ KAPCSOLATA

A VTM alkalmazásakor a bemutatott példától eltérő problémákkal is találkozunk, nevezetesen azzal, hogy a differenciálegyenletekben a **nyomás és a sebesség közösen** fordul elő. Ennek kezelésére is jól bevált algoritmusokat találunk a szakirodalomban. Ilyen például a *Patankar és Spalding* [1972] által kifejlesztett iteratív **SIMPLE** (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) eljárás, melynek során a konvektív fluxusokat próba-sebességmező alkalmazásával közelítjük, továbbá a lendülettranszport egyenletet is egy próba-nyomásmező alapján oldjuk meg. Ezután egy, a kontinuitás egyenletéből levezetett nyomás korrekciós egyenlet segítségével javítjuk a mind a sebesség, mind a nyomásmezőt. Ezt az eljárást az előírt hibahatár eléréséig folytatjuk. Ennek a módszernek léteznek továbbfejlesztett változatai. Ilyen például a *Van Doormal és Raithby* [1984] által publikált **SIMPLEC** (SIMPLE-Consistent), vagy az *Issa* [1986] által közölt **PISO** (Pressure Implicit with Splitting of Operators) eljárás. Ezekről kiváló összefoglalás található *Versteeg és Malalasekera* [2007] könyvében.

Az általam alkalmazott programkörnyezet (**ANSYS CFX**) azonban nem a fenti **szegregált** megoldási technikát alkalmazza, hanem a nyomás és sebességmezőt **közösen kezeli**, így, bár egy iteráció tovább tart, mint az előző módszereket alkalmazó megoldók (pl. FLUENT) esetében, azonban ez a módszer általában gyorsabban konvergál. Itt fellép azonban egy probléma, amit a szakirodalomban **sakktáblaszerű nyomáseloszlásnak** neveznek (*Versteeg és Malalasekera* [2007]), ezt a szegregált megoldók eltérő kontroll térfogatok alkalmazásával küszöbölik ki, azonban a nyomás és a sebesség közös megoldása esetén a kontrolltérfogatok megegyeznek, így interpolációs technikát kell segítségül hívnunk. Az ANSYS CFX programba a **Rhie-Chow** módszert építették be. Az érdeklődők *Rhie és Chow* [1982] cikkében találják meg a módszer részletes leírását.

A konvergencia felgyorsítására az ANSYS CFX egy **algebrai többhálós** (Algebraic Multigrid) eljárásnak nevezett módszert alkalmaz. A hibatagok ugyanis a háló nagyságrendjében gyorsan csökkennek, azonban annál lényegesen nagyobb léptékben ez igen lassan megy csak végbe. Ezért a számítást célszerű bizonyos időközönként egy ritkább, nagyobb oldalhosszú hálón elvégezni. Az újrakészítéssel járó nagy erőforrásigényét pedig kiküszöbölhetjük, ha helyette a már diszkretizált egyenletrendszer sorait adjuk össze algebrailag.

3.3. SZILÁRDSÁGTANI LEÍRÁS

Ez a rész is rendszerszinten legalább akkora jelentőséggel bír, mint a fejezet előző két pontja. Ennek ellenére, figyelembe véve, hogy a dolgozat olvasói körében mind a szilárdságtan matematikai formalizmusa, mind a végeselemes eljárás alapjai ismertek, részletezésüktől eltekintek. Az érdeklődők számára a mélyebb ismeretek összefoglalása megtalálható *Bojtár és Gáspár* [2009] valamint *Bojtár* [2010] jegyzeteiben.

Az említés szintjén álljon itt a számítási elvek sarkalatos pontjainak összefoglalása. Egy általános szilárdságtani feladat három fő egyenletcsoportból áll: (1) a Newton II. törvényét kifejező **dinamikai**, (2) az anyagmodell tartalmazó **fizikai** és (3) a geometriai összeférhetőséget biztosító **kompatibilitási egyenletekből**. Ezek segítségével a feladat szintén megfogalmazható differenciális alakban kezdeti- és peremérték problémaként, azonban a jól ismert véges elemes megoldási technikához ezeket **variációs alakban** kell kifejeznünk, amelyet azután a geometriai és a matematikai függvénytér finitizálásának segítségével, speciálisan megválasztott bázisfüggvényeket alkalmazva oldunk meg.

Az erős alak nagy alakváltozások esetén a következő egyenletekkel írható le. A **mozgásegyenlet**:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho^s \cdot f_i^s = \rho^s \cdot \ddot{d}_i, \quad (3.37.)$$

ahol σ_{ij} a Cauchy-féle feszültségtenzor, amely a test elemi térfogatának tetszőleges normálisú metszetére ható erők komponenseit adja meg a pillanatnyi konfigurációra vonatkoztatva; x_j a vizsgált pont helyvektora a pillanatnyi konfigurációban; f_i^s a pontra ható, tömegegységre vett erővektor; ρ^s a pillanatnyi sűrűség; $\ddot{d}_i$ pedig a vizsgált pont gyorsulása. Az **anyagmodell** teremt kapcsolatot a test deformációi és a benne kialakuló feszültségek közt:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot e_{kl}, \quad (3.38.)$$

itt D_{ijkl} az anyagi tulajdonságokat kifejező negyedrendű merevségi tenzor, amely általános esetben függhet a vizsgált pont helyétől, deformációjától a deformáció sebességétől, és a terhelési történetétől is. Speciális esetben, ha a terhelési folyamat reverzibilis és hőmérséklet-független, akkor hiperelasztikus anyagról beszélünk, és az anyagi tulajdonságok tenzora előállítható egy skalár értékű függvény alakváltozások szerinti deriválásával, amint ezt a 3.5.1.2. pontban részletesen is bemutatom. Az e_{kl} tenzor az Almansi-Hamel-féle **alakváltozás-tenzor**, amely megadja a pillanatnyi konfiguráció egy adott pontjában lévő elemi szál hosszénegyzetének megváltozását:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right), \quad (3.39.)$$

itt X_k az anyagi pont helyvektora a hivatkozási konfigurációban.

Ezek alapján megfogalmazhatjuk a **kezdeti peremérték feladatot**. A vizsgált test a terheletlen hivatkozási állapotban: $\Omega_0^s \subset \mathbb{R}^3$, a pillanatnyi állapotban: $\Omega^s \subset \mathbb{R}^3$, a kettő közt a $x_i(X_i, t): \Omega_0^s \times T \rightarrow \Omega^s$ leképezés teremt kapcsolatot, ahol $T = [0, t_{fin}] \subset \mathbb{R}$. A tartomány határa előáll két diszjunkt halmaz uniójaként: $\partial_1 \Omega^f \cap \partial_2 \Omega^f = \emptyset$, uniójaként $\partial_1 \Omega^s \cup \partial_2 \Omega^s = \partial \Omega^s$. Így a differenciálegyenlet tömör formában a következő alakot ölti:

$$\Phi(d_i^s) = f_i^s, \quad (3.40.)$$

itt $d_i^s = x_i - X_i$ a vizsgált pont elmozdulás-vektora, f_j^s , a rá ható erő vektora, Φ pedig a köztük lévő kapcsolatot kifejező operátor. A $\partial_1 \Omega$ peremen az elmozdulást $d_i^s = d_{1i}^s$, a $\partial_2 \Omega$ peremen a rá ható feszültségeket $\sigma_{ij} \cdot n_j^s = t_{2i}^s$ írjuk elő. A kezdeti feltétel: $d_i^s(t=0) = d_{t,i}^s$.

3.4. A VÉGESELEMEK MÓDSZERE

A szilárdságtani feladatok megoldására használt legelterjedtebb eljárás a végelemek módszere, amelyhez az előző differenciális alakú kezdeti peremérték feladatot fel kell írunk **integrál alakban**. Ezt általános, nemlineáris operátor esetén a **Galjorkin módszerével** tehetjük meg, amely a **képtér hibájának ortogonalitását** írja elő egy előre kiválasztott, a peremfeltételeknek eleget tevő függvényhalmazra. Az ortogonalitást a **belső szorzat** segítségével definiáljuk, amely esetünkben a kompakt tartójú, négyzetesen integrálható valós értékű függvények Hilbert-terén értelmezett bilineáris funkcionál. Így az egy mezős (csupán az elmozdulásmezőt közelítő) variációs elven felírt gyenge alak a **virtuális munkák tételét** szolgáltatja:

$$\int_{\Omega_0} (P_{ij} \cdot \delta F_{ij} - \rho_0 \cdot f_i^s \cdot \delta d_i + \rho_0 \cdot \ddot{d}_i \cdot \delta d_i) d\Omega_0 - \int_{\partial_2 \Omega_0} (t_{2i}^s \cdot \delta d_i) d\partial_2 \Omega_0 = 0. \quad (3.41.)$$

Az egyenletet a kiindulási állapotra vonatkozó lagrange-i leírás alapján adtam meg, így P_{ij} az I. Piola-Kirchoff-féle feszültségtenzor, F_{ij} a deformáció-gradiens tenzor, ρ_0 az anyag adott pontbeli sűrűsége, d_i a pont elmozdulásának vektora, f_i^s a pontra ható térfogati erő vektora, $\partial_2 \Omega_0$ a test azon határa a kiindulási állapotban, amelyen előírjuk a felületi terheket (t_{2i}^s). A pont az idő szerinti parciális deriválást jelenti. δd_i az elmozdulás első variációja, δF_{ij} az ebből számítható deformációgradiens-tenzor.

A fent bemutatott egyenleten alapul a módszer, amely ezután a **geometria és a függvénytér diszkretizálását** igényli, mégpedig olyan **speciálisan** megválasztott **bázisfüggvények** segítségével, amelyek a diszkrét végelemek egy csomópontjában egység, az összes többiben zérus értéket vesznek fel. Ezek lineáris kombinációja adja a keresett elmozdulásmező legjobb közelítését, és az ehhez tartozó súlyszámok megadják a csomóponti elmozdulásokat.

3.5. MECHANIKAI TULAJDONSÁGOK

3.5.1. AZ ÉRFAL ANYAGÁNAK MATEMATIKAI LEÍRÁSA

A 2.1.3. pontban részletesen ismertettem az artériafal szerkezetét, az alkotó rétegek tulajdonságait és az azokat felépítő elemek mechanikai viselkedését. Ezek alapján mutatom most be a fal mechanikai viselkedését leíró matematikai modelleket.

Az érfal szerkezeti szempontból két koncentrikus, szálerősítésű, ortotrop, nemlineáris viselkedésű gyűrűből áll. A verőerek két fajtája a szívhez közelebb található **rugalmas** artériák (ilyen például az aorta vagy a közös fejverőér), és a távolabb elhelyezkedő **muszkuláris** artériák (ide sorolható a combverőér, a hasi- és vizsgálatok tárgyát képező agyi artériák is).

A fő különbség a falat alkotó **simaizomsejtek** arányában mutatkozik meg. Ez a szívtől távolodva nő, és a kezdeti **rugalmas** viselkedést felváltva egyre jelentősebb **viszkoelasztikus** tulajdonságokat kölcsönöz az érfalnak. Utóbbiak viselkedése tehát függ a deformáció sebességétől valamint a **kúszás** (állandó feszültségérték mellett időben növekvő deformációk jönnek létre) és a **relaxáció** (állandó deformációk esetén az anyagban a feszültségek idővel leépülnek) jelenségét is megfigyelhetjük rajtuk. A simaizomsejteken keresztül érvényesül a

rövid idejű **aktív biológiai szabályozás** is. Ennek figyelembevételétől ebben a dolgozatban eltekintek. Ezen felül az élő szövetek tulajdonsága, hogy rövidtávon képesek a sérülések **gyógyítására**, valamint hosszútávon **adaptálódnak** a rájuk ható terhek kedvezőbb felvételére.

3.5.1.1. KÖZELÍTÉSEK

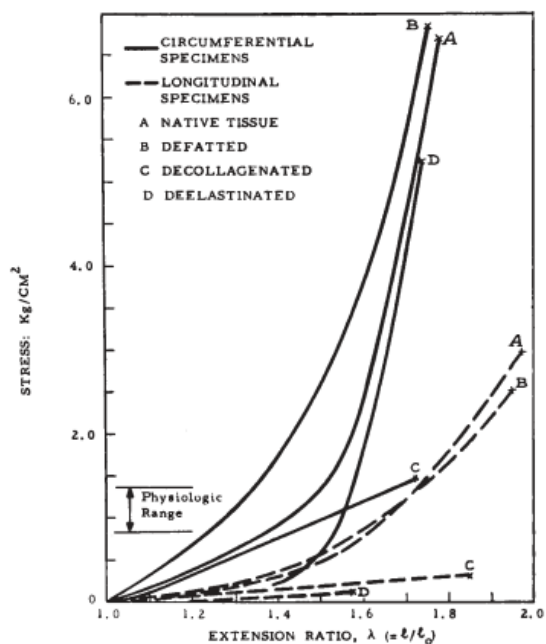
ÖSSZENYOMHATATLANSÁG

Az artériafal általánosan elfogadott tulajdonsága, hogy külső mechanikai hatásokra bekövetkező deformációi során **térfogatát nem változtatja** (izochor deformációk). Ez a modell *Carew et al.* [1968] mérésein alapul. Ők kutyákból kimetszett, vízbe merített mellkasi-, hasi-, nyaki-, comb- és tüdőartériákat vizsgálták a nyomás és a megnyúlás változtatásával, és a teljes rendszer térfogatát állandónak találták. A módszer jellegéből adódóan azonban nem kapunk információt a szövetből ki- illetve abba belépő folyadék mennyiségéről. Erről *Choung és Fung* [1984] cikkében olvashatunk. Ők nyúl mellkasi aortáin végeztek uniaxiális radiális irányú kompressziós vizsgálatokat, és 0,5-1,26%-os térfogatcsökkenést tapasztaltak 10 kPa nyomásnövekedés hatására, így a fal kismértékben összenyomhatónak bizonyul. Az összenyomhatatlanság feltételezése a fiziológias nyomástartományban (10-16 kPa) azonban megfelelő közelítésnek mutatkozik, és jelentős könnyebbségekkel jár a modellalkotás szintjén, így a továbbiakban én is ezt a közelítést alkalmazom. **Izotrop** esetben így a Poisson-tényező 0,5-re adódik, **ortotrop** esetben pedig a sugár irányú deformációk mértéke egyértelműen számítható a hosszirányú és érintőirányú deformációkból.

FÁZISOS ÖSSZETÉTEL

A **passzív mechanikai viselkedés** szempontjából a falat alkotó **elasztin** és **kollagén** tekinthető meghatározó összetevőknek¹. A két anyag mechanikai tulajdonságai jelentősen eltérnek, továbbá teherviselővé válásuk is eltérő terhelési szinteken következik be. Emberi aorta szövetek alkotóinak feszültség-megnyúlás összefüggéseiről *Armeniades* [1972] összefoglalásában olvashatunk.

Ezek szerint **kisebb megnyúlások** esetén az **engedékenyebb elasztin**, míg **nagyobb értékek** mellett az így kiegyenesedett, **merevebb kollagén** rostok teherviselő hatása dominál. Ezt a két fázisos anizotrop összetételt modell szinten először *Wiesacker* [1987] vette figyelembe. A szemléletesség kedvéért egy ilyen, *Armentano et al.* [1991] által közölt, 1D-s leírást mutatok most be, ahol kétfázisú modellt alkalmaznak élő kutyák ereinek viselkedésének jellemzésére. Rendelkezésükre állt in vivo mérések alapján a nyomás-érátmérő kapcsolat. Homogén, izotrop anyagmodellű vastag falú hengerhéjként írták le az érfalat. Ekkor a falban ébredő érintő irányú átlagos feszültség:



18. ábra - Az érfal tipikus feszültség-megnyúlás diagramjai hossz és érintő irányban. Egészséges szöveten (A), illetve a zsír (B), a kollagén (C), vagy az elasztin (D) eltávolítása után. (*Armeniades* [1972])

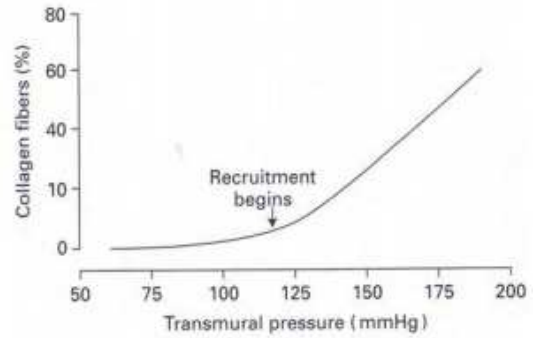
¹ A simaizomsejtek passzív viselkedésének az anyagmodellre gyakorolt szerepe a fentieknél kisebb, és pontos figyelembevételének mikéntje is több kérdést vet fel.

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2 \cdot r_e^2 \cdot r_i^2}{r_c^2 \cdot (r_e^2 - r_i^2)} \cdot p, \quad (6.42.)$$

ahol r_e és r_i a fal külső illetve a belső sugara, r_c a kettő átlaga, p pedig a falra ható nyomás. A fal anyagmodellje:

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = E_E \cdot (\bar{\lambda}_{rr} - \bar{\lambda}_{rr,0}) + C_R \cdot E_C \cdot \bar{\lambda}_{rr}, \quad (6.43.)$$

ahol E_E és E_C az elasztin illetve a kollagén rugalmassági modulusai, C_R az aktivizálódott kollagén rostok aránya, az átlagos sugár irányú megnyúlás pedig: $\bar{\lambda}_{rr} = r_c / r_{c,min}$, $\bar{\lambda}_{rr,0}$ a függvény zérus feszültséghez tartozó extrapolált megnyúlásértéke, $r_{c,min}$ a megfigyelt legkisebb átlagos sugár. Ezzel a feltevéssel tehát a kollagén anyagmodelljét is lineárisnak feltételezték, azonban a nemlineáris globális anyagmodell létrehozásához az aktivizálódott kollagén rostok arányát függővé tették a megnyúlástól, így közvetve a falra ható nyomástól ($C_R(p)$). Ennek lefutása látható a következő ábrán.



19. ábra - Az aktivizálódott kollagénrostok aránya a falra ható nyomás függvényében élő kutyák mellkasi aortáinak mért adatai alapján (Armentano et al. [1991]).

A valósághoz azonban közelebb áll, hogy a kollagén rostok a kezdeti összegyűrt állapotuk miatt nem vesznek részt a teherviselésben. Az újabb modellek, mint például a *Holzapfel* és *Weizsacker* [1998] közölt, már ezt adaptálja, és hiperelasztikus anyagmodelljükben a teljes alakváltozás-energia függvényt az elasztin izotrop hatását tükröző polinom, és az anizotrópiáért felelős kollagén hatását leíró exponenciális (a deformációk növekedtével egyre merevebbé váló) függvény összegeként adják meg.

RÉTEGES FELÉPÍTÉS

Az érfal a mikrostruktúráján felül a réteges felépítése miatt sem tekinthető homogén egységnek. Ennek ellenére a legtöbb kezdeti modell ettől eltekintett, és csak később készültek olyan anyagmodellek, amelyek figyelembe veszik a réteges felépítést, sőt az egyes rétegek anizotrópiáját is. *Maltazahn et al.* [1981] például a media rétegeket izotropnak feltételezte, és az adventitiát ortotropnak, így mérések alapján kalibrálta a 4 paraméteres modelljét. *Holzapfel et al.* [2001] modellje már a mikroszerkezet struktúráját vette alapul és a helikális elhelyezkedésű rostok menetemelkedésével hozta összefüggésbe az egyes rétegek irányfüggő viselkedését.

REVERZIBILITÁS

A viszkoelasztikus érfal a ciklikus terhelések hatására energiát disszipál, azonban ez az élettanilag normálisnak mondható feszültség szinteken a ciklusszámmal egyre csökken (*Tóth B.K.* [2005]), vagyis anyagmodellje rövid távú (a szív ciklussal összemérhető idejű) hatásokra ebben a tartományban jó közelítéssel rugalmasnak mondható. A továbbiakban én is ezzel a közelítéssel élek.

Megjegyzem, hogy a viszkoelaszticitás figyelembe vételére a legelterjedtebb módszer a rugalmas elem és egy viszkózus csillapító elem sorba (Maxwell-modell a relaxáció leírására) vagy párhuzamos (Kelvin-modell a kúszás leírására) kapcsolása. A pontosabb közelítés végett ezek kombinációi is előfordulnak. Hasonló elemek közbeiktatásával vehető figyelembe a simaizomsejtek aktív, energiatermelő viselkedése is (*Hudetz és Monos* [1985]).

3.5.1.2. ÁLTALÁNOS ANYAGMODELLEK

Az érfal mechanikai viselkedésének leírására időben először **izotrop** modellek készültek, így ezt a részt ezek bemutatásával kezdem. Ezen belül is első közelítésben - és az

egészséges élettani körülményeknek megfelelő módon – a hőmérséklet-független deformációs folyamatot reverzibilisnek feltételezzük. Az ilyen viselkedést **hiperelasztikusnak** nevezzük. Ekkor létezik egy csupán a pillanatnyi helyzettől és alakváltozásától függő **alakváltozás-energia függvény**: $\Psi(E_{ij}(X_k), X_k)$, amelynek az alakváltozások szerinti deriváltjából származtathatók az anyag feszültségei:

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}}, \quad (6.44.)$$

ahol S_{ij} a 2. Piola-Kirchoff-féle feszültség-tenzor, E_{ij} a Green-Lagrange-féle alakváltozás-tenzor, X_k az anyagi pont vonatkoztatási állapotbeli koordinátáit tartalmazó vektor.

Az alakváltozás-energia függvényre a gyakorlatban **polinom**, **exponenciális**, **logaritmikus** kifejezéseket, esetleg ezek kombinációit hozták létre. Az **objektivitást** megtartva ezek az **alakváltozás-tenzor invariánsaitól** függenek. Egy további fontos kritérium a függvény lokális konvexitása, vagyis a Green-Lagrange-féle feszültség-tenzor szerinti második deriváltjának pozitív definit volta. A 3.5.1.1. pont alapján feltételezhetjük továbbá, hogy a deformációk **izochor** módon mennek végbe. A következőkben ezek közül mutatom be röviden a legtöbbet alkalmazottakat.

POLINOM ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

OGDEN MODELL

A **reverzibilis** deformációkat produkáló **izotrop** anyagok, legáltalánosabban alkalmazott polinom alakú alakváltozás-energia függvénye Ogdentől származik, és a főnyúlások λ_i , $i=1,2,3$ azonos hatványaival fejezhető ki az alábbi módon:

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3). \quad (6.45.)$$

Itt $N \in \mathbb{N}$ a függvény tagjainak száma, μ_p a p -edik nyírási modulus összetevő anyagállandó, α_p dimenzió nélküli állandó $p=1 \dots N$. A kísérleti tapasztalatok alapján már három pár konstanssal megfelelően írhatjuk le a valóságos viselkedést. A következő modell ezzel ekvivalens, az azt követők pedig ennek speciális esetei.

VALANIS ÉS LANDEL MODELLJE

Valanis és Landel feltételezése szerint a függvény három tag összegeként írható fel:

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{a=1}^3 \omega(\lambda_a). \quad (6.46.)$$

Ezt Ogden modelljére alkalmazva a következő, azzal ekvivalens alakot kapjuk:

$$\omega(\lambda_a) = \sum_{p=1}^3 \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_a^{\alpha_p} - 1). \quad (6.47.)$$

MOONEY-RIVLIN MODELL

Ogden modelljébe $N=2$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-2$, értékeket helyettesítve:

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \underbrace{\frac{\mu_1}{2}}_{c_1} \left(\underbrace{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}_{I_1} - 3 \right) - \underbrace{\frac{\mu_2}{2}}_{-c_2} \left(\underbrace{\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}}_{\frac{I_2}{I_3}} - 3 \right). \quad (6.48.)$$

A modellben a főnyúlásokat a bal Cauchy-Green-feszültség-tenzor $\left(b_{ij} = \frac{X_i}{x_j} \cdot \frac{X_j}{x_i} \right)$ invariánsaival kifejezve:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(b_{ij}) = b_{ij} \cdot \delta_{ij} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\text{tr}(b_{ij}) \right]^2 - \text{tr}(b_{ij}^2) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (b_{ij} \cdot \delta_{ij})^2 - b_{ij} \cdot b_{jk} \cdot \delta_{ik} \right\} = \\ &= (\lambda_1 \cdot \lambda_2)^2 + (\lambda_1 \cdot \lambda_3)^2 + (\lambda_2 \cdot \lambda_3)^2, \\ I_3 &= \det(b_{ij}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3)^2. \end{aligned} \quad (6.49.)$$

Kihasználva a térfogat állandó voltát: $I_3 = (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3)^2 = 1$, az alakváltozás-energia függvény alakja:

$$\Psi(I_1, I_2) = c_1 \cdot (I_1 - 3) + c_2 \cdot (I_2 - 3). \quad (6.50.)$$

Ekkor a Cauchy-feszültségek tenzora:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(b_{ij})}{\partial b_{ij}} = -p \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot c_1 \cdot b_{ij} - 2 \cdot c_2 \cdot b_{ij}^{-1}. \quad (6.51.)$$

Ezt az összefüggés gyakran alkalmazzák izotrop, gumyszerű anyagok nemlineáris viselkedésének leírására.

NEO-HOOKE-MODELL

Ogden modelljébe $N=1$, $\alpha_1=2$, értékeket helyettesítve:

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \underbrace{\frac{\mu_1}{2}}_{c_1} \left(\underbrace{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}_{I_1} - 3 \right), \quad (6.52.)$$

$$\Psi(I_1) = c_1 (I_1 - 3). \quad (6.53.)$$

Az alakváltozás-energia függvény ekkor csak egy paramétert tartalmaz, azonban a tapasztalatok szerint az izotrop gumyszerű anyagok nemlineárisan rugalmas viselkedését megfelelően írja le. A Cauchy-feszültségek tenzora most:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(b_{ij})}{\partial b_{ij}} = -p \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot c_1 \cdot b_{ij}. \quad (6.54.)$$

EXPONENCIÁLIS ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

Ezek a típusok szintén nagy alakváltozásokat elszenvedő izotrop, gumyszerű anyagok viselkedését írják le, azonban az előzőekkel szemben azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy a nagy deformációk tartományában egyre merevebben viselkednek.

DELFINO MODELLJE

A **Delfino** által javasolt ilyen jellegű alakváltozás-energia függvény alakja:

$$\Psi(\bar{I}_1) = \frac{a}{b} \left[e^{\frac{b}{2}(\bar{I}_1 - 3)} - 1 \right]. \quad (6.55.)$$

Itt $a > 0$ egy feszültség jellegű, $b > 0$ pedig egy dimenzió nélküli anyagállandó. $\bar{I}_1 = \bar{C}_{ij} \cdot \delta_{ij}$, a módosított (torzulási) jobb-Cauchy-Green-féle alakváltozás-tenzor első invariánsa, ahol

$$\bar{C}_{kl} = \left[\det \left(\frac{X_i}{x_j} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \cdot C_{kl}.$$

FUNG MODELLJE

Fung 2D-s alakváltozás-energia függvényét használják a leggyakrabban a gyakorlatban. A modell feltételezi, hogy a feszültség-tenzor főirányai egybeesnek az artéria tengely-, gyűrű- és sugárirányával, így a nyírási deformációkat nem veszi figyelembe. Ennek módosításaként Humphrey-től származik a legáltalánosabb, már 3D-s, polinom-exponenciális alakú függvény:

$$\Psi = \frac{c}{2} [e^Q - 1], \quad (6.56.)$$

ahol c anyagállandó, és

$$Q = b_1 \cdot \bar{E}_{\theta\theta}^2 + b_2 \cdot \bar{E}_{zz}^2 + b_3 \cdot \bar{E}_{rr}^2 + 2 \cdot b_4 \cdot \bar{E}_{\theta\theta} \cdot \bar{E}_{zz} + 2 \cdot b_5 \cdot \bar{E}_{zz} \cdot \bar{E}_{rr} + 2 \cdot b_6 \cdot \bar{E}_{rr} \cdot \bar{E}_{\theta\theta} + b_7 \cdot \bar{E}_{\theta z}^2 + b_8 \cdot \bar{E}_{rz}^2 + b_9 \cdot \bar{E}_{r\theta}^2, \quad (6.57.)$$

a módosított Green-Lagrange-féle alakváltozás-tenzor henger-koordinátás felírású komponenseinek függvénye.

LOGARITMIKUS ALAKÚ FÜGGVÉNYEK

TAKAMIZAWA ÉS HAYASHI MODELLJE

Ez a modell az előzőhöz hasonló 2D-s leírást tesz lehetővé logaritmikus formában.

$$\hat{\Psi} = -c \ln(1 - \varphi), \quad (6.58.)$$

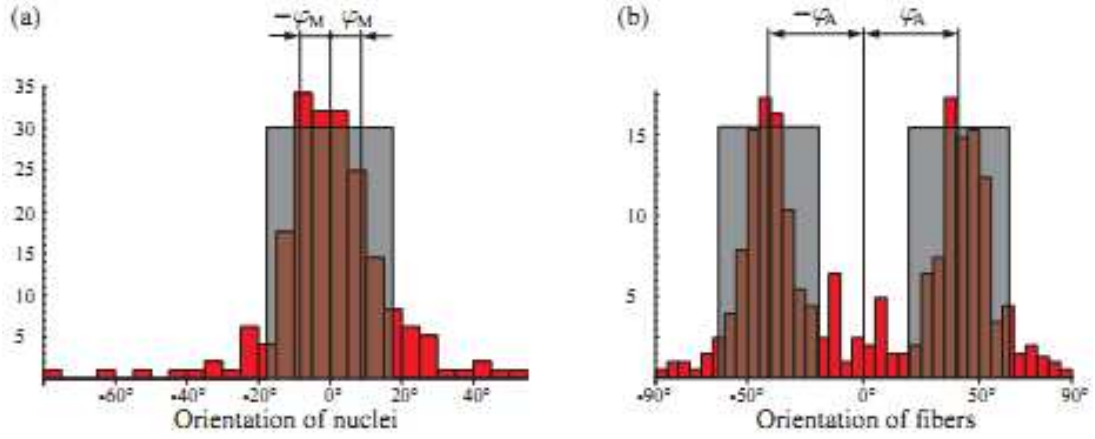
$$\varphi = \frac{1}{2} b_1 \cdot \bar{E}_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{2} b_2 \cdot \bar{E}_{zz}^2 + b_4 \cdot \bar{E}_{\theta\theta} \cdot \bar{E}_{zz}. \quad (6.59.)$$

Ez a leírás a nagyobb nyomásértékek mellett jól működik, azonban kis értékek esetén nem megbízható.

3.5.2. A MIKROSZERKEZETEN ALAPULÓ MODELLEK

A fenti anyagmodellek alapján Holzapfel [2001] egy szövettani (hisztológiai) vizsgálatokkal alátámasztott, az érfal mikroszerkezeti struktúráján alapuló hiperelasztikus anyagmodellt alkotott meg. Ez mind mérnöki, mind matematikai szempontból egyike a legjobb közelítéseknek, így a következőekben részletesen is ismertetem.

Hisztológiai mérések automatizált statisztikai feldolgozásával Holzapfel [2002] a media és az adventitia rétegben a kollagén rostok gyűrű iránnyal bezárt szögére átlagosan $\varphi_M = \pm 8,4^\circ$, illetve $\varphi_A = \pm 41,9^\circ$ -os értékeket adott meg.



20. ábra - Emberi aorta statisztikai alapú szövettani elemzése. Az egyes alkotók gyűrű iránnyal bezárt szögeinek sűrűségfüggvénye. Bal oldalt: a media réteg simaizom sejtjei ($\varphi_M = \pm 8,4^\circ$). Jobb oldalt: az adventitia réteg kollagén rostjai ($\varphi_A = \pm 41,9^\circ$) (Holzapfel [2002]).

Ezek alapján a két rétegre külön felírható egy-egy izochor alakváltozás-energia függvény, amelyek az izotrop hatásokat kifejező kollagén mentes anyag tulajdonságait leíró és az anizotrópiáért felelős kollagén kettősspirál viselkedését modellező tagok összegeként állítható elő.

$$\Psi_p = \Psi_{p, \text{isotrop}}(\bar{I}_1) + \Psi_{p, \text{anisotrop}}(\bar{I}_{4,p}, \bar{I}_{6,p}), \quad p \in \{M, A\}. \quad (6.60.)$$

Itt az M index a media, míg az A az adventitia rétegre utal. $\bar{I}_1$ a jobb Cauchy-Green-féle alakváltozás-tenzor torzulási tagjának $(\bar{C}_{ij})$ első invariánsa. $\bar{I}_{4,p}$ és $\bar{I}_{6,p}$ a két irányban futó kollagén rostok megnyúlásainak négyzeteit adják meg az egyes rétegekben.

$$\bar{I}_1 = \bar{C}_{ii}, \quad (6.61.)$$

$$\bar{I}_{4,p} = \bar{C}_{ij} \cdot a_{0,1,p,i} \cdot a_{0,1,p,j}, \quad (6.62.)$$

$$\bar{I}_{6,p} = \bar{C}_{ij} \cdot a_{0,2,p,i} \cdot a_{0,2,p,j}. \quad (6.63.)$$

Az utolsó két egyenletben $a_{0,1,p,i}$ és $a_{0,2,p,i}$ a kettősspirál irányait tartalmazó vektorok az egyes rétegekben, a referencia állapotban.

$$a_{0,1,p,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\varphi_p) \\ \sin(\varphi_p) \end{bmatrix}, \quad a_{0,2,p,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\varphi_p) \\ -\sin(\varphi_p) \end{bmatrix}, \quad (6.64.)$$

φ_p pedig a kollagén rostoknak a gyűrű iránnyal bezárt szöge az egyes rétegekben. Ezek alapján az alakváltozás-energia függvényekre Holzapfel a következő alakokat javasolja:

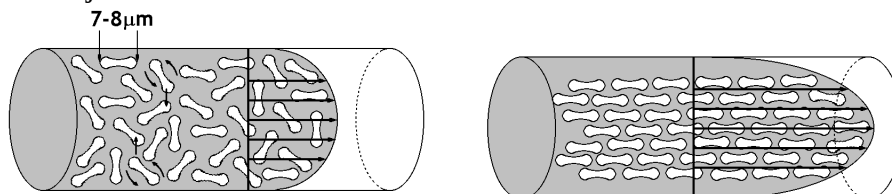
$$\Psi_M = \frac{c_M}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_{1M}}{2k_{2M}} \sum_{i=1,4} \left[e^{k_{2M}(\bar{I}_{1M}-1)^2} - 1 \right], \quad r_i \leq r \leq r_i + h_M \quad (6.65.)$$

$$\Psi_A = \frac{c_A}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_{1A}}{2k_{2A}} \sum_{i=1,4} \left[e^{k_{2A}(\bar{I}_{1A}-1)^2} - 1 \right], \quad r_i + h_M \leq r \leq r_e \quad (6.66.)$$

A modell kétszer három pár anyagállandót tartalmaz: a media (c_M, k_{1M}, k_{2M}) és az adventitia (c_A, k_{1A}, k_{2A}) leírásához. Az összeg első, izotrop tagja a klasszikus neo-Hooke modell, míg a második, anizotrop tagja a merevedő hatást jól leíró exponenciális Delfino által javasolt modell módosítása.

3.5.3. A VÉR VISELKEDÉSÉNEK MATEMATIKAI LEÍRÁSA

Az érrendszerben áramlik a szív által periodikusan pumpált **szuszpenzió**, a vér, amely - éppen a diszpergált szilárd fázis, a hematociták, jelenléte miatt - az idealizált newtoni folyadékoktól eltérően viselkedik. Viskozitása a sebesség gradiens növekedésével csökken, mivel a testes elemek a sebesség növekedésével egyre inkább az áramlásnak megfelelő rétegekbe rendeződnek a tengely irányában egyre sűrűsödve. Ez a jelenség a viszkózus folyadék fázis sebességprofiljának alakjával, az ebből a diszpergált részecskékre átadódó forgatónyomatékkal és a Magnus-hatással¹ magyarázható. 0,5 mm-nél nagyobb artériákban azonban a sebesség, és a sebesség-gradiens elegendően nagy ahhoz, hogy newtoni folyadékként kezeljük.



21. ábra - Az arteriolákban, és az annál nagyobb átmérőjű erekben a hematociták rétegekbe rendeződve haladnak a vérplazmában.

3.5.4. A KÖRNYEZET JELLEMZÉSE

A carotis bifurcatio, valamint az azt körülvevő lágy agyi szövetek és az agyvíz a zárt koponyaüregben helyezkedik el. Ennek térfogata állandó, a benne lévő agyi szövet könnyen összenyomható, azonban nagyon érzékeny a nyomás változására, így a Monro-Kellie hipotézis (Mokri [2001]) alapján első közelítésben feltehető, hogy a rendszer nyomása állandó. Megjegyzem, hogy az érfal dinamikus pulzációi az agyvízzel kölcsönhatásba léphetnek, és az így kialakuló gerjesztett rezgés lökésszerű terheket és rezonanciát idézhet elő, ami az aneurysmák ruptúrájának egyik oka lehet Akkas [1990].

3.6. A MODELLKÉSZÍTÉS SZINTJEI

Mint látható, a rendszer meglehetősen bonyolult és a modellalkotás során több nehézséggel is szembetaláljuk magunkat. Ebben a részben röviden bemutatom a véráramlás modellezési lehetőségeit.

3.6.1. KONCENTRÁLT PARAMÉTERŰ MODELLEK

Az első véráramlási modellek a kardiovaszkuláris rendszer és a **váltakozó áramú áramkörök** közti **analógia** felismerésén alapultak. A két rendszert leíró közösleges differenciálegyenlet rendszer megegyezik. Ebben a módszerben az áramköri elemeket a folyadékáramlásból kifejezhető paraméterekkel helyettesíthetjük. Így a feszültség és az áramerősség szerepét a nyomáskülönbség és a tömegáram veszi át, az ellenállások és az induktivitások a folyadék viszkozitási és tehetetlenségi paramétereinek felelnek meg, a

¹ A Magnus-hatás Bernoulli törvényének következménye, mely szerint egy áramvonal mentén a nyomás és a sűrűség hányadosából, valamint a sebességnégyzet felének összegéből képzett mennyiség állandó. Így potenciális áramlásban a gyorsabban áramló térrész nyomása kisebb. A viszkózus folyadékban forgó testek esetén a testtel együtt forgó határréteg torzítja az áramvonalak eloszlását, amely a haladási irányra merőleges eltérülést okoz.

kondenzátorok szerepét pedig a fal rugalmas tulajdonságai töltik be. Ilyen modellek találhatók *Pater és Berg* [1964], valamint *Westerhof* [1969] műveiben.

Ezek a modellek a **keringési rendszert, mint egészet** képesek jól leírni, valamint peremfeltételként alkalmazhatók az összetettebb modellek kiegészítéseként. Hátrányuk, hogy a hullámterjedést nem képesek kezelni, valamint az, hogy a modell paramétereit rendszer-szinten tudjuk csak beállítani, így egy-egy érszakasz kicserélésére nem ad gyors lehetőséget.

3.6.2. EGYDIMENZIÓS MODELLEK

A következő lépcső a hullámterjedést is kezelni képes egydimenziós modellek megalkotása volt. Ennek segítségével anatómiailag pontosabb érhálózatok tanulmányozására nyílt lehetőség, anélkül, hogy a háromdimenziós modellek komplexitásával meg kelljen küzdenünk. A modell két alapfeltevéssel él. Ezek szerint **a sebesség domináns összetevője a tengely irányába esik, és egy keresztmetszeten belül a nyomás állandónak vehető.** Egy rugalmas hengerszimmetrikus csőben áramló newtoni-folyadék esetén a jelenséget leíró egyenletek a kontinuitás, a tengely irányú lendületmegmaradás, illetve a nyomás és a keresztmetszeti terület közti összefüggést megadó konstitutív egyenletek, kiegészítve a megfelelő perem- és kezdeti feltételekkel. Nézzük ezek részleteit:

A kontinuitást kifejező egyenlet:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \quad (3.67.)$$

Itt A jelöli a keresztmetszeti területet, Q a rajta átfolyó térfogatáramot.

A tengelyirányú lendületmegmaradás egyenlete:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + \alpha) \frac{Q^2}{A} \right] + \frac{A}{\rho^f} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = A \cdot f + N \cdot \frac{Q}{A} + \frac{\mu}{\rho^f} \cdot \frac{\partial^2 Q}{(\partial x)^2}. \quad (3.68.)$$

Ebben az esetben ρ és μ^f a vér állandónak feltételezett sűrűségét és dinamikus viszkozitását, f pedig a külső erőket jelöli. A tengely irányú $v_z(x, y, z, t)$ sebességmezőt szorzat alakban szétbonthatjuk a keresztmetszeten belüli sebességeloszlást leíró profilfüggvényre $\Phi(x, y)$ és a tengely irányú változást, valamint az időbeli változást tartalmazó $\tilde{v}_z(z, t)$ tagra:

$$v_z(x, y, z, t) = \Phi(x, y) \cdot \tilde{v}_z(z, t) = \Phi(x, y) \cdot \frac{Q(z, t)}{A(z, t)}. \quad (3.69.)$$

A keresztmetszetre vonatkoztatott integrálok $\Phi(x, y)$ ismeretében kiszámolhatók. Ezekből adódnak a lendületmegmaradás egyenletében szereplő konstansok:

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A (\Phi^2 - 1) dA, \quad (3.70.)$$

$$N = \frac{\mu}{\rho} \oint_{\partial A} \frac{\partial \Phi}{\partial m} dl. \quad (3.71.)$$

Itt dA jelöli a keresztmetszet elemi területegységét, dl pedig a keresztmetszet kerületének elemi szakaszát, továbbá m a keresztmetszet normálisa. Az együtthatók értékei a Poiseuille-féle másodfokú forgásparaboloid profil esetén (a forgásszimmetriát kihasználva áttérhetünk hengerkoordinátákra):

$$\Phi(r) = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (3.72.)$$

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad (3.73.)$$

$$N = -8\pi \frac{\mu^f}{\rho^f}. \quad (3.74.)$$

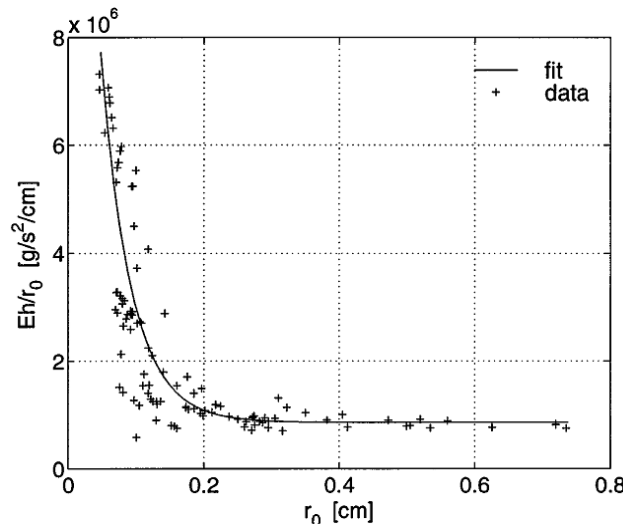
A rendszer megoldhatóságához fel kell írunk a kapcsolati egyenletet is, amely összefüggést teremt a nyomás és a keresztmetszeti terület közt. Olufsen [1999] modelljében ez az alábbi alakot ölti:

$$p(A(z,t), z, t) = p_0(z) + \frac{4}{3} \frac{E \cdot h}{r_0(z)} \left(1 - \sqrt{\frac{A_0(z)}{A_0(z,t)}} \right). \quad (3.75.)$$

Itt r_0 és A_0 a p_0 referencianyomáshoz tartozó csőszög és keresztmetszeti terület. E és h a fal rugalmassági modulusa és vastagsága, melyek segítségével az anyagmodell a kísérleti eredményekkel összhangba hozható. Olufsen egy háromparaméteres, a sugár növekedésével exponenciálisan csökkenő függvényt alkalmazott a kisebb átmérőjű erek nagyobb merevségének figyelembe vételére:

$$\frac{E \cdot h}{r_0(z)} = k_1 \cdot e^{k_2 \cdot r_0(z)} + k_3. \quad (3.76.)$$

Ez a modell jól alkalmazható az **érrendszer egészének** modellezésére. Mivel a **hullámterjedést** is képes leírni, ezért könnyen kalibrálható viszonylag egyszerű mérések segítségével. A lokális problémák leírására ugyan nem alkalmas, de azok **részletes modelljeinél peremfeltételként** alkalmazható.



22. ábra - Egydimenziós leírás anyagmodellje kísérleti eredmények alapján. (Olufsen [1999])

3.6.3. KÉT- ÉS HÁROMDIMENZIÓS MODELLEK

A lokális problémákkal foglalkozó – jelenleg legelterjedtebb – modellezési technikák a rendszert teljes egészében, három dimenzióban vizsgálják. Az így adódó bonyolult parciális differenciálegyenlet-rendszert **numerikus technikák** segítségével oldják meg. A fizikai rendszer két elkülöníthető – egy áramlástan és egy szilárdtest-mechanikai – alrendszerből tevődik össze. Megtehetjük, hogy egy közös algoritmussal, **monolitikusan** kezeljük őket, azonban gyakorlati előnyök miatt az alrendszereket külön kezelő, köztük csatolást létesítő **particionált módszer** alkalmazása terjedt el. A két típus elemzéséről részletes leírás található Heil [2008] cikkében. Álljon itt a módszerek kvalitatív összehasonlítása.

3.6.3.1. MONOLITIKUS ELJÁRÁS

Ha egy rendszer aegységeit leíró egyenletrendszert egyetlen, közös algoritmussal oldjuk meg, akkor úgynevezett monolitikus megoldási technikát alkalmazunk. Ennek a

módszernek legnagyobb **előnye**, hogy a matematikai eljárás **konvergenciája és stabilitása** kezelhető marad, és az azonos diszkretizáció miatt az alrendszerek közti adatcsere egyszerűen megtehető. **Hátránya** azonban, hogy **komplex és feladatonként egyedi algoritmusokat** igényel, valamint az alrendszerek speciális igényeit mindig a **szigorúbb feltétel** határozza meg. Például a folyadékdinamika a szilárd testekénél jóval kisebb időlépést igényel, ráadásul a határrejtegek miatt háló sűrítését is éppen a falnál kell elvégezni, holott a szilárd rész ezt nem teszi szükségessé.

3.6.3.2. PARTÍCIONÁLT CSATOLÁS

Partícionált csatolás esetén az alrendszereket külön, **egymástól független matematikai algoritmusokkal** kezeljük, és köztük az adatcsere egy **csatoló algoritmus** segítségével történik. A gyakorlatban szinte kizárólag ezt a módszert, az úgynevezett **Fluid Structure Interaction** (FSI) alkalmazzák. **Ennek oka** egyrészt, hogy viszonylag jól kidolgozott, rutinszerűen alkalmazható numerikus megoldási technikák állnak rendelkezésünkre a szeparált alrendszerek kezeléséhez. Az **áramlástani** résznél a **véges térfogatok módszere** (VTM), míg a **szilárd testek** leírásánál a **végeleemes eljárás** (VEM) tölti be ezt a szerepet leggyakrabban. Szintén nagy előny, hogy az egyes fizikai **alrendszerek sajátosságait** (pl. időlépés nagysága, hálósűrűség) figyelembe vehetjük. **Hátránya** ennek a módszernek, hogy igényel egy külön a megoldást vezérlő csatoló algoritmust, amely létrehozza az adatcserét a rendszerelemek közt, amihez viszont eltérő hálók esetén **interpolációra** van szükség.

Abban az esetben, ha valamelyik alrendszer állapotának megváltozása a másik alrendszer állapotában csak olyan kismértékű változást indukál, hogy annak visszahatása az előző rendszerre elhanyagolható, akkor **gyengén kapcsolt**, ellenkező esetben **erősen kapcsolt** rendszerről beszélünk.

GYENGE KAPCSOLÁS (LOOSE COUPLING)

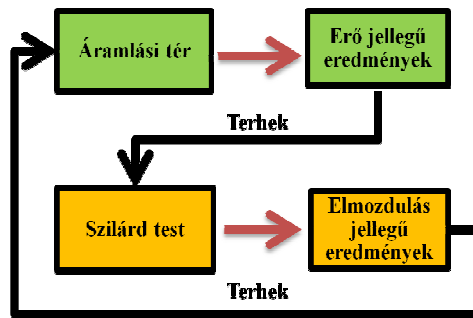
Ebben az esetben **egy-irányú adatátvitel** elegendő. Ezt megtehetjük úgy, hogy az áramlási tér szimulációja során nyert eredményeket felhasználjuk a szilárd test számításához, vagy fordítva, a szilárd test számítása során nyert elmozdulásokkal módosított geometrián oldjuk meg az áramlási teret leíró egyenletrendszert. Ebben az esetben nincs szükség belső iterációra, elegendő ezt időlépésenként egyszer elvégezni. A folyadék rész hálófelosztása és a szilárd rész terhei csak időlépésenként változnak.



23. ábra - A gyengén kapcsolt partícionált csatolás két lehetséges módjának folyamatábrája.

ERŐS KAPCSOLÁS (STRONG COUPLING)

Ha a visszahatás nem elhanyagolható mértékű, akkor a két alrendszer közt **kétirányú kapcsolást** kell létrehoznunk, amihez minden időlépcsőben szükségünk van egy belső iterációs ciklusra és egy azt vezérlő modulra. Ebben az esetben tehát a háló és a terhek is az időlépésen belüli iterációs ciklusokban is változnak.



24. ábra - Az erősen kapcsolt partícionált csatolás folyamatábrája.

FLUID STRUCTURE INTERACTION

Az adatcsere során az **áramlási térről feszültségek** adódnak át a **szilárd testre** erő jellegű teherként, fordított irányban pedig a **szilárd test elmozdulása változtatja meg az áramlási tér peremfeltételeit**. Az ezt megvalósító erős kapcsolást biztosító algoritmus egy ciklusának lépései a következők:

- A kiindulási geometrián meghatározzuk a folyadékrész nyomás- és sebességmezejét a VTM alkalmazásával.
- A csatlakozási felületen a folyadéktérből származtatható nyomás és nyírófeszültség értékekből a szilárd részre ható erőket interpoláljuk.
- Végrehajtjuk a szilárd test elmozdulásainak számítását az így kapott új terhekből a VEM segítségével.
- A folyadéktér határául szolgáló szilárd rész elmozdulásait és sebességeit átvisszük a folyadéktérre.
- A folyadéktérbeli hálót adaptáljuk a módosult geometriához.

Stacioner esetben a ciklus az elfogadható egyensúlyi feltételt jelentő konvergenciahatár eléréséig tart. **Instacioner** esetben minden időlépésben hasonló kritériumot állítunk fel a belső iterációkra, persze az inerciaerőket is figyelembe véve.

3.6.3.3. MATEMATIKAI MODELL

Ebben a pontban összefoglalom a teljes rendszert jellemző főbb tulajdonságokat és a leíró differenciálegyenlet rendszert. A folyadék összenyomhatatlan, **newtoni**, **áramlása lamináris**, valamint **energiatranszport sem** lép fel. Az egyenletek felírását a változó geometria miatt az eddigi Euleri vonatkoztatási rendszer helyett a **tetszőleges Lagrange-Euleri** (arbitrary Lagrange-Euler - ALE) koordinátarendszerben írjuk fel, ez szabad átjárást tesz lehetővé a két jól megszokott koordinátarendszer közt. Ha a háló mozdulatlan, akkor az Euleri-, ha a testtel együtt mozog, a Lagrange-i leírást kapjuk vissza.

A FOLYADÉK RÉSZ EGYENLETEI

Kontinuitás:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.77.)$$

Navier-Stokes egyenletek:

$$\rho^f \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j - u_{g_j}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu^f \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \cdot \partial x_j}, \quad (3.78.)$$

ahol ρ^f a folyadék sűrűsége, μ^f a dinamikus viszkozitás, u_i a folyadék adott pontbeli sebessége, u_{g_i} a mozgó koordinátarendszer sebessége, és $(u_i - u_{g_i})$ a folyadék relatív sebessége a mozgó koordinátarendszerhez képest.

A SZILÁRD RÉSZ EGYENLETEI

A lendületmegmaradás Lagrange-i koordináta-rendszerben.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho^s \frac{\partial u_{gi}}{\partial t}, \quad (3.79.)$$

ρ^s a szilárd test sűrűsége, σ_{ij} a szilárd test feszültségtenzora, $\frac{\partial u_{gi}}{\partial t}$ a szilárd test gyorsulása.

PEREMFELTÉTELEK A HATÁRFELÜLETEN

A folyadék és a szilárd rész elmozdulása a falon megegyezik (kompatibilitás):

$$d_{s_i} = d_{f_i}. \quad (3.80.)$$

A fal és a vele érintkező folyadék relatív sebessége zérus:

$$u_i = u_{g_i}. \quad (3.81.)$$

A fali feszültségek egyensúlya:

$$\sigma_{ij} \cdot n_i^s = \tau_{ij} \cdot n_i^f. \quad (3.82.)$$

Itt d_{s_i} a szilárd test, d_{f_i} a folyadék elmozdulása; σ_{ij} a szilárd testben, τ_{ij} a folyadékban kialakuló feszültségek; n_i^s a szilárd test, n_i^f a folyadék határoló felületének adott pontbeli normálisa.

4. KUTATÁSI IRÁNYZATOK

Az aneurysmákkal kapcsolatos kutatások két fő csoportját különböztetjük meg. Az első a tárgulatok **keletkezésének** indítókait és a **növekedés** folyamatát kutatja, míg a második a már kialakult érzsákok **felhasadásának veszélyességét** próbálja meghatározni, és a **sebészeti beavatkozások hatásait** értékeli.

4.1. A PATOGENEZIS FOLYAMATA

4.1.1. KIALAKULÁS

Az aneurysmák kialakulásáért különböző biológiai és hemodinamikai tényezők felelősek, melyek pontos mibenléte egyelőre **nem tisztázott**. Különböző megfigyelések alapján azonban fontos következtetéseket vonhatunk le.

Lasheras [2007] cikke alapján megadhatók a betegség kialakulásáért felelős különböző **kockázati faktorok**. Ilyenek például a magas vérnyomás (hypertenzió), a cukorbetegség (diabétesz), genetikus rendellenességek, túlzott alkoholfogyasztás, a testmozgás hiánya, vagy éppen a nem és a kor.

Ezek azonban csak **kvalitatív módon** közelítik meg a kérdést, nem adják meg a pontos hatásmechanizmust, továbbá nyitva hagynak olyan kérdéseket, mint például az, hogy zsákszerű aneurysmák miért kizárólag az agyi artériák elágazódásainál jönnek létre. Ennek magyarázatához meg kell tudnunk, hogy ezek a bifurkációk miben különböznek a test többi részén találhatóktól. Ilyen lehet a **geometria**, az időbeli **nyomásprofil**, az **érfal szerkezete** vagy a környező szövetek és a **zárt térben** való elhelyezkedés hatása, de ezen felül keresnünk kell **lokális biológiai mechanizmusokat** is.

Anatómiailag megfigyelhető, hogy az agyi erek **elágazási szöge** nagyobb a test többi részén található verőerekénél. Az **érfal szerkezete** is mutat különbségeket, mely szerint az agyi artériák falából teljes egészében **hiányzik a membrana elastica externa**, viszont a **membrana elastica interna** a megszokottól **vastagabb**, továbbá a **media rétegben** is a test többi részétől eltérő módon meglehetősen **kevés elasztikus rost** található, és az **adventitia is jelentősen vékonyabb** itt. Végül – még mindig az egészséges felépítésnél maradva – *Lee* [1995] megfigyelte, hogy az **elágazások csúcaiban** jelentősen **lecsökken a simaizomsejtek száma**.

Fergusson [1972] már viszonylag korán felismerte, hogy az aneurysma **kialakulásának feltétele**, a **membrana elastica internának** és a **media simaizomsejtjeinek** jelentős mértékben való degradálódása.

Mivel kis kiterjedésű **lokális formációkról** van szó, kézenfekvő az ebben a nagyságrendben változást mutató paramétereket vizsgálni, ezek pedig többnyire mechanikai jellegűek, amelyek természetesen a legváltozatosabb biológiai hatásokat válthatják ki. Feltételezések szerint az áramlás által a **falra kifejtett nyírófeszültség** (wall shear stress - WSS) térbeli eloszlása és időbeli változása játssza a főszerepet a folyamatban, ennek szerepét a közelmúltban több cikk is elemezte. Ilyen például *Sforza et al.* [2009] cikke.

4.1.2. NÖVEKEDÉSI FÁZIS

Szintén *Sforza et al.* [2009] cikkében átfogó összefoglalást találunk a növekedési folyamat hipotéziseiről, amelyek egyelőre megragadnak a folyamatot befolyásoló mechanikai

tényezők minőségi elemzésénél. Ebben **két**, egymásnak ellentmondó **teóriáról** számol be, az első a **gyors**, a második a **lassú áramlási viszonyokat** teszi felelőssé a folyamatban.

4.1.2.1. A GYORS ÁRAMLÁS HIPOTETIKUS HATÁSAI

Ebben az esetben a feltételezett hatásmechanizmus hátterében a megnövekedett **WSS és annak gyors térbeli és időbeli változása** áll, melynek hatására sérül az intima, és a media réteg roncsolódni kezd. Fry [1968] cikke alapján az endothelium roncsolódásához **40Pa**-nál nagyobb nyírófeszültség szükséges.

A folyamatot tovább erősíti a fali nyírófeszültség hatására az endothelsejtek által termelt megnövekedett nitrogén-monoxid mennyiség, ami a simaizomsejtek ellazulását váltja ki. Ezek eredményeképp az érfal kitágul.

4.1.2.2. A LASSÚ ÁRAMLÁS HIPOTETIKUS HATÁSAI

Ez az elmélet a lelassult áramlási viszonyok miatt kialakuló **pangó folyadék** részben felgyűlő sejtes véralakotók érfal roncsoló hatásával magyarázza a folyamatot. Ekkor ugyanis az összegyűlt hematociták az érfal **lokális gyulladását** okozzák, ami a fal roncsolódásához vezet, a meggyengült fal pedig a nyomás hatására kitágul.

4.1.3. A BIOLÓGIAI HATÁSOK FIGYELEMBEVÉTELE

A patogenezis folyamatát érintő kutatások legújabb irányzata az érfal biológiai változásait igyekszik leírni. Ez két folyamatot jelent, az egyik a természetes **növekedés**, a másik a mechanikai terhek hatására bekövetkező **szöveti adaptáció** (growth and remodelling). Ebben az irányban már a 2000-es évek elején intenzív kutatások kezdődtek, főleg hasi aorták tágulatainak vizsgálata alapján, lásd pl. Watton [2002] doktori értekezésében. Ezek a modellek matematikai módszerekkel igyekeznek előidézni a természetben megfigyelt jelenséget, több mesterséges paramétert bevezetve, ily módon még finomításra és igazolásra szorulnak. Most az első paciens-specifikus agyi aneurysma modellről szóló publikáció alapján (Watton et al. [2011]) mutatom be a módszer lényegét a gyakorlati részleteket mellőzve.

Az alapvető feltételezések szerint az **elasztin** tönkremenetelért az áramlástan tényezők felelősek, továbbá a **kollagén** rostok folyamatosan keletkeznek és bomlanak el, valamint a keletkező szálak a falhoz λ_{AT}^C kezdeti nyúlással rögzülnek, így tartva fenn a kollagén rostok homeosztázisát.

4.1.3.1. AZ ALAKVÁLTOZÁS-ENERGIA FÜGGVÉNY

Ezek a leírások is Holzapfel falmodelljén alapulnak. A biológiai változásokat az elasztinra és a kétirányú kollagén rostokra vonatkozóan térben és időben változó **normalizált koncentrációfüggvényekkel** $(m^E, m_{M+}^C, m_{M-}^C, m_{A+}^C, m_{A-}^C)$ vehetjük figyelembe, amelyek szorzóként megjelennek az alakváltozás-energia függvény egyes tagjainál. Az exponenciális tag argumentumában a kollagén megnyúlását ebben az esetben a rögzülés állapotához kell viszonyítani.

4.1.3.2. AZ ADAPTÁCIÓ FOLYAMATA

Az adaptáció folyamatát az elasztin bomlásának példáján keresztül mutatom be. A kollagén esetén hasonló egyenletek írhatók fel, azzal a különbséggel, hogy míg a most bemutatott példában az áramlástan tényezők vezérlik a folyamatot, addig a kollagén adaptációjánál a homeosztatis megnyúlásérték elérése veszi át ezt a szerepet.

Az aneurysma keletkezésének kiindulását az elasztin lokális gyengítésével érik el a modellben, ekkor annak mechanikai szerepét a termelődő kollagén fogja átvenni, és mivel a homeosztázis állapotában a kollagén rostok λ_{AT}^C megnyúlást fognak elszenvedni, kis kitüremkedést figyelhetünk meg az érfalon. Ennek következtében megváltozik a falra ható nyírófeszültségek eloszlása, innentől a folyamatot már ez a tényező „hajtja” a következő egyenlet szerint:

$$\frac{\partial m^E}{\partial t} = -F_D(\vartheta, z, t) \cdot D_{\max} \cdot m^E, \quad (6.83.)$$

Itt $0 \leq m^E \leq 1$ az elasztin normalizált koncentrációfüggvénye, $D_{\max} = 0,75$ a degradáció maximális éves mértéke, $0 \leq F_D \leq 1$ hemodinamikai mennyiségektől függő tényező, például:

$$F_D(\tau(\vartheta, z, t)) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \tau \geq \tau_{crit} \\ \left(\frac{\tau_{crit} - \tau}{\tau_{crit} - \tau_x} \right)^2, & \text{ha } \tau_x < \tau < \tau_{crit}, \\ 1, & \text{ha } \tau \leq \tau_x \end{cases} \quad (6.84.)$$

ahol $\tau_{crit} = 15$ Pa, $\tau_x = 0,5$ Pa. Ebből látható, hogy a modell az alacsony fali nyírófeszültségeket (< 15 Pa) teszi felelőssé az elasztin roncsolódásáért, melynek maximális értéke 0,5 Pa esetén áll elő. A modell gyengesége, hogy mesterségesen korlátozni kell a roncsolódni képes tartományt, ugyanis ennek hiányában a tágulat továbbterjedne a fal mentén.

4.2. RUPTÚRA

Az érzsák felhasadása akkor következik be, ha a meggyengült érfal nem képes tovább a véráramlásból rá háruló terheknek ellenállni. Ekkor általában a zsák csúcsa megreped, és egy nyomáshullámot produkálva a vér a környező szövetekbe jut. Ebben az esetben a **vérnyomás** jut meghatározó szerephez.

Több cikk foglalkozott a környező agyvíz és szövetek hatásával is. A liquor cerebrospinalis megtámasztja az aneurysmát, ugyanakkor korábbi elméleti kutatások arról számolnak be, hogy a héjszerű zsák a pulzáló teher és a környező folyadék hatására **dinamikus instabilitást** produkál. Akkas [1990] numerikus módszerrel támasztotta ezt alá, modelljében a gumik viselkedését leíró neo-Hooke-féle anyagmodellt alkalmazott. Ezt később tovább finomították, Humphrey és Cannham [2000] eredményei például kétségbe vonják Akkas feltevéseit. Ők szintén periodikus tehernek vetettek alá egy gömb alakú, a valóságot jobban közelítő hiperelasztikus anyagmodellű membránt, amelyet viszkózus folyadék vett körül.

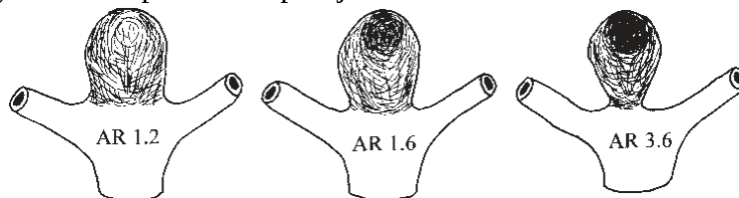
Az aneurysma **lokális feltámaszkodásai** a feszültségek koncentrálódásához vezethetnek, ami szintén tönkremenetelt okozhat.

4.2.1. A TÁGULAT VESZÉLYESSÉGÉNEK MEGÍTÉLÉSE

A **felhasadás veszélyességének** megítélése, mint azt a 2.3.4.2. pontban már bemutattam, a tágulat mérete és a beteg életkora, valamint előélete alapján történik. Ezt jelenlegi kutatások finomítani igyekeznek.

Az egyik módszer erre a **paciens-specifikus** modellek alkalmazása, amelyet a fejlett orvosi képalkotó eljárások tesznek lehetővé, és egyre inkább teret hódít. A Tartószerkezetek Mechanikája Tanszéken is ebben az irányban folynak fejlesztések. Sajnos rendkívüli számítási igénye miatt ez még nem válhatott hétköznapi klinikai gyakorlattá.

Egy másik irányzat a lehetséges **típusokat** igyekszik **kategorizálni** különböző szempontok szerint, és ezekre megállapításokat tenni. Ilyen például *Ma et al.* [2003] munkája, amelyben az agyi aneurysmákat **alakjuk szerint** félgömb ellipszoid és gömb kategóriákba sorolja. *Weir* [2003] statisztikai adatok alapján javaslatot tesz pusztán a méret vizsgálatát kiegészítve a **tágulat- és a nyakátmérő arányának** figyelembe vételére. Eszerint a nagy arányszám veszélyesebb a ruptúra szempontjából.



25. ábra - A növekvő tágulat-/nyakátmérő arány növekvő ruptúra veszéllyel párosul (*Weir* [2003]).

4.2.2. IN VITRO KÍSÉRLETEK¹

Liou és Liou [1999] in vitro kísérleteket végzett bifurkációknál lévő aneurysmákon, és azt tapasztalták, hogy aszimmetrikus kilépő ágak esetén a tágulat falára ható **WSS** az **elágazási szöggel arányosan növekszik**.

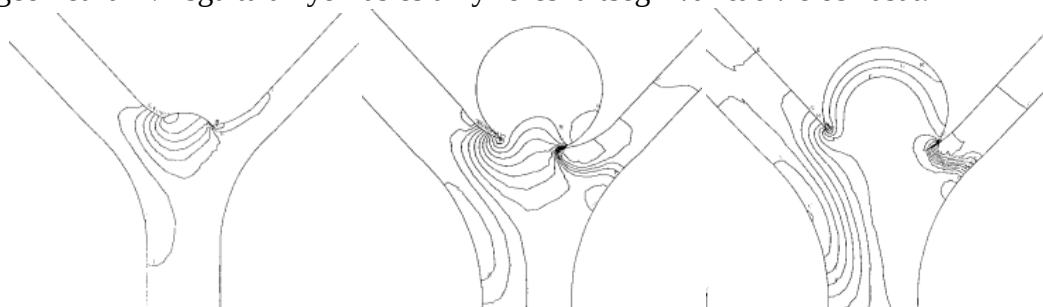
Imbesi és Kleber [2001] szintén in vitro modellen vizsgálta széles nyakkal rendelkező, az arteria basilarison kialakuló aneurysmák áramlási viszonyait **stent, illetve Guglielmi-spirál** (GDC) elhelyezése után.

Lieber et al. [2002] is in vitro kísérletekkel támasztották alá a GDC áramlásra gyakorolt **kedvező hatását**.

Tateshima et al. [2001] **valós CTA felvételek** alapján készített **műgyanta modelleket** vizsgált, és változó áramlástan formációkról számol be egy szívcikluson belül is, kifejezetten az aneurysma nyakánál.

4.2.3. MODELLTÍPUSOK

Fourtrakis et al. [1999] készített egy, a jelen dolgozatban bemutatotthoz hasonló kétdimenziós, merev falú modellt, amelyen a tágulat növekedésének három fázisában egy adott geometrián vizsgálta a nyomás és a nyírófeszültség **kvalitatív** eloszlását.



26. ábra - *Fourtrakis et al.* [1999] által vizsgált geometriák, és a kapott nyomáseloszlások.

Steinman et al. [2003] számítógéppel szimulálta valós **háromdimenziós felvételekből konstruált** nagy agyi aneurysmák áramlási viszonyait, és tartós tranziens örvénylest tapasztalt.

¹ Az **in vitro** latin kifejezés jelentése „üvegben”, ezzel szemben az **in vivo** annyit tesz, „az élőben”. A két kifejezés az orvosi kísérletek két alaptípusára utal. Míg utóbbit élő alanyon hajtják végre valós körülmények közt, addig az előbbi a testből kiszeparált, már élettelen szöveteken, esetleg modelleken hajtják végre.

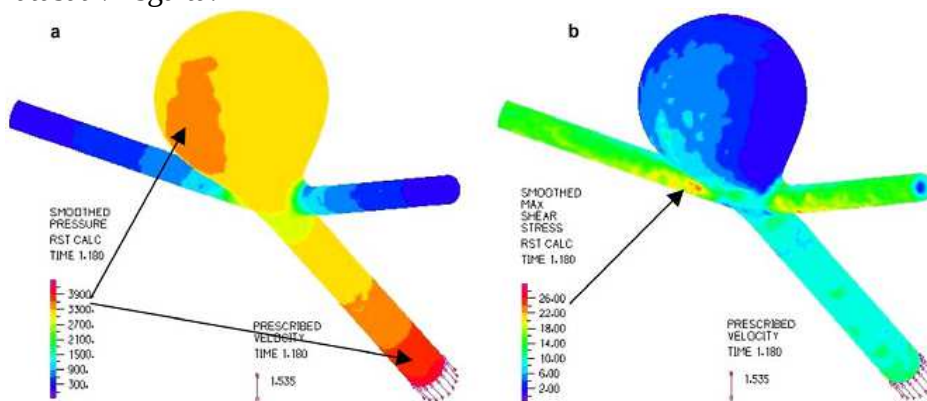
Cebral *et al* [2003] az orvosi képalkotó berendezésekkel összekapcsolt **páciens-specifikus** agyi aneurysma modellek mutatott be.

Bathe és Kamm [1999] már **szilárd falú** tranziens numerikus szimulációkat végzett hengerszimmetrikus érszűkület modelleken FSI technikát alkalmazva.

Finol *et al.* [2003] hasi aneurysmák falán fellépő nyírófeszültség-eloszlást hasonlítja össze merev és rugalmas fal esetén.

Low *et al.* [1993] hasonló elven elágazásmentes érszakasz oldalán lévő aneurysmát vizsgált, és arról számolt be, hogy a fal elmozdulása az ér átmérőjének 6%-a körül adódott.

Valencia *et al.* [2006] pedig már a falvastagság és az anyagmodell feszültségeloszlásra gyakorolt hatását vizsgálta.



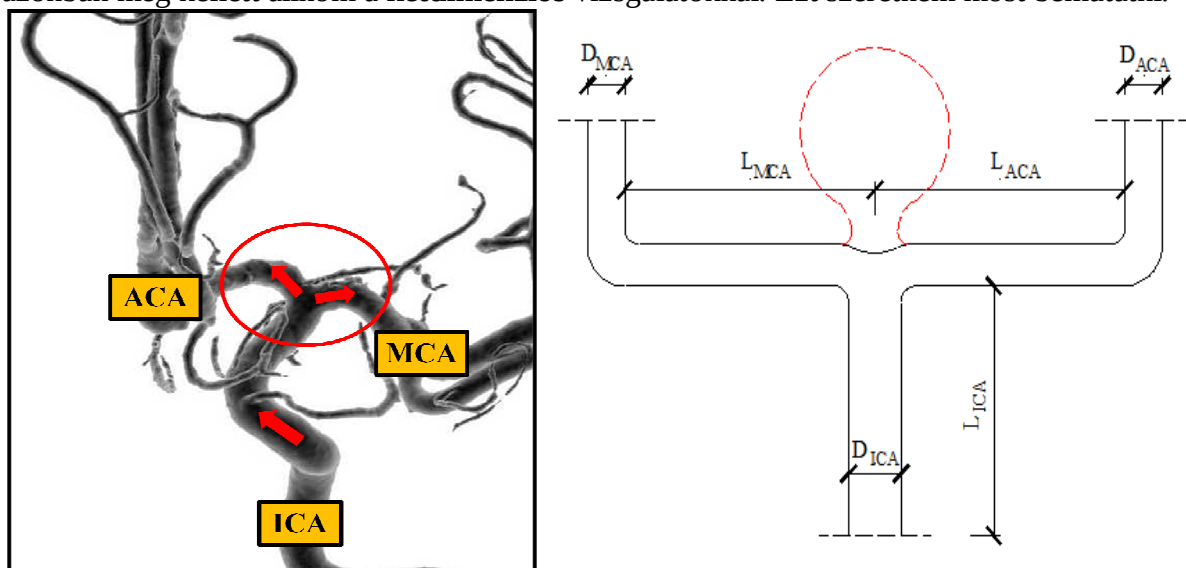
27. ábra - Valencia [2006] FSI modellje az arteria basilaris csúcsán kialakuló értágulatról.

Látható, hogy a vizsgálati **módszer kidolgozott**, és működőképes, azonban az eddigi eredmények mindegyike csupán **néhány esetet vizsgál**, és belőlük próbál következtetéseket levonni. Ezekből kiindulva én egyszerűbb modellekkel ugyan, de **nagyobb paramétertartományt** vizsgálva igyekszem az aneurysmák kialakulásához vezető tényezők kritikus tartományát megállapítani.

5. A SAJÁT MODELL BEMUTATÁSA

A dolgozat fő célja az agyi aneurysmák **kialakulásához** vezető **mechanikai tényezők** pontosabb megismerése, és azok **értékelése**. Mindezt egy speciális, tipikus aneurysma kialakulási hely, a **carotis bifurcatio** példáján keresztül teszem meg. Ebben az elágazásban a belső feji verőér (arteria carotis interna - **ICA**) a középső és elülső agyi verőérre (arteria cerebri media - **MCA** illetve arteria cerebri anterior - **ACA**) oszlik.

A patogenezis folyamata meglehetősen összetett, és még alapvető kérdései is megválaszolásra várnak, ezért, bár a lehetőségek adottak, a jelenleg egyre elterjedtebb, minden részletre kiterjedő páciens-specifikus modellezési módszer helyett egy szisztematikusan felépített, az **egyszerűbbtől a bonyolultabb felé** haladó kutatási eljárást választottunk. A két út a végén egymásba kell, hogy forrjon, jelen **dolgozat keretei közt** azonban meg kellett állnom a **kétdimenziós** vizsgálatoknál. Ezt szeretném most bemutatni.



28. ábra – Balra: Angiográfias felvétel egy egészséges carotis bifurcatoról az érszakaszok elnevezésével. (OITI)
Jobbra: Sematikus ábra az aneurysma kialakulási helyéről.

5.1. A MODELLEZÉS FÁZISAI

Az értágulatok kialakulásáért felelős mechanikai paraméterek a véráramlásból a falra átadódó **nyomás** (p) és **fali nyírófeszültség** (WSS) értékek, azt azonban, hogy ezeknek pontosan milyen értékeik tekinthetők kritikusnak, jelenlegi tudásunk szerint nem vagyunk képesek megadni. A dolgozatban ezek **eloszlását** vizsgálom **térben és időben** egyaránt. A későbbiekben ennek a már rendelkezésre álló információnak a birtokában, egyre több hatást figyelembe vevő modellen vizsgálva, reményeink szerint közelebb juthatunk a jelenség pontosabb megértéséhez.

A **geometriai adatgyűjtés** után első lépésként tehát csak az aneurysmák kialakulási helyén a falra háruló feszültségértékek eloszlásának **kvalitatív jellemzése** volt a cél. Ennek érdekében egy, a legegyszerűbb peremfeltételekkel rendelkező, merev falú, szimmetrikus T-elágazásban kialakuló stacioner áramlás megoldását végeztem el először.

Ezt követően az elágazás **rendszer szintű jellemzésével** foglalkoztam. Itt az előző modell méreteinek paraméterezésével a geometria függvényében megkereshető egy ideális alak, ahol a rendszer ellenállását jelentő statikus nyomáscsökkenés és a szív teljesítményét

felemésztő, a sűrűlódás miatt elnyelt teljesítmény minimumot mutat. Itt érdekes megfigyeléseket tehetünk a természetben kialakuló formációkra.

Ezután rátérünk a **lokális jellemzők** modellezésére. Az elágazásban uralkodó nyomást a követő érszakaszok ellenállása határozza meg, ezért elengedhetetlen a peremfeltételek pontosítása, így az elhagyott részek figyelembevétele egy kétparaméteres lineáris impulzusforrás segítségével történt. Még mindig ragaszkodunk a stacioner áramláshoz és a merev falú geometriához. A peremfeltételek kalibrálását a szívcikluson belül jelentkező maximális nyomás- és sebességérték szerint végeztem el. Ekkor pontosabb képet kapunk a kiválasztott jellemzők **térbeli eloszlásáról**.

Az **időbeli változás** követéséhez a peremfeltételeket kell időfüggővé tenni. Esetünkben ez a belépő peremre korlátozódik, ahol a szívciklusnak megfelelő időfüggő térfogatáramot írtunk elő.

Végül a **fal rugalmasságának** az előzőekben nyert értékekre gyakorolt hatását vizsgáltam stacioner esetben, itt már az FSI technikát alkalmazva.

5.2. A MODELL FELTÉTELEZÉSEI

A modellkészítés során a vizsgálat felépítéséből kifolyólag több dolgot egyszerűsítve és idealizálva veszünk csak figyelembe. Ezeket sorolom most fel három csoportra bontva.

5.2.1. FIZIKAI FELTÉTELEK

A vér a 0,5mm-nél nagyobb átmérőjű artériákban **összenyomhatatlan newtoni folyadékként** modellezhető. Az áramlás a tapasztalatokkal összhangban **lamináris**. A folyamat **állandó hőmérsékleten** zajlik.

A testhelyzettől függő **nehézségi** erő, valamint a fej mozgásállapot-változásának hatásaira ébredő **tehetetlenségi erők** hatásaitól **eltekintünk**.

Az **érfal** anyaga **homogén, izotrop** és a lineárisan rugalmas **Hooke-modell** szerint viselkedik. Az érfal vizsgálat síkjára merőleges görbületét a vékony hengerhéjra ható terhek és a héj normál irányú megnyúlásai közti egyértelmű, lineáris kapcsolatot kihasználva, **rugalmas ágyazás** segítségével modellezzük, melynek részletei a rugalmas falú modell leírásánál találhatók.

A zárt tér és a környező szövetek hatását **állandó külső nyomással** vesszük figyelembe.

A **belépő peremen** egy időben a szívciklusnak megfelelő **térfogatáramot** adunk meg Fourier sorának első három tagja segítségével. A térbeli eloszlást a merev falú csövekben stacioner áramlás hatására kialakuló **parabola profil** szerint vettük fel tranziens, rugalmas fal esetében is, azonban elég távol a vizsgált ponttól, hogy számottevő lokális hatása ne legyen.

A **kilépő peremen** a követő érszakaszok ellenállásának modellezésére egy **lineáris impulzusforrást** (porózus szűrőt) helyeztünk el, melynek végén a nyomást időben állandónak tételeztük fel, a kapillárisok végén uralkodó **állandó nyomás** elvének adaptálásával. Ezen a **nyomásértéken**, és a szűrő ellenállásán keresztül beállíthatjuk a nyomáspulzáció tartományát a tranziens áramlás maximális és minimális nyomásértékének **kalibrálásával**.

5.2.2. GEOMETRIAI FELTÉTELEK

A **kétdimenziós vizsgálat** lehetőségét az indokolja, hogy a három vizsgált érszakasz adott tartományon belül jó közelítéssel egy síkba esik. Ez a kijelentés a következő pontban, a geometriai adatbázisban összefoglalt, mért szögértékek összegei alapján tehető, ugyanis ez az érték jó közelítéssel a síkbeli teljes szög (360°) közelébe esik. Ezzel az egyszerűsítéssel a

másodlagos áramlási formációkat elveszítjük, ugyanakkor egyszerűbb az eredményeket feldolgozni, és belőlük következtetéseket levonni. Mindamellet végig szem előtt kell tartanunk, hogy ez a valós effektusok jelentős csonkítását okozza, amelyeket részben modell-eszközökkel korrigálhatunk ugyan (pl. az érfal görbülete figyelembe vehető), de azok pontossága és érvényességi köre csak a későbbi háromdimenziós modellekkel összevetve adható meg.

Az **érszakaszok** görbültségétől, **kanyarulatainak** modellezésétől szintén eltekintünk. Ennek ismét a másodlagos áramlási formációkra lenne hatása.

5.2.3. BIOLÓGIAI FELTÉTELEZÉSEK

Egyelőre a biológiai folyamatok implementálásával nem foglalkozunk. Nem vesszük figyelembe az aktív **vazomotoros reakciókat**, sem ezt ugyanis az anyagmodellen keresztül tehetnénk meg, de ezen a szinten egyelőre csak a lineárisan rugalmas modellig jutunk el. Ugyanígy elhanyagoljuk a **fal rétegzettségének** és az alkotó kollagén **szálak irányítottságának** hatását is.

Nem foglalkozunk továbbá a **fal degradációjával**, az **anyagtulajdonságokban mutatkozó lokális különbségekkel** sem. Ezek mind egy **leendő PhD téma** kutatási irányzatait képezik.

5.3. A GEOMETRIAI ADATBÁZIS

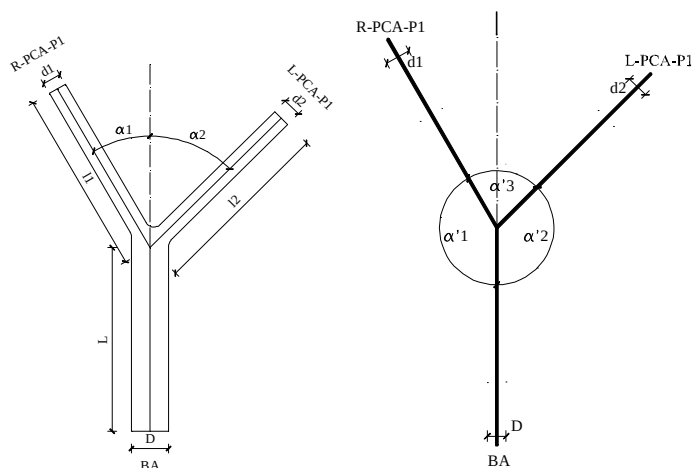
5.3.1. MÉRT ADATOK

Az *Országos Idegtudományi Intézetben* (OITI) lehetőségem nyílt valós, háromdimenziós angiográfiás CT felvételek alapján egészséges **carotis bifurcatiók** (10 db) és **basilaris bifurcatiók** (7db) geometriájának felmérésére.

A két geometria hasonló, azonban a basilaris elágazásánál általában két másik kilépő ér is indul a főágból, ami az áramlást jelentősen megváltoztathatja, éppen ezért ezt most nem vizsgáltam, a teljesség kedvéért azonban ezek értékeit is megadtam.

A felvételt készítő eszköz képfeldolgozó szoftvere lehetőséget biztosított a képek háromdimenziós elemzésére, így átmérőket és elágazási szög értékeket tudtam mérni. Ezek becsült leolvasási pontossága 0,1 mm, illetve 5° nagyságrendű.

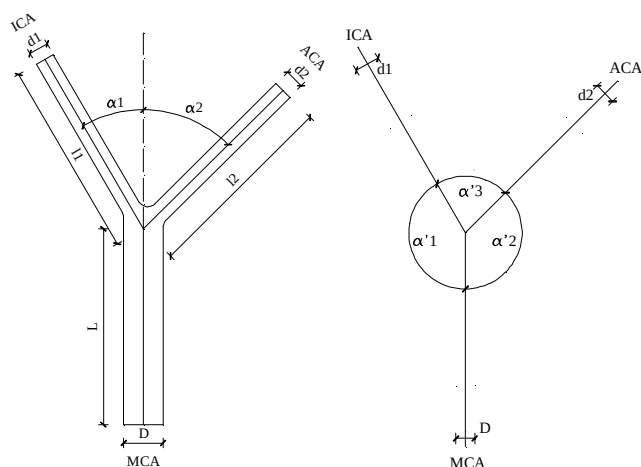
A képek a Függelék 0 fejezetében láthatók. A mért eredményeket az alábbi összefoglaló táblázatok tartalmazzák:



29. ábra - Az arteria basilaris elágazása a méretek elnevezéseivel.

	D	d ₁	d ₂	d ₁ /D	d ₂ /D	d _i /d _j	α' ₁	α' ₂	α' ₃	Σα	α ₁	α ₂
	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[-]	[-]	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]
1	2,6	1,6	1,7	0,615	0,654	1,063	85	132	143	360	95	37
2	2,1	1,7	2,1	0,810	1,000	1,235	126	113	97	336	54	83
3	3,1	2	2,4	0,645	0,774	1,200	141	125	67	332	40	114
4	2,3	2	1,7	0,870	0,739	1,176	139	124	96	359	41	84
5	2,2	1,3	1,4	0,591	0,636	1,077	125	124	108	358	55	72
6	2,9	2,8	2,5	0,966	0,862	1,120	115	149	90	354	65	90
7	1,8	1,4	1,5	0,778	0,833	1,071	79	126	148	353	101	32
min.	1,8	1,3	1,4	0,591	0,636	1,063	79	113	67	332	40	32
max.	3,1	2,8	2,5	0,966	1,000	1,235	141	149	148	360	101	114
átl.	2,4	1,8	1,9	0,753	0,786	1,135	116	128	107	350	64	73

3. táblázat - A basilaris bifurcatio geometriájának összefoglalása.



30. ábra - Az arteria carotis media elágazása a méretek elnevezéseivel.

	D	d ₁	d ₂	d ₁ /D	d ₂ /D	d _i /d _j	α' ₁	α' ₂	α' ₃	Σα	α ₁	α ₂
	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[-]	[-]	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]
1	3,3	2,4	2,0	0,727	0,606	1,200	93	134	129	356	87	46
2	2,8	2,0	1,6	0,714	0,571	1,250	148	102	109	359	33	78
3	3,3	2,5	2,4	0,758	0,727	1,042	114	75	115	305	66	105
4	2,1	1,6	1,5	0,762	0,714	1,067	150	114	100	365	30	66
5	4,3	2,9	2,4	0,674	0,558	1,208	142	85	111	337	38	95
6	3,0	2,0	2,0	0,667	0,667	1,000	135	93	113	341	45	87
7	2,5	2,2	1,5	0,880	0,600	1,467	154	77	129	361	26	103
8	3,5	2,3	2,4	0,657	0,686	1,043	128	87	112	327	52	93
9	3,3	2,3	2,1	0,697	0,636	1,095	139	103	109	351	41	77
10	2,9	2,4	2,4	0,828	0,828	1,000	131	96	132	359	49	84
min.	2,1	1,6	1,5	0,657	0,558	1,000	93	75	100	305	26	46
max.	4,3	2,9	2,4	0,880	0,828	1,467	154	134	132	365	87	105
átl.	3,1	2,3	2,0	0,736	0,659	1,137	133	97	116	346	47	83

4. táblázat - A carotis bifurcatio geometriájának összefoglalása.

A mért értékek sárga, a továbbiakban felhasznált értékek zöld kiemelést kaptak. Az arteria carotis media elágazásánál ebből az adatsorból leolvasható, hogy a kilépő és a belépő ágak átmérőjének aránya **0,55 és 0,85 között** változik **0,74 és 0,66 átlagértékkel** az ICA, illetve az ACA esetében, a két kilépő ág átmérőjének egymáshoz viszonyított aránya **1 és 1,5 közötti, 1,14-es átlagérték** mellett. A kilépő és a belépő keresztmetszeti **területek aránya** átlagosan **0,99-re** adódik. A kilépési szögek **25° és 105° közt** változtak, **átlagosan** az ICA-ra

50°, az ACA-ra pedig 85° adódott. Összefoglalva a **carotis bifurcationra** vonatkozó értékeket, és kiegészítve ezeket az érszakaszok hosszával:

	Átmérő		Hossz		Elágazási szög	
	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$l_{\min}$	$l_{\max}$	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[°]	[°]
ICA	2,1	4,3	11,5	13,5	26	87
MCA	1,6	2,9	19	20	46	105
ACA	1,5	2,4	15,5	17,5		

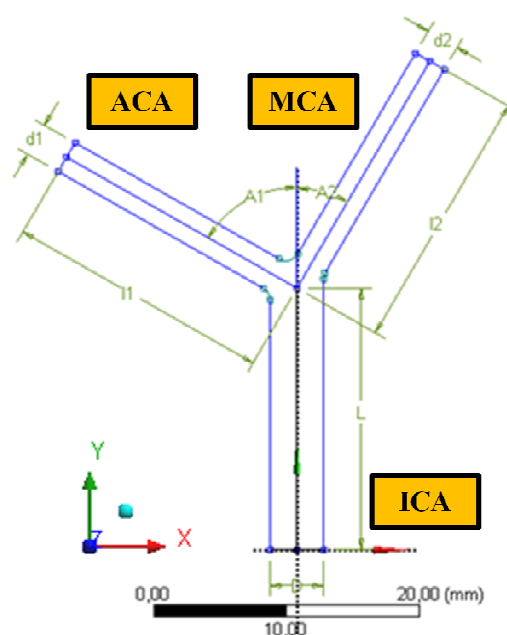
5. táblázat - A carotis bifurcatio geometriai paramétereinek összefoglalása.

5.4. A VIZSGÁLATI GEOMETRIA

A számításokat egy síkbeli elágazásmodellen végzem el, ahol rögzített mind a főág ($L=20$ mm), mind a mellékágak hossza ($l_1=20$ mm, $l_2=20$ mm), valamint a főág átmérője ($D=4$ mm).

A kilépő ágak átmérői (d_1 , d_2) és az elágazási szögek (A_1 , A_2) egymástól függetlenül változtathatók. Az élek csatlakozásainál a szingularitások elkerülése végett 1 mm sugarú lekerekítést készítettem.

Az alábbi ábrán látható a modell geometriája a paraméterek elnevezésével.



31. ábra - A számítások során használt geometria a paraméterek elnevezéseinek feltüntetésével.

5.5. A PARAMÉTER TARTOMÁNY

Ebben a pontban rátérek a modell geometriai és fizikai paraméterterének bemutatására. Szakorvosokkal konzultálva a paraméterteret az alábbiak szerint vettük fel: a **szögek** oldalanként 15°-90°-ig változnak 15°-ként, valamint a **kilépő átmérők** a belépő ág átmérőjének 50%-ától 90%-áig változnak 5%-ként. A **belépő sebességprofil** 0,667m/s átlagsebesség értékkel és rögzített időbeli profillal nem változik, azonban a **nyomás értékek** három tipikus eloszlását megvizsgáltuk. Ezek a normális 80/120 Hgmm (10,7/16,0 kPa), a magas 90/140 Hgmm (12,0/18,7 kPa), és a kritikusnak mondható 100/180 Hgmm (13,3/24,1 kPa) systolés és diastolés nyomásértékekkel jellemezhetők. A következő táblázat ezeket az értékeket foglalja össze.

Vizsgálandó paraméterek	Tartomány		Felosztás		
	Min	Max	Δ	n	Σn
Hajlásszög [°]	15	90	15	6 ²	6912
Kilépő/belépő átmérőarány [-]	0,55	0,9	0,05	8 ²	
Nyomás [Pa]	Systole	120	180	20	
	Diastole	80	100	10	

6. táblázat - A paraméterter felosztása.

Mint az a táblázatból is látszik, a paraméterter rendkívül nagy, modellenként 6912 db futtatást igényelne.

Ennek elkerülése érdekében minden modelltípus két fő fázisra tagolódik. Az elsőben az y-tengelyre **szimmetrikus** geometriát vizsgálom, a másodikban pedig már **aszimmetrikus** elrendezést, amit szintén két részre osztok. Először az aszimmetria a kilépő ágak **szögeiben**, majd az ágak **átmérőjében** jelentkezik. Így a futtatások száma 1152-re csökken.

$$\underbrace{3}_{\text{nyomás}} \cdot \left\{ \left[\underbrace{(7 \cdot 3)}_{\text{szög}} \cdot \underbrace{8}_{\text{átmérő szimm.}} \right] + \left[\underbrace{(9 \cdot 4)}_{\text{átmérő}} \cdot \underbrace{6}_{\text{szög szimm.}} \right] \right\} = 1152 \quad (5.1.)$$

Így bár nem fedjük le a teljes paraméterteret, a következtetések lehetőségének számát nem csökkentjük jelentősen, az 5 dimenziós (2 szög x 2 átmérő x 1 nyomás) paraméterterben két 4 dimenziós hiperfelületet állíthatunk elő.

5.6. A MODELL EGYENLETEI

Újra összefoglalom a modell egyenleteit az általam vizsgált legáltalánosabb, rugalmas falú, instacioner rendszerbeli newtoni folyadék lamináris áramlása esetén. A peremfeltételeket a modellek részletes bemutatásánál adom meg.

A differenciálegyenlet-rendszert blokk-iterációs technikával, numerikus úton oldjuk meg. Ennek két elkülöníthető alrendszere az áramlási tér transzportegyenleteiből és a szilárd rész egyensúlyi egyenleteiből áll.

5.6.1. AZ ÁRAMLÁSI TÉR

Adott a kétdimenziós áramlási tér $\Omega^f \subset \mathbb{R}^2$; ennek két diszjunkt halmaz uniójaként előálló határa $\partial_1 \Omega^f \cup \partial_2 \Omega^f = \partial \Omega^f$, ahol $\partial_1 \Omega^f \cap \partial_2 \Omega^f = \emptyset$; valamint a vizsgálati időtartam $T = [0, t_{fin}] \subset \mathbb{R}$. Keressük az $u_i(x_i, t): \Omega^f \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$ sebességmezőt, és a $p(x_i, t): \Omega^f \times T \rightarrow \mathbb{R}$ nyomásmezőt, amelyek eleget tesznek a kontinuitás egyenletének:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.2.)$$

és a lendülettranszport egyenletének:

$$\rho^f \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu^f \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (5.3.)$$

továbbá kielégítik az elmozdulásokra vonatkozó lényeges peremfeltételeket:

$$u_i = \hat{u}_i \text{ a } \partial_1 \Omega^f \text{ peremen,} \quad (5.4.)$$

és a feszültségekre vonatkozó természetes peremfeltételeket:

$$n_i \cdot \left[-p \cdot \delta_{ij} + \mu^f \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \hat{f}_j \text{ a } \partial_2 \Omega^f \text{ peremen.} \quad (5.5.)$$

A fenti egyenletekben x_i a hely-, t az időkoordináta, u_i a sebességvektor; p a nyomás, n_i a határfelület adott pontbeli normálisa, $\hat{f}_j$ a normális irányába eső feszültségkomponens szintén a határfelületen. ρ^f a folyadék sűrűsége, μ^f a dinamikus viszkozitása.

5.6.2. A SZILÁRD TEST

Adott az áramlási tér határát képező két dimenzióba ágyazott szilárd test $\Omega^s \subset \mathbb{R}^2$; ennek szintén két diszjunkt halmaz uniójaként előáll pereme $\partial_1 \Omega^s \cup \partial_2 \Omega^s = \partial \Omega^s$, ahol $\partial_1 \Omega^s \cap \partial_2 \Omega^s = \emptyset$; valamint a vizsgálati időtartam $T = [0, t_{fin}] \subset \mathbb{R}$. Keressük a $d_i(x_i, t): \Omega^s \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$ elmozdulás-mezőt, amely eleget tesz a d'Alambert elv egyensúlyi egyenletének:

$$\rho^s \cdot \left(\frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} - f_i^s \right) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (5.6.)$$

továbbá kielégíti a peremfeltételeket:

$$d_i = \hat{d}_i, \quad (5.7.)$$

$$n_i \cdot \sigma_{ij} = \hat{f}_j, \quad (5.8.)$$

A fenti egyenletekben a σ_{ij} feszültség-tenzort a deformáció-tenzorból az izotrop, lineáris Hooke-modell segítségével kapjuk:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad (5.9.)$$

$$D_{ijkl} = \lambda^s \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^s (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}). \quad (5.10.)$$

Itt a λ^s és μ^s anyagjellemzők az első és a második Lámé-állandók, az első a térfogatváltozást, a második a nyírást veszi figyelembe.

A deformáció-tenzort a kis elmozdulások elve alapján kifejezhetjük a következő alakban:

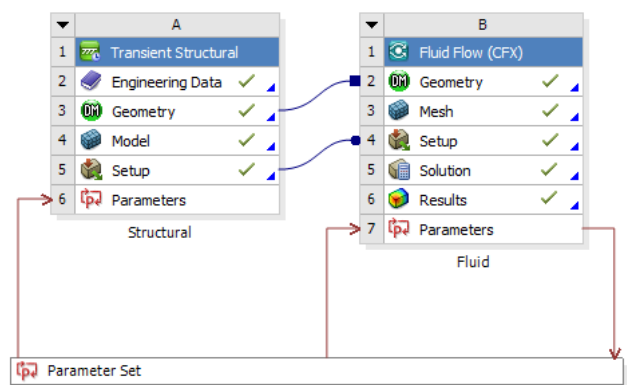
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.11.)$$

Továbbra is x_i a hely-, t az időkoordináta, n_i a határfelület adott pontbeli normálisa, $\hat{f}_j$ a normális irányába eső feszültségkomponens szintén a határfelületen. ρ^s a test sűrűsége, d_i az elmozdulás vektor.

5.7. A NUMERIKUS MEGOLDÁS

5.7.1. A PROGRAMKÖRNYEZET

A numerikus megoldáshoz az ANSYS 13 programcsomagot alkalmaztam. A modult az ANSYS Workbench keretprogramban készítettem el, ez képes kezelni a kétirányú (erős kapcsolású) FSI számítást. Az áramlási tér megoldására a véges térfogatok módszerén alapuló ANSYS CFX programot, míg a szilárdságtani számításához a végelelemes módszert alkalmazó ANSYS Mechanical APDL programot használtam.



32. ábra - A tranziens FSI számítást végző ANSYS Workbench modul.

A futtatást a CFX modul vezérli. Három fő egységből: a preprocesszor, a solver és a posztprocesszor egységekből tevődik össze.

5.7.1.1. PREPROCESSZOR

A preprocesszor négy további alegységre tagolódik. Az első a **Design Modeler**, ez lehetővé teszi a vizsgálati tartomány geometriájának paraméteres megadását.

A második modul – a **Mesher** – a háló készítését hivatott menedzselni. Ezekben közösen kezelhető a folyadék és a szilárd vizsgálati tartomány. Ezzel definiáltuk és véges térfogatokra illetve véges elemekre osztottuk az értelmezési tartományunk térbeli alterét.

Ezt követően a rendszert leíró egyenletek, fizikai jellemzők és a peremfeltételek megadása, valamint az idő dimenzió diszkretizálása, és a numerikus technika definiálása következik. Ezt a lépést már két modul kezeli, mivel eltérő numerikus technikát választottunk a megoldáshoz. Az áramlási teret a **CFX-Pre**, a szilárd tartományt az **ANSYS Mechanical APDL preprocesszora** kezeli.

5.7.1.2. SOLVER

A számítás a kezdeti értékek megadása után a **CFX solver** moduljával indul, annak konvergenciája után a terhek átadódnak a szilárd részre, ahol a **Mechanical APDL processzora** meghatározza az egyensúlyi egyenleteket kielégítő elmozdulásokat, majd azokkal az áramlási tér és egyben a háló geometriáját adaptálja, valamint elmozdulási peremfeltételeket átadja a folyadékra. Ez a ciklus egy időlépésen belül ismétlődik a globális egyensúlyt jelentő konvergenciahatár eléréséig.

5.7.1.3. POSZTPROCESSZOR

A két megoldó modul eredményeit időlépésenként külön fájlokban tároljuk, és a **CFX-Post** program segítségével elemezhetjük. Mivel a vizsgálatok több különálló futtatást igényeltek, az így kapott eredmények automatikus feldolgozását egy **Pearl** nyelven írt Workbench script, és a CFX belső **CCL** nyelvén írt utasítássorozat segítségével exportálva, **Matlab** programmal dolgoztam fel.

5.7.2. A NUMERIKUS TECHNIKA PARAMÉTEREI

5.7.2.1. AZ ÁRAMLÁSI TÉR

PEREMFELTÉTELEK

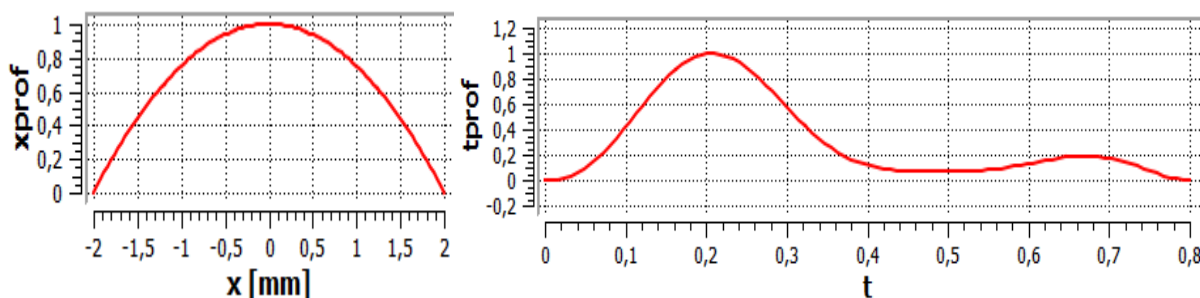
Az ANSYS CFX nem képes a **kétdimenziós geometriát** kezelni, így valójában egy háromdimenziós teret kell előállítanunk úgy, hogy a sík geometriát kismértékben (esetünkben 0,1 mm-t) kihúzzuk a síkra merőlegesen, és ebbe az irányba prizmatikus cellákat hozunk létre egy elem vastagságban. Az így kapott test mindkét oldalán úgynevezett **szimmetria peremfeltételt** kell megadnunk. Ez azt jelenti, hogy a mezőváltozóknak a szimmetriafelületre merőleges irányú deriváltja zérus, vagyis valóban síkáramlást kapunk. A felosztás során ezek alapján négyszög és háromszög alapú hasáb alakú elemi cellákat hozunk létre.

Szimmetrikus geometria esetén csak a modell felét alkalmazzuk, és a szimmetriasíkon az előzővel megegyező szimmetria peremfeltételt írunk elő.

A **belépő peremfeltétel** egy időfüggő térfogatáram, amit egy háromtagú Fourier-sorral adunk meg. Az érelágazódás az ICA-n, egy vastag artérián található, amely a szívhez viszonylag közel helyezkedik el, így a muszkuláris artériák kezdeti szakaszához sorolható. A hozzá eljutó nyomáshullám a megelőző szakaszok amplitúdó csökkentő hatására már modulálva érkezik. Itt az időfüggő keresztmetszeti sebességprofilt non-invazív mérésekkel képesek vagyunk meghatározni. Erre a Doppler-sebességmérő műszer alkalmas, amely

ultrahangot kibocsátva, az eredeti és az áramló vér testes elemeiről visszaverődő hullám frekvenciakülönbsége alapján lehetővé teszi a testes elemek, és ezáltal a vér sebességének meghatározását. Merev falú csőben, stacioner esetben az analitikus Poiseuille-megoldás parabolikus sebesség eloszlást ad, azonban (szintén merev fal esetén, de már tranziens áramlást vizsgálva) Womersley [1955] megoldásából adódó róla elnevezett, időben változó profil adja a pontos megoldást. Jelen munkában a könnyebben implementálható parabolikus profilt írtuk elő, és elegendő hosszú belépő árat hagytunk, hogy e közelítés hatása ne legyen számottevő a feszültségek csúcsértékeiben. Megjegyzem, hogy külön tanulmány erre a hossz-értékre nem készült.

$$u_i(x_i, t) = u_{\max} \cdot A_1(x_1) \cdot A_2(t). \quad (5.12.)$$



33. ábra – A belépő peremen előírt sebességprofil szorzófüggvényei.

Bal oldalt az $A_1(x_1)$ térbeli, jobb oldalt az $A_2(t)$ időbeli függvény komponens grafikonja látható.

A követő érszakaszok egyike, az MCA, az agyat ellátó fő artériák közé tartozik, míg a másik ág, az ACA, a redundanciát biztosító Willis-gyűrű egyik alkotó ága. Az általuk képviselt eltérő perifériás ellenállásról mért adat jelenleg nem áll rendelkezésünkre, így ezeket egy-egy lineáris impulzusforrással, porózus zónával modellezzük, és paramétereit az elágazásban megfigyelt systolés és diastolés nyomásértékek segítségével kalibráltuk, amelyek **kilépő peremén** állandó nyomást írtunk elő. A kilépő perem elég távol van a zavart zónától, hogy ott már a csőáramlás újra teljesen kifejlődjön, így a robosztussága miatt ezt is előírtuk a peremen, vagyis a sebesség gradiense merőleges a peremre¹.

Megjegyezzük még, hogy a **fal** mindenhol csúszásmentes.

A FOLYADÉK ÉS AZ ÁRAMLÁS TULAJDONSÁGAI

A **folyadék** összenyomhatatlan, newtoni, áramlása lamináris. Sűrűsége $\rho^f = 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, dinamikus viszkozitása $\mu^f = 0,003 \text{Pa} \cdot \text{s}$. Hőmérsékleti hatások nincsenek, a gravitációs és a tehetetlenségi erőket elhanyagoljuk. Az előírt térfogatáram alapján a maximális átlagsebesség 0,67 m/s, így a folyadékon belül a tehetetlenségi és a viszkozus erők arányát kifejező Reynolds-szám:

$$\text{Re} = \frac{\rho^f \cdot u \cdot D_{\text{MCA}}}{\mu^f} = \frac{1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,004 \text{m}}{0,003 \text{Pa} \cdot \text{s}} = 938, \quad (5.13.)$$

tehát az áramlás valóban laminárisként kezelhető. A tranziens tehetetlenségi erők és a viszkozus erők arányát kifejező, a periodikus áramlásokra jellemző Womersley-szám:

$$\text{Wo} = D_{\text{MCA}} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \rho^f}{T_{\text{pulse}} \cdot \mu^f} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,004 \text{m} \left(\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{0,8 \text{s} \cdot 0,003 \text{Pa} \cdot \text{s}} \right)^{\frac{1}{2}} = 6,63. \quad (5.14.)$$

¹ A CFX-ben ez az *Opening* peremfeltétel *Entrainment* opciójának *Static pressure* előírását jelenti.

Ez az érték a modell szempontjából azt fejezi ki, hogy számolnunk kell a sebesség nyomáshoz képesti fáziskésésével. Megemlítek még egy dimenziótlan számot, amely a háromdimenziós, görbült csőszakaszokban áramló folyadékokat jellemzi.

$$De = Re \left(\frac{D_{MCA}}{2 \cdot R_{curv}} \right)^{\frac{1}{2}} = 938 \left(\frac{4\text{mm}}{2 \cdot 3\text{mm}} \right)^{\frac{1}{2}} = 1083. \quad (5.15.)$$

Ez az érték éppen azon a határon van, ahol a másodlagos áramlási kép még stabil, modellezhető két keresztmetszeten belüli örvényléssel. Most azonban ettől is eltekintünk a kétdimenziós kezelésmód miatt.

A SZÁMÍTÁSI MÓDSZER

Minden parciális differenciálegyenletet a **High Resolution Advection Scheme** alkalmazásával oldunk meg.

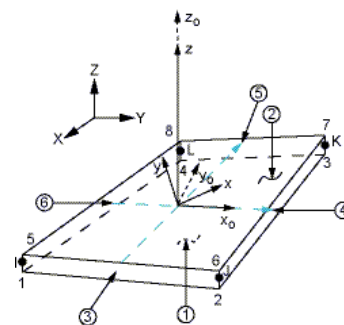
A megoldás során a **nyomás- és a sebességértékeket** - eltérve a szegregált megoldási technikáktól - ugyanazon kontrolltérfogaton értelmezzük, egy iterációs cikluson belül **közös megoldási technikát** alkalmazva a lamináris áramlások esetén elfogadható negyedrendű **Rhie-Chow interpolációs** algoritmus segítségével.

Az időbeli sémák közül a **másodrendű Backward Euler** implicit módszert alkalmaztuk.

5.7.2.2. A SZILÁRD RÉSZ

Az áramlási tér háromdimenziós volta miatt itt sem dolgozhatunk vonalelemekkel, ezért négy csomópontú **SHELL181**-es elemeket alkalmazunk. Az elem interpolációs függvényei lineárisak, a csomópontok szabadságfoka 6 (három eltolódás és három elfordulás).

34. ábra - SHELL 181 elem (ANSYS Mechanical APDL).



5.7.2.3. AZ IDŐLÉPÉSEK

A tranziens jelenség leírásához az idő-dimenziót is diszkrétizálnunk kell. A folyamatot **két szív cikluson** keresztül ($2 \cdot 0,8s = 1,6s$) vizsgálom, az eredményekhez azonban csak a már stabilizálódott második ciklust használok fel. A teljes időtartamot **60 egyenlő részre** osztottam fel.

6. NUMERIKUS VIZSGÁLATOK

Ebben a részben az általam elvégzett vizsgálatok részletes leírása található. A folyamatot az 5.1. fejezetben leírtaknak megfelelően mutatom be, először azonban szükséges néhány szót ejteni a háló megválasztásáról, így optimális megoldást találhatunk, amellyel elérhetjük a megkívánt pontosságot a számítási igény még elfogadható szinten tartásával.

6.1. VERIFIKÁCIÓ

Zárt, analitikus megoldás még a legegyszerűbb, merev falú elágazásban kialakuló stacioner áramlás esetére sem ismert. Így az **eljárás megfelelőségének igazolására**, és a kezdeti hálóméret megválasztására egy egyszerű, **merev síklapok közt kialakuló stacioner**

áramlás esetére összehasonlítom az analitikus és a numerikus megoldás által szolgáltatott eredményeket.

6.1.1. ANALITIKUS MEGOLDÁS

A síklapokra merőleges, kétdimenziós áramlási tér két végkeresztmetszete közt állandó nyomáskülönbséget (Δp) tartunk fenn. Ennek hatására lamináris stacioner áramlás áll elő.

A lamináris áramlás feltételéből következik, hogy a sebességnek csak tengely irányú komponense lesz, ami csupán x_2 -irányban változhat.

$$u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0. \quad (6.1.)$$

Így a kontinuitás egyenlete automatikusan teljesül:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}_{\text{2. feltétel miatt}} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}}_{\text{1. feltétel miatt}} = 0 \quad (6.2.)$$

A Navier-Stokes-egyenleteket kifejtve az x_1 -irányú lendülettranszport egyenlete:

$$\rho^f \left(\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial t}}_0 + u_1 \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}_0 + u_2 \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}_0 \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu^f \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}_0 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right), \quad (6.3.)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu^f \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}. \quad (6.4.)$$

Az x_2 -irányú lendülettranszport egyenlete:

$$\rho^f \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu^f \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right). \quad (6.5.)$$

Ebből minden u_2 -t tartalmazó tag kiesik, így:

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \quad (6.6.)$$

A (6.6). egyenletből látható, hogy a nyomás a keresztmetszeten belül állandó. Ennek és a (6.1./b) egyenlet következményeképp a (6.4.) egyenletben a parciális deriváltak teljes deriváltakat jelentenek.

$$p = p(x_1), \quad u_1 = u_1(x_2). \quad (6.7.)$$

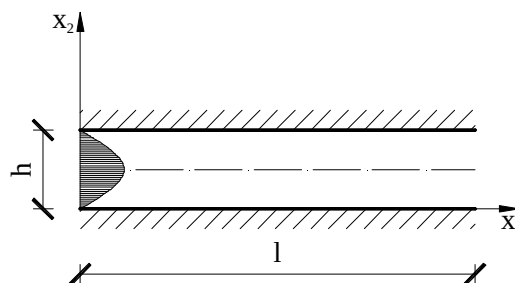
Így a (6.4.) egyenlet csak úgy teljesülhet, ha mindkét oldal konstans, vagyis a nyomás az x_1 koordináta lineáris függvénye, a tengely irányú sebesség pedig az x_2 koordináta másodfokú függvénye:

$$p(x_1) = a_p \cdot x_1 + b_p, \quad (6.8.)$$

$$u_1(x_2) = a_{u_1} \cdot x_2^2 + b_{u_1} \cdot x_2 + c_{u_1}. \quad (6.9.)$$

A peremfeltételeket ($u_1(0) = u_1(h) = 0$) is figyelembe véve a sebességprofil a (6.4.) egyenlet alapján:

$$u_1(x_2) = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx_1} x_2 (h - x_2). \quad (6.10.)$$



35. ábra - Merev síklapok közt kialakuló stacioner áramlás vázlata.

A maximális-, és az átlagsebesség:

$$u_{1\max} = -\frac{h^2}{8\mu} \cdot \frac{\Delta p}{l}, \quad \bar{u}_1 = -\frac{h^2}{12\mu} \cdot \frac{\Delta p}{l}. \quad (6.11.)$$

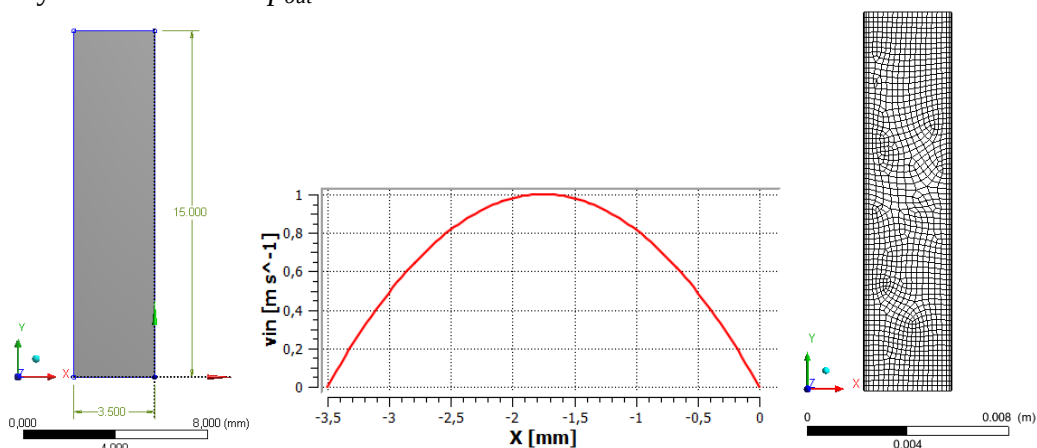
A két vizsgált paraméter a **nyomásesés**, és a **fali nyírófeszültség**:

$$|\Delta p| = \frac{12 \cdot \mu \cdot l \cdot \bar{u}_1}{h^3}, \quad (6.12.)$$

$$\tau_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \bigg|_{x_2=0} = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\Delta p}{l} = \frac{6 \cdot \mu \cdot \bar{u}_1}{h} \quad (6.13.)$$

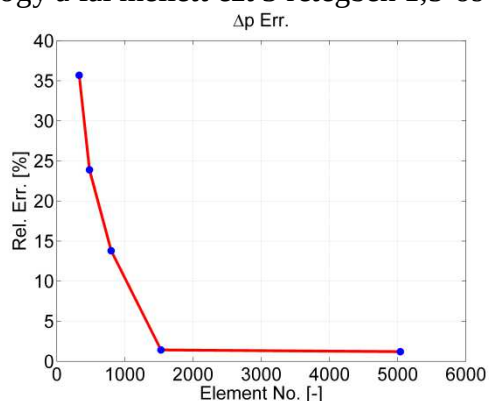
6.1.2. A NUMERIKUS MEGOLDÁS

Két, egymástól $d=3,5$ mm-re lévő $l=15$ mm hosszú síklap közti áramlást vizsgálunk. A belépő sebességprofil: $u(x) = u_{\max} \cdot \frac{4}{d^2} [x(d-x)]$, ahol $u_{\max}=1$ m/s. A kilépő peremen állandó statikus nyomást írtunk elő $p_{out}=0$ Pa.



36. ábra - A geometria vázlata, a belépő sebességprofil grafikonja és az alkalmazandó háló kialakítása.

A háló fokozatos sűrítésével a nyomásesés konvergenciáját vizsgáltuk. A cellák maximális oldalhossza 0,5 mm-től (330 elem) egészen 0,1 mm-ig (5038 elem) csökkent úgy, hogy a fal mellett ezt 3 rétegben 1,5-ös oldalaránnal minden esetben besűrítettem.



Finite Volume Method						
Max. Length [mm]	Node No. [-]	Element No. [-]	Δp [Pa]	Rel. Error [%]	τ [Pa]	Rel. Error [%]
0,5	744	330	39,878	35,69	3,5436	0,40
0,4	1066	481	36,41	23,89	3,5517	0,42
0,3	1730	799	33,442	13,79	3,5262	0,34
0,2	3252	1529	29,806	1,42	3,4934	0,23
0,1	10454	5038	29,742	1,20	3,4279	0,00
Analytic			29,39		3,427	

37. ábra – A háló konvergencia vizsgálatának eredményei.

Bal oldalt a numerikus megoldás nyomásesés értékeinek relatív eltérése látható az analitikus megoldástól, jobb oldalt ezek táblázatos összefoglalása látható.

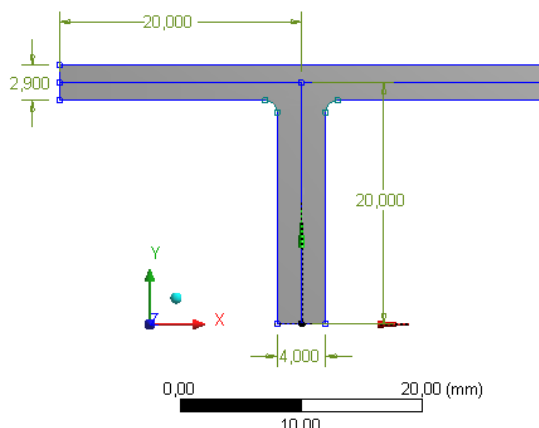
A fenti táblázat tartalmazza a belépő és a kilépő keresztmetszetek közt kialakuló **nyomásesés**, valamint a **fali nyírófeszültség** különböző sűrűségű hálókon számított

numerikus értékeinek az előző pont egyenletei alapján kalkulált analitikus megoldástól vett relatív eltérését. A sebességmezőből számított fali nyírófeszültség értékei nem függenek a háló méretétől jelentősen, azonban a nyomásmezőből adódó nyomásesés számításában jelentős hibát véthetünk a nem megfelelően sűrű háló alkalmazásával, mint ezt a bal oldali grafikon is szemlélteti. A számítás eredményeképpen kijelenthető, hogy a módszer a **pontos értékhez konvergál**, és az ezen az egyszerű geometrián is az elfogadható hibahatár (ebben az esetben ez <1,5%) eléréséhez a **cellák maximális oldalhosszát 0,2 mm-ben kell maximalizálnunk**.

6.2. KVALITATÍV ELEMZÉS

Ebben a részben a lehető legegyszerűbb modellen keresztül bemutatom az értágulatok kialakulási helyén a véráramlásból a falra háruló **feszültségek térbeli eloszlását**.

A modell egy merev falú, szimmetrikus T-elágazás. Az áramlás lamináris és időfüggetlen. A belépő sebességprofil az előzőekben ismertetett parabolikus eloszlású 1 m/s csúcssebességgel, a kilépő peremeken konstans 0 Pa nyomást írtunk elő, a fal csúszásmentes.



38. ábra - A T-elágazás geometriája.

6.2.1. HÁLÓTANULMÁNY

Ebben az esetben is elvégeztem egy hálótanulmányt, egyelőre fali sűrítés nélkül. A cella maximális oldalhosszát 0,5 mm-től (810 elem) 0,05 mm-ig (76506 elem) változtattam. A következő táblázat a rendszeren kialakuló nyomásesés, a felső falon létrejövő maximális nyírófeszültség (WSS_{max}), a felső falon kialakuló maximális nyomás és a két nyírófeszültségi csúcs közötti távolság konvergenciáját mutatja be a felosztás sűrűségének függvényében. A relatív értékeket a legsűrűbb felosztással kapott eredményre vonatkoztattam. A sárga kiemelés az előző egyszerű geometria esetén még a megfelelő felosztást jelenti, bár ott fali sűrítést is alkalmaztunk. Ebben az esetben az 5%-os hibahatár eléréséhez a tartomány belsejében 0,2 mm-ben, a fal mellett 0,06 mm-ben (ez 3 réteg 1,5-szörös oldalirányú inflációs réteget jelent) célszerű maximalizálni a cella oldalhosszát.

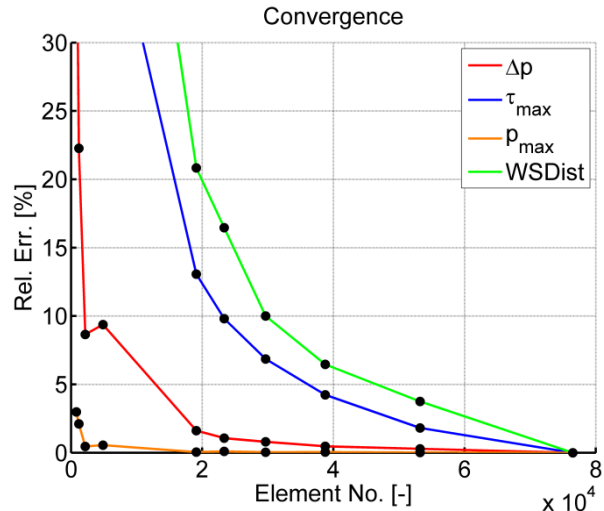
Mesh Max Face Size	Δp		WSS_{max}		p_{max}		WSDist		Node No.	Element No.
[mm]	[Pa]	[%]	[Pa]	[%]	[Pa]	[%]	[mm]	[%]	[-]	[-]
0,5	-9,355	40,66	5,819	75,51	494,18	2,99	13,00	170,83	1872	810
0,4	-12,256	22,26	7,034	70,39	489,96	2,11	11,20	133,33	2680	1186
0,3	-14,402	8,65	9,422	60,34	482,07	0,46	9,92	106,77	4732	2162
0,2	-14,289	9,37	13,621	42,66	482,52	0,56	8,00	66,67	10334	4861
0,1	-15,511	1,62	20,652	13,06	480,08	0,05	5,80	20,83	39402	19093
0,09	-15,598	1,07	21,425	9,81	480,30	0,09	5,59	16,37	48044	23346
0,08	-15,640	0,80	22,126	6,86	480,00	0,03	5,28	10,00	60858	29669
0,07	-15,692	0,47	22,749	4,24	479,63	0,05	5,11	6,54	79220	38744
0,06	-15,721	0,28	23,324	1,82	479,80	0,01	4,98	3,70	108432	53211
0,05	-15,766	0,00	23,755	0,00	479,85	0,00	4,80	0,00	155406	76506

39. ábra - A T-elágazáshoz tartozó háló konvergencia vizsgálata.

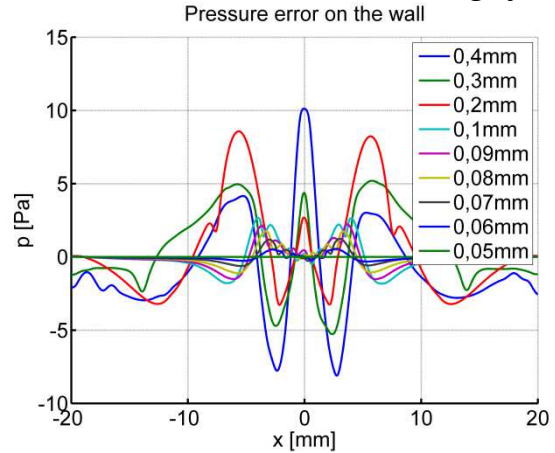
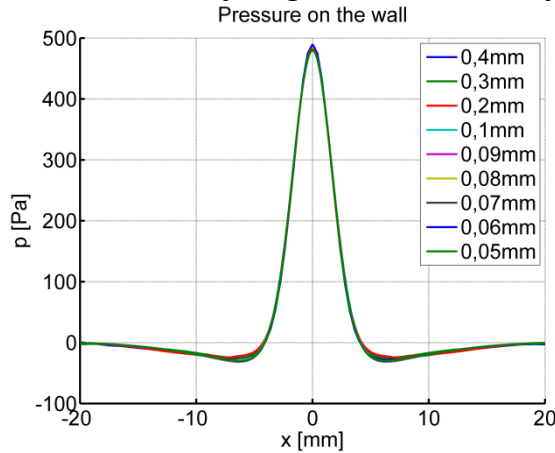
A grafikonon szembeötlőbb, hogy a fali sebességeloszlástól függő mennyiségek konvergenciájához lokálisan sűrűbb felosztást kell alkalmaznunk. A következő ábrák a felső falra ható nyomás- és nyírófeszültség értékek konvergenciáját szemléltetik.

A **nyomás** tekintetében abszolút értelemben kis hibát vétünk ritka háló alkalmazása esetén is. A hibák itt a torlópontban és a nyírófeszültségi maximumokban a legjelentősebbek. A csúcserték hibája tendenciózusan pozitív.

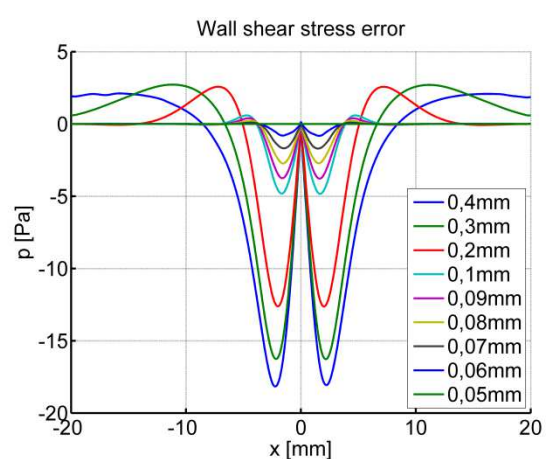
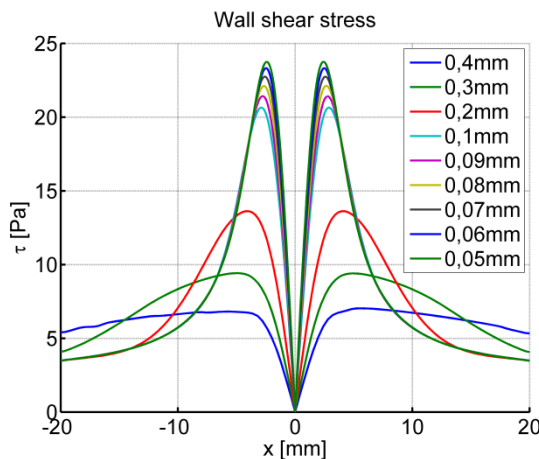
A **fali nyírófeszültség** értékei nagymértékben függenek a geometria diszkretizációjának sűrűségétől. A csúcsertékek hibája negatív értelmű, és helye is fokozatosan közelít a szimmetria tengelyhez.



40. ábra - A T-elágazás vizsgált paramétereinek konvergenciája a hálósűrűség függvényében.



41. ábra – A felső falra ható nyomás eloszlása és konvergenciája a háló sűrűségének függvényében. A jobb oldali ábra az egyes számítások eredményének és a legsűrűbb felosztás eredményének különbségét mutatja.

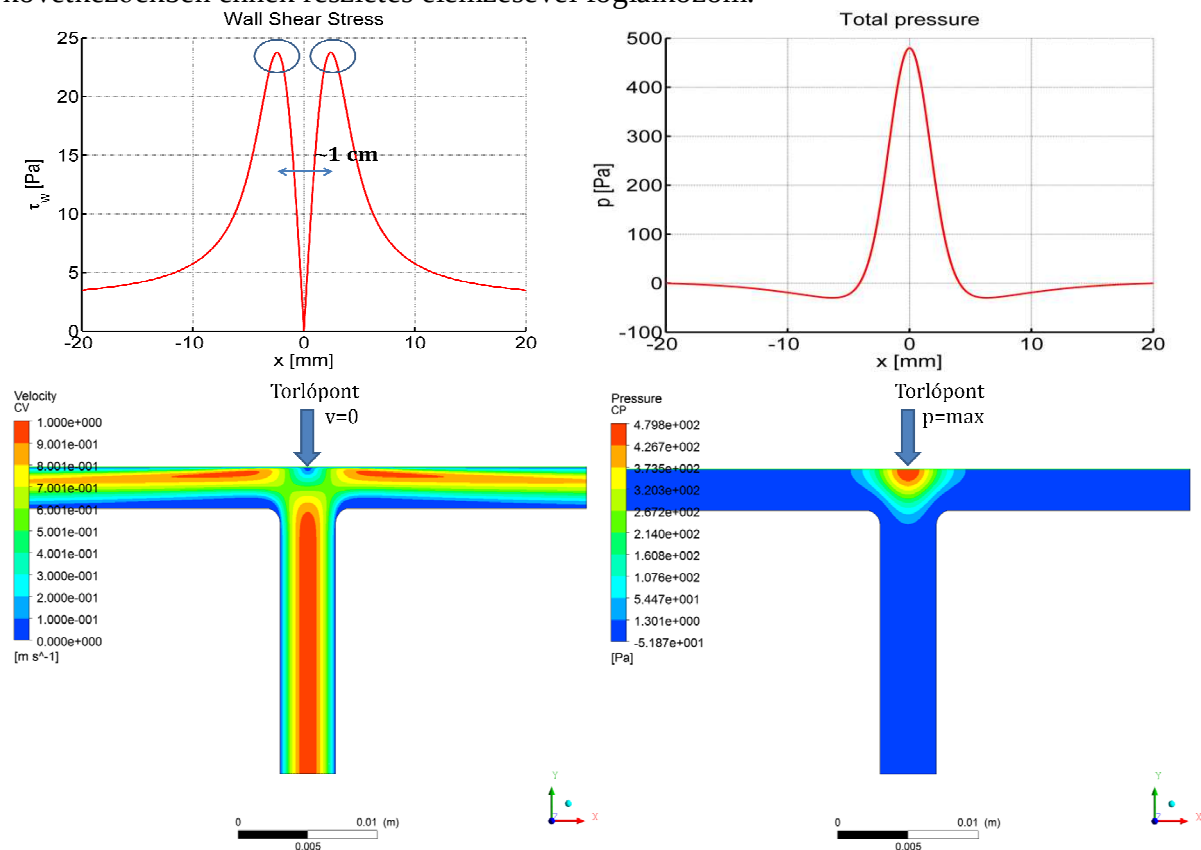


42. ábra – A felső falon létrejövő nyírófeszültség eloszlása és konvergenciája a háló sűrűségének függvényében. A jobb oldali ábra az egyes számítások eredményének és a legsűrűbb felosztás eredményének különbségét mutatja.

6.2.2. A FESZÜLTÉGÉRTÉKEK ELOSZLÁSA

6.2.2.1. EREDMÉNYEK

A háló vizsgálatánál már felrajoltam a falra ható feszültségek ábráját. A következőekben ennek részletes elemzésével foglalkozom.



43. ábra – A felső ábrákon a felső falra ható nyíró- és normálfeszültségek eloszlása, az alsókon pedig az áramlási tér sebesség- és nyomásmezeje látható.

A fenti ábrák felső sorában a felső falra ható nyíró- és normálfeszültségek eloszlása, alsó sorában az áramlási tér sebesség- és nyomásmezeje látható.

A bal oldali **sebességkontúr** ábrán látható a belépő ág parabolikus sebességprofiljának helyessége, ugyanis nem változik a főág sebesség eloszlása. Az elágazás hatása a főágra csak 1 mm nagyságrendig hat vissza, így a csőszakasz hossza megfelelő. A leányágak végén a sebességeloszlás eltér a parabolától, a maximum érték a felső fal felé tolódik.

A felső **falra ható nyírófeszültség** a sebesség falra merőleges gradiensével arányos, így a bal felső ábra az alatta lévőből származtatható. A torlópontban a sebesség zérus, falra merőleges deriváltja is eltűnik, így ebben a pontban a nyírófeszültség is zérusértékűvé válik, ezt a minimumpontot övezi a két nyírófeszültségi maximum. Ennek nagysága 23,76 Pa, a szimmetriatengelytől vett távolságuk 4,8 mm.

A jobb alsó **nyomáskontúr** ábrán és ennek felső fali metszetén szintén megfigyelhető a torlópontban kialakuló maximális nyomás, melynek értéke 480 Pa. Ez a megnövekedett nyomás gyorsan, 1 cm-en belül lecseng.

6.2.2.2. ÉRTÉKELÉS

Érdeemes megvizsgálni, hogy az elágazás geometriája mekkora hatással van a feszültségek értékeire az egyenes csőszakaszhoz képest.

Ehhez a WSS esetében nézzük meg az egyenes csőszakasz analitikus megoldásából adódó értékeket:

A főágban, a (6.13.) egyenlet alapján:

$$WSS_{main} = \frac{6 \cdot \mu \cdot \bar{u}}{D} = 3 \text{ Pa.} \quad (6.14.)$$

A mellékágakban a kontinuitás alapján az átlagsebesség:

$$\bar{u}_1 = \bar{u} \frac{D}{2d}, \quad (6.15.)$$

így itt a WSS parabolikus sebességeloszlást feltételezve, szintén a (6.13.) egyenlet alapján:

$$WSS_{branch} = \frac{6 \cdot \mu \cdot \bar{u}_1}{d} = 2,85 \text{ Pa.} \quad (6.16.)$$

tehát az elágazás hatására **a fali nyírófeszültség egy nagyságrenddel megnőtt.**

A nyomás maximumát a torlópontban a falnak ütköző, és ott megálló folyadékrészecske okozza. Az $u_{max}=1\text{m/s}$ sebességgel mozgó folyadékrészecske hirtelen lelassulása által kifejtett nyomás:

$$p_{max} = \rho^f \cdot \frac{v^2}{2} = 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 525 \text{ Pa.} \quad (6.17.)$$

Az elágazás **a falra ható nyomásban maximálisan 525 Pa növekedést** okozhat. Ez a valóságban és a szimulációban is ennél kisebbre adódik, ugyanis a részecske lassulása nem pillanatszerű. Már itt érdemes megjegyezni, hogy az érrendszer ezen a szakaszán uralkodó 10^4 Pa nagyságrendű nyomáshoz képest ennek rövidtávú hatása nem lehet jelentős, azonban a hosszú távú ciklikus terhelés miatt fontos szerepet játszhat az értágulatok kialakulásában.

6.2.2.3. KÖVETKEZTETÉSEK

A feszültségek eloszlásának vizsgálata során tett megfigyelések alapján egy – még további mélyebb vizsgálatokat igénylő – **hipotézist** állíthatunk fel a **kialakulás folyamatára**:

Eszerint a torlópont környezetében lokálisan megnövekedett nyomás a hosszan tartó ciklikus pulzáció hatására a fali nyírófeszültség nagy gradiensének, vagy esetleg lokális szélsőértékeinek hatására ugyanazon a részen meggyengült viskoelasztikus érfalat fokozatosan deformálja, ez pedig aneurysma kialakuláshoz vezethet.

Arról egyelőre nincs megbízható információnk, hogy a nyírófeszültség alacsony, vagy éppen magas értékei okozzák-e hosszú távon a fal degradációját, ennek felderítése jelenti az egyik legfontosabb feladatot.

A feltételezés részletes megvizsgálása további terveim közt szerepel, ehhez azonban először egy rövid- és **hosszútávú biológiai hatásokat** is figyelembe vevő **érfal anyagmodell**t kell készíteni, ami eddig még nem képezte kutatások tárgyát ezen a területen.

6.3. GLOBÁLIS JELLEMZŐK

Ebben a pontban az elágazás globális jellemzőit mutatom be az előző pontban alkalmazott modellen keresztül. Méreteinek paraméterezésével a geometria függvényében megkereshető egy ideális alak, ahol a rendszer ellenállását jelentő statikus nyomásesés és a szív teljesítményét felemésztő, a súrlódás miatt elnyelt teljesítmény minimumot mutat. Ezek alapján érdekes megfigyeléseket tehetünk a természetben kialakuló formációkra.

Az elemzést egy szimmetrikus és egy-egy, az elágazás szögeiben illetve a mellékágak átmérőjében aszimmetrikus modellen keresztül végzem el.

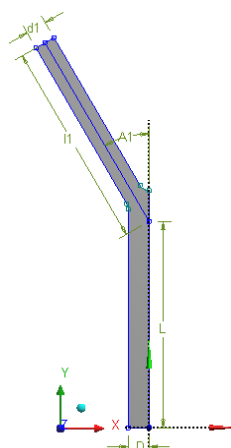
6.3.1. SZIMMETRIKUS MODELL

Ebben az esetben a számítási igény csökkentése végett a teljes geometria felét modellezem csupán, a szimmetriasíokban olyan peremfeltételt előírva, hogy a mezőváltozók síkra merőleges irányú deriváltját zérusra választjuk.

A geometria az alábbi ábrán látható. Az elágazás szöge 15° -tól 90° -ig 15° -ként, míg a mellékág és a főág átmérőjének aránya (d_1/D) 0,5-től 0,9-ig 0,05-ként változik. Ez összesen $6 \cdot 9 = 54$ futtatást jelent.

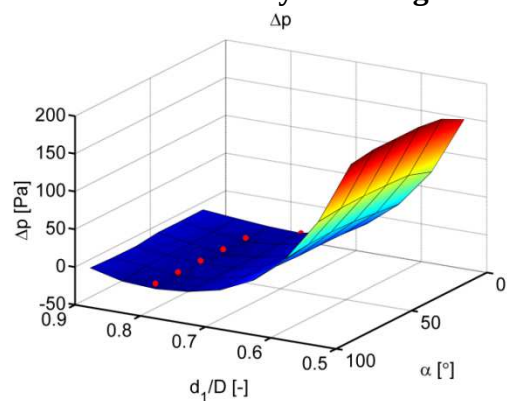
Négy fő paraméter változását követjük a továbbiakban végig. Ezek: a nyomásesés, az elnyelt teljesítmény, a torlóponti nyomás és a fali nyírófeszültség maximuma (WSS_{max}).

44. ábra - A szimmetrikus modell geometriája és paramétereinek elnevezései



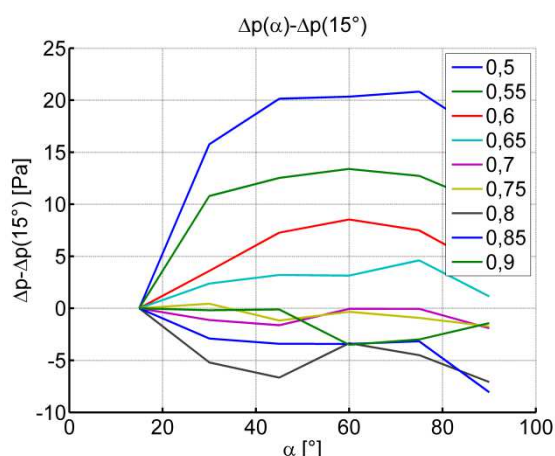
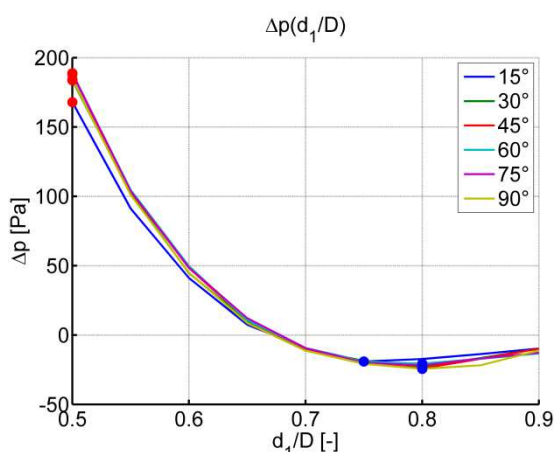
6.3.1.1. NYOMÁSESÉS

Az elágazáson kialakuló nyomásesés a kilépő peremen előírt konstans zérus nyomás miatt megegyezik a belépő peremen a nyomás területi átlagával. Ezt szemléltetik a következő ábrák az **átmérőarány** és az **elágazási szög** függvényében.



Δp [Pa]		Elágazási szög [°]					
		15	30	45	60	75	90
Átmérőarány [-]	0,5	167,9	183,7	188,1	188,3	188,8	184,4
	0,55	91,2	102,0	103,8	104,6	104,0	101,2
	0,6	41,2	44,7	48,4	49,7	48,6	45,0
	0,65	7,5	9,9	10,7	10,6	12,1	8,6
	0,7	-9,4	-10,5	-11,0	-9,4	-9,4	-11,3
	0,75	-19,0	-18,6	-20,2	-19,4	-20,0	-20,8
	0,8	-17,3	-22,5	-24,0	-20,7	-21,8	-24,4
	0,85	-13,8	-16,7	-17,2	-17,2	-16,9	-21,8
	0,9	-9,8	-9,9	-9,9	-13,3	-12,8	-11,2

45. ábra - Az elágazáson kialakuló nyomásesés az átmérő arány és az elágazási szög függvényében. A piros pontok az adott szöghöz tartozó ellenállás tekintetében optimális átmérőarányokat jelölik.



46. ábra – A paramétertér koordinátatengely irányú metszetei. Jobb oldalt az egyes elágazási szögekhez tartozó nyomásesés-átmérő arány összefüggés látható. Bal oldalt az egyes átmérőarányokhoz tartozó nyomásesés-elágazási szög összefüggés látható, úgy, hogy a görbék 15° -hoz tartozó értékeit levontam belőlük.

ÁTMÉRŐ ARÁNY

A nyomásesés átmérő aránytól való függése $d_1/D=0,75-0,8$ értéknél minimumot mutat. Ez jelenti az **ideális átmérő arányt** az áramlás fenntartásához. Ez a **természetben is leggyakrabban** előforduló érték, amely többek közt a 3. és 4. táblázatban is megjelenik, és a modell egyfajta validációjaként is felfogható, ha feltételezzük, hogy a természetben is az optimális alak jön létre.

A modellen $d_1/D>0,75-0,8$ esetén a kilépő peremen előálló nyomás nagyobb, mint a belépő peremen, ez a diffúzerszerű viselkedéssel magyarázható, amit a következő, 6.3.1.2. fejezetben bővebben kifejtünk.

ELÁGAZÁSI SZÖG

A nyomásesés **kis mértékben függ csupán az elágazás szögétől**. Ahhoz, hogy ezt a függést szemléletessé tegyük az 46. ábra jobb oldalán csak a rögzített átmérőarányokhoz tartozó nyomásesés változásokat ábrázoltam az elágazási szög függvényében. **Nagyobb átmérőcsökkenés esetén a rendszer ellenállása 60°-nál maximumot mutat, átmérő növekedés esetén ez a jelleg nem kimutatható.**

6.3.1.2. AZ ELÁGAZÁS HATÁSFOKA

A rendszer jellemzésére nem megfelelő csupán a nyomáseséssel foglalkozni. Érdekes megvizsgálni, hogy a szív által produkált teljesítménynek erre a szakaszra jutó hányadának mekkora részét nyeli el az elágazás, vagyis milyen hatásokkal disszipálódik az energia a rendszeren.

AZ ELNYELT TELJESÍTMÉNY

Ennek számításához írjuk fel az elágazás által elnyelt teljesítményt. A keresztmetszeten időegység alatt átáramló energia megegyezik a rajta átáramló folyadék mozgási energiájának és a keresztmetszeti nyomás munkájának az összegével. Feltételezve, hogy a sebességvektor merőleges a felületre:

$$\dot{E} = \dot{W}_p + \dot{E}_{kin} = \int_A p \cdot u \cdot dA + \int_A \frac{\rho^f \cdot u^2}{2} \cdot u \cdot dA = \int_A \left(p + \frac{\rho^f \cdot u^2}{2} \right) \cdot u \cdot dA. \quad (6.18.)$$

A pont idő szerinti deriválást jelent.

Síkbeli áramlás, és az

$$u(x) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{2 \cdot x}{d} \right)^2 \right] \quad (6.19.)$$

függvénnyel jellemezhető parabola alakú sebességprofil esetén ez a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(p + \frac{\rho^f \cdot [u(x)]^2}{2} \right) \cdot u(x) \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot p \cdot u_{\max} + \frac{8}{35} d \cdot \rho^f \cdot u_{\max}^3 = \\ &= p \cdot d \cdot \bar{u} + \frac{54}{35} \rho^f \frac{\bar{u}^3}{2}. \end{aligned} \quad (6.20.)$$

Itt d a keresztmetszet hossza, $\bar{u}$ pedig a keresztmetszeti átlagsebesség, így a szimmetrikus elágazás által elnyelt teljesítmény:

$$P = \dot{E}_{be} - 2\dot{E}_{ki}. \quad (6.21.)$$

$$\text{Ezt kifejtve:} \quad P = \left(p_{be} + \beta \cdot \rho^f \cdot \frac{\bar{u}_{be}^2}{2} \right) \underbrace{\bar{u}_{be} \cdot d_{be}}_{Q_{be}} - 2 \cdot \left(p_{ki} + \beta \cdot \rho^f \cdot \frac{\bar{u}_{ki}^2}{2} \right) \underbrace{\bar{u}_{ki} \cdot d_{ki}}_{Q_{ki}}. \quad (6.22.)$$

Figyelembe véve a kontinuitásból adódó megkötést, mely szerint

$$\bar{u}_{be} \cdot d_{be} = 2 \cdot \bar{u}_{ki} \cdot d_{ki}, \quad (6.23.)$$

a teljesítmény képlete a következő alakra egyszerűsödik:

$$P = \left[\underbrace{(p_{be} - p_{ki})}_{-\Delta p} + \frac{\beta \cdot \rho^f}{2} (\bar{u}_{be}^2 - \bar{u}_{ki}^2) \right] \cdot \bar{u}_{be} \cdot d_{be}. \quad (6.24.)$$

Az egyenlet jobb oldalán lévő szögletes zárójel első tag ellentettje jelenti a rendszeren létrejövő nyomásesést. Ezt vizsgáltuk az előzőekben, és innen már látható, hogy bizonyos feltételek mellett ez lehet negatív a termodinamika második főtételének megsértése nélkül.

A NYOMÁSESÉS

Nézzük meg, hogyan alakul a nyomásesés grafikonja az $R = \frac{d_{ki}}{d_{be}}$ függvényében ideális esetben, vagyis amikor az elágazás veszteségmentes. Ekkor:

$$P = 0, \quad (6.25.)$$

$$\left[\underbrace{(p_{be} - p_{ki}) + \frac{\beta \cdot \rho^f}{2} (\bar{u}_{be}^2 - \bar{u}_{ki}^2)}_0 \right] \cdot \bar{u}_{be} \cdot d_{be} = 0. \quad (6.26.)$$

Figyelembe véve a kontinuitásból adódó összefüggést:

$$\bar{u}_{ki} = \bar{u}_{be} \cdot \frac{d_{be}}{2 \cdot d_{ki}} = \bar{u}_{be} \cdot \frac{1}{2 \cdot R}, \quad (6.27.)$$

$$\Delta p = \beta \frac{\rho^f \cdot \bar{u}_{be}^2}{2} \left(1 - \frac{1}{4 \cdot R^2} \right). \quad (6.28.)$$

Tehát a nyomásesés az átmérőarány négyzetével fordítottan arányos, és akkor válik negatívvá, ha a teljes kilépő keresztmetszet területe meghaladja a belépő keresztmetszet területét, vagyis ha diffúzorszerűen viselkedik a rendszer. Ekkor a rendszer veszteségei rendszerint jelentősen megnőnek.

A DISSZIPÁCIÓ HATÁSFOKA

A fentiek alapján a hatásfok számítása az alábbi képlet alapján történhet:

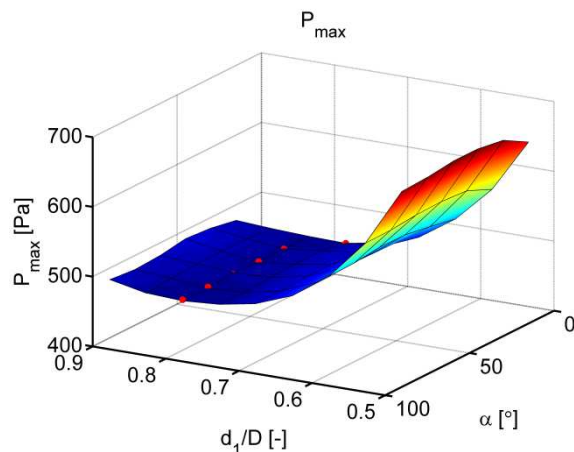
$$\eta_{dis} = \frac{\sum \dot{E}_{be} - \sum \dot{E}_{ki}}{\sum \dot{E}_{be}}, \quad (6.29.)$$

ahol:

$$\dot{E} = \sum_k \int_{A_k} \left(p + \frac{\rho \cdot u_i^2}{2} \right) \cdot u_i \cdot n_i dA_k. \quad (6.30.)$$

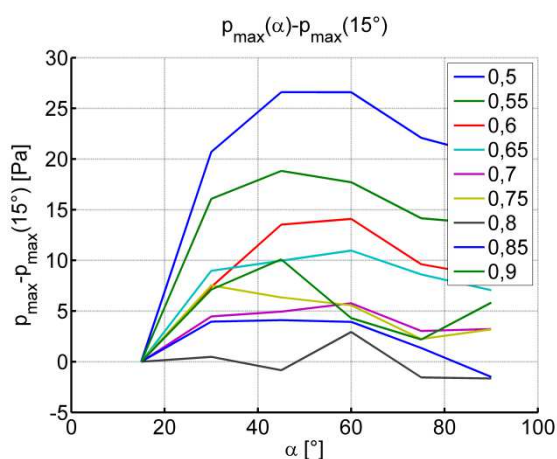
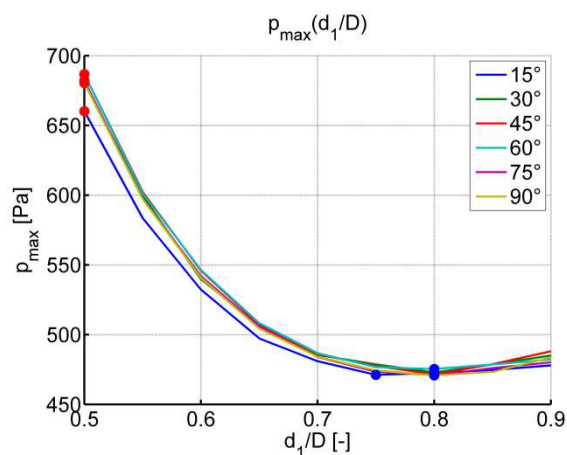
6.3.1.3. A TORLÓPONTI NYOMÁS

Hasonlóan a nyomáseséshez, a felső falra ható, a torlópontban kialakuló maximális nyomás értékét is a 6.3.1.1. pontban bemutatott módon ismertetem.



$P_{\max}$ [Pa]	Átmérőarány [-]	Elágazási szög [°]					
		15	30	45	60	75	90
	0,5	660,2	680,9	686,8	686,8	682,3	680,4
	0,55	583,6	599,7	602,4	601,3	597,8	597,2
	0,6	532,3	539,7	545,8	546,4	541,9	540,7
	0,65	497,3	506,3	507,3	508,3	505,9	504,4
	0,7	481,0	485,4	485,9	486,7	484,0	484,2
	0,75	471,2	478,7	477,5	476,7	473,4	474,4
	0,8	472,4	472,9	471,6	475,3	470,9	470,8
	0,85	474,7	478,6	478,8	478,6	476,0	473,2
	0,9	477,9	485,0	488,0	482,2	480,1	483,8

47. ábra – A felső fal torlópontjában kialakuló maximális nyomás nyomásesés az átmérő arány és az elágazási szög függvényében. A piros pontok az adott szöghöz tartozó ellenállás tekintetében optimális átmérőarányokat jelölik.



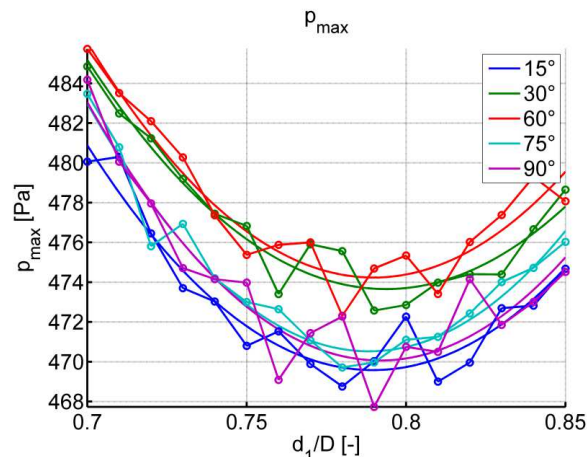
48. ábra – A paraméterter koordinátatengely irányú metszetei. Jobb oldalt az egyes elágazási szögekhez tartozó maximális nyomás-átmérő arány összefüggés látható. Bal oldalt az egyes átmérőarányokhoz tartozó maximális nyomás-elágazási szög összefüggés látható, úgy, hogy a görbék 15°-hoz tartozó értékeit levontam belőlük.

Az itt tehető megjegyzések is egybecsengenek a nyomásesésre mondottakkal, ugyanis a maximális sebességet – amely áramvonal a torlópontba ütközik – rögzített értéken tartottuk, így egy közel állandó 500 Pa nagyságrendű tag adódik a belépő nyomásértékhez, így adva ki a torlóponi nyomást.

A **szög** változásának **hatása nem számottevő**. A maximális többlet 45° és 60° között jelentkezik, amely **5%-os változást** jelent.

Az **átmérő arány** változásának **hatása már jelentősebb**. Az optimálisról 0,5-re való csökkenése 45%-os torlóponi nyomásnövekedést okoz. Itt is – a **természetben előforduló** átmérőarányok értékeinél – minimumot találunk, amelynek pontosabb meghatározásához a paraméterter felosztását az adott helyen besűrítettem.

49. ábra - A torlóponthi nyomás az átmérőarány függvényében, a minimum érték környezetében különböző elágazási szögek esetén.



$p_{\max}$		Elágazási szög [°]				
[Pa]		15	30	60	75	90
Átmérőarány [-]	0,7	480,063	484,847	485,732	483,473	484,176
	0,71	480,299	482,482	483,512	480,784	480,064
	0,72	476,455	481,238	482,096	475,809	477,959
	0,73	473,703	479,198	480,275	476,935	474,712
	0,74	473,027	477,441	477,364	474,198	474,154
	0,75	470,801	476,831	475,374	473,003	473,978
	0,76	471,532	473,406	475,879	472,644	469,09
	0,77	469,888	475,908	476,002	471,076	471,441
	0,78	468,759	475,564	472,31	469,715	472,272
	0,79	470,033	472,576	474,693	469,97	467,734
	0,8	472,268	472,853	475,342	471,104	470,75
	0,81	469,001	473,98	473,41	471,254	470,496
	0,82	469,963	474,401	476,02	472,432	474,154
	0,83	472,694	474,392	477,38	474,008	471,854
	0,84	472,823	476,659	479,296	474,725	473,01
	0,85	474,677	478,652	478,068	476,029	474,517
min	[Pa]	468,8	473,4	472,3	469,7	469,1

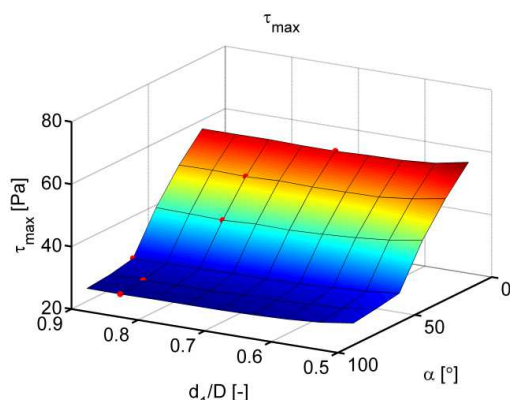
Az értékek numerikus hibákat tartalmaznak, és ezért oszcillálnak, de másodfokú regresszió segítségével megkaphatjuk a minimumhoz tartozó átmérőarányt, melynek értéke **$d_1/D=0,7907$** .

Megjegyzem, hogy 3D-s vizsgálatnál ez a számított érték minden bizonnyal más lesz, mivel 2D-ban $1/2$, 3D-ban $1/\sqrt{2}$ értéknél nagyobb átmérőarány esetén viselkedik a rendszer diffúzorként.

6.3.1.4. A MAXIMÁLIS FALI NYÍRÓFESZÜLTSG

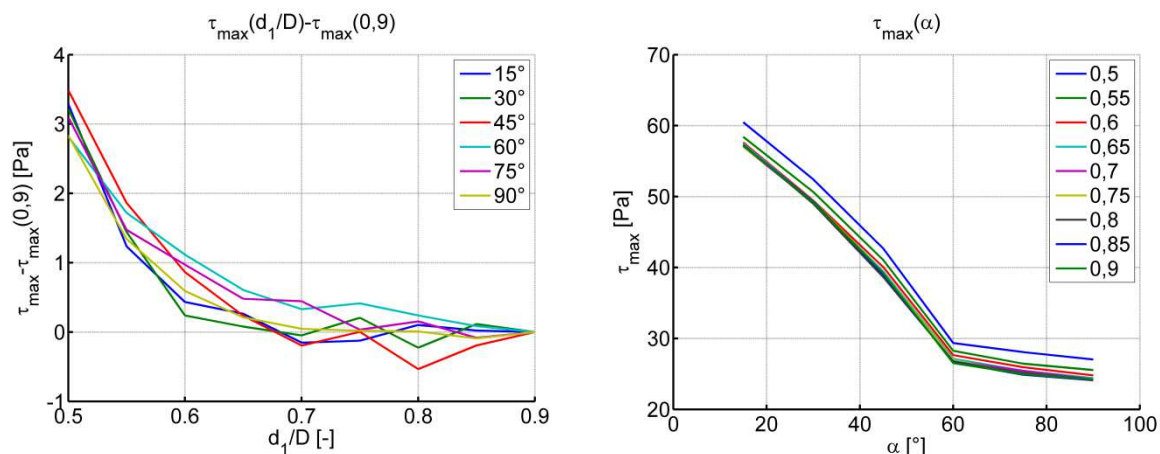
A már ismert paraméterterben most a fali nyírófeszültség értékek maximumát adom meg. A **WSS az átmérőarányra érzéketlen**. Az elágazási szög függvényében **5-10% közötti növekedést** eredményez az **átmérőarány** 0,9-ről 0,5-re való **csökkenése**, amint ez a 51. ábra bal oldalán lévő grafikonon is látható. Itt szintén csak a változást tüntettem fel, minden értékből levonva a megfelelő maximális, 0,9-es átmérőarányhoz tartozó $WSS_{\max}$ értéket.

Ugyanakkor az elágazási szög jelentős hatással van a $WSS_{\max}$ -ra. A **szög csökkenésével a $WSS_{\max}$ növekszik**, így a 15°-hoz tartozó érték a 90°-nál adódó érték **2,36-szorosára** nő. Az összefüggés két lineáris szakasszal közelíthető, amelynek törése van a 60°-nál.



$\tau_{\max}$		Elágazási szög [°]					
[Pa]		15	30	45	60	75	90
Átmérőarány [-]	0,5	60,5	52,4	42,7	29,3	28,1	27,0
	0,55	58,4	50,6	41,0	28,3	26,4	25,5
	0,6	57,6	49,4	40,1	27,6	25,9	24,8
	0,65	57,4	49,3	39,4	27,1	25,5	24,4
	0,7	57,0	49,2	39,0	26,9	25,4	24,2
	0,75	57,1	49,4	39,2	26,9	25,0	24,2
	0,8	57,3	49,0	38,7	26,8	25,1	24,2
	0,85	57,2	49,3	39,0	26,6	24,9	24,1
	0,9	57,2	49,2	39,2	26,5	25,0	24,2

50. ábra – A felső falon kialakuló maximális fali nyírófeszültség az átmérő arány és az elágazási szög függvényében.



51. ábra – A paramétertér koordinátatengely irányú metszetei. Jobb oldalt az egyes elágazási szögekhez tartozó WSS_{max} -átmérő arány összefüggés látható. Bal oldalt az egyes átmérőarányokhoz tartozó WSS_{max} -elágazási szög összefüggés látható, úgy, hogy a görbék 15°-hoz tartozó értékeit levontam belőlük.

6.3.1.5. ÖSSZEGZÉS

Az elágazás szögét és átmérőinek arányát változtatva a rajta létrejövő nyomásesés, és az ehhez hasonló eloszlást mutató torlóponti nyomás csekély mértékben függ a szögtől (utóbbi 5%-os változást mutat), nagyobb mértékben függ viszont az átmérőaránytól (ismét az utóbbi 45%-os változást mutat). Minimum értéket tapasztalunk 0,78-as kilépő/belépő átmérő arány esetén. Ez a modell szempontjából bizonyos fajta élettani validációként is felfogható, feltételezve, hogy a természet az optimális kialakítás, a minimális ellenállású alak elérésére törekszik.

A fali nyírófeszültség maximális értéke az átmérőarányra érzéketlen (5-10%-os változást mutat), az elágazás szöge azonban jelentősen befolyásolja. A 15°-hoz tartozó érték a derékszög esetén kialakuló érték 2,36-szorosára nő. Az összefüggés két lineáris szakasszal közelíthető, melynek 60°-nál töréspontja van.

Ezek alapján megállapítható, hogy az optimális kialakítás elágazása 60° közelében, átmérő aránya 0,78.

Megadtam továbbá egy paramétert, ami jól jellemzi a rendszer veszteségeségét, ez a disszipációs hatásfok.

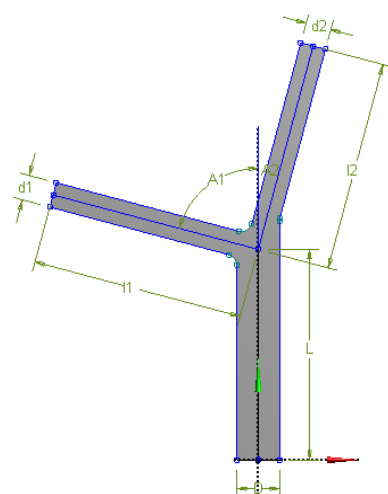
6.3.2. ASZIMMETRIKUS MODELL

6.3.2.1. ASZIMMETRIA A SZÖGEKBEN

A modell itt is megegyezik az eddig alkalmazottal, azonban most a két leányág szögét egymástól függetlenül változtatjuk az előző felosztásnak megfelelően 15°-tól 90°-ig 15°-onként. Ez összesen 36 futtatást jelent átmérő arányonként (amit mindkét ágban ugyanakkorának választunk).

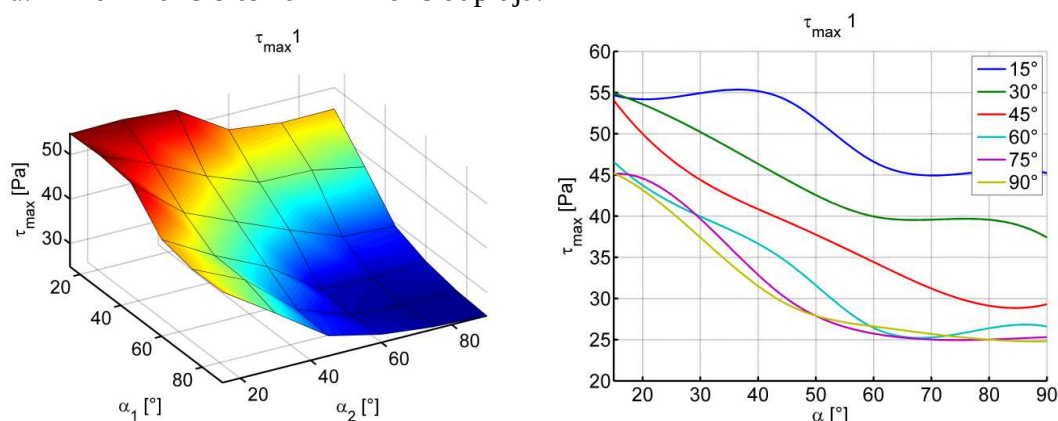
A torlópontbeli nyomás és a nyomásesés nagyon kis változást mutat a szögek függvényében, amely a numerikus számítás hibahatárán belül található, így ennek bemutatásától most eltekintek.

A WSS_{max} értékeit elegendő egy átmérő arány esetében felvázolni, ugyanis függetlenek attól. Álljon itt példaként a $d_1/D=0,6$ eset.



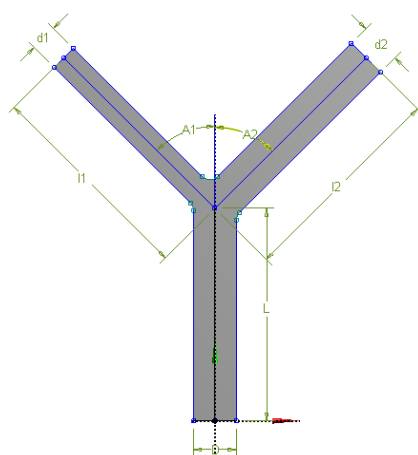
52. ábra - Az elágazási szögei tekintetében aszimmetrikus geometriai kialakítás.

A WSS_{max} az elágazási szög növekedésével csökken, $\alpha > 60^\circ$ esetén pedig közel állandó értékű. A maximális érték a minimális duplája.



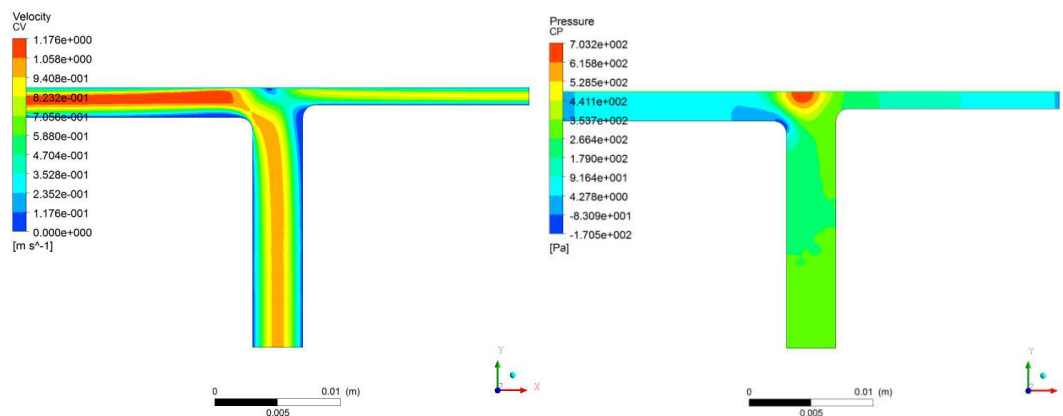
53. ábra – Jobb oldalt: a maximális fal csúsztatófeszültség α_1 és α_2 függvényében, $d_1/D=0,6$ esetén. Bal oldalt: Rögzített α_1 esetén a maximális fal csúsztatófeszültség alakulása α_2 függvényében $d_1/D=0,6$ esetén.

6.3.2.2. ASZIMMETRIA AZ ÁTMÉRŐARÁNYOKBAN



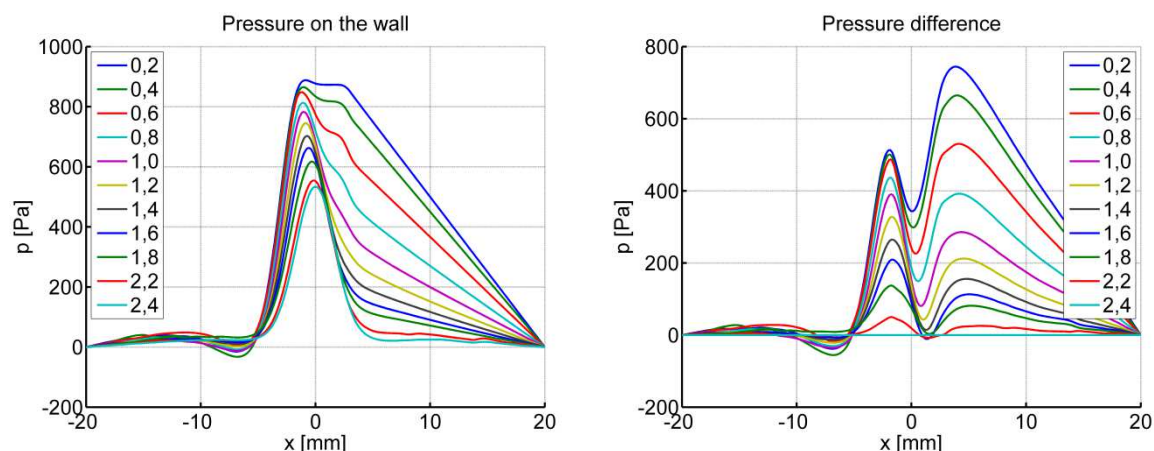
54. ábra – A kilépő ág átmérőiben aszimmetrikus geometriai kialakítás.

Ebben az esetben a két elágazási szög megegyezik, azonban a kilépő átmérők különböznek. Itt is egy speciális geometrián, $\alpha=90^\circ$ esetén szeretném bemutatni az átmérő hatását a falra ható nyomás és WSS eloszlására. A főág átmérője itt is végig 4 mm. A bal oldali ág szintén rögzített, $d_1=2,4$ mm átmérőjű. A jobb oldali ág ennél keskenyebb, 0,2 mm-től 2,4 mm-ig változik 0,2 mm-ként. A következő ábra egy kiragadott példát szemléltet, ahol $d_2=1,4$ mm.



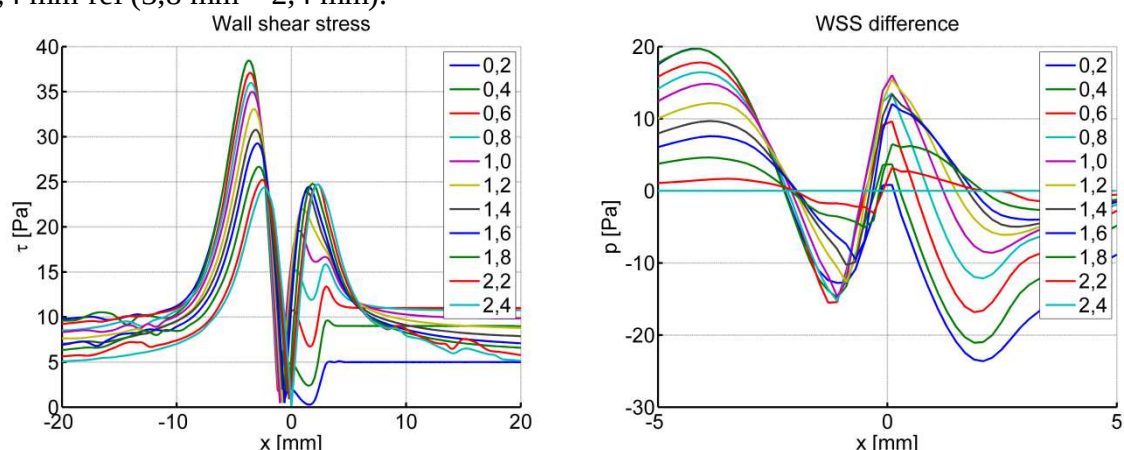
55. ábra – Bal oldalt a sebességmező, jobb oldalt a nyomásmező kontúrbrája látható.
 $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$, $D=4$ mm, $d_1=2,4$ mm, $d_2=1,4$ mm

A d_1/d_2 arány növekedésével a nyomás maximuma növekszik, szinte teljesen elzáródott ellenoldali érszakasz esetén akár a normál érték 1,66-szorosára is (888,5 Pa/534,4 Pa), helye pedig fokozatosan balra tolódik, maximálisan 0,8 mm-rel.



56. ábra – Bal oldalt: a felső falra ható nyomás a jobb oldali mellékág átmérőjének (0,2-2,4 mm közt) függvényében. A jobb oldali ág elzáródás közeli állapota esetén a nyomás maximuma a szimmetrikus érték duplájára nő, helye balra tolódik, maximálisan 0,8 mm-t. Jobb oldalt az előző ábra görbéinek a szimmetrikus értéktől való eltérése látható.

A nyírófeszültségi csúcsok közül a jobb oldali csúcs fokozatosan eltűnik, és a bal oldali pedig szintén közel 1,55-szörösére nő (38,45 Pa/24,73 Pa), a helye szintén balra tolódik 1,4 mm-rel (3,8 mm – 2,4 mm).



57. ábra – Bal oldalt a felső fali WSS eloszlása látható d_2 függvényében, rögzített $d_1=2,4$ mm és $\alpha_1=90^\circ$ esetén. Jobb oldalt ugyanezen feltételek mellett a szimmetrikus eloszlástól való eltérés látható.

6.3.2.3. ÖSSZEGZÉS

Az aszimmetria hatását egy adott geometriai kialakítás példáján keresztül szemléltettem.

A WSS_{max} a szög függvényében jelentős változásokat mutat, értéke kis α esetén duplájára nő, azonban $\alpha > 60^\circ$ esetén már állandónak tekinthető. Bár az átmérők szimmetrikus csökkentése nem volt rá hatással, az egyik oldali átmérő jelentős csökkenése a WSS_{max} értékét 1,55-szörösre növeli.

A nyomás maximumára a hajlásszög nincs befolyással, ugyanakkor az egy oldali nagymértékű átmérő csökkenés a szimmetrikus esetben adódó maximumot 1,66-szorosára növeli. Megjegyzem, hogy ez még mindig egy nagyságrenddel kisebb a normál diastolés nyomás értékénél.

6.4. LOKÁLIS JELLEMZŐK TÉRBELI ELOSZLÁSA

Ebben a pontban rátérünk a falra ható **lokális jellemzők** modellezésére. Az elágazásban uralkodó nyomást a követő érszakaszok ellenállása határozza meg, ezért elengedhetetlen a peremfeltételek pontosítása, így az elhagyott részek figyelembevétele egy kétparaméteres, lineáris impulzusforrás segítségével történik. Még mindig ragaszkodunk a stacioner áramláshoz és a merev falú geometriához.

A **falra átadódó nyomást** döntően a **követő érszakaszok ellenállása** határozza meg, az eddigi értékek csupán a geometriából adódó többlet megadására használhatók, részletesen tehát csak ezzel a témakörrel foglalkozom.

A következőkben csak a **szimmetrikus modelleket** tárgyalom, valamint, mivel a fali nyírófeszültség eloszlását a sebességmező határozza meg - amit szimmetrikus esetben a szűrők nem befolyásolnak - így ennek ismételt diszkusszióját nem teszem meg.

Ebben a pontban három élettanilag jellemző nyomásértéket vizsgállok, melyek a normális **80/120**, a magas **90/140**, és a kritikus **100/180** Hgmm vérnyomást jellemző diastolés illetve systolés értékek közül – egyelőre stacioner esetben maradván – a **nyomásmaximumok** lesznek.

6.4.1. A NYOMÁS KALIBRÁLÁSA

Az érszakasz vérnyomását a követő érszakaszok ellenállása határozza meg. Ezt nem vettük figyelembe az eddigi modellekben. **Mért értékek nem állnak rendelkezésünkre** a valós élettani ellenállás értékeiről, így **közvetett módon** kell becsülnünk azokat oly módon, hogy a mérhető átlagos nyomás időjelét kapjuk vissza a számítások során.

6.4.1.1. LEHETŐSÉGEK

Erre a vizsgálatra két módszer ad lehetőséget. Az első az úgynevezett **szélkazan modell**, ahol egy koncentrált paraméterű modellből kapott sebességfüggő kilépő nyomás peremfeltételt írunk elő az eddigi modell mellékágainak végein.

A másodikban ugyanezt érjük el numerikus úton. Az áramlási teret megnöveljük egy **impulzusforrást** tartalmazó térrész alkalmazásával. Mi ezt az utat követjük, erre az alkalmazott program egy porózus szűrő definiálásán keresztül teremt lehetőséget.

6.4.1.2. AZ IMPULZUSFORRÁS

A CFX különböző modellek alkalmazását teszi lehetővé. Most csupán a cső tengelyének irányába eső lendületet kell csökkentenünk, így az irány szerinti veszteségmodellt (**Directional Loss Model**) alkalmaztam. Ezek a Navier-Stokes-egyenletben egy extra negatív forrástagként működnek.

$$\tilde{S}_{m_i} = -\frac{\mu^f}{K_{perm_i}} \cdot u_i - K_{loss_i} \cdot \frac{\rho^f}{2} \cdot \sqrt{u_j \cdot u_j} \cdot u_i, \quad (6.31.)$$

ahol:

$$K_{perm_i} = \begin{bmatrix} K_{perm}^S \\ K_{perm}^T \\ K_{perm}^T \end{bmatrix}, \quad K_{loss_i} = \begin{bmatrix} K_{loss}^S \\ K_{loss}^T \\ K_{loss}^T \end{bmatrix}. \quad (6.32.)$$

Az első együttható vektor a térrész permeabilitása és a sebességtől lineárisan függő forrástagot jellemzi, a második a sebességtől négyzetesen függő forrástagot skálázza. Az *S* index az áramlás irányára, míg a *T* index az erre merőleges irányra utal. Esetünkben csak a **lineáris** tagot használjuk, és csupán az **áramlás irányú tagra** lesz szükségünk.

$$K_{loss_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{perm}^T = 0, \quad K_{perm}^S = K. \quad (6.33.)$$

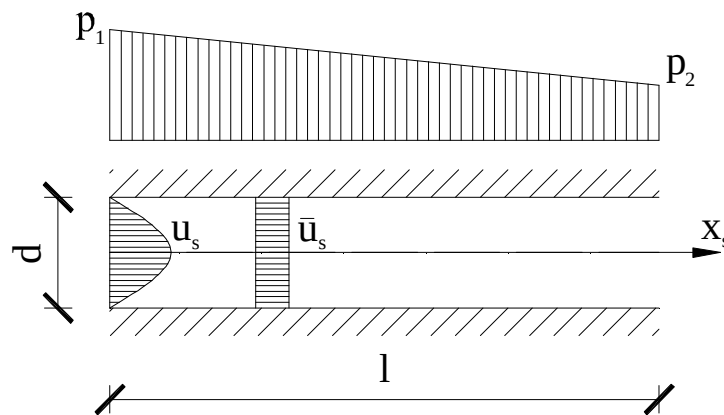
Ezek után az áramlás irányú (ezt jelzi az s alsó index a következő egyenletekben) lendülettranszport egyenlete már a síklapok közt kialakuló, lamináris esetre

$$\frac{\partial p}{\partial x_s} = - \underbrace{\frac{\mu^f}{K_{perm_i}}}_C \cdot u_s = -C \cdot u_s. \quad (6.34.)$$

Lehetőségünk van ezt a C **paraméter**t a hely függvényében megadni, ezzel sima átmenetet érhetünk el a folyadék tartomány és a porózus anyag határán a mezőváltozóknál. Most azonban ezt **a tartomány minden pontjában azonosnak** választom, ugyanis az általunk vizsgált értékekre az adott helyen ez nincs nagy hatással. Megjegyzem, hogy a nyomás egy törés után (differentiahányadosának két irányból vett nullához tartozó határértéke eltér) dominánsan lineárisan csökken a porózus rétegben, a fali nyírófeszültségben nagyobb zavarás jön létre a folyadék hirtelen lassulása miatt. Ezek a szingularitások magasabb fokú polinomokkal kiküszöbölhetők.

6.4.1.3. A NYOMÁSÉRTÉKEK BEÁLLÍTÁSA

Rátérve a modellre, a porózus rétegben a sebesség állandó a kontinuitás egyenlete miatt, így a nyomás a távolság lineáris függvénye, vagyis:



58. ábra – Nyomáseloszlás a porózus rétegben.

$$\frac{p_2 - p_1}{l} = -C \cdot \bar{u}_s, \quad (6.35.)$$

ahol $\bar{u}_s$ a sebesség keresztmetszeti átlagát jelenti.

Itt **két paraméter**t változtathatunk, a $p_2 = p_{out}$ kilépő nyomást, és a C lineáris szűrő ellenállást. Evvel lehetőségünk adódik **transziens esetben a nyomás két szélsőértékének kalibrálására**.

$$\frac{p_{min} - p_{out}}{l} = C \cdot \bar{u}_{min}, \quad (6.36.)$$

$$\frac{p_{max} - p_{out}}{l} = C \cdot \bar{u}_{max}.$$

Tehát a modell paraméterei:

$$C = \frac{p_{max} - p_{min}}{\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}} \cdot \frac{1}{l}, \quad (6.37.)$$

$$p_{out} = \frac{p_{min} \cdot \bar{u}_{max} - p_{max} \cdot \bar{u}_{min}}{\bar{u}_{max} - \bar{u}_{min}}. \quad (6.38.)$$

Pontos meghatározásuk csak iteratív módon lehetséges, mivel általános esetben visszahatnak a sebességeloszlásra is. A továbbiakban ehelyett a szűrő nélkül számított áramlási adatokból határozom meg az értékeket. Szimmetrikus kialakítás esetén azonban az átlagos sebesség független a szűrők paramétereitől, így a kontinuitás egyenletéből meghatározhatók az értékei.

Stacioner esetet vizsgálok, a szűrők belépő keresztmetszetében – vagyis az elágazás kilépő keresztmetszetein – a systolés nyomást írom elő. Ehhez p_{out} -ot a diastolés nyomással egyezőnek választom, és a C értéket számítom a (6.37.) egyenletnek megfelelően.

Szimmetrikus esetben ez független az elágazási szögtől. Változatlan belépő térfogatáram mellett pedig a következő kapcsolatban van az átmérő aránnyal:

$$C = \frac{p_{max} - p_{min}}{D} \cdot \frac{1}{\bar{u}_{in} \cdot 2 \cdot d_1}, \quad (6.39.)$$

A **porózus zóna hosszát** a gyakorlatban bevált méretűre, azaz legalább az átmérő 5-szörösére (itt minden esetben **20 mm**) választottam.

Példaként a 2,9 mm-es kilépő átmérő esetén a három vizsgált nyomásértékhez tartozó szűrőparamétereket a következő táblázat szemlélteti.

p_{min}	[Hgmm]	80	90	100
	[Pa]	10673,3	12007,4	13341,6
p_{max}	[Hgmm]	120	140	180
	[Pa]	16009,9	18678,2	24014,9
L	[mm]	0,02	0,02	0,02
u_{min}	[m/s]	0	0	0
u_{max}	[m/s]	0,45977	0,45977	0,45977
p_{out}	[Pa]	10673,3	12007,4	13341,6
C	[Hgmm]	580360	725450	1160719

59. ábra – A három vizsgált nyomásértékhez tartozó porózus réteg paraméterek (zölddel kiemelve).

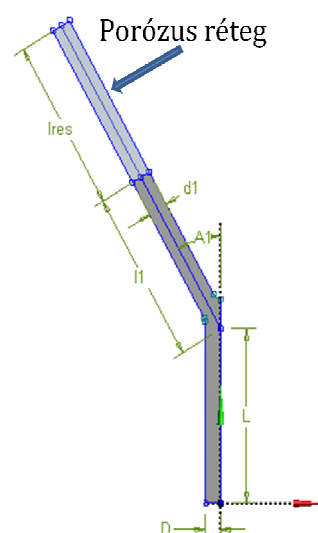
6.4.2. AZ ELLENÁLLÁST IS TARTALMAZÓ MODELL

Ebben a részben a szimmetrikus modell torlóponthi nyomás értékeinek vizsgálatát végzem el. A már eddig is alkalmazott kétdimenziós paramétertérben a maximális nyomás az ellenállás nélküli modell jellegzetességeit mutatja. Az alábbi ábrán a 120 Hgmm-es (16,3 kPa) kilépő keresztmetszetbeli nyomáshoz tartozó értékek láthatók.

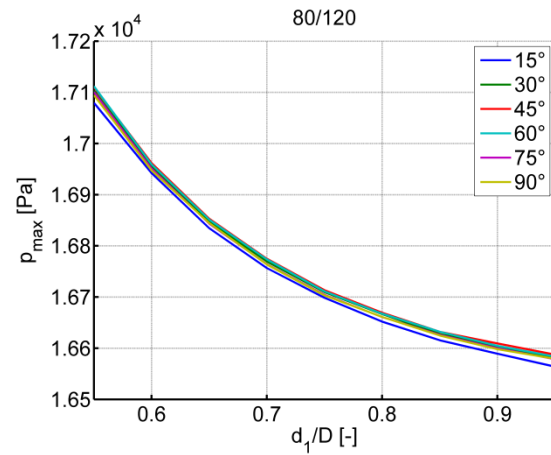
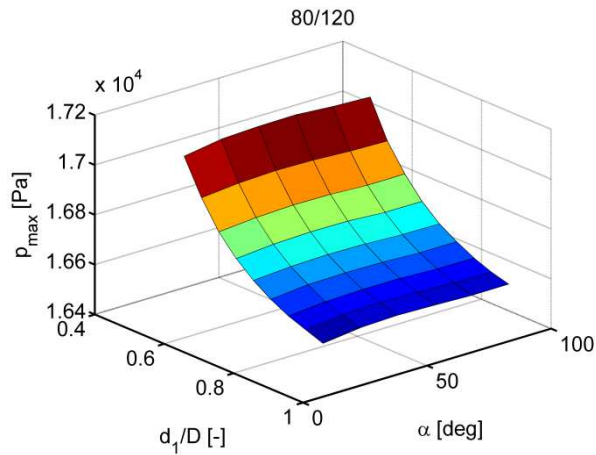
Az elágazási szögtől itt is csekély, azonban kimutatható függést mutat a rendszer. Az ilyen irányú metszeten például a 15°-os elágazáshoz viszonyított változást elemezve kiderül, hogy maximálisan 35 Pa növekedés érhető el, ami 45°-nál jelentkezik. Ez az egyenes szakasz nyomásához viszonyítva 0,2%-ot jelent.

Az átmérőarány változása a már szűrő nélküli modellen is bemutatott 500 Pa körüli növekedést képes előállítani. Ez szintén csupán 3,1%-a az egyenes szakaszon is kialakuló systolés nyomásnak.

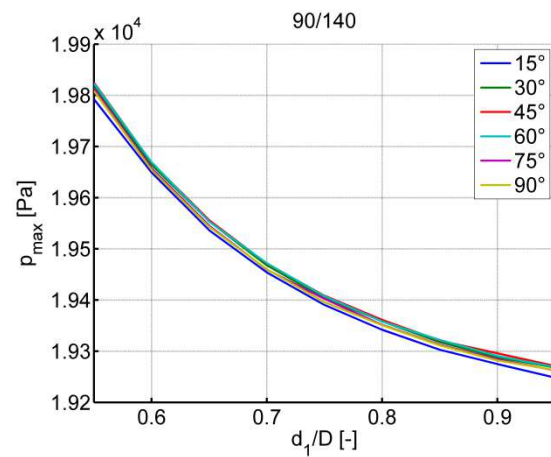
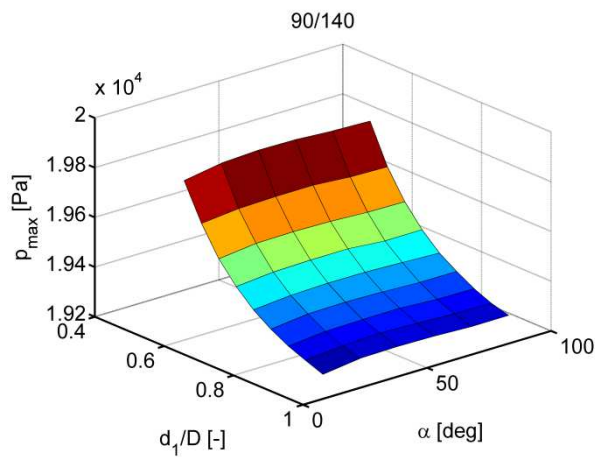
Ugyanezek a megállapítások tehetők a másik két vérnyomásérték esetére is.



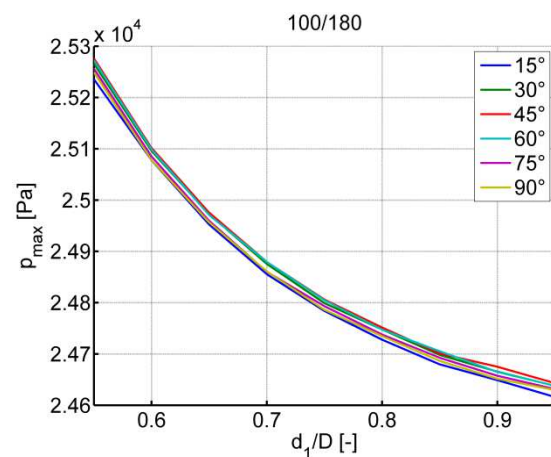
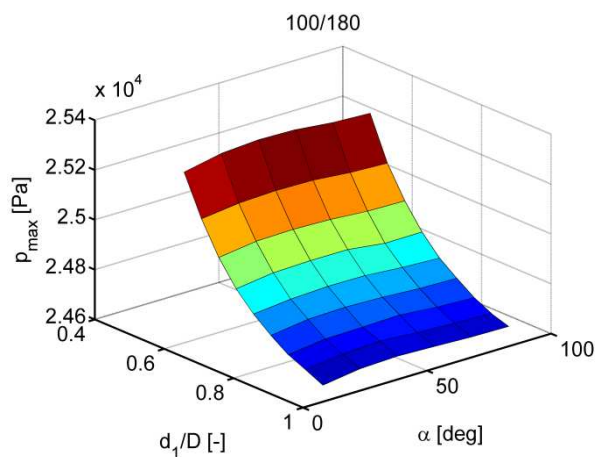
60. ábra - Már az ellenállást is tartalmazó, szimmetrikus kialakítású geometria.



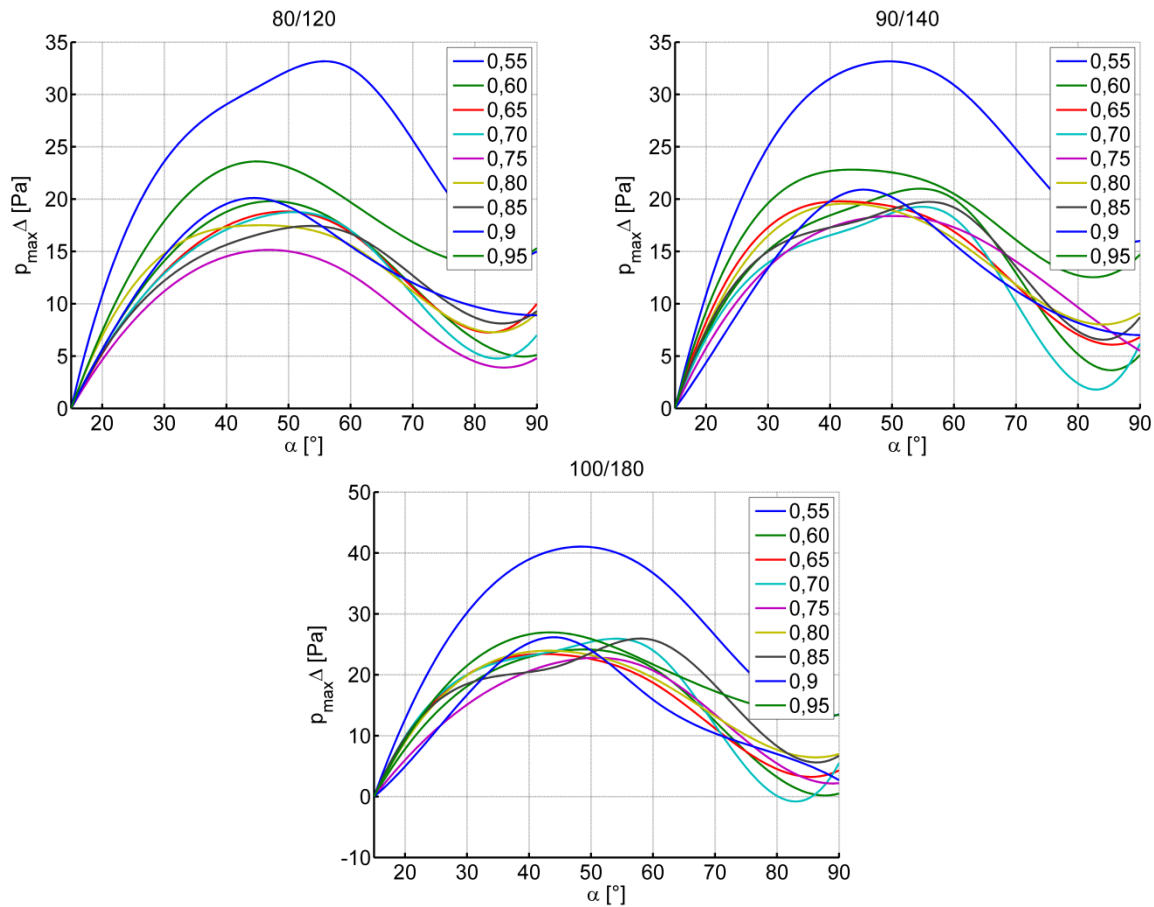
61. ábra - Torlóponthi nyomás a teljes paraméterterben és az állandó szögekhez tartozó metszetben 120Hgmm nyomás esetén.



62. ábra - Torlóponthi nyomás a teljes paraméterterben és az állandó szögekhez tartozó metszetben 140Hgmm nyomás esetén.



63. ábra - Torlóponthi nyomás a teljes paraméterterben és az állandó szögekhez tartozó metszetben 180Hgmm nyomás esetén.



64. ábra - Torlóponthi nyomás változása a szög függvényében adott átmérőarány esetén a három systolés nyomás mellett.

6.5. LOKÁLIS JELLEMZŐK IDŐBELI VÁLTOZÁSA

Az **időbeli változás** követéséhez a peremfeltételeket kell időfüggővé tenni. Esetünkben ez a belépő peremre korlátozódik, ahol a szívciklusnak megfelelő időfüggő térfogatáramot írtunk elő, amihez a Fourier-sor első három tagját alkalmaztam. A sebesség térbeli eloszlását parabola alakban adtam meg, azonban a főág elegendően hosszú ahhoz, hogy a kialakult eloszlás jól közelítse a Womersley-profilt.

A belépő peremen a rá merőleges sebességre vonatkozó előírás:

$$u(x, t) = [u_{\min} + (u_{\max} - u_{\min}) \cdot \text{prof}_t(t)] \cdot \text{prof}_x(x). \quad (6.40.)$$

Itt $u_{\min}=0$ m/s a peremre merőleges sebesség tengelyvonalban vett minimális értéke, $u_{\max}=1$ m/s ugyanennek a maximális értéke $T=0,8$ s a szívciklus periódusideje. A térbeli eloszlást a

$$\text{prof}_x(x) = 1 - \left(\frac{2 \cdot x}{D} \right)^2 \quad (6.41.)$$

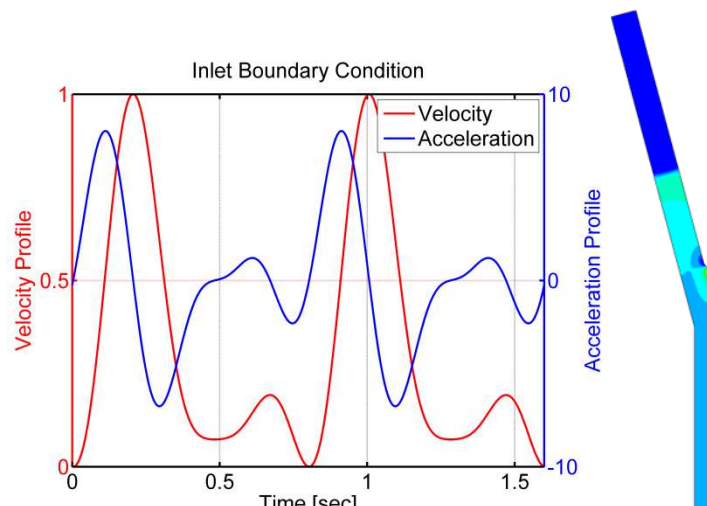
függvény írja le, ahol az origó a főág tengelyében található. Az időbeli változást leíró, már említett Fourier-sor első 3 tagja:

$$\begin{aligned} \text{prof}_t(t) = & 0,3 + 0,343 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} - 1,684\right) + \\ & + 0,254 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot t}{T} + 2,891\right) + 0,084 \cdot \cos\left(\frac{6 \cdot \pi \cdot t}{T} + 1,807\right). \end{aligned} \quad (6.42.)$$

Ennek grafikonja látható a jobb oldali ábrán. A profil a maximumát 0,2066 s-nál éri el.

A numerikus számítást **két szív cikluson** végeztem el, azonban az inicializálásból adódó hibák kiküszöbölése végett az eredményeket csak a második alapján értékelem.

Vizsgáljuk ismét egy konkrét geometria esetét. A rendszer szimmetrikus, és normál (80/120 Hgmm) nyomás értékekkel működik. A kilépő átmérők 3 mm-esek, az elágazási szög 15°.

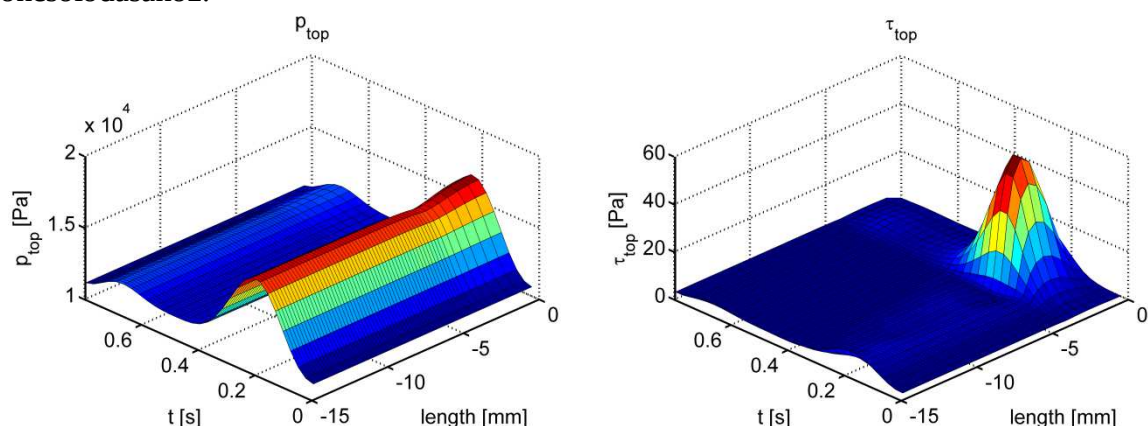


65. ábra – Bal oldalt: a belépő peremen előírt peremre merőleges térbeli sebességprofil időbeli változása (pirossal), és annak deriváltja (késsel). Jobb oldalt: a bemutatott geometria a maximális nyomás kialakulásának pillanatában készített nyomáskontúr ábrával.

A következő ábrák a nyomás és a WSS eloszlását mutatják a felső falon a hely és az idő függvényében.

A nyomás maximuma 0,24 s-nál alakulnak ki mindenhol egyidőben. Az értékek 10,634 kPa és 16,602 kPa közt változnak. A torlóponthoz képest 3,7%-os növekedést mutat. Térbeli gradiense töredéke az időben végbemenő megváltozásának.

A WSS eloszlása jelentős változásokat mutat mind térben, mind időben. A fal kis szakaszán kiugró értékeket (54,2 Pa) tapasztalunk a systole idejének környezetében, amely gyorsan lecseng. Ez a szakirodalmi adatok alapján valószínűsíthetően hozzájárulhat a fal roncsolódásához.



66. ábra - A felső falra ható nyomás (bal oldalt) és nyírófeszültség (jobb oldalt) eloszlása a hely és az idő függvényében egy szív ciklusra és az elágazás felére vonatkoztatva.

6.6. A FAL HATÁSA RUGALMASSÁGÁNAK HATÁSA

Ebben a részben a **fal rugalmasságának** az előzőekben nyert értékekre gyakorolt hatását vizsgálom az FSI technika alkalmazásával stacioner esetben.

6.6.1. A MODELL

A szilárd érfal megjelenése, és a harmadik dimenzió elhagyása miatt az előző **modellek kiegészítésre** szorulnak.

6.6.1.1. AZ ANYAGMODELL

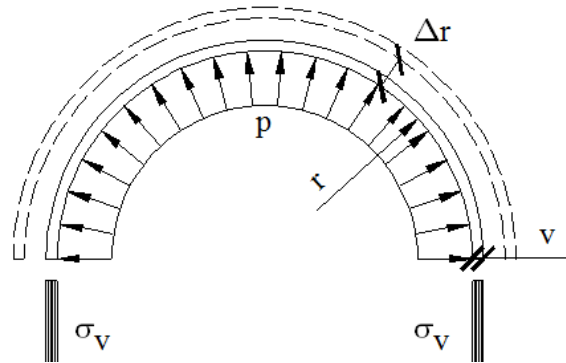
Az érfalat homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagúnak feltételezzük. Az egészséges érfal rugalmassági modulusa $E_v=3,6$ MPa értékűre vehető, Poisson-tényezőjét közel összenyomhatatlannak feltételezve $\nu^s=0,49$ -re vehetjük. A fal vastagsága jelen példában 0,2 mm.

6.6.1.2. A FAL PEREMFELTÉTELEI

A szilárd rész **megfelelő megtámasztásáról** gondoskodnunk kell. Így a modell ki- és belépő peremein az érfal végeinek **eltolódását** minden irányban meggátoltam, valamint a fal teljes vonalában a síkra merőlegesen szintén megtámasztottam. Az érfal további megtámasztása az alábbi elv szerint **rugalmas ágyazással** történt.

A végtelen hosszú, egyenes, vékony falú hengerhéjakra vonatkozó Laplace-Frank-

képlet ((6.43.) egyenlet) alapján kis nyúlások esetére levezethetünk egy helyettesítő ágyazási tényezőt, amellyel az érfal görbületét figyelembe tudjuk venni a kétdimenziós modellünk esetében is.



67. ábra - A helyettesítő rugalmas ágyazás merevségének meghatározása.

$$\sigma_v = \frac{2 \cdot r}{2 \cdot \nu} \cdot p. \quad (6.43.)$$

Az érfal rugalmassági modulusa E_v . Ekkor a Hooke-modell alapján a fal érintő irányú megnyúlása és az azonos irányú feszültség közti összefüggés:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_v}{E_v}. \quad (6.44.)$$

Geometriai összefüggések alapján:

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot (r + \Delta r) \cdot \pi - 2 \cdot r \cdot \pi}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{\Delta r}{r}. \quad (6.45.)$$

A lineáris ágyazás merevsége ezek alapján:

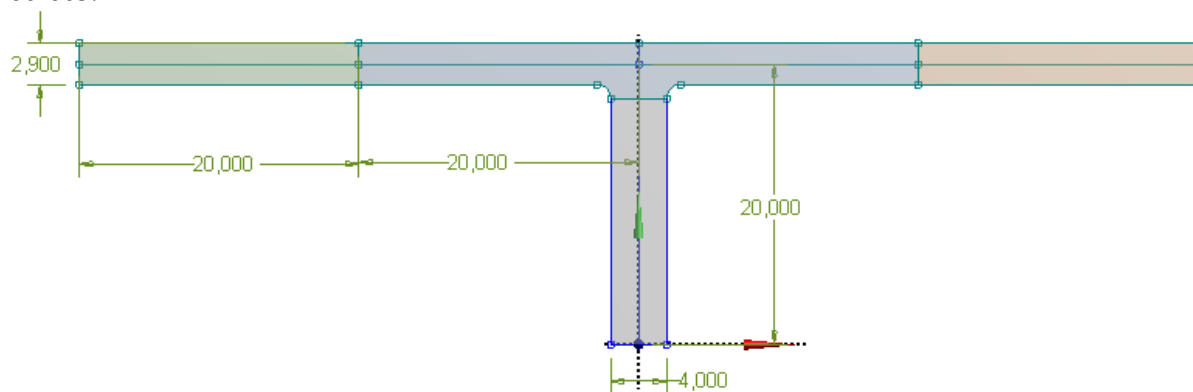
$$k = \frac{p}{\Delta r} = \frac{\frac{\sigma_v \cdot \nu}{r}}{\frac{\sigma_v}{E_v} \cdot r} = \frac{\sigma_v \cdot \nu}{r} \cdot \frac{E_v}{\sigma_v \cdot r} = \frac{\nu \cdot E_v}{r^2}. \quad (6.46.)$$

Esetünkben az ágyazási tényező $k=8,56 \cdot 10^7$ N/m³, $r=2,9$ mm-rel számolva.

A rendszert körülvevő **liquor cerebrospinalis nyomásának** figyelembevételétől most eltekintünk, ugyanis a várt elmozdulásokból adódó rugalmas ágyazási nyomás ennél nagyságrendekkel nagyobb.

6.6.2. A GEOMETRIA

A modellt egy példán keresztül szeretném szemléltetni, melynek geometriája itt látható.



68. ábra - A rugalmas falú modell geometriája.

6.6.3. A PARAMÉTEREK

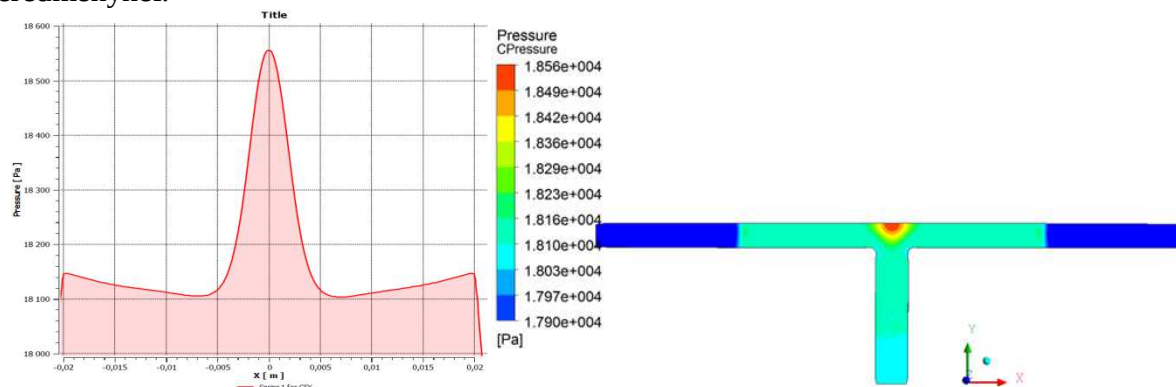
Az áramlási térnek a szilárd testtel nem érintkező peremein az eddigiekkel megegyező előírásokat tesszük. A porózus zóna paramétereit úgy állítjuk be, hogy a magas vérnyomás 140 Hgmm-es (18,7 kPa) értékét érjük el a mellékágak végein.

A numerikus számítás során a kapcsolt iterációs ciklusok száma 15, a relaxációs faktor 0,75 volt. Az áramlási tér megoldására a kapcsolt lépéseken belül 30 iterációt írtam elő.

6.6.4. AZ EREDMÉNYEK

6.6.4.1. A FALRA HATÓ NYOMÁS

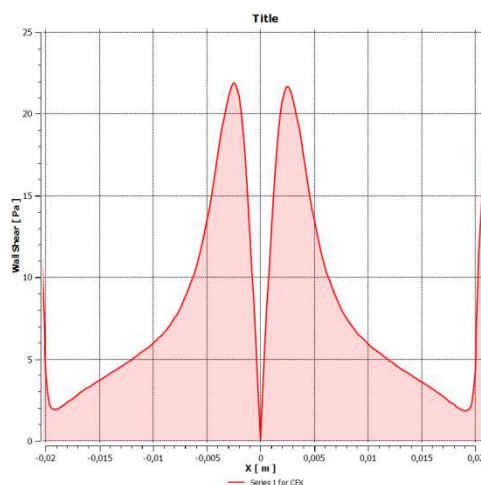
A felső falra ható nyomás maximuma ebben az esetben is az egyenes csőszakaszhoz képest megközelítőleg 500 Pa többletet mutat. Összességében a rugalmas modellen kapott torlóponti nyomás (18,6 kPa) 3,3%-kal nagyobb a merev falú hasonló modellen számított eredménynél.



69. ábra - A felső falra ható nyomás eloszlása és a teljes áramlási tér nyomáskontúrja.

6.6.4.2. A NYÍRÓFESZÜLTSÉGEK

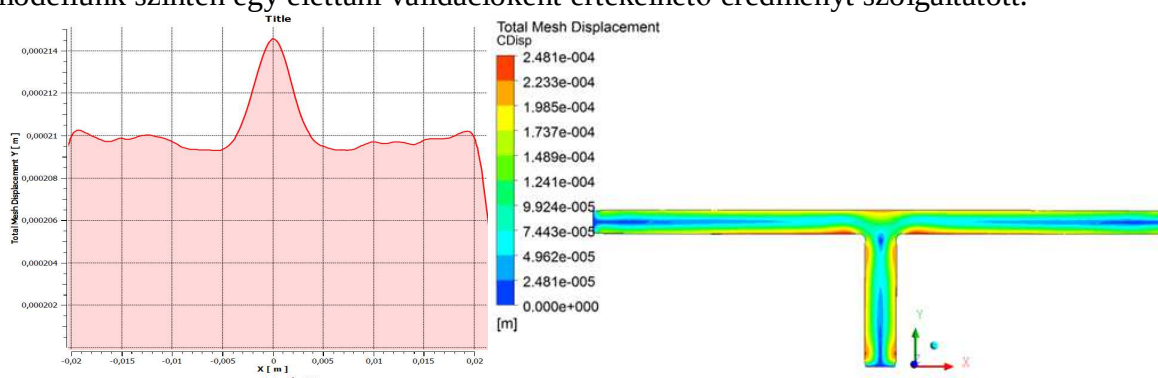
A 50. ábra táblázatában található merev falra vonatkoztatott 24,3 Pa értékkel összevetve azt találjuk, hogy a rugalmas fal 21,9 Pa-ra, vagyis 10%-kal csökkentette a nyírófeszültségi csúcs értékét.



70. ábra - A felső falra ható WSS eloszlása.

6.6.4.3. AZ ELMOZDULÁSOK

A felső fal maximális eltolódása 0,2145 mm, ami az ér átmérőjének (2,9 mm) 7,4%-a. Ez jól egyezik a valóságban tapasztalt értékekkel (5-8%), így a kétdimenziós rugalmas falú modellünk szintén egy élettani validációként értékelhető eredményt szolgáltatott.



71. ábra - A felső fal és a teljes háló eltolódása.

6.6.4.4. A FALBAN ÉBREDŐ FESZÜLTSÉGEK

Vizsgáljuk meg a fal belső pontját. Ennek y-irányú normálfeszültsége megegyezik a rá ható nyomással, az x-irányú normálfeszültség a héjelemek membránszerű viselkedéséből adódó húzásából és a lemezszerű viselkedésből adódó hajlításból adódik. A z-irányú normálfeszültséget a rugalmas ágyazásból, számítható vissza. Ezek nem pontosan a feszültségi főirányok, ugyanis nyírófeszültség is átadódik a falra.

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 1,2 \text{ kPa}, & \sigma_{22} &= 18,4 \text{ kPa}, & \sigma_{33} &= 266,3 \text{ kPa}, \\ \sigma_{12} &= 22 \text{ Pa}, & \sigma_{13} &= 0 \text{ Pa}, & \sigma_{23} &= 0 \text{ Pa}.\end{aligned}\tag{6.47.}$$

Az egészséges érfal egytengelyű húzószilárdsága $\sigma_{\text{lim}} = 3 \text{ MPa}$ köré tehető. Ez egy nagyságrenddel nagyobb, mint a feszültségek értékei, így kijelenthetjük, hogy az egészséges érfal a fent vizsgált körülmények között rövidtávon ép marad. A teljes élettartam alatt ható folyamatos pulzáció okozta hatások azonban ronthatják az érfalat, amelynek következménye lehet az értágulat kialakulása, majd annak esetleges ruptúrája.

7. ÖSSZEFOGLALÁS

7.1. ÁLTALÁNOS ÉRTÉKELÉS

A dolgozatban a **népesség 5%-át érintő** betegség, az agyi aneurysmák témakörével foglalkoztam, amellyel kapcsolatban rengeteg **nyitott kérdéssel** találjuk szembe magunkat.

Jelen munka első feladata ennek – az orvosi, áramlástan és szilárdságtani tudományterületek, valamint a numerikus módszerek ismeretét igénylő – **interdiszciplináris** kutatási területnek a kiterjedt **háttérismereteinek összefoglalása** azzal a céllal, hogy ez **később stabil alapként** felhasználható és hivatkozható legyen a további kutatások során. Ezek a 2. és a 3. Fejezetben találhatók.

Ezt követően a 0. Fejezetben az **eddig elvégzett kutatások eredményeit** és az **új irányzatokat** mutattam be. Tartalmát és célját tekintve elhelyeztem a jelenlegi munkát ezek közt. **Újdonságot** az általam végzett munka **szisztematikussága** és a megvizsgált széles **paramétertartomány** ad, ugyanis a kutatók mindegyike egyedi geometrián, néhány változtatás hatását vizsgálta.

7.2. AZ EREDMÉNYEK

A 6.2. pontban elvégzett vizsgálatok szerint a falra ható feszültségértékek eloszlása alapján egy egyelőre igazolásra váró **hipotézist** állíthatunk fel az aneurysmák kialakulásának folyamatára, amelynek megvizsgálásához azonban feltétlenül szükséges egy új biológiai hatásokat is magába foglaló érfal anyagmodell.

A 6.3. pontban megadtam a **főbb bemenő geometriai paraméterek** (elágazási szög, kilépő/belépő átmérő arány) függvényében a vizsgált paraméterek (torlóponti nyomás, maximális fali nyírófeszültség, nyomásesés) eloszlását. A **nyomás** dominánsan a kilépő és a belépő **átmérők arányától**, míg a **fali nyírófeszültség maximuma** az **elágazási szögtől** függ.

Szimmetrikus esetben találtunk egy **optimális geometriát**, ahol az elágazás teljes ellenállása, illetve a falra átadódó lokális feszültségek is minimumot vesznek fel. Ezt összehasonlítva a természetben előforduló kialakításokkal, jó egyezést találunk.

Kijelenthető, hogy a **geometriából adódó többletnyomás** (kb. 500 Pa) jelentősen kisebb akár a normális diastolés nyomásnál (10,9 kPa) is, ugyanakkor a geometria miatti többlet fali nyírófeszültség egy nagyságrenddel is nagyobb lehet az egyenes érszakaszban számítotttnál.

Ezeket felül levezettem egy, a rendszer energia-elnyelési képességét jellemző mérőszám számítási módját.

Ugyanitt megvizsgáltam az elágazási szögekben és a kilépő átmérőkben mutatkozó **aszimmetria hatását**, amely a feszültségi maximum helyeket csekély mértékben átrendezi, a fali nyírófeszültség az adott mellékágban 90°-os elágazás esetén az ellenoldali mellékág elzáródáshoz közeli állapotában a szimmetrikus érték 1,55-szörösére is megemelkedhet. Ugyanilyen körülmények közt a nyomás 1,6-szoros növekedést mutat, ami azonban még így is egy nagyságrenddel a normál diastolés nyomásérték alatt marad.

A 6.4. pontban már a **kilépő peremfeltétel** valóságához közelebbi megadásával a **ténylegesen kialakuló nyomáseloszlást** is elő tudtam állítani. Itt válik szemléletessé, hogy a **geometria hatása a maximális nyomásra csupán néhány százalék**.

A 6.5. pontban a **tranziens** jellegű vizsgáltam, amelynek eredményeképpen megállapítható, hogy az aneurysmák kialakulási helyén a **WSS lokálisan** kiugróan nagy, a

normál falszakaszokon fellépő értéknél **egy nagyságrenddel nagyobb** értéket vesz fel, ami időben és térben nagyon gyors változásokat, **nagy gradiens** értékeket mutat.

A **nyomás** is lokális maximumot mutat, azonban ez a csúcs **csak néhány százalékkal nagyobb** az egyenes érszakaszok falán tapasztalható értékeknél.

A 6.6. pontban rögzített geometriai kialakítás mellett mutattam be egy már **rugalmas falakkal** rendelkező modellt, ami az érátmérő növekedésének mértéke (7,4%) szempontjából a **valóságot jól közelíti**. Ezen a modellen **összehasonlítottam a merev és a rugalmas fal** hatását. A torlóponthi nyomás 3,3%-os növekedést, a fali nyírófeszültség csúcserőértéke 11%-os csökkenést mutatott a rugalmas fal esetében. A **falban** kialakuló **feszültségértékek** vizsgálata alapján kijelenthető, hogy az egészséges érszakasz még kritikus nyomásértékek mellett sem károsodhat, ha csak a pillanatnyi hatásokat vesszük figyelembe.

Ugyanakkor egy **életen át tartó folyamat esetében** már az itt felderített jellemzők is elősegíthetik az aneurysmák kialakulását. Így megállapítható, hogy az **érszűkületek**, vagy az egyik oldali érszakasz elzáródása nagyobb kockázatot jelent az értágulat kialakulása szempontjából is, valamint a **kisebb elágazási szögű** formációkban a nagyobb WSS értékek miatt az érfal károsodásának **fokozott veszélyét rejtik**.

7.3. TOVÁBBI VIZSGÁLATOK

Dolgozatom témája még nagyon sok megválaszolatlan kérdést rejt, amelyeknek elemzése több tudományág kutatóinak szoros együttműködését igényli, így túlmutat a mostani munka keretein.

A jövőben egy PhD kutatás keretei közt szeretnék bővebben foglalkozni a témával. Terveim közt szerepel mindenekelőtt a most bemutatott szisztematikus vizsgálatsorozat továbbvitele és befejezése, így például a paraméterter bővítése például a nyomásprofil módosításán keresztül, illetve a valós áramlási formákat is követni képes 3D-s vizsgálatsorozat elvégzése a most bemutatott mintájára.

A későbbiekben munkáim fő részét az érfal anyagmodelljének vizsgálata jelentené, ahol elengedhetetlen egy – már a biológiai hatásokat is magába foglaló – a hosszú távú ciklikus terhelést is követni képes anyagmodell megalkotása.

8. IRODALOMJEGYZÉK

- Akkas N.:**
1990 Aneurysm as a biomechanical instability problem. *Biomechanical Transport Processes, Plenum Press, ed. Mosora F, 303-311. 1990.*
- Armeniades C.D., Lake L.W., Missirlis Y.F.:**
1972 Histological origin of Aortic Tissue Mechanics: The Role of Collagenous and Elastic Structures, *Applied Polymer Symposium, 1972, Vol. 22, pp. 319-339.*
- Armentano R., Levenson J., Barra J., Fischer E., Breitbart G., Pichel R., Simon A.:**
1991 Assessment of elastin and collagen contribution to aortic elasticity in conscious dogs, *American Journal of Physiology, 1991, Vol. 260, pp. H1870-H1877.*
- Bathe M., Kamm RD.:**
1999 A fluid–structure interaction finite element analysis of pulsatile blood flow through a compliant stenotic artery. *ASME J Biomech Eng* 1999;121:361–9.
- Bojtár I., Nasztanovics F., Paál Gy., Toóth B.:**
2005 Erek angiográfiás képeinek elemzése további feldolgozások céljára, *BME Biomechanikai Kutatóközpont, 2005.*
- Bojtár I., Gáspár Zs.:**
2009 A végelelem módszer matematikai alapjai, *BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, Budapest, 2009.* ISBN 978 963 313 010 0, <http://www.epito.bme.hu/me/htdocs/oktatas/oktatas.php>
- Bojtár I.:**
2010 Mechanika MSc, *BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, Budapest, 2009.* ISBN 978 963 3130094, <http://www.epito.bme.hu/me/htdocs/oktatas/oktatas.php>
- Brisman J.L., Song J.K., Newell D.W.:**
2006 Cerebral aneurysms, *N Engl J Med., Aug. 31 2006.355(9):928-39.*
2010 Neurosurgery for Cerebral Aneurysm, *Medscape Reference, http://emedicine.medscape.com/*
- Bronzino J.D.:**
1995 The biomedical engineering handbook, *Springer, 1995.*
- Campi A., Ramzi N., Molyneux A.J., Summers P.E., Kerr R.S., Sneade M., et al.:**
2007 Retreatment of ruptured cerebral aneurysms in patients randomized by coiling or clipping in the International Subarachnoid Aneurysm Trial (ISAT), *Stroke. May 2007.38(5):1538-44.*
- Carew T.E., Vaishnav R.N., Patel D.J.:**
1968 Compressibility of the Arterial Wall, *Circulation Research, 1968, Vol. 23, pp. 61-68.*
- Cebral J.R., Hernández M., Frangi A.F.:**
2003 Computational analysis of blood flow dynamics in cerebral aneurysms from CTA and 3D rotational angiography image data.
In: Proc of International Con-gress on Computational Bioengineering, Spain, 2003.
- Choung C.J., Fung Y.C.:**
1984 Compressibility and Constitutive Equation of Arterial Wall in Radial Compression, *Journal of Biomechanics, 1984, Vol. 17, pp 35-40.*
- Dawson T.H.:**
1991 Engineering Dsign of the Cardiovascular System of Mammals.
Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall 1991.
- Csandra E., Horváth L., Kontra Gy., Kulka F. :**
1982 Az emberi test. II.kötet. *Gondolat Kiadó, Budapest, 1982.*
- Fergusson G.G.:**
1972 Physical factors int he initiation, growth, and rupture of a human intracranial aneurysm, *J. Neurosurg. 36:666-677,1972.*
- Ganong W.F.:**
1990 Az Orvosi Élettan Alapjai, *Medicina, Budapest, 1990.* ISBN 963 241 783 6
- Greenberg M.S.:**
2001 SAH and aneurysms. In: Greenberg MS, ed. *Handbook of Neurosurgery. 5th ed. Thieme Medical Publishers, NY, 2001:754-803*
- Holzapfel G.A.:**
2000 Nonlinear Solid Mechanics, *Wiley & Sons, Wiltshire, 2000.* ISBN 0 471 82319 8

- Humphrey J.D., Cannham P.B.:**
2000 Structure, Mechanical Properties, and Mechanics of Intracranial Saccular Aneurysms, *Journal of Elasticity* 61:49-81, 2000.
- Johnston S.C., Wilson C.B., Halbach V.V.:**
2000 Endovascular and surgical treatment of unruptured cerebral aneurysms: comparison of risks. *Ann Neurol. Jul 2000*;48(1):11-9.
- Johnston S.C., Zhao S., Dudley R.A.:**
2001 Treatment of unruptured cerebral aneurysms in California. *Stroke*, 2001.32(3):597-605.
- Juvela S.:**
2001 Recommendations for the management of patients with unruptured intracranial aneurysms. *Stroke*, 2001.32(3):815-6.
- Fonyó A.:**
2004 Az orvosi élettan tankönyve, *Medicina*, 2004. ISBN : 9632428455
- Fry D.L.:**
1968 Acute vascular endothelial changes associated with increased blood velocity gradients, *Circ. Res.* 22:165-167, 1968.
- Finol E.A., Di Martino E.S., Vorp D.A., Amon C.H.:**
2003 Fluid structure interaction and structural analyses of an aneurysm model, *2003 Summer ASME Bioengineering Conference, ASME 2003 BED-54*, 2003.
- Foutrakis G., Yonas H., Sclabassi R.:**
1999 Saccular aneurysm formation in curved and bifurcating arteries, *Am J Neuroradiol* 1999;20:1309–17.
- Guyton, Hall J.A.:**
2006 Textbook of Medical Physiology, 11th ed., *Philadelphia, Elsevier Saunders*, 2006. ISBN: 978-1-4160-4574-8
- Holzapfel G.A., Weizsacker H.W.:**
1998 Biomechanical behavior of the arterial wall and its numerical characterization, *Computers in Biology and Medicine*, 1998, Vol. 28, pp. 377-392.
- Holzapfel, G.A. – Gasser, T.C. – Ogden, R.W.:**
2000 A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material modes, *Journal of Elasticity*, 61 (2000), 1-48.
- Holzapfel G.A.:**
2002 Biomechanics of Soft Tissues with Application to Arterial Walls, Advanced School and Workshop on Mathematical and Computational Modeling of Biological Systems, IST, Lisbon, Portugal, June 17-21, 2002
- Hudetz A.G., Monos E.:**
1985 A viscoelastic model of mechanically induced and spontaneous contractions of vascular smooth muscle. *Acta Physiologica Hungarica*, 1985, 65(2), 109-123.
- Imbesi S.G., Kerber C.W.:**
2001 Analysis of slipstream flow in a wide-necked basilar artery aneurysm: Evaluation of potential treatment regimens. *Am J Neuroradiol* 2001;22:721–4.
- Landau L.D.:**
1980 Elméleti fizika VI, Hidrodinamika, *Tankönyvkiadó, Budapest*, 1980. ISBN 963 17 4523 6
- Lashers J.C.:**
2007 The Biomechanics of Arterial Aneurysms, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39:239-319, 2007.
- Liebeskind D.S.:**
2010 Cerebral Aneurysms, *Medscape Reference*, <http://emedicine.medscape.com/>
- Lieber B.B., Livescu V., Hopkins L.N., Wakhloo A.K.:**
2002 Particle image velocimetry assessment of stent design influence on intra-aneurysmal flow. *Ann Biomed Eng* 2002;30:768–77.
- Liou T.M., Liou S.N.:**
1999 A review on in vitro studies of hemodynamic characteristics in terminal and lateral aneurysm models. *Proc. of Nat. Science Council, Republic of China, Part B, Life Sciences* 1999;23:133–48.
- Lee R.M.K.W.:**
1995 Morphology of cerebral arteries. *Pharmacology & Therapeutics*, 66:149–73
- Low M., Perktold K., Raunig R.:**
1993 Hemodynamics in rigid and distensible saccular aneurysms: a numerical study of pulsatile flow characteristics. *Biorheology* 1993;30:287–98.

- Maltzahn, W.W.von, Besdo D., Wiemer W.:**
1981 Elastic properties of arteries: A nonlinear two-layer cylindrical model, *J. Biomech.*, 1981, 14 ,pp. 389-397.
- McKinley M., O'Loughlin V.:**
2011 Human anatomy 3rd ed., *McGraw-Hill, New York 2011*. ISBN 978 0 07 337809 1
- Mokri B.:**
2001 The Monro–Kellie hypothesis: Applications in CSF volume depletion, *Neurology* June 26, 2001 56:1746-1748
- Monos E.:**
2001 Hemodinamika: a vérkeringés dinamikája, *Budapest, Semmelweis Egyetem, ÁOK, 2001*.
- Olufsen M.S.:**
1999 Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries, *Am. J. Physiol.* 276 (*Heart Circ. Physiol* 45): H257–H268, 1999.
- Patankar S.V., Spalding D.B.:**
1972 A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, p. 1787.
- de Pater L., vdBerg J.:**
1964 An electrical analogue of the entire human circulatory system, *Medical and Biological Engineering and Computing*, 1964.2(2):161-166.
- Rhie C.M., Chow W.L.:**
1982 A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation. *AIAA Paper 82-0998*, 1982.
- Röhlich P.:**
2006 Szövektan, *Semmelweis Kiadó, 2006*. ISBN:9789639656468
- Rushmer R.F.:**
1972 Structure and Function of the Cardiovascular System, *Saunders, Philadelphia*, 1972.
- Schievink W.I.:**
1997 Intracranial aneurysms. *New England J Med* 1997.336:28–40.
- Sforza D.M., Putman C.M., Cebal J.R.:**
2009 Hemodynamics of Cerebral Aneurysms, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2009 Jan. 1; 41: 91–107.
- Silver F.H. et al.:**
2002 Viscoelastic Properties of Young and Old Human Dermis: A Proposed Molecular Mechanism for Elastic Energy Storage in Collagen and Elastin, *J Applied Polymer Science* 86: 1978-1985, 2002.
- Steinman D.A., Milner J.S., Norley C.J., Lownie S.P., Holdsworth D.W.:**
2003 Image-based computational simulation of flow dynamics in a giant intracranial aneurysm. *Am J Neuroradiol* 2003;24:559–66.
- Szentágothai J., Réthelyi M.:**
1985 Funkcionális Anatómia. 1-3. kötet, *Medicina Könyvkiadó, Budapest*, 1985.
- Tateshima S., Murayama Y., Villablanca J.P., Morino T., Takahashi H., Yamauchi T. et al.:**
2001 Intraaneurysmal flow dynamics study featuring an acrylic aneurysm model manufactured using a computerized tomography angiogram as a mold. *J Neurosurg* 2001;95:1020–7.
- Tóth B.K., Raffai G., Bojtár I.:**
2005 Analysis of the mechanical parameters of human brain aneurysm. *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 2005, 7(1),pp. 3-22
- Watton P.A.:**
2002 Mathematical Modelling of the Abdominal Aortic Aneurysm, PhD Thesis, University of Leeds, Department of Applied Mathematics, 2002.
- Watton P.A., Ventikos Y., Holzapfel G.A.:**
2011 Modelling Cerebral Aneurysm Evolution, *Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials*, 2011, Vol. 7, pp. 373-399,
- Valencia A, Solis F.:**
2006 Blood flow dynamics and arterial wall interaction in a saccular aneurysm modl of the basiliar artery, *Comp. and Struct.* 84(2006)1326-1337
- Versteeg H.K., Malalasekera W.:**
2007 An introduction to Computational Fluid Mechanics, The Finite Volume Method, 2nd ed. *Prentice Hall*, 2007. ISBN: 978 0 13 127498 3
- Wardlaw J.M., White P.M.:**
2000 The detection and management of unruptured intracranial aneurysms, *Brain*, 2000.123:205-21

Westerhof N. et al.:

1969 Analog studies of the human systemic arterial tree.
 Journal of Biomechanics, 1969.2(2): 121-143.

Weir B., Amidei C., Kongable G., Findlay J.M., Kassell N.F., Kelly J. et al.:

2003 The aspect ratio (dome/neck) of ruptured and unruptured aneurysms.
 J. Neurosurg 2003;99:447-51.

Weizsacker H.W., Pinto J.:

1987 Isotropy and anisotropy of the arterial wall, *Journal of Biomechanics*,
 1987, Vol. 121, No. 6, pp. 477-487.

Wiebers D.O., Whisnant J.P., Huston J. et al.:

2003 Unruptured intracranial aneurysms: natural history, clinical outcome,
 and risks of surgical and endovascular treatment. *Lancet. Jul 12 2003*.362(9378):103-10.

9. FÜGGELÉK

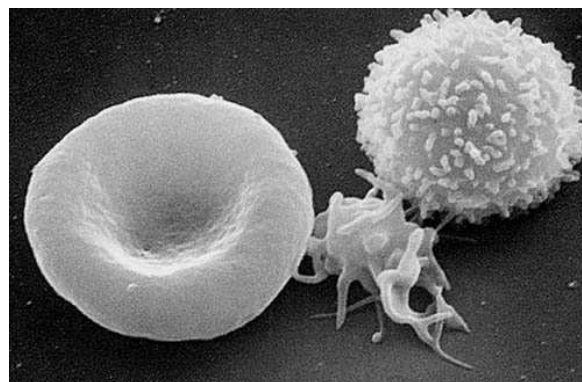
9.1. ÉLETTANI KIEGÉSZÍTÉS

9.1.1. A VÉR ALKOTÓI

9.1.1.1. SEJTES ELEMEEK

A szilárd véralkotók három alaptípusát különböztetjük meg: a **vörös vértestekét** (erythrociták, a szilárd fázis közel 95 tömegszázalékát adják), a **fehér vérsejteket** (leukociták, kb. 0,15%) és a **vérlemezkéket** (thrombociták, kb. 5%). Ezek mindegyike a vörös csontvelőben (átlagosan kb. 1,5 kg található ebből a létfontosságú sejtcsoportból egy felnőtt szervezetében) lévő differenciálatlan hematocitblasztnak nevezett őssejtekben

(progenitor sejtekben) keletkezik. Fejlődésük folyamatát hematocitopoiezisnek nevezik.



72. ábra - A sejtés véralkotók pásztázó elektronmikroszkópos felvétele. Sorrendben balról jobbra: vörös vértest, vérlemezke, fehér vérsejt.

VÖRÖS VÉRTESZTEK (ERYTHROCITÁK)

Ezek a bikonkáv korong alakú sejtanyag nélküli véralkotók a vörös csontvelőben képződnek és a lépben és a májban kerülnek lebontásra. Átlagos élettartamuk 4 hónap. A vér 1cm³-ében nagyságrendileg 5 millió található belőlük. Átmérőjük kb. 7,5 μm, legnagyobb vastagságuk 2,2 μm. Tömegük 65%-a víz. A maradék rész 95%-át a sejt elsődleges szerepét - az **oxigén és széndioxid gázok szállítását** - lehetővé tevő vas tartalmú szállítófehérje (hemoglobin) alkotja, míg a fennmaradó részt a szénsav-anhidráz nevű biokatalizátor (enzim) teszi ki, amely a $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_2\text{CO}_3$ reverzibilis folyamatot katalizálja.

FEHÉR VÉRSEJTEK (LEUKOCITÁK)

A leukociták fő funkciója a szervezetben található, nem oda tartozó idegen anyagok (pl. fertőző organizmusok) azonosítása és eltávolítása, így a **védekező rendszer** fontos elemét adják. Az **azonosítást** az úgynevezett agranulociták (T- és B-limfociták illetve monociták), míg az **eltávolítást** a falósejtek, vagy más néven granulociták (neutrofil, basofil és eosinofil sejtek) végzik. Élettartamuk néhány naptól kezdve akár 10 év is lehet. A vér 1cm³-ében nagyságrendileg 6-8 ezer található belőlük.

VÉRLEMEZKÉK (THROMBOCITÁK)

Ezeknek a sejtörmelékeknek sincs sejtanyagjuk. Átlagos élettartamuk 1-2 hét, méretük megközelítőleg 2-5 μm, koncentrációjuk a vérben 150.000-300.000 db/cm³ között változik. A **véralvadás** folyamatában játszanak fontos szerepet.

9.1.1.2. VÉRPLAZMA

A vérplazma a vérből a hematociták eltávolítása után kapott **sós oldat**. Sűrűsége 1035±5 kg/m³, átlagos dinamikai viszkozitása pedig 0,002 Pa·s. Összetétele: 91 tömegszázalékban víz, 6,5-8%-ban pedig három fő típusú plazmafehérje (albumin, globulinok és fibrinogén). A maradék részt szervesen oldott sók ionjai (Na^+ , K^+ , Ca^{2+} , Mg^{2+} kationok és Cl^- , HCO_3^- , HPO_4^{2-} , SO_4^{2-} anionok, melyek az enyhén lúgos, pH=7,4-es kémhatást szolgáltatják);

nyomelemek; zsírok (koleszterin, foszfolipid, triglicerid, zsírban oldódó A, D, E és K vitaminok, zsírsavak és más lipidek) és szerves szénhidrátok alkotják.

A három fő plazmafehérje csoport közül az első, az **albumin**, a vér ozmotikus nyomásának fenntartásában jut fontos feladathoz, így a kapillárisok bemutatásánál részletezett anyagcsere folyamatok hajtóerejét jelentő Starling-erők egyikeként a sejtközi és a véredényekben lévő folyadékterek közti anyagtranszport optimális működéséért felelős, és különböző hormonok és fém ionok szállítására is képes.

A **globulinok** nagyobb biokémiai molekulákat (zsírokat és szénhidrátokat) és nehézfémeket szállítanak, valamint az immunrendszer szempontjából is fontosak, mivel képesek a falósejteket a szükséges helyre vonzani.

A **fibrinogén** a véralvadás során fontos, így ha a plazmából eltávolítjuk őket, akkor az nem lesz képes megalvadni. Ezt a folyadékot serumnak hívják, sűrűsége $1018 \pm 3 \text{ kg/m}^3$, átlagos dinamikai viszkozitása pedig $0,0015 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

9.1.2. AZ ÉRSZAKASZOK FUNKCIÓI

9.1.2.1. SZÉLKAZÁNEREK

Nyugalmi állapotban a bal kamra egy periódusa alatt 75 ml vért lök ki az aortába. A kamrában a nyomásamplitúdó 120 Hgmm (16,3 kPa), ugyanekkor az aortában és ágaiban már csupán kb. 40 Hgmm-es (5,4 kPa) a nyomáspulzáció a jelentős szintű, 80 Hgmm (10,9 kPa) körüli diasztolés nyomás felett. Ez a szélkázán (Windkessel) funkciónak¹ nevezett nagymértékű **hullámtranszformáció** alapvetően három biomechanikai jellegű tényező együttes hatásának tulajdonítható:

- az aorta billentyűk (szemilunáris billentyűk) szelepszerű működésének,
- az aorta és főágai nagy alakváltozó képességének, valamint
- a követő érszakaszok magas áramlási ellenállásnak.²

Az aortába nagy nyomással érkező vértömeg kitágítja annak falát, így a folyadék mozgási energiájának egy része reverzibilis módon rugalmas energiává alakul. A systolet követően az aorta billentyűi elzárják a visszaáramlás útját, így a diastole alatt összehúzódó szélkázánerekből a vér csak előre képes áramolni. Az áramlás folyamatosságához azonban szükséges feltétel még a követő érszakaszok megnövekedett áramlási ellenállása is, ezt biztosítják az úgynevezett prekapilláris rezisztenciaerek.

9.1.2.2. PREKAPILLÁRIS REZISZTENCIAEREK

A nagy artériákat követő kis artériákra és arteriolákra, az úgynevezett prekapilláris rezisztenciaerekre esik a teljes perifériás nagyvérköri ellenállás fele. Ebből kifolyólag az artériás szakaszt magas és alacsony nyomású részekre osztják. A kapillárisok kezdetéig az artériás középnyomás 100 Hgmm-ről (13,6 kPa) 30 - 35 Hgmm (4,1 - 4,8 kPa) körüli értékre csökken.

Szerepük kettős. A megelőző érszakaszok szempontjából általános **tágulásuk csökkenti, míg szűkülésük növeli az artériás nyomást**. Az utánuk következő területek vérellátását is hasonlóképp szabályozzák. **Tágulásuk fokozza a vérellátást és a kapilláris nyomást, míg szűkülésük csökkenti** azokat. Megállapítható, hogy a vérnyomást és a

¹ Nevét a régi falusi kovácsműhelyekben a tűz táplálására alkalmazott eszköztől kapta. Ez a berendezés egy lüktető légáramot biztosító fűtő után kapcsolt bőrsák volt, amelynek feladata a fent említett erekkel analóg módon az áramlás folyamatosságának biztosítása, és a pulzáció amplitúdójának csökkentése volt.

² Ezt 1680-ban Borelli kísérletileg is alátámasztotta egy vízbe merített rugalmas falú ballont valamint különböző átmérőjű és rugalmasságú csöveket alkalmazva. Így szakaszos maradt az áramlás nagy átmérőjű rugalmas kivezetőcső és szűkített átmérőjű merev falú cső esetén, azonban a kis átmérőjű rugalmas falú csőszakasz már megfelelően működést produkált.

szövetek vérellátását a vérerek lumenjének méretén keresztül szabályozó biológiai effektusok ezen a szakaszon fejtik ki hatásukat a leghatékonyabban.

Az ellenállás meredek növekedésének két fő oka van. Az egyik, hogy az érszakaszok elágazódásai ezen a szakaszon követik egymást a legsűrűbben. A másik pedig annak a morfológiai mérések alapján tett megállapításnak a következménye, hogy az elágazások mellékágainak együttes keresztmetszeti területe csupán 1,2-1,3 szorosa a főágakénak.

Az összenyomhatatlan newtoni folyadékokra felírt két egyenletből – a tömegmegmaradás; és az impulzustranszport egyenletéből levezethető a csőben laminárisan áramló folyadéokra ható nyomásgradiens és a keresztmetszeti térfogatáram közti összefüggést leíró Hagen-Poiseuille egyenlet alapján belátható, hogy legalább $\sqrt{2}$ szeres területnövekedés szükséges ahhoz, hogy a csőszakaszok eredő ellenállása ne növekedjen¹.

9.1.2.3. PREKAPILLÁRIS SPHINCTEREK

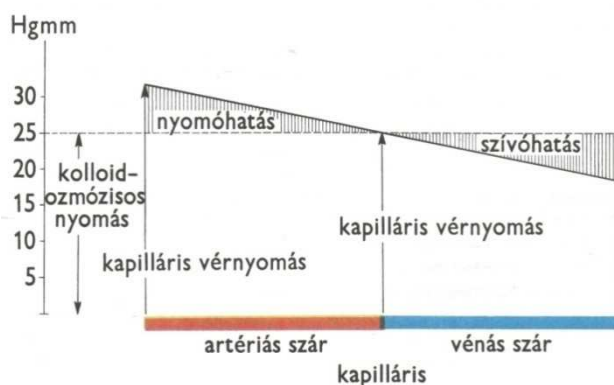
A nagyvérköri kapillárisok bemenete körül keskeny, néhány simaizomsejtből álló gyűrű helyezkedik el, amelyek spontán periodikus aktivitást mutatnak (percenként néhány ciklussal). E sphincterek tevékenysége - melynek vazomóció a neve - határozza meg egy adott pillanatban a nyitott kapillárisok számát. Ennek következtében nyugalmi körülmények között az összes nagyvérköri kapillárisnak legfeljebb 25%-a van egyszerre nyitva, s a mikrocirkuláció nagyobb része sőt funkciót betöltő mikroereken, metarteriolákon át zajlik. Intenzív szöveti aktivitás hatására (pl. a vázizomzatban fizikai munka kapcsán) az előbbi arány elérheti a 80-90%-ot oly módon, hogy a vazomóció nyitott fázisának időtartama jelentősen megnő a lokálisan felszabaduló anyagcseretermékek (metabolitok) hatására.

Ezek szintén kettős funkciót látnak el. Az első a homeosztázis fenntartása érdekében a kapillárisokig eljutó pulzációk, egyenetlenségek hatásának csökkentése, a második pedig a szövetek hirtelen **megnövekedett anyagcsere igényére való gyors reakció** lehetősége.

9.1.2.4. KAPILLÁRISOK

A szöveti **anyagcsere lebonyolítása** ennek az ércsoportnak a feladata. Ebből a szempontból funkcionálisan ide tartoznak még az ezt követő posztkapilláris venulák is, amelyek kezdeti szakaszán még a szövetek anyagcsere termékei bejuthatnak a véráramba (reszorpció). A keringő vértérfogatnak csupán 5%-a jut a kapillárisok szakaszára egy adott időpillanatban, mégis a molekulák kicserélődése a szövetközi (intersticiális) és a véredényekben lévő (intravaszkuláris) folyadékter között döntően ezen a részen

valósul meg. Ezt a folyadékterek statikus nyomásából és a kolloidozmotikus nyomásából adódó különbségek, az úgynevezett Starling-erők hajtják. Ennek sematikus vázlatát mutatja a jobb oldali ábra, ahol jól látható, amint a kapillárisok hossza mentén csökkenő hidrosztatikusnyomás-különbség és a közel állandó kolloidozmotikus nyomáskülönbség eredőjeként egyensúlyközeli helyzetben a filtráció reszorpcióba vált.



73. ábra - A molekulák kicserélődését hajtó Starling-erők szemléltetése (Csandra [1982]).

¹ Ez a megjegyzés csak a csőszakaszok ellenállásáról ad információt, nem veszi figyelembe az elágazás geometriai veszteségét.

A 7-8 μm átmérőjű vörösvértestek csupán deformált állapotban képesek átjutni a nagyvérköri kapillárisokon. Így két vörösvértest és a köztük lévő vérplazma dugószerűen halad előre, ezt **bólusz-áramlásnak** nevezzük. Az átjutási idő átlagosan 1 másodperc körül van.

9.1.2.5. VENULÁK

A kapillárisok gyűjtőerei a venulák. Számuk körülbelül 2-3-szorosa az arterioláknak, és átmérőjük is nagyobb, így az ellenállásuk jelentősen kisebb. Mégis legfontosabb szerepük a kapillárisok kifolyási ellenállásának szabályozása, ezért posztkapilláris rezisztenciaereknek is nevezik őket. A kapillárisokon belüli vérnyomást, ezáltal a véredényekből való ki- és beáramlást irányító (filtrációs, illetve reszorpciós) erők nagyságát a pre- és posztkapilláris áramlási rezisztencia pillanatnyi aránya döntően meghatározza, tehát a venulák alapvető szerepet játszanak a vérkeringési rendszer fő funkciójának, az **anyagkicserélődésnek a szabályozásában**.

9.1.2.6. SHÖNT-EREK

Ez az érszakasz anyagcsere funkcióval nem rendelkezik. Az arteriolákat és a venulákat kötik össze direkt módon. A bőr egyes területein (pl.: ujjak, fülkagyló) fordulnak elő nagy számban és a **test hőszabályozásáért** felelősek.

9.1.2.7. VÉNÁK

Ezek a venulákat követő **gyűjtőerek**, vagy kapacitáserek. A keringő vértérfogat 60 – 70%-a itt található. Rendszerük egy **pufferszerű** vérraktárként fogható fel, amely képessé teszi a szervezetet a teljes vérkészlet akár 25%-a elvesztésének gyors kompenzálására, és a megfelelő artériás nyomás biztosítására.

9.1.3. AZ ÉRFAL RÉTEGINEK RÉSZLETES FELÉPÍTÉSE

9.1.3.1. TUNICA INTIMA

Ez az érfal legbelső rétege, és az egyetlen, amely az egész érrendszerben megtalálható. Belülről egyetlen endothelsejt réteg, az érbelhám határolja, amely egy vékony alapmembránon (basal lamina) helyezkedik el. Ez a sejtréteg érintkezik közvetlenül a vérrel, és könnyíti annak áramlását.

Egészséges esetben az érfal mechanikai tulajdonságaira nincs jelentős hatása, azonban az egyik leggyakoribb érrendszeri megbetegedés, az érlemezsedés (arteriosclerosis) során ez a réteg megvastagszik, merevvé válik, ezáltal a teljes érfal elveszti rugalmasságát, a lumen beszűkül, sérülékenyebb lesz, ellenállása megnő és vérrögződést eredményezhet.

Fő szerepe mechanikai és kémiai hatásokra reagálni képes biológiai funkciójában rejlik. Felületén a különböző receptorok egyrészt az áramlás okozta mechanikai hatásokra (nyomás, fali nyírófeszültség és ezek változása), másfelől a kémiai ingerekre aktív biológiai válaszreakciókat képesek adni, az előbbiek pontos mechanizmusa még ismeretlen. Megjegyzem, hogy további kutatási terveimben nagy fontossággal bírnak ezek közül például a lokálisan megnövekedett oldalnyomás hatására kialakuló lumenszűkítő effektusok, vagy az arteriolák és venulák szintjén jelentős hatású vazomotoros (kémiai ingerek hatására bekövetkező értágulat vagy szűkület az érhálózat ellenállásának beállítására) funkciók.

9.1.3.2. TUNICA MEDIA

Az érfal középső rétege. Simaizom sejtekből, kollagén rostokból és elasztin molekulákból épül fel. A diffúziót segítő hézagokkal ellátott (fenesztrált) elasztikus lemezek

(laminae elastica) a mediát egymástól jól elkülönülő koncentrikus, helikálisan futó kollagén rostokkal erősített gyűrűkké osztják fel. Az intimától a belső rugalmas réteg (membrana elastica interna - MEI), az adventitiától a külső rugalmas réteg (membrana elastica externa - MEE) választja el, melyek a szívhez közeli elasztikus artériákban jól megfigyelhetők azonban a perifériák felé haladva, a muszkuláris artériákban már alig különböznek a laminae elasticától.

Mechanikai szempontból ez az érfal legjelentősebb része. A lapos emelkedésű csavarvonalakat képező elasztin, kollagén és simaizom rostok szerkezetét terhelhetővé és rugalmassá teszik.

9.1.3.3. TUNICA ADVENTITIA

Az érfal legkülső rétege. Kollagént és elasztint termelő sejtekből (fibrocytákból), azok differenciálódás előtti állapotát jelentő sejtekből (fibroblaszt), szövettani alapállományból és vastag kollagén rostokból áll. Ezt a réteget laza kötőszövet veszi körül.

Ebben a rétegben is helikális elhelyezkedésű hullámos kollagénrostok találhatók. A simaizom sejtek hiánya miatt tehermentes állapotban ez a rész a mediához képest sokkal kevésbé merev, és csak nagyobb nyomásszinten képes terhek felvételére, amikor is a rostok kiegyenesednek, és merev köpenyszerű csöként viselkednek, meggátolva ezzel az artéria túlzott tágulását.

A vénák falának legnagyobb részét alkotja, és ahol vastag (artériák és vénák esetében egyaránt), ott önmagában kisebb vérereket is tartalmaz (vasa vasorum), amely a media simaizomsejtjeit látja el vérrel.

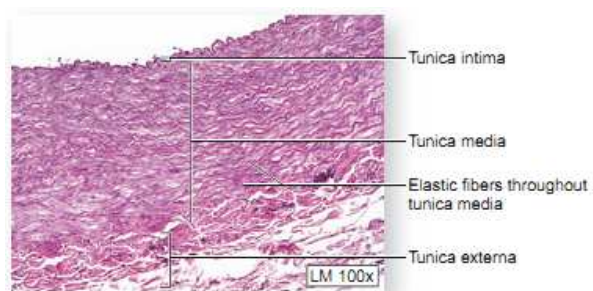
9.1.4. AZ ÉRSZAKASZOK SPECIÁLIS TULAJDONSÁGAI

Az érszakaszok funkcióinak és az érfal alkotórégeinek megismerése után térjünk rá az egyes érszakaszokat jellemző speciális felépítésekre a szisztémás keringés példáján, az artériákon, a kapillárisokon, végül a vénákon végighaladva. A hangsúlyt ebben a részben az artériák falainak mechanikai tulajdonságaira helyezzük, amelyet a három fő falalkotó réteg megléte, illetve mennyisége és egymáshoz viszonyított aránya határoz meg.

Az oxigéndús friss vér a bal kamrából kiindulva az artériás rendszerbe kerül, ami az aortától egészen az arteriolák végéig tart. Ez a rész két jól elkülöníthető részre, a rugalmas és az izmos falú artériák szakaszára bontható. A verőerekben mindhárom falalkotó megtalálható és fontos szerephez jut, egyedivé azonban a vastag media réteg és lokálisan azok elasztikus és simaizom rost aránya teszi őket. A kapillárisok falát már csak a belső intima réteg alkotja. A vénákban újra mindhárom gyűrű megjelenik, azonban a media réteg elvékonyodva.

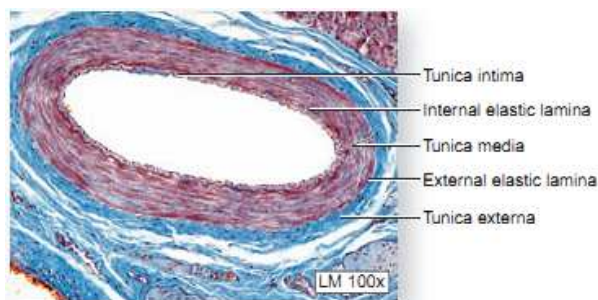
Patológiai megfigyelések alapján az artériák fala vastag, szabályos kör alakú, és holttestekből (cadaverekből) kiszeparálva is megtartja formáját, valamint vér nem marad benne. Ezzel szemben a vénák fala vékony, lumenje (keresztmetszete) lapított, és kiszeparálva elveszti tartását, valamint általában vér marad benne.

A szívhez legközelebbi funkcionális érszakaszt a nagy átmérőjű **rugalmas falú artériák** (pl.: aorta, carotis) képezik. Ezen az érszakaszon a nagy nyomáspulzációt a szélkázán funkció mérsékli oly módon, hogy a vér systolés mozgási energiája az érfal tágulása révén rugalmas potenciális energiává alakul. Ennek megfelelően itt a media réteg meglehetősen vastag, és összetételében 30-40, koncentrikus, nagy nyúlásokat is elviselő elasztikus rost réteg dominál, míg simaizomsejtből viszonylag kevesebb található.



74. ábra - Rugalmas falú artéria (McKinley [2011])

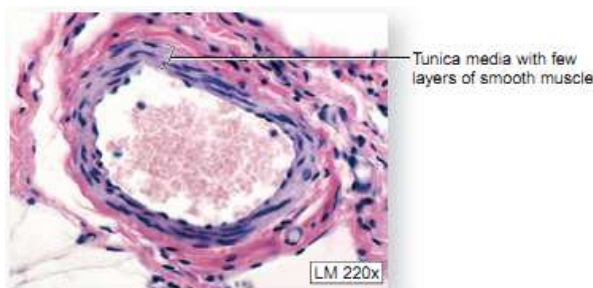
A perifériák felé haladva a nagy rugalmas artériák **muszkuláris** válnak, amint a media elasztikus rétegeit fokozatosan elvesztik. Végül általában két réteg marad csak, a mediát az intimától és az adventitiától elválasztó membrana elastica interna, illetve externa, bár az agyi erekben ez utóbbi általában hiányzik. Ugyanakkor néhány



75. ábra - Muszkuláris falú artéria (McKinley [2011])

rendezetlen elasztikus rostszál található a körkörös lefutású simaizomsejtek közt, de ezek már nincsenek rétegekbe rendeződve, vagyis a media réteg majdnem teljes egészében simaizom sejtekből áll. Ezeknek az összehúzódnását és relaxációját idegi akciók és az érbelhamban keletkező vazoaktív anyagok szabályozzák. Így képes betölteni fő szerepét, a keringési rendszer ellenállásának szabályozását és a pulzáló áramlás folytonossá tételét.

Az artériákat követő prekapilláris rezisztenciaerek, az **arteriolák** felépítése hasonló. Itt a tunica media néhány simaizom rost rétegre csökken, és az adventitia is jelentéktelenné válik.

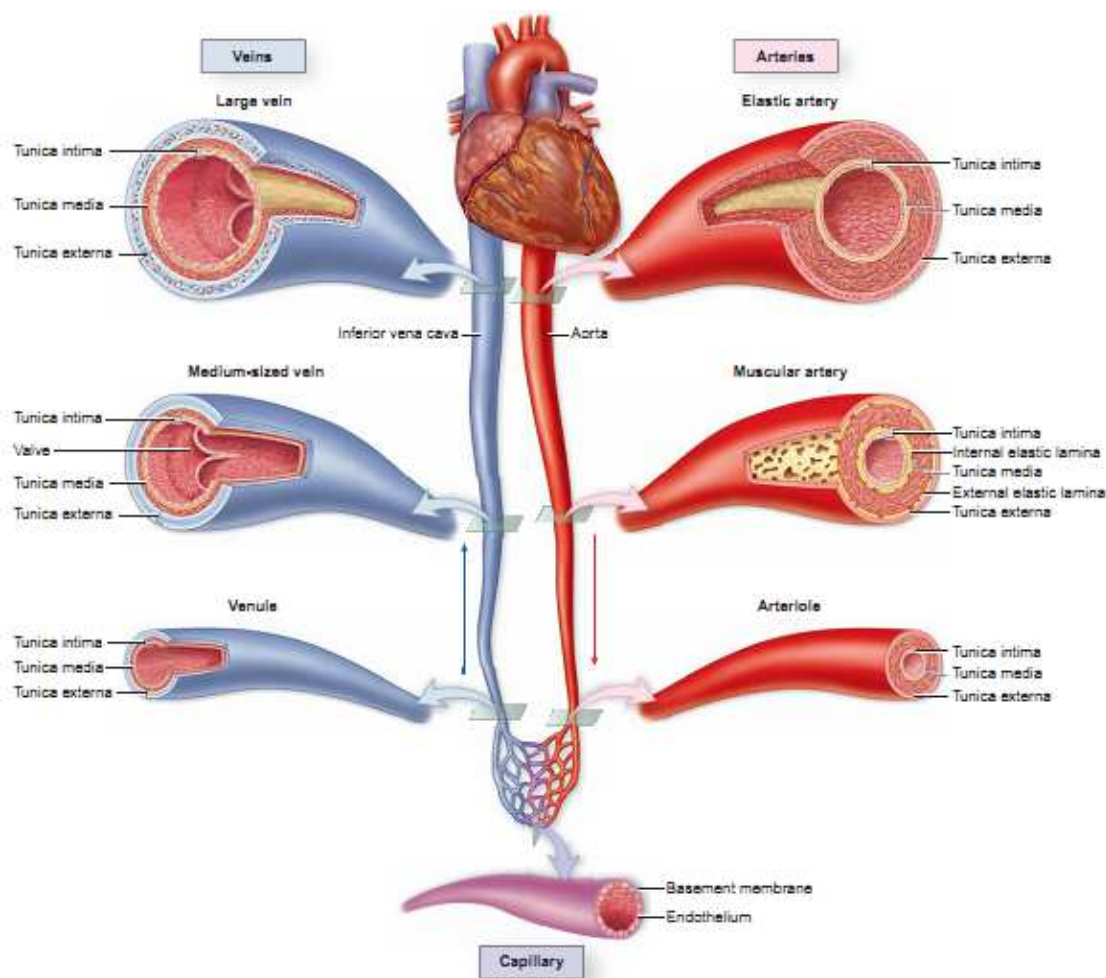


76. ábra - - Arteriola (McKinley [2011])

A kapillárisok szintjén már csak az intima található meg, fala általában egyetlen endothelsejt rétegből és a körülötte elhelyezkedő bazális membránból áll, így téve lehetővé az anyagcserét.

A gyűjtőerek falai közösen tárgyalhatók. Általában mindhárom alkotóréteg megtalálható bennük, azonban a media réteg jóval vékonyabb az artériákénál és a simaizom sejtek sem jutnak fontos szerephez, így az artériáknál jóval tágulékonyabbak. Bennük helyenként véna billentyűk találhatók a vér egyirányú áramlásának biztosítására.

A következő ábra a fenti értípusok jellemző felépítését szemlélteti.



77. ábra – Az egyes értípusok falainak jellemző felépítése, és az alkotók arányai. (McKinley [2011])

9.1.5. AZ ANEURYSMÁK TÜNETEI ÉS VESZÉLYEI

Az aneurysmák többsége **tünetmentes** egészen a felhasadásukig, akkor viszont nagyon **magas mortalitási és morbiditási aránnyal** párosulnak. Ez a két mennyiség mutatja meg a betegséghalálos kimeneteleinek arányát és a szövődmények kialakulásának arányát az előfordulások számának viszonyában. Az érfal tágulatok ruptúrája agyvérzéshez¹ vezet. Az agyvérzést elszenvedett betegek 10%-a meghal, mielőtt a kórházba jutna, 50%-a pedig egy hónapra rá. A 40%-nyi túlélő közel fele esetében jelentős szövődmények lépnek fel. Ezt a kóros esetet tehát nagyon fontos megelőzni.

Egy még meg nem repedt, tünetmentes aneurysma ruptúrájának valószínűsége nagyon sokáig ismeretlen volt, és évi 1-2%-ra becsülték. Az 1998-ban megjelent óriási volumenű és jelentőségű tanulmányban (ISUIA² [1998]) műtéti beavatkozás nélkül 2621 alanyt vizsgáltak a ruptúra kockázatának felmérésére. A retrospektív tanulmányt öt évre rá kiegészítették az 1692 alanyt érintő prospektív résszel. Jelenleg ennek eredményeit használják az orvosok a klinikai praktikumban a kezelés szükségességének és módjának megítélésére. Eszerint az előzőleg agyvérzést nem szenvedett betegek körében a 7 mm-nél kisebb átmérőjű, az anterior keringési részben található tágulatok rendkívül kevés, csupán évi 0,05%-a hasad fel. Ezzel szemben a 10 mm-nél nagyobb, a poszterior keringésen elhelyezkedő érzsákok vagy a már rupturát elszenvedett betegek esetében ez az arány 0,5%-ra nő.

¹ Az agyvérzés 80-90%-át aneurysmák felhasadása okozza, 5% daganatos, míg 5-15% idiopátiás eredetű.

² International Study of Unruptured Intracranial Aneurysms.

9.1.6. AZ ANEURYSMÁK KEZELÉSE

9.1.6.1. AZ ANEURYSMÁK FELISMERÉSE

A jelenleg a klinikai gyakorlat számára is elérhető fejlett orvosi képalkotó eljárások jelentős segítséget nyújtanak az aneurysmák felismerésében, a kezelésről való döntés meghozatalában, és a beavatkozás végrehajtásában. Ezeket foglalom össze a következőkben *Bojtár et al. [2005]* tanulmánya alapján.

ORVOSI KÉPALKOTÓ ELJÁRÁSOK

Az érrendszer feltérképezéséhez alkalmazott eszközöket kétféle szempont alapján csoportosíthatjuk. Az első, hogy a módszer képes-e az **erek közvetlen vizsgálatára**, vagy valamilyen segédanyagot, kontrasztanyagot igényelnek. Eszerint megkülönböztetünk **közvetlen vagy közvetett módszereket**. A második szempont az alkalmazott eljárást lehetővé tevő **fizikai jelenség alapelve** (részecskesugárzás, elektromágneses gerjesztés, mechanikai hullám elnyelő képesség, Doppler-effektus). Ez szintén két fontos alcsoportra az **ionizáló és az ilyen hatást nem okozó módszerekre** osztható, melyeket biológiai következményeik miatt érdemes megkülönböztetni. Nézzük ezeket részletesen.

KÖZVETETT, IONIZÁLÓ MÓDSZEREK

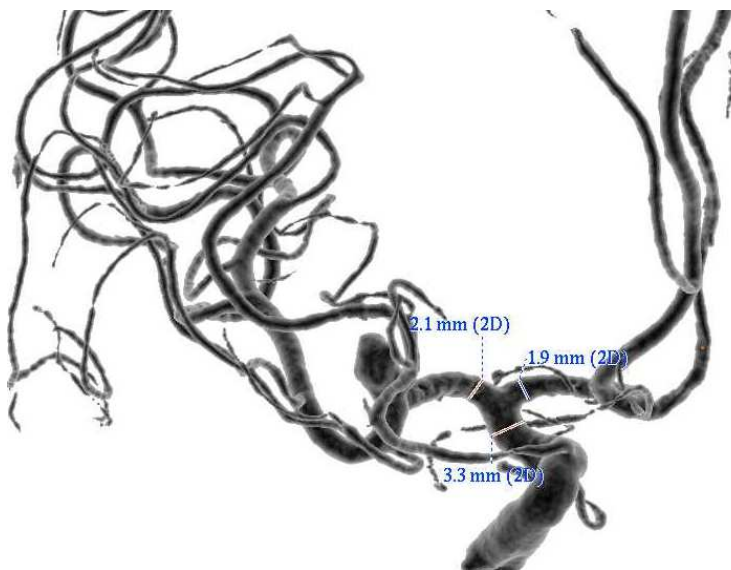
Az egyik legrégebbi, legegyszerűbb, és a mai napig széles körben alkalmazott módszer a **röntgenkép** készítése. A jelenséget Wilhelm Conrad Röntgen fedezte fel 1895-ben, 1901-ben Nobel-díjjal jutalmazták érte. A módszer lényege, hogy a katódsugárcső fűtött pozitív töltésű elektródjából - melyet katódnak hívnak – kilépő elektronok egy fémlapnak ütköznek, annak elektronjait gerjesztik, és ezek újra stabil állapotba kerülésük során kvantált energiacsomagokat, adott hullámhosszú elektromágneses sugárzást bocsátanak ki. Ez maga a röntgensugár, amely a test egyes szövetein áthaladva különböző mértékben nyelődik el. Az átjutó, szűrt sugárzást egy arra érzékeny film segítségével detektálhatjuk, és képet kaphatunk a vizsgált testrészeiről. Ezek kétdimenziós felvételek, amelyek kontraszt anyagok bevitel nélkül alkalmatlanok a gyakorlati alkalmazásra, ugyanis a vér, az érfal és a környező szövetek elnyelőképessége közel azonos.

Ezt kiküszöbölendő általában jódtartalmú oldatot juttatnak az érrendszerbe, melynek elnyelőképessége mérhetően különbözik a lágy szövetekétől, így már a vizsgálatokra alkalmas módszert kapunk, bár itt sem közvetlenül az érrendszerről, hanem a benne lévő folyadékoszlopról kapunk információt. Ezt az érfestéssel kiegészített röntgensugárzást alkalmazó módszerek csoportját közös néven **angiográfiának** hívják. A módszer további finomításra szorul, mivel most a csontok elnyelőképessége esik közel a kontrasztanyagéhoz. Ezt feloldhatjuk **digitális subtrakciós angiográfiás** (digital subtraction angiography - DSA) módszerekkel, ahol a festett állapotban készült felvételtől digitálisan, képpontonként kivonják a kontrasztanyag nélkül készített képet, így a képeken végül csak a kontrasztanyag látható. A módszert mozgó szervek, mint például a szív esetén nem lehet alkalmazni.



78. ábra - Hagyományos kétdimenziós DSA felvétel egy basilaris csúcsban kifejlődött aneurysmáról (Neurosurgery for Cerebral Aneurysm, Medline)

Ugyanezen a módszeren alapul, de már háromdimenziós képek készítésére is alkalmas a **számítógépes rétegfelvétel** (computed tomography - CT). Ezt az eljárást 1979-ben fejlesztette ki Godfrey Hounsfield, és ezzel forradalmasította a diagnosztikát. Ez alapvetően egy képfeldolgozó eljárás, ahol kétdimenziós (erek vizsgálata esetében általában 2 mm vastagságú) szeletek segítségével építenek fel egy háromdimenziós modellt, melyet egy egyenletesen haladó vizsgálati asztal körül, hozzá vonatkoztatva spirál pályán haladó röntgencső folyamatos képeket készít. Az áramló vér feltérképezéséhez itt is



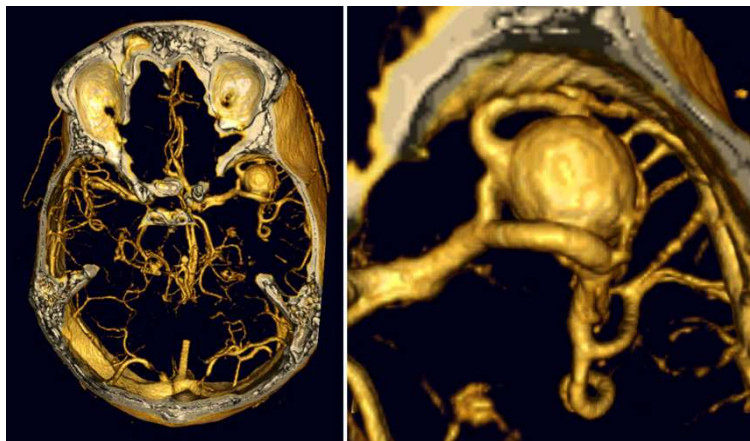
79. ábra - Háromdimenziós CTA felvétel a carotis bifurcationról. (OITI)

szükséges kontrasztanyag bejuttatása, ez a módszer a CT angiográfia.

A CT vizsgálat egy speciális esete, az **egységes energiaszintű fotonok kibocsátásán alapuló számítógépes rétegfelvétel** (single photon emission computed tomography - SPECT), ahol a sugárforrás nem a testen kívül, hanem a véráramban található, ugyanis belégzéssel vagy befecskendezéssel gyorsan bomló izotópokat juttatnak a véráramba. Ennél a módszernél jobb felbontású képeket kaphatunk a pozitron kibocsátásos rétegfelvételekkel (positron emission tomography - PET), amely csak abban különbözik az előző módszertől, hogy itt pozitron sugárzó izotópokat juttatnak a véráramba.

KÖZVETETT, NEM IONIZÁLÓ MÓDSZEREK

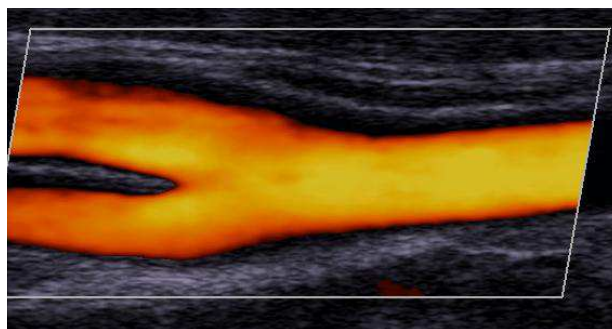
Ide a **mágneses magrezonancián alapuló képalkotó eljárások** tartoznak (nuclear magnetic resonance imaging - MRI), melynek alapelvét 1946-ban fogalmazták meg, azonban orvosi alkalmazása a '70-es évekig váratott magára, mivel a számítástechnikai háttér nem volt megfelelő hozzá. Bár a módszer elvileg alkalmassá tehető az érrendszer közvetlen vizsgálatára is, a kontrasztanyag nélküli felvételek rendkívül érzékenyek az áramlási formációkra, ezért ebben az esetben is paramágneses kontrasztanyagot (gadolinium kelát, vagy vas-oxid szemcsék vizes oldatát) juttatnak az érbe. A módszer hátránya, hogy nem alkalmazható minden esetben, és a fém implantátumok hamis jeleket okozhatnak.



80. ábra - Háromdimenziós MRA felvétel egy jobb oldali carotis bifurcatioban kialakult aneurysmáról. (Brain Aneurysms, Medline)

KÖZVETLEN, NEM IONIZÁLÓ MÓDSZEREK

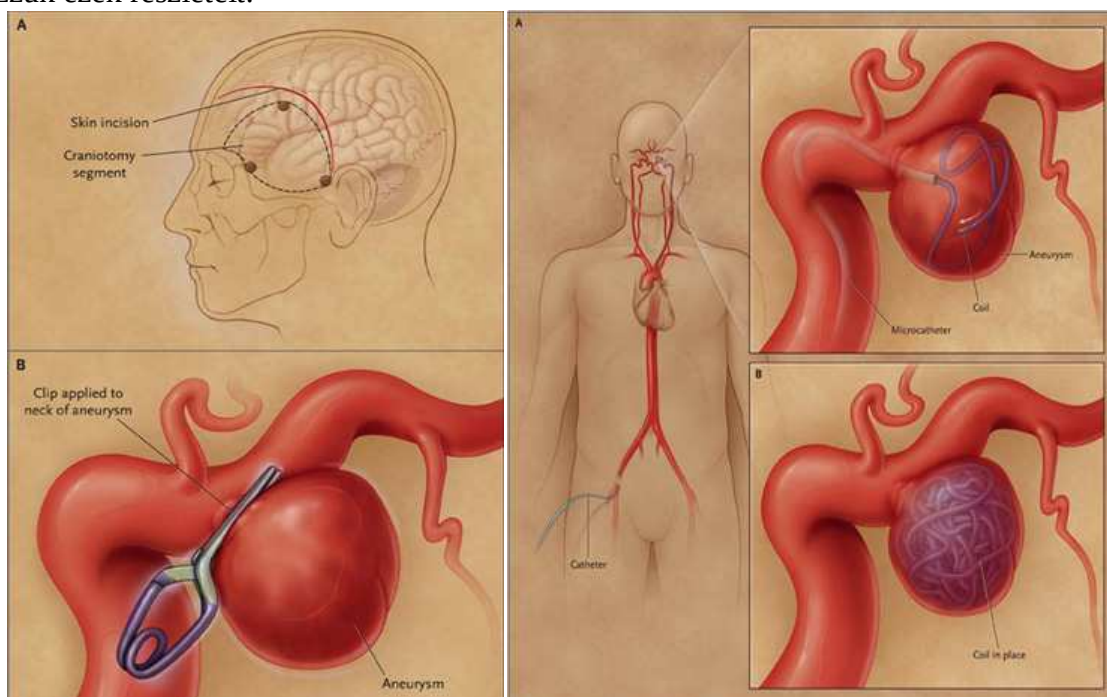
Ez a csoport az ultrahangvizsgálati módszereket mutatja be, ezek az eljárások a különböző szövetek eltérő mechanikai hanghullám visszaverő illetve átbocsátó képességén alapul. A Doppler-elv felhasználásával a kibocsátott, és a vér szilárd elemeiről visszaverődő hullám frekvenciáinak különbségéből meghatározható az áramlás sebességeloszlása. A hullámforrás lehet a testen kívül, azonban katéter segítségével elhelyezhető az éren belül is (intravascular ultrasound –IVUS), amely kisebb területről jobb képminőséget biztosít, azonban jóval komplikáltabb célba juttatni. Legnagyobb előnye, hogy alkalmas az érfalak, és annak elváltozásainak közvetlen ábrázolására, azonban hátránya, hogy jelenleg nem elegendően pontos a többi módszerrel összehasonlítva. Ma többnyire csupán a nyaki verőér és a mellkasi-aorta vizsgálatára használják.



81. ábra - angiográfiai felvétel a carotis communis elágazásáról. (American College of Cardiology)

9.1.6.2. KEZELÉSI LEHETŐSÉGEK

Ha a neurológus a beavatkozás mellett dönt, két eljárás áll rendelkezésére. Az első a craniotómiai sebészeti beavatkozás, a második pedig a katéteres módon végzett beavatkozás. Nézzük ezek részleteit.



82. ábra - Agyi aneuryszmák kezelési lehetőségei. (Neurosurgery for Cerebral Aneurysm, Medline)

Bal oldal: A koponya felnyitásával járó sebészeti beavatkozás, a tárgulat nyaki részének elszorítása.

Jobb oldal: A tárgulat kitöltése, és eltömítése katéteres úton felhelyezett Guglielmi-spirál alkalmazásával.

SEBÉSZETI BEAVATKOZÁS

Ez a módszer nagyobb műtér tekint vissza. A koponya sebészeti úton történő felnyitásával jár, így hozzáférhetővé válik az érszak. Ezután egy – a későbbi MRI felvételek készítésének lehetőségét megtartva – nem mágnesezhető **szorítócsipeszt** helyeznek a tárgulat nyaki részére, elzárva ezzel a vér útját a bejutástól. Így megszüntethetők a fal felhasadását

okozó kedvezőtlen áramlási viszonyok. Ha a nyak elszorítása nem lehetséges, léteznek más módszerek is, bár ezek csak szükségmegoldások lehetnek. Ilyen például egy a basilaris szakaszon létrejövő orsó alakú tárgyat, amelyet természetes vagy mesterséges anyagokkal **körbecsavarnak**. Esetleg elképzelhető a tárgyat előtti és az azt követő érkeresztmetszet **elzárása**, ilyenkor azonban biztosítani kell az elzárt rész utáni szövetek vérellátását például egy nagyon komplikált műtéttel, EC-IC bypass létesítésével.

KATÉTERES BEAVATKOZÁS

Az elmúlt évtizedekben az érben vezetett katéteres (endovaszkuláris) módszerek alkalmassá váltak aneurysmák kezelésére. Bár elsőként az érzsákot tápláló érszakasz ballonnal történő elzárását végezték, ezt gyorsan felváltották az aneurysmák térfogatának kitöltésével járó eljárások. Ezek közül is először kihajtogatható ballonnal hajtották végre a műtéteket, majd 1990-től egy olasz neurológus, Guido Guglielmi alkalmazott először egy, azóta róla elnevezett emlékező fémből készült platinaszálat (Guglielmi Detachable Coil - GDC). Ezt egy artérián keresztül feljuttatott vezetőcsövön (katéteren) keresztül helyezték a tárgyatba, ahol, elősegítve a véralvadást, szintén képes volt elzárni az aneurysmát. Az anyagválasztás azért esett a platinára, mert rendkívül hatékony elektrotrombózis létrehozásában. A vér testes elemei negatív töltéssel rendelkeznek, a szál jelenti a pozitív elektródot, így magához vonzza azokat és véralvadáshoz vezet. A legfontosabb előny azonban az, hogy a platina elektród nem oldódik be a véráramba.

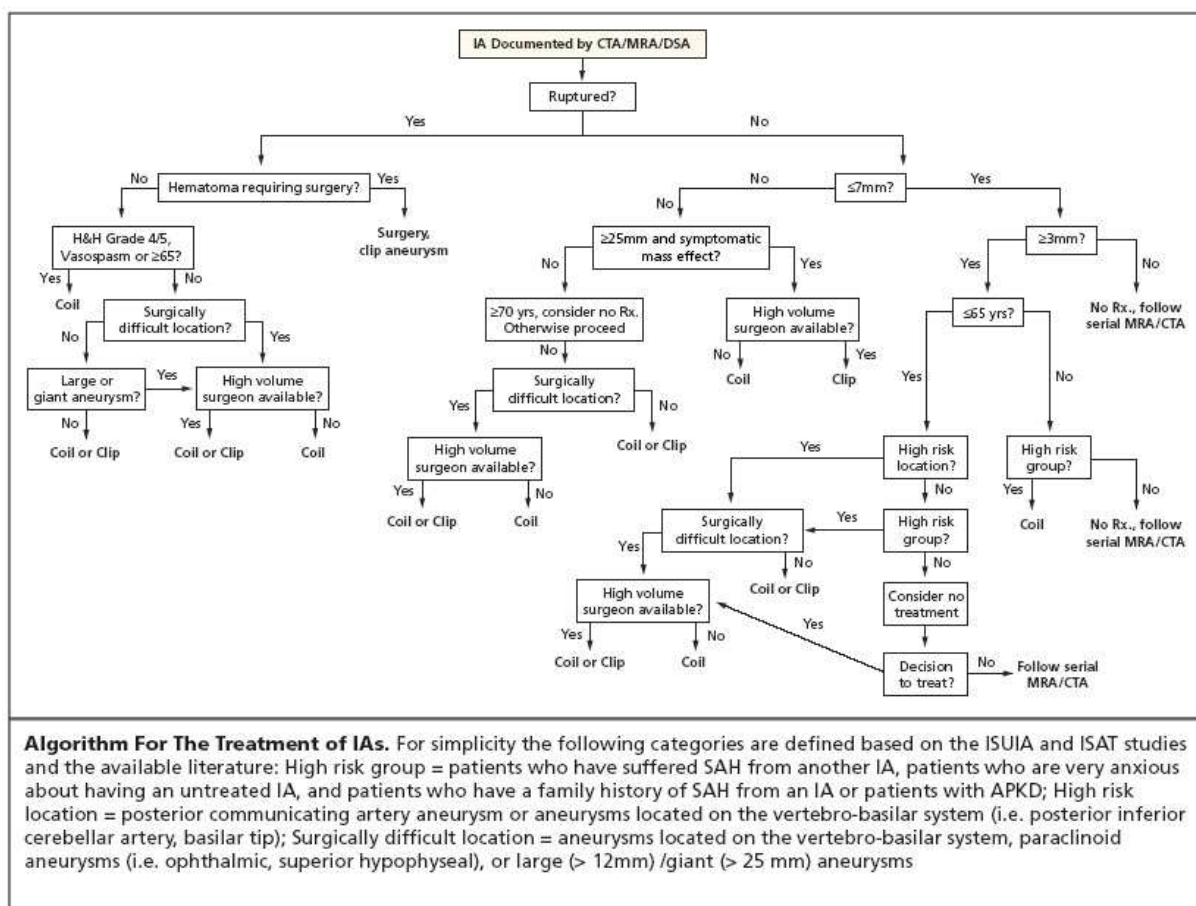
KOCKÁZATOK

Mindkét módszer jelentős kockázattal jár, ez függ a betegről, az aneurysmától és a sebésztől is. A sebészeti beavatkozás esetén a mortalitási és morbiditási arányok 4-10,9% illetve 1-3% között változnak *Johnston* [2000] és *Campi* [2007] cikkei alapján. Ugyanezek az értékek katéteres beavatkozás esetén 3,7-5,3% és 1,1-1,5% között változnak *Johnston* [2001] és *Juvela* [2001] cikkei alapján.

9.1.6.3. DÖNTÉSI FOLYAMAT

Az orvos az aneurysma diagnosztizálása után három lehetőség közül választhat, az első a beavatkozás elhagyása, és a **rendszeres megfigyelés** elrendelése, a második a **sebészeti**, a harmadik pedig a **katéteres beavatkozás** elvégzése. A döntési folyamatára az alábbi vázlaton található.

Ruptúrált aneurysmák esetén egyértelmű a műtét szükségessége, azonban még fel nem hasadt érzsákok esetében ez nem így van, ugyanis néha a beavatkozás kedvezőtlen kimenetelének valószínűsége nagyobb lehet, mint a tárgyat természetes felhasadásának esélye. A döntést jelen állapot szerint objektív elvek alapján pusztán az **aneurysma átmérőjének, elhelyezkedésének, a beteg életkorának és előéletének** függvényében, statisztikai adatok alapján hozhatják meg az orvosok. Persze a gyakorlatban szubjektív tényezők is beleszólhatnak ebbe. Az aneurysma kutatások egyik ága ezt a döntési eljárást hivatott továbbfejleszteni, azonban ehhez a jelenség megértése elengedhetetlen. Ezekről a törekvésekről a Jelenlegi kutatási irányzatok című fejezetben részletesen szó fog esni.



83. ábra - Agyi aneurysmák orvosi kezelésének folyamatábrája
(Neurosurgery for Cerebral Aneurysm, Medline)

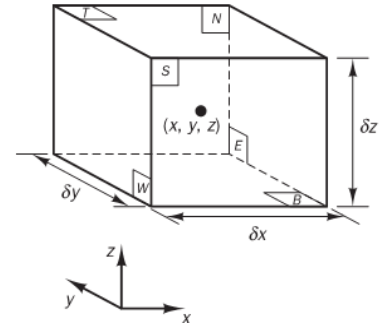
9.2. TRANSZPORTEGYENLETEK

Ebben a pontban a **transzportegyenletek** részletes levezetését adom meg olyan alakban, hogy az a peremfeltételekkel és az állapotegyenletekkel kiegészítve matematikailag határozott feladatra vezessen. Ez a téma a hidromechanika alapjainak tekinthető, így az alapvető szakkönyvek mindegyike foglalkozik vele, azonban éppen emiatt gyakran csak felületesen átsiklanak néhány részlet felett, valamint a levezetések során többnyire az integrál-átalakítási tételekkel operálnak. Az ez iránt érdeklődő olvasónak *Landau [1980]* könyvét ajánlom. Most egy másik utat szeretnék követni, az egyenletek **differenciális alakjához** ragaszkodva, amely jobban illeszkedik a numerikus módszerek szemléletébe, az egyenletek fizikai hátterére koncentrálna. Ez lehetőséget teremt a két alapvetően alkalmazott numerikus megoldási technika, a véges térfogatok és a véges differenciák közti különbségek és hasonlóságok megvilágítására. A szemléletesség érdekében a kontinuitás, a mozgás és energiaegyenletek átalakítása során hagyományos **mátrix-aritmetikai jelölést** alkalmaztam, és csupán az anyagmodell figyelembevételénél éltem a könnyebbiséget nyújtó **indexes jelölésmóddal**, melyről részleteibe menően, mégis jól összefoglalva olvashatnak *Holzapfel [2000]* könyvének első fejezetében.

A továbbiakban egy **elemi hasábot** fogunk vizsgálni az alábbi, a diszkretizációs eljárás során bevett, konvencionális jelölésekkel:

Az elem középpontjának koordinátái (x,y,z) , az oldallapok a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. A hasáb infinitezimálisan kicsiny, így a mezőváltozók értékét az oldallapokon a középpontra felírt Taylor-sor lineáris tagjának erejéig vesszük figyelembe.

Az **öt transzportegyenlet** sorrendben a tömeg a lendületvektor három komponense és a teljes mechanikai energia megmaradását fejezi ki.



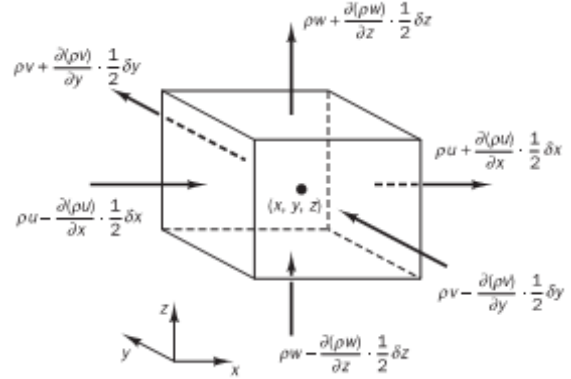
84. ábra - Elemi hasáb a diszkretizáció során alkalmazott konvencionális lap elnevezésekkel. (N-North, S-South, E-East, W-West, T-Top, B-Bottom)

9.2.1. TÖMEGTRANSZPORT

Elsőként a kontinuitás levezetésével kezdjük a transzportegyenletek sorát, ugyanis ezt a továbbiakban fel tudjuk használni. Euleri leírásban végzem a számításokat, mert ez a szemlélet fog előkerülni a véges térfogatok módszerénél is. Ebben az esetben sem diffúzióval, sem térfogati forrástaggal nem kell számolnunk, a mérlegegyenlet tehát a tömeg kontroll térfogatbeli időegység alatti megváltozásának és az ugyanekkor a térfogatba áramló tömeg egyenlőségét mondja ki. Mivel a hasáb geometriája időben állandó, a térrész tömegének növekedése:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot (\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z) \quad (F.1.)$$

A határoló felületeken kilépő tömegáram az alábbi ábra alapján:



85. ábra - Az elemi hasáb oldallapjain kilépő tömegáramok.

$$\begin{aligned} & \left[\rho \cdot u_x - \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right] \cdot \delta y \cdot \delta z - \left[\rho \cdot u_x + \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right] \cdot \delta y \cdot \delta z + \\ & + \left[\rho \cdot u_y - \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right] \cdot \delta x \cdot \delta z - \left[\rho \cdot u_y + \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right] \cdot \delta x \cdot \delta z + \\ & + \left[\rho \cdot u_z - \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right] \cdot \delta x \cdot \delta y - \left[\rho \cdot u_z + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right] \cdot \delta x \cdot \delta y. \end{aligned} \quad (F.2.)$$

A tömegmegmaradás elve szerint az 1.14. és az 1.15. kifejezés egymással egyenlő. Egyszerűsítések és a nem nulla oldalhosszúságokkal rendelkező hasáb térfogával való osztás valamint egy oldalra rendezés után az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} = 0. \quad (F.3.)$$

Egyszerűbb alakra hozva tehát megkaptuk az **összenyomható folyadékok háromdimenziós nem stacioner áramlásához tartozó, Euleri-rendszerben felírt, kontinuitást** kifejező tömegtranszport egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{F.4.})$$

Indexes jelölésmódban:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{F.5.})$$

Összenyomhatatlan folyadék esetén, az összeg első tagja nullát ad, a másodikból pedig az állandó, nem nulla értékű sűrűség kiemelhető a divergencia operátor alól, így az egyenlet az alábbi formára egyszerűsödik:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (\text{F.6.})$$

9.2.2. „ANYAGI” IDŐ SZERINTI DERIVÁLT

A megmaradási törvények eredeti alakjukban egy folyadékrészecske tulajdonságainak változását írják le, vagyis az anyaghoz rögzített, Lagrange-i koordinátarendszert használják. Érdeemes összevetni ezt a szemléletet az előző levezetéssel, mivel a kettő közötti összefüggés könnyebbséget jelent a megmaradt négy transzportegyenlet felírásánál.

Vegyünk egy általános megmaradó mennyiséget, amely szintén függ a három térbeli koordinátától és az időtől. Jelölje ennek tömegegységre eső koncentrációját φ . Ennek teljes idő szerinti deriváltja $\frac{d\varphi}{dt}$. Ezt a kifejezést nevezik anyagi idő szerinti derivátnak, és abban tér el a megszokott Euleri parciális deriválttól, hogy nem rögzítjük a többi, esetünkben a térbeli koordinátákat, hanem azokat is változtatjuk az anyagi pont sebessége szerint. Így a láncszabály alkalmazásával a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (\text{F.7.})$$

Felhasználva, hogy:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u_x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = u_y, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = u_z, \quad (\text{F.8.})$$

a következő **összefüggést** nyerjük a **Lagrange- és az Euler-rendszerbeli deriváltak közt**:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\varphi). \quad (\text{F.9.})$$

Indexes jelöléssel:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}. \quad (\text{F.10.})$$

9.2.3. A REYNOLDS-FÉLE TRANSZPORTEGYENLET

Ahhoz, hogy ezt az összefüggést felhasználhassuk a további transzportegyenletek megalkotásához a megmaradó mennyiséget az eddigi tömegegységre vonatkoztatott helyett **térfogategységre** kell vetítenünk, amelyet a $\rho \cdot \varphi$ szorzat fejez ki.

Általánosítsuk először a kontinuitási egyenletet tetszőleges térfogategységre vetített mennyiség, $\Phi = \rho \cdot \varphi$ megmaradására, és fejtsük ki a szorzatok deriváltjait és csoportosítsunk:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \varphi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \varphi \cdot \mathbf{u}) = \rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\varphi) \right] + \varphi \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) \right]. \quad (\text{F.11.})$$

Az egyenlet jobb oldalának utolsó tagja épp a kontinuitási egyenlet miatt zérus, míg az első tagja átalakítható anyagi idő szerinti deriválttá. Így kapjuk a **Reynolds-féle transzportegyenletet**:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \varphi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \varphi \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{F.12.})$$

Indexes alakban:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot \varphi \cdot u_i)}{\partial x_i} = \rho \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{F.13.})$$

Ez teremti meg a **kapcsolatot egy vizsgált tulajdonságnak a részecskéhez, vagy a tér egy adott pontjához rögzített megváltozása közt**.

A térben rögzített elemi térfogatban a megmaradó mennyiség időegység alatt bekövetkező megváltozása .	+	A térfogat határoló felületén a folyadékáram által konvekció során időegység alatt kiáramlott megmaradó mennyiség.	=	A vizsgált pillanatban a megadott helyen tartózkodó anyag részecskében megmaradó mennyiség megváltozása .
--	---	---	---	--

86. ábra - A Reynolds-féle transzportegyenlet

A megmaradó mennyiségek térfogategységre vett időegység alatti megváltozásait a következő táblázat foglalja össze. A tagok jelentését a következő két alfejezet részletezi.

A megmaradó mennyiség tömegegységre vonatkoztatva		Lagrange-i leírás	Euleri leírás
x-irányú lendület	u_1	$\rho \frac{du_1}{dt}$	$\frac{\partial(\rho \cdot u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_1 \cdot u_i)}{\partial x_i}$
y-irányú lendület	u_2	$\rho \frac{du_2}{dt}$	$\frac{\partial(\rho \cdot u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_2 \cdot u_i)}{\partial x_i}$
z-irányú lendület	u_3	$\rho \frac{du_3}{dt}$	$\frac{\partial(\rho \cdot u_3)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_3 \cdot u_i)}{\partial x_i}$
teljes energia	E_t	$\rho \frac{dE_t}{dt}$	$\frac{\partial(\rho \cdot E_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot E_t \cdot u_i)}{\partial x_i}$

7. táblázat - megmaradó mennyiségek térfogategységre vett időegység alatti megváltozásai

9.2.4. LENDÜLETTRANSPORT

Newton II. axiómája kimondja, hogy a folyadékrészecske lendületének időegység alatt történő megváltozása megegyezik a részecskére ható erők eredőjével. Az erőket célszerű két csoportra osztani: felületi erők, ezen belül is normál és nyírófeszültségekre, valamint térfogati erők, mint a gravitáció és az elektromágneses erő, vagy ha nem inerciarendszerben vagyunk, akkor a Coriolis- és a centrifugális erő.

9.2.4.1. A LENDÜLETVÁLTOZÁS

Nézzük részletesen az x -irányú vetületi mozgásegyenlet. Felírva a lendületváltozási tagot, és kihasználva a kontinuitási egyenletet, az egyenlet egyik oldalán álló tag Lagrange-i rendszerben:

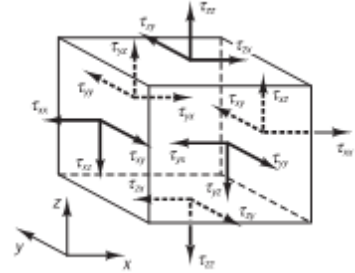
$$\frac{d(\rho \cdot u_x)}{dt} = \rho \frac{du_x}{dt} + u_x \underbrace{\frac{d\rho}{dt}}_0 = \rho \frac{du_x}{dt}. \quad (\text{F.14.})$$

Ennek Euleri alakja, a Reynolds-féle transzportegyenlet felhasználásával, amint azt a 7. táblázat első sora is mutatja:

$$\rho \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot u_x \cdot \mathbf{u}). \quad (\text{F.15.})$$

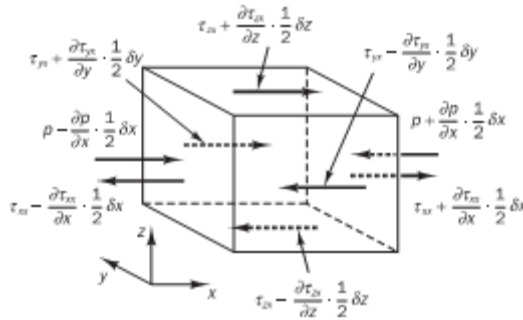
9.2.4.2. A KÖRNYEZET ÁLTAL KIFEJTETT ERŐK

A másik oldalon az erők állnak, ezek közül tekintsük először a **felületi** jellegűeket. Egy térbeli pont feszültségállapotát kilenc viszkozitási feszültségkomponenssel és a felületre mindig merőleges nyomással adhatjuk meg, ez utóbbinál konvencionálisan az összenyomás, míg a feszültség összetevők normális komponensénél a húzás a pozitív. A felületi viszkozitási feszültségkomponenseket a jobb oldali ábra rendszerezi:



87. ábra - A felületi erők komponensei.

A felületen ható x-irányú komponensek a hasáb középpontja köré írt Taylor-sor lineáris tagjaiig:



88. ábra - Az x-irányú felületi erőkomponensek az elemi hasábon

Az E és W lapon ható x-irányú erők összege:

$$\left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \cdot \delta z + \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \cdot \delta z \right\} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z. \quad (\text{F.16.})$$

A N és S lapon ható x-irányú erők összege:

$$- \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \cdot \delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \cdot \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z. \quad (\text{F.17.})$$

A T és B lapon ható x-irányú erők összege:

$$- \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \cdot \delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \cdot \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z. \quad (\text{F.18.})$$

Térfogategységre így a fenti három kifejezés összege jut leosztva a hasáb térfogatával:

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \quad (\text{F.19.})$$

9.2.4.3. ÖSSZEGZÉS

A térfogati erőket egy forrástag segítségével tudjuk figyelembe venni. A lendület megmaradás egyenletei az előző levezetés és annak analógiájának felhasználásával:

x-irányban

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot u_x \cdot \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{M_x}, \quad (\text{F.20.})$$

y-irányban

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot u_y \cdot \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{M_y}, \quad (\text{F.21.})$$

z-irányban

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot u_z \cdot \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + S_{M_z}, \quad (\text{F.22.})$$

Indexes alakban a három egyenlet:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \cdot u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + S_{M_i}}, \quad (\text{F.23.})$$

9.2.5. ENERGIATRANSZPORT

Ez az egyenlet a **termodinamika első főtételéből** vezethető le, amely kimondja, hogy egy folyadékrészecske időegység alatt bekövetkező teljes energiájának (E_t) megváltozása megegyezik a környezet által időegység alatt vele közölt hőmennyiség és a rajta végzett teljesítmény összegével.

9.2.5.1. AZ ENERGIÁVÁLTOZÁS SEBESSÉGE

Az előzőekhez hasonló módon a térfogategység energiaváltozási sebessége Lagrange-i és Euleri rendszerben:

$$\rho \frac{dE_t}{dt} = \frac{\partial(\rho \cdot E_t)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot E_t \cdot \mathbf{u}). \quad (\text{F.24.})$$

9.2.5.2. A KÖRNYEZET ÁLTAL VÉGZETT TELJESÍTMÉNY

A felületi erők által végzett teljesítmény az egyes oldallapokon az ott ható erők és az irányukba eső sebességkomponens szorzataként számítható. Részletesen nézzük az x-irányú erők teljesítményét. Az E és W lapokon:

$$\begin{aligned} & \left[p \cdot u_x - \frac{\partial(p \cdot u_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \cdot \delta z + \left[\tau_{xx} \cdot u_x - \frac{\partial(\tau_{xx} \cdot u_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \cdot \delta z - \\ & - \left[p \cdot u_x + \frac{\partial(p \cdot u_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \cdot \delta z + \left[\tau_{xx} \cdot u_x + \frac{\partial(\tau_{xx} \cdot u_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \cdot \delta z. \end{aligned} \quad (\text{F.25.})$$

Az N és S lapokon:

$$\left\{ - \left[\tau_{yx} - \frac{\partial(\tau_{yx} \cdot u_x)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] + \left[\tau_{yx} - \frac{\partial(\tau_{yx} \cdot u_x)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \right\} \delta x \cdot \delta z. \quad (\text{F.26.})$$

A T és B lapokon:

$$\left\{ - \left[\tau_{zx} - \frac{\partial(\tau_{zx} \cdot u_x)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] + \left[\tau_{zx} - \frac{\partial(\tau_{zx} \cdot u_x)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \right\} \delta x \cdot \delta y. \quad (\text{F.27.})$$

Egyszerűbb alakra hozva az x -irányú felületi erők teljesítménye a térfogategységre vonatkoztatva:

$$-\frac{\partial(p \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xx} \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx} \cdot u_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx} \cdot u_x)}{\partial z}. \quad (\text{F.28.})$$

Az y -irányú erők teljesítménye:

$$-\frac{\partial(p \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy} \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zy} \cdot u_y)}{\partial z}. \quad (\text{F.29.})$$

A z -irányú erők teljesítménye:

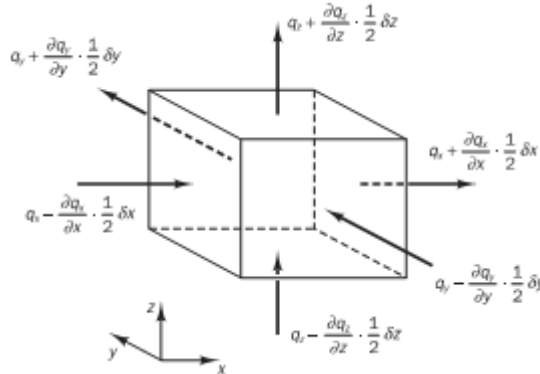
$$-\frac{\partial(p \cdot u_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz} \cdot u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz} \cdot u_z)}{\partial z}. \quad (\text{F.30.})$$

Tehát a felületi erők teljesítménye:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial(p \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(p \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(p \cdot u_z)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} \cdot u_x + \tau_{xy} \cdot u_x + \tau_{yx} \cdot u_x) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} \cdot u_y + \tau_{yy} \cdot u_y + \tau_{yz} \cdot u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} \cdot u_z + \tau_{yz} \cdot u_z + \tau_{zz} \cdot u_z). \end{aligned} \quad (\text{F.31.})$$

9.2.5.3. A KÖRNYEZET ÁLTAL KÖZÖLT HŐMENNYISÉG

A hőáram vektort, vagyis az időegység alatt egységnyi felületen átáramló hőmennyiség mértékét és irányát kifejező vektor legyen $\mathbf{q}$. Így az elemi hasábba belépő hőmennyiség a következő ábra alapján:



89. ábra - Az elemi hasábba áramló hőmennyiség szemléltetése

Az E és W lapokon:

$$\left[\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \right] \delta y \cdot \delta z = \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z, \quad (\text{F.32.})$$

Hasonlóan, az N és S lapokon:

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z. \quad (\text{F.33.})$$

A T és B lapokon:

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z} \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z. \quad (\text{F.34.})$$

Így a teljes beáramló hőmennyiség leosztva a térfogattal:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = \text{div}(\mathbf{q}). \quad (\text{F.35.})$$

9.2.5.4. ÖSSZEGZÉS

Felhasználva a hővezetés Fourier-tól származó lineáris törvényét:

$$\mathbf{q} = -k \cdot \text{grad}(T). \quad (\text{F.36.})$$

Az energiamérleg a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot E_t)}{\partial x_j} + \text{div}(\rho \cdot E_t \cdot \mathbf{u}) &= \text{div}(p \cdot \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (u_x \cdot \tau_{yx} + u_y \cdot \tau_{yy} + u_z \cdot \tau_{yz}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (u_x \cdot \tau_{xy} + u_y \cdot \tau_{yy} + u_z \cdot \tau_{yz}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (u_x \cdot \tau_{xz} + u_y \cdot \tau_{yz} + u_z \cdot \tau_{zz}) + \\ &+ \text{div}(k \cdot \text{grad}(T)) + S_{E_t} \end{aligned} \quad (\text{F.37.})$$

Innen a könnyebb kezelhetőség érdekében áttérünk indexes jelölésmódra:

$$\frac{\partial(\rho \cdot E_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot E_t \cdot u_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(p \cdot u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(u_j \tau_{ij})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + S_{E_t}, \quad (\text{F.38.})$$

Mivel a teljes mechanikai energia a belső energia és a kinetikus energia összege:

$$E_t = E_b + E_k, \quad (\text{F.39.})$$

a tömegegységre vetített kinetikus energia pedig:

$$E_k = \frac{1}{2} u_i u_i. \quad (\text{F.40.})$$

Célszerű ez utóbbi tagot leválasztani, és csak a belső energia megváltozását vizsgálni. A mechanikai energia megváltozása a lendülettranszport egyenletek megfelelő sebességkomponensekkel vett szorzatainak összegeként áll elő.

$$\frac{\partial(\rho \cdot E_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot E_k \cdot u_i)}{\partial x_i} = u_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \cdot \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + u_i \cdot S_{M_i}. \quad (\text{F.41.})$$

Kivonva az (F.38.)-as egyenletet az (F.41.)-ből:

$$\frac{\partial(\rho \cdot E_b)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot E_b \cdot u_i)}{\partial x_i} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + S_{E_t} - u_i \cdot S_{M_i}. \quad (\text{F.42.})$$

9.2.6. A VISZKOZITÁSI MODELL

A hidromechanikai feladatok megoldásához szükségünk van az anyagi viselkedést leíró modellre, amely kapcsolatot teremt a folyadékrészecske helyzetének megváltozása és a rá ható feszültségek közt. Ennek megalkotásához Newton-féle viszkozitási modellből indulunk ki, amely egydimenziós áramlás esetén **lineáris kapcsolatot** tételez fel a folyadék részecskére ható nyírófeszültség és az általa éppen elfoglalt pontbeli sebesség-gradiens közt.

Matematikai okfejtéseket követve bevezetjük az anyagi viselkedés operátorát, amely a folyadék feszültség-tenzorának deviátoros része (τ_{ij}) és folyadék mozgását jellemző, a Navier-Stokes-egyenletekben is alkalmazott sebesség-gradiens tenzor $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$ közti összefüggést adja meg.

A linearitás megtartásához, három dimenzióban egy lineáris operátort – egy negyedrendű tenzort - kell alkalmaznunk.

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (\text{F.43.})$$

Figyelembe véve, hogy az anyagmodellünk izotrop, így C_{ijkl} alakja a legáltalánosabb negyedrendű izotrop tenzor segítségével megadható meg:

$$C_{ijkl} = \lambda (\delta_{ij} \delta_{kl}) + \mu_1 (\delta_{ik} \delta_{jl}) + \mu_2 (\delta_{il} \delta_{jk}), \quad \text{ahol } \lambda, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}. \quad (\text{F.44.})$$

Most használjuk fel, hogy a tenzor képterét a termodinamika második főtételének értelmében csak szimmetrikus másodrendű tenzorok alkotják, vagyis:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (\text{F.45.})$$

Ebből következik, hogy $\mu_1 = \mu_2 = \mu^f$, vagyis:

$$C_{ijkl} = \lambda^f \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^f (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}). \quad (\text{F.46.})$$

Az izotrop lineáris feszültség modell:

$$\tau_{ij} = \left[\lambda^f \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^f (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}) \right] \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (\text{F.47.})$$

Az operátorban szereplő **két anyagállandó** megadásával definiálhatjuk az izotrop, lineáris viszkozitási modellt. λ^f -t térfogati, μ^f -t lineáris viszkozitási együtthatónak nevezzük. Ez az alak alkalmas arra, hogy a transzportegyenletekből kiküszöböljük a feszültségeket.

A $\delta_{ij} \delta_{kl}$ kifejezés két másodrendű egységtenzor tenzoriális szorzata, így képterét a tárgyterében lévő másodrendű tenzorok nyomainak a másodrendű egységtenzorra vett szorzata alkotja. Esetünkben az operandus a sebesség-gradiens tenzor, ennek nyoma a sebesség divergenciája, amely összenyomhatatlan folyadékok estén a tömegmegmaradás értelmében zérus.

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \delta_{ij} \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\text{div}(u_i)}. \quad (\text{F.48.})$$

Ez azt jelenti, hogy **izotrop, összenyomhatatlan** folyadék estén a **lineáris** viszkozitási modell **egy paraméterrel**, a lineáris viszkozitási együtthatóval (μ) jellemezhető.

Megemlítem, hogy a fenti modellt eltérő alakban szokták felírni az alakváltozás-sebesség tenzor segítségével. Ez megtehető, ugyanis a C_{ijkl} tenzor k és l indexében szimmetrikus. Továbbá minden másodrendű tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antimetrikus tag összegére. Ezekből következik, hogy a merevtestszerű elfordulásokért felelős sebesség-gradiens tenzor aszimmetrikus része kiküszöbölhető a modellből.

A sebesség-gradiens tenzor szimmetrikus része a deformáció-sebesség tenzor:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{F.49.})$$

$$\text{Ekkor} \quad \tau_{ij} = \left[\lambda^f \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^f (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}) \right] s_{kl}. \quad (\text{3.50.})$$

Egyszerűbb alakra hozva:

$$\tau_{ij} = \underbrace{\left[\lambda^f \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu^f \delta_{ki} \delta_{lj} \right]}_{\hat{C}_{ijkl}} s_{kl}. \quad (\text{3.51.})$$

9.2.7. NAVIER-STOKES-EGYENLETEK

Az előző pontban levezetett feszültségmodell segítségével a transzportegyenletekből kiküszöbölhető a feszültségeket tartalmazó tag. Elvégezve ezt a lendülettranszport egyenletre,

a hidromechanika alapegyenleteihez, a Navier-Stokes-egyenletekhez jutunk. Induljunk ki tehát a következő egyenletrendszerből:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + S_{M_i}, \quad (\text{F.52.})$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (\text{F.53.})$$

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}) + \lambda \cdot \delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (\text{F.54.})$$

Tekintsük csupán az (F.52.) egyenlet feszültség-gradiens tagját:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left[\mu^f (\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}) + \lambda^f \cdot \delta_{ij}\delta_{kl} \right] \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right), \quad (\text{F.55.})$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\mu^f \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu^f \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda^f \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right). \quad (\text{F.56.})$$

Ezek alapján a Navier-Stokes egyenletek:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu^f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda^f \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + S_{M_i}. \quad (\text{F.57.})$$

Az egyszerűbb kezelhetőség végett a kisebb hatással bíró tagokat a forrástagba csatolva az alábbi végső formát nyerjük:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \cdot u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu^f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \widehat{S}_{m_i}}, \quad (\text{F.58.})$$

ahol:

$$\widehat{S}_{m_i} = S_{m_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu^f \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda^f \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right). \quad (\text{F.59.})$$

9.2.8. AZ ENERGIATRANSZPORT EGYENLET

Az előzőhöz hasonló módon küszöböljük ki a feszültség tagokat az energiatranszport egyenletből:

$$\frac{\partial(\rho \cdot E_b)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot E_b \cdot u_i)}{\partial x_i} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + S_{E_t} - u_i S_{M_i}. \quad (\text{F.60.})$$

Ismét az egyszerűbb alakra való törekvés okán vonjuk össze a teljes energia forrástagjának és a mechanikai energia forrástagjának a különbségét egy taggá S_{E_b} , és nevezzük el a viszkozitásból eredő forrástagot Θ -nak.

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \cdot E_b)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot E_b \cdot u_i)}{\partial x_i} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Theta + S_{VE_b}}. \quad (\text{F.61.})$$

$$S_{E_b} = S_{E_t} - u_i \cdot S_{M_i}, \quad (\text{F.62.})$$

$$\Theta = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (\text{F.63.})$$

Ezt a tagot kifejtve:

$$\Theta = \tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = C_{ijkl} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left[\mu(\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}) + \lambda \cdot \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ij}\delta_{kl}) \right] \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (\text{F.64.})$$

a tagokat összevonva, és a k és l indexeket m és n -re cserélve:

$$\Theta = \mu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right). \quad (\text{F.65.})$$

9.2.9. A PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TÍPUSAI

9.2.9.1. ELLIPTIKUS MÁSODRENDŰ PDE

Tipikus példája a Laplace egyenlet, amely például stacioner, rotációmentes, **összenomhatatlan** folyadékok mozgásának leírására alkalmas. Legegyszerűbb alakja:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (\text{F.66.})$$

Mivel az egyenlet nem tartalmazza az időt, csak peremfeltételeket kell megadnunk, mégpedig a vizsgálati tartomány egész határán első, illetve másodfajú, esetleg vegyes formában. Az egyenlet tulajdonsága, hogy a lokális zavarás azonnal kihat az egész tartományra, ennek következtében a megoldás mindig sima, még ha a peremfeltételek nem is voltak azok. Ahhoz, hogy az információterjedés e tulajdonságát a numerikus eljárások során is biztosítani tudjuk, minden cellának kapcsolatban kell állnia az összes vele szomszédossal.

9.2.9.2. PARABOLIKUS MÁSODRENDŰ PDE

Ezek tipikusan olyan időfüggő jelenségeket írnak le, melyben jelentős diffúzióval kell számolnunk, ilyen például a **viszkózus folyadékok tranziens áramlása**. Legegyszerűbb alakja:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (\text{F.67.})$$

Itt már egy kezdeti- és peremérték feladatot kell megoldanunk, így az előző pontban megfogalmazott peremfeltételek mellett meg kell adnunk a változó kezdeti értékeit a számítási tartomány minden pontjában:

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x). \quad (\text{F.68.})$$

A feladat sajátossága, hogy a zavarás (vagyis az információ) az időben csak előre felé haladhat, továbbá a diffúzió biztosítja a megoldás folytonosságát $t > 0$ esetben akkor is, ha a kiindulási állapotban nem volt az. Az idő végtelenhez tartásával egyensúlyi állapot felé halad a rendszer, vagyis egy megfelelő elliptikus differenciálegyenlet írja le a végső, állandósult állapotot.

9.2.9.3. HIPERBOLIKUS MÁSODRENDŰ PDE

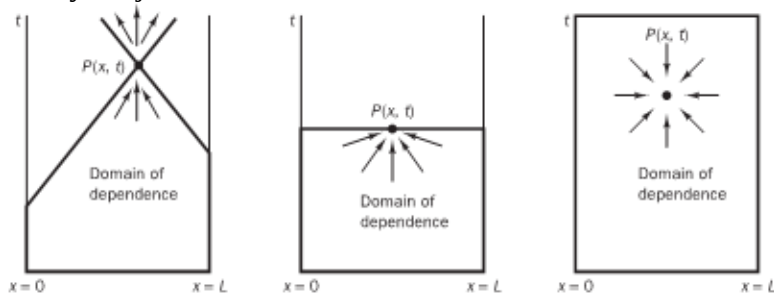
Tipikusan a rezgésegyenletek ilyenek. Általában a kis energia-disszipációjú tranziens jelenségek esetén fordul elő, mint például a hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial t}. \quad (\text{F.69.})$$

Ebben az esetben már nem elég egyetlen kezdeti feltételt előírni a függvény értékére a számítási tartományon, ugyanezt meg kell tenni annak első időderiváltjaira is, a peremfeltételeket pedig továbbra is az előzőekhez hasonlóan kell megadni minden $t > 0$ időpillanatra. Éppen a csillapítás hiánya okozza a diszkontinuitások megmaradását, ezek (hullámként) terjednek a térben és időben egy meghatározott véges tartományon belül, a rendszerre jellemző véges sebességgel.

9.2.9.4. FÜGGŐSÉGI TARTOMÁNYOK

Az előzőeket összefoglalva álljon itt a függőségi tartományok zónájának sematikus ábraszorozata, amely szemlélteti, hogy egy adott pont adott pillanatbeli állapotát mely tartományrészek befolyásolják.

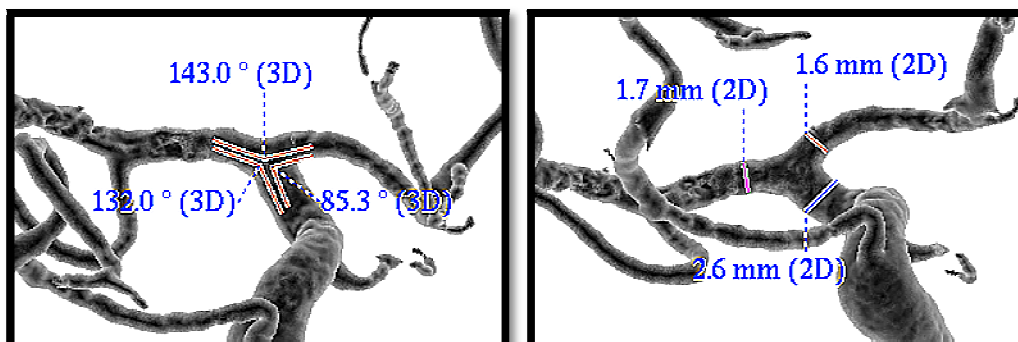


90. ábra - Függőségi tartományok.

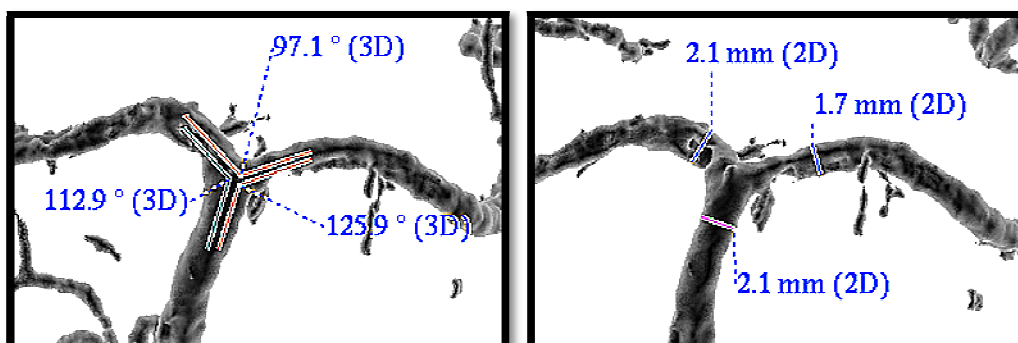
Sorrendben: hiperbolikus, parabolikus és elliptikus differenciálegyenlet esetén

9.3. GEOMETRIAI ADATOK

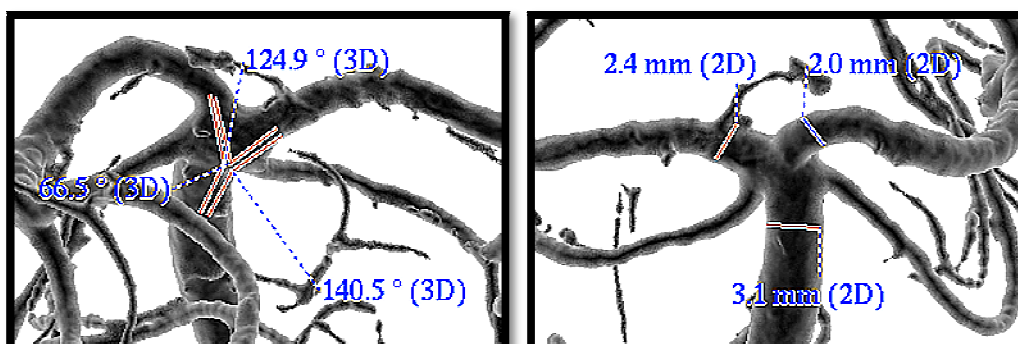
9.3.1. BASILARIS CSÚCS



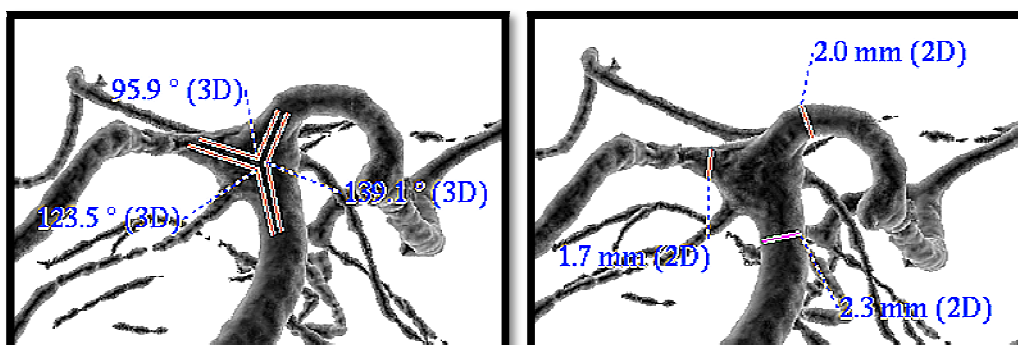
91. ábra - 1. egészséges basilaris csúcs geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



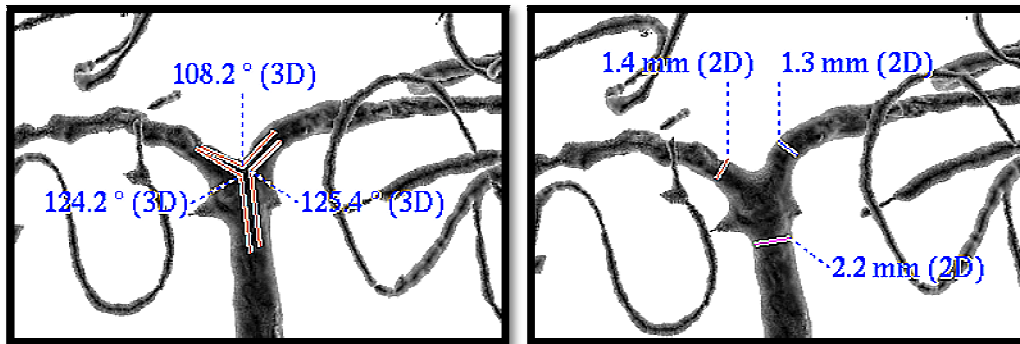
92. ábra - 2. egészséges basilaris csúcs geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



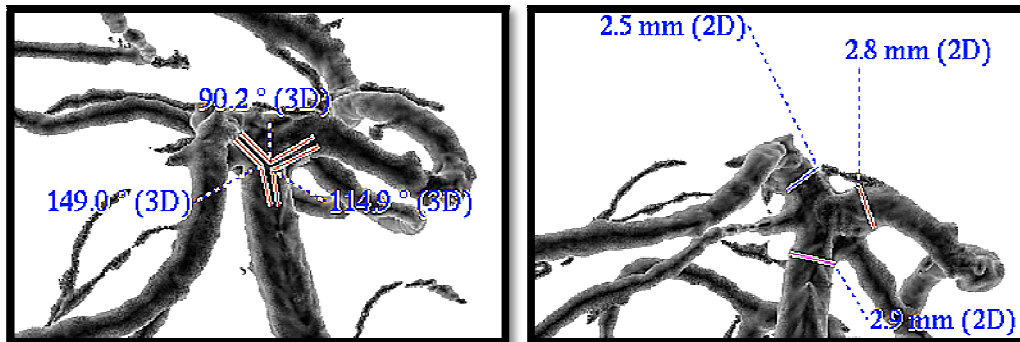
93. ábra - 3. egészséges basilaris csúcs geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



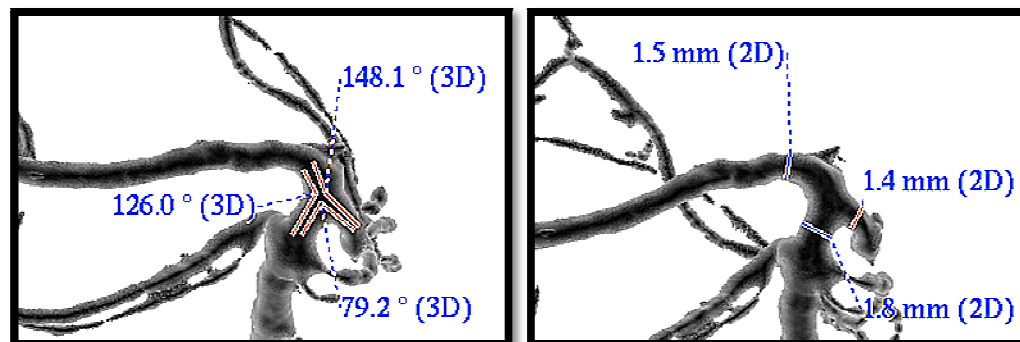
94. ábra - 4. egészséges basilaris csúcs geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



95. ábra - 5. egészséges basilaris csúcs geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).

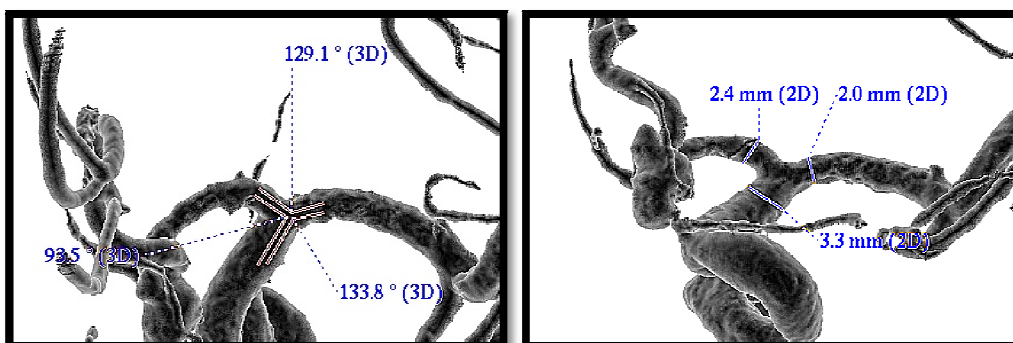


96. ábra - 6. egészséges basilaris csúcs geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).

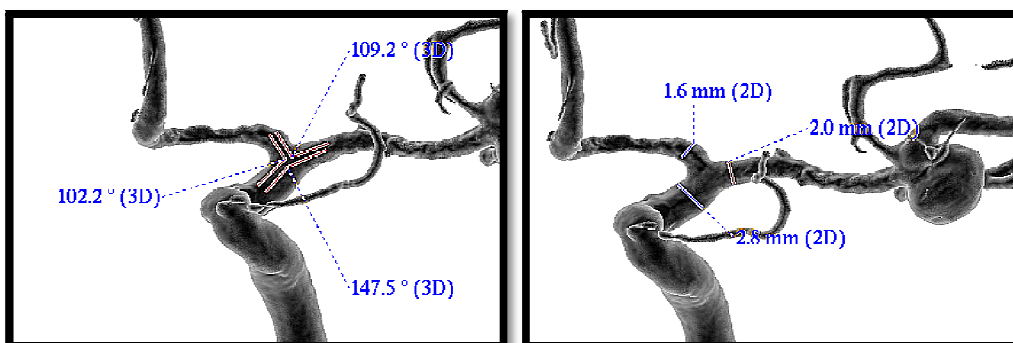


97. ábra - 7. egészséges basilaris csúcs geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).

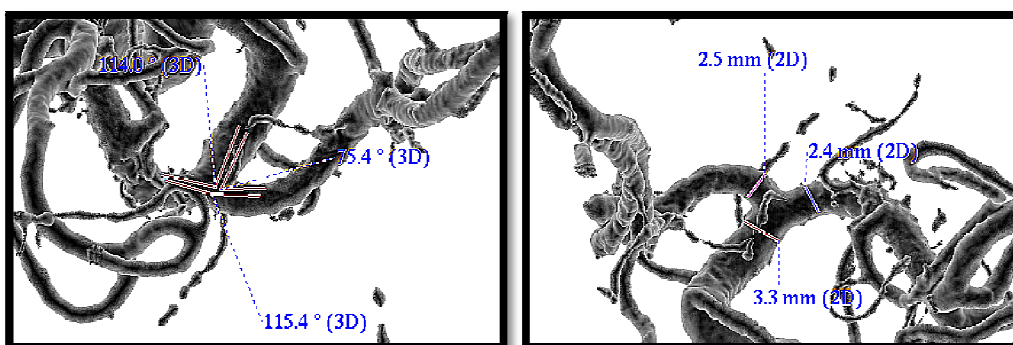
9.3.2. CAROTIS BIFURCATIO



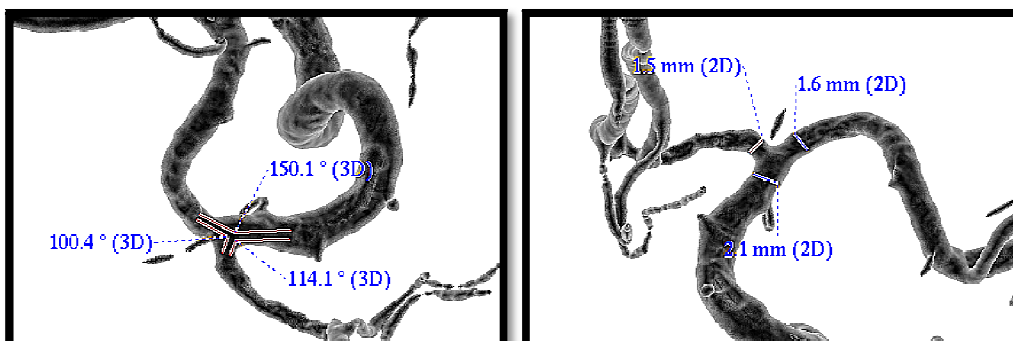
98. ábra - 1. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



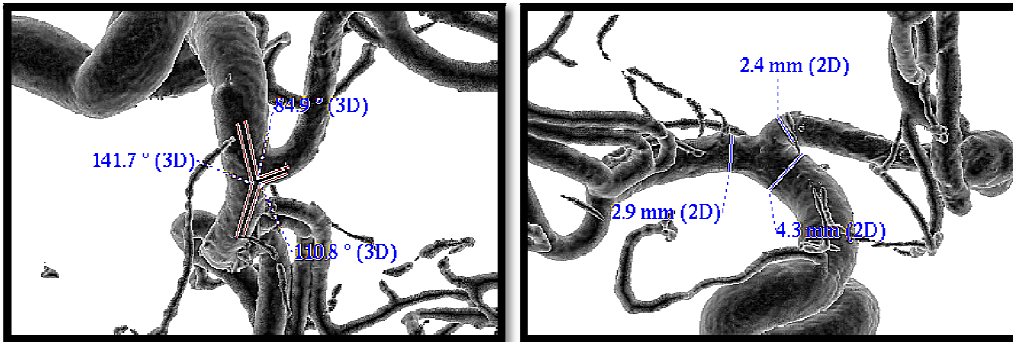
99. ábra- 2. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



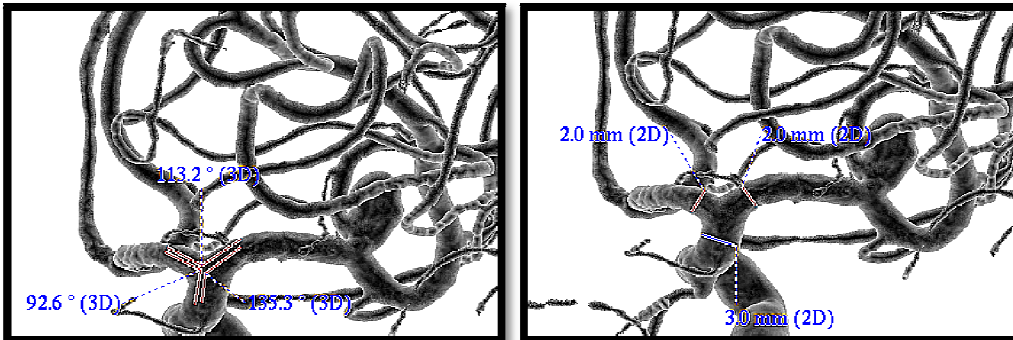
100. ábra- 3. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



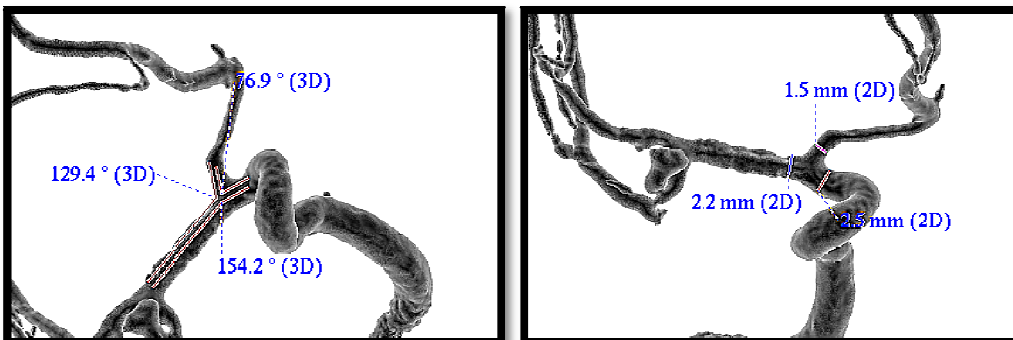
101. ábra- 4. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



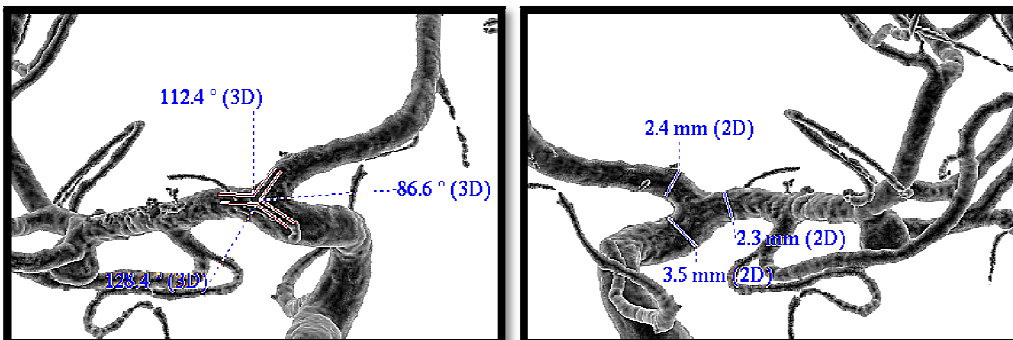
102. ábra- 5. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



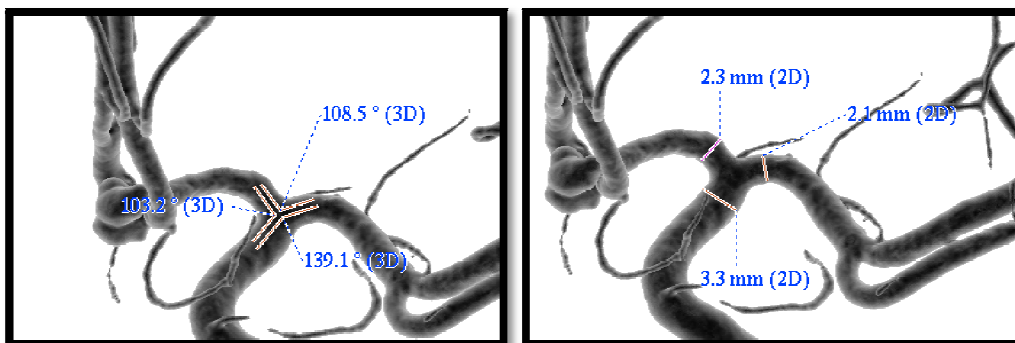
103. ábra- 6. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



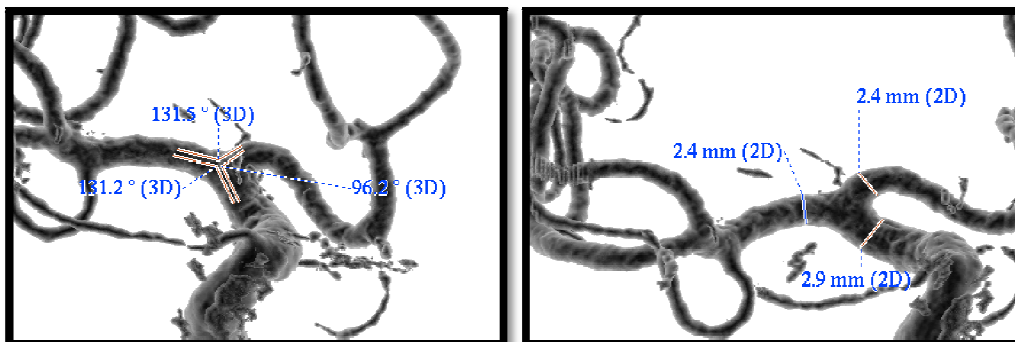
104. ábra- 7. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



105. ábra- 8. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



106. ábra- 9. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).



107. ábra- 10. egészséges carotis bifurcatio geometria (balra: elágazási szögek, jobbra: átmérők).

10. GLOSSZÁRIUM

10.1. ORVOSI KIFEJEZÉSEK

A fő agyi érszakaszok elnevezése			
magyar	latin	angol	
agyalapi artériás gyűrű	circulus arteriosus cerebri	circle of Willis	CoW
közös fejverőér	arteria carotis communis	common carotid artery	CCA
belső feji verőér	arteria carotis interna	internal carotid artery	ICA
külső feji verőér	arteria carotis externa	external carotid artery	ECA
középső agyi verőér	arteria cerebri media	middle cerebral artery	MCA
elülső agyi verőér	arteria cerebri anterior	anterior cerebral artery	ACA
elülső összekötő artéria	arteria communicans anterior	anterior communicating artery	ACoA
gerincmenti verőér	arteria vertebralis	vertebral artery	VA
alapi artéria	arteria basilaris	basilar artery	BA
hátsó agyi verőér	arteria cerebri posterior	posterior cerebral artery	PCA
hátsó összekötő artéria	arteria communicans posterior	posterior communicating artery	PCoA

Alimentációs rendszer:	Tápanyag ellátó rendszer.
Agranulocita:	A fehér vérsejtek egyik fajtája, a szervezetbe került nem kívánatos fertőző organizmusok azonosítását végzi.
Aneurysma:	Az érfal lokális patológiás tágulata. Fő előfordulási helyei a testben az agy és a mellkas- illetve hasüreg.
Cardiovascularis keringés:	Vérkeringés.
Endothel:	Az érfal legbelső, a testfolyadékkal közvetlenül érintkező részét egyrétegű laphám alkotja, ennek neve endothelium. Az endotheliumot úgynevezett endothel sejtek alkotják, melyek sejtmagja bedudorodik az ér lumenébe.
Enzim:	Biokatalizátor.
Eryhrocita:	Vörös vértest
Fibrillin:	A rugalmas rostok felépítéséhez szükséges glikoprotein.
Fibrillum:	Elemi rost.
Fibroblast:	Olyan sejt, mely extracelluláris mátrixot és kollagént szintetizál, mely az állati szövetek szerkezeti vázát alkotja, és fontos szerepet játszik a sebgyógyulásban.
Granulociták:	A fehér vérsejtek egyik fajtája, más néven falósejt, a szervezetbe került nem kívánatos fertőző organizmusok eltávolításáért felelősek.
Hematocita:	A vérben lévő szilárd sejt, vagy testes elemek összefoglaló neve.
Hematocitopoiezis:	A hematociták kialakulási folyamata.
Hemodinamika:	A vérkeringés dinamikájával foglalkozó tudományág.
Hemoglobin:	Az oxigén szállítását lehetővé tevő vas tartalmú szállítófehérje a vérben.

Homeosztázis:	A belső környezet (milieu intérieur) dinamikus állandóságát jelenti, az élő szervezetek egyik legfontosabb jellemzője, az élettan legfontosabb alapfogalma. A szó görög eredetű, jelentése "hasonló állapot".
In vitro:	Az in vitro (latin, „az üvegben”) kifejezés arra a kísérleti technikára utal, amikor a kísérleti folyamat nem az élő szervezetben, hanem azon kívül, ellenőrzött körülmények között zajlik le, például kémcsőben vagy Petri-csészében.
In vivo:	Az élő szervezetben történő kísérleti technikára utal.
Invazív:	Olyan vizsgálati technika, mely az élő testbe történő behatolást igényli.
Leukociták:	Fehér vérsejtek
Lumen:	Az ér üregét érlumennek nevezik.
Non-invazív:	Olyan vizsgálati technika, mely nem igényel a testbe történő behatolást.
Progenitor sejt:	Differenciálatlan őssejt.
Ruptúra:	Repedés.
Thrombociták:	Vérlemezkek
Transzmurális:	Falon keresztüli.