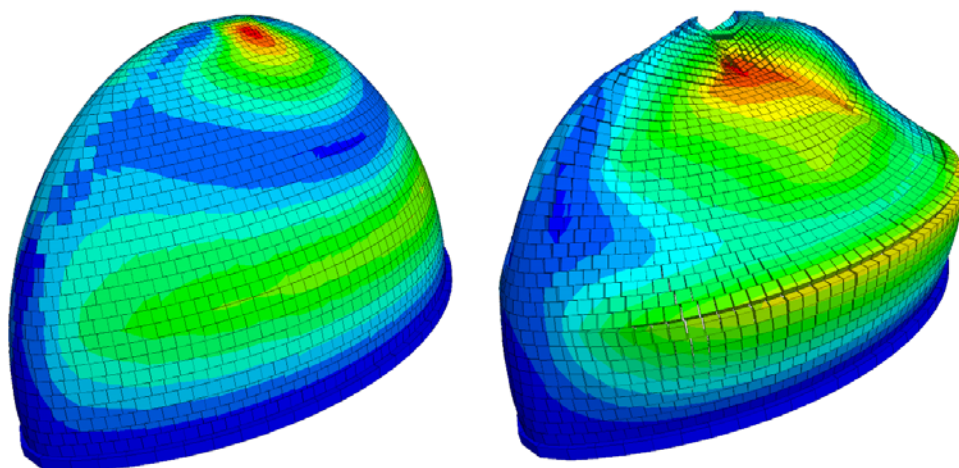




Ovális alaprajzú falazott boltozatok mechanikájának diszkrét elemes vizsgálata önsúlyra

TDK dolgozat



Készítette

Simon József

MSc építőmérnök hallgató, 2010-es évfolyam

Konzulensek

Dr. Bagi Katalin és Dr. Bojtár Imre

BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Budapest, 2011.

TARTALOM

1.	BEVEZETÉS	5
2.	AZ OVÁLIS KUPOLA KIALAKULÁSA, TÖRTÉNETE	6
2.1.	AZ OVÁLIS KUPOLA FOGALMA	6
2.2.	ÉPÍTÉSZETTÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS	9
2.2.1.	<i>A kezdetek</i>	9
2.2.2.	<i>Mezopotámia és Egyiptom</i>	9
2.2.3.	<i>A görög világ és a Római Birodalom</i>	12
2.2.4.	<i>Középkor</i>	13
2.2.5.	<i>Gótika</i>	14
2.2.6.	<i>A reneszánsz és barokk</i>	16
2.2.7.	<i>A klasszicizmustól napjainkig</i>	21
2.3.	FALAZOTT KUPOLÁK KITŰZÉSE ÉS KIVITELEZÉSE	22
2.4.	FALAZOTT KUPOLÁK MECHANIKAI VIZSGÁLATA	23
3.	A FALAZOTT OVÁLIS KUPOLÁK VIZSGÁLATÁNAK MÓDSZEREI	29
3.1.	A FALAZOTT KUPOLÁK FELÜLETÉNEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA	29
3.2.	KONTINUUMMECHANIKAI VIZSGÁLATOK	34
3.2.1.	<i>Membránelmélet</i>	34
3.2.2.	<i>Vékony héjak hajlítási elmélete</i>	36
3.2.3.	<i>Mérsékelten vastag héjak hajlítási elmélete</i>	38
3.2.4.	<i>Vastag héjak elmélete</i>	40
3.2.5.	<i>Véges differenciák módszere</i>	40
3.2.6.	<i>Véges elemek módszere</i>	42
3.3.	DISZKRÉT FELÉPÍTÉSŰ MODELLEK	44
3.3.1.	<i>VEM alkalmazása diszkrét felépítésű szerkezetek vizsgálatára</i>	44
3.3.2.	<i>Diszkrét elemek módszere</i>	46
3.3.2.1.	<i>Geometria definiálása, elemek típusai</i>	47
3.3.2.2.	<i>Kapcsolati modellek</i>	48
3.3.2.3.	<i>Mozgásegyenletek</i>	50
3.3.2.4.	<i>Megoldási módszerek</i>	52
3.3.2.5.	<i>Diszkrét elemek módszerének alkalmazása falazott szerkezetekre</i>	54
3.3.3.	<i>DEM/VEM eljárások</i>	57
3.4.	ÖSSZEFOGLALÁS	59
4.	SAJÁT VIZSGÁLATOK	60
4.1.	A FELÜLET MATEMATIKAI DEFINIÁLÁSA	60
4.2.	A DISZKRÉT ELEMES MODELL GEOMETRIÁJÁNAK KIALAKÍTÁSA	63
4.3.	ÉPÍTÉSI MÓDOK SZIMULÁLÁSA	67
4.4.	A BOLTOZATMODELL ANYAGÁNAK JELLEMZŐI	68



4.5.	A HEYMAN-FÉLE MINIMÁLIS FALVASTAGSÁGOK MEGHATÁROZÁSA.....	69
4.5.1.	<i>Gömbkupola minimális falvastagságának meghatározása kinematikai módszerrel</i>	69
4.5.2.	<i>Vizsgált geometriai modellek.....</i>	75
4.5.3.	<i>Próbafuttatások, kalibráció</i>	77
4.5.4.	<i>A numerikus futtatások</i>	80
4.5.5.	<i>Az ovális kupolák gazdaságossága</i>	84
4.6.	A TÁMASZERŐ ELOSZLÁSÁNAK VIZSGÁLATA.....	87
4.6.1.	<i>A végeelemes modell</i>	87
4.6.2.	<i>Parametrikus vizsgálatok</i>	89
4.7.	ÖSSZEOMLÁSI MÓDOK, REPEDÉSKÉP VIZSGÁLATA.....	95
4.8.	ÖSSZEFOGLALÁS	105
5.	TOVÁBBI CÉLKITŰZÉSEK.....	107

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani konzulenseimnek, Dr. Bagi Katalinnak és Dr. Bojtár Imrének, hogy e dolgozat megszületésében a segítségemre voltak. Mindketten segítőkészen álltak rendelkezésemre bármilyen probléma kapcsán, az ő szakmai tanácsaik nélkülözhetetlen alapot nyújtottak a munkám elvégzéséhez.

1. Bevezetés

A TDK dolgozatomban ovális alaprajzú falazott boltozatokkal foglalkoztam. Kevésbé ismeretes, hogy a gömbkupola mellett nem kis számban épültek a legkülönbözőbb ovális alaprajzzal rendelkező ovális kupolák is. Virágkorukat a reneszánsz és a barokk idején élték, a két leghíresebb építőmester Giovanni Lorenzo Bernini, akinek egyik legjelentősebb munkája a Sant'Andrea al Quirinale templom, illetve Francesco Borromini volt, aki a San Carlo alle Quattro Fontane templom megépítésével nyerte el hírnevét. A tanulmány első részében az ovális kupolák kialakulását, fejlődését, építészettörténetét – beleértve a különböző építési módok kialakulását is - foglaltam össze.

A falazott szerkezetek habarccsal vagy anélkül összeépített, különálló, diszkrét elemek együttese, mechanikai vizsgálatuk igen komplex feladat, ezért egy külön blokkban foglalkoztam a lehetséges vizsgálati módszerek bemutatásával. Ezek a módszerek kontinuummechanikai, diszkrét felépítésű, esetleg a kettő ötvözéséből keletkező modelleket alkalmaznak. Mindegyik esetben kitértem az adott vizsgálati módszer előnyeire, hátrányaira, korlátaira, illetve alkalmazási példákat mutattam be. A DEM (diszkrét elemek módszere) egy külön fejezetet kapott, hisz a későbbi vizsgálatokat ezzel a módszerrel végeztem el, s a módszer adta lehetőségek feltárásához, az eredmények értékeléséhez elengedhetetlen a módszer alapos ismerete.

A dolgozat utolsó része az önállóan végzett vizsgálatokkal foglalkozik. Az ovális kupolák parametrizált matematikai felületének definiálása után egy olyan összetett algoritmust írtam Matlab segítségével, mely a felületet előre meghatározott méretű építőelemekkel fedi le. Különös gondot fordítottam arra, hogy a geometriai modell a lehető legjobban tükrözze a valóságot. A Matlab környezetben írt algoritmus nem csak az egyes építőelemek koordinátáit számolja ki, hanem a vizsgálatokhoz használt 3DEC diszkrét elemes programhoz input file-t generál. Külön megadható, hogy állvánnyal vagy anélkül történő építési módot akarunk-e szimulálni, s azt merev vagy deformálható blokkokkal kívánjuk-e tenni. A vizsgálatok fő célja a különböző geometriai kialakítású ovális kupolák azon minimális falvastagságainak meghatározása volt, melyre a kupola saját önsúlya alatt még nem omlik össze. Ezt a későbbiekben a már meglévő boltozatok biztonságának megítélésére használhatjuk. Gömbkupola esetére a képlékenységtan kinematikai tétele segítségével megkísértem levezetni a szakirodalomban ismeretes, de – tudomásom szerint - még csak statikai módszerrel meghatározott elméleti értéket. Az összetett felülettel rendelkező ovális kupolák esetén már diszkrét elemes szimulációt alkalmaztam. A gömbkupolára ismert elméleti eredmény szerint kalibrálni tudtam a diszkrét elemes modellt, illetve a mérethatás vizsgálatát is elvégeztem. A vizsgálatokat mind merev, mind deformálható elemekkel, valós, mért anyagjellemzőkkel is megcsináltam, majd az eredményeket táblázatos formában, illetve grafikonon közöltem. A vizsgálatok tárgyát képezte még bármely, a gömbkupolától eltérő mechanikai viselkedés feltárása is : például a támaszerők eloszlásának, a különböző kialakítások összeomlási mechanizmusának, az összeomlás során kialakuló csuklósorok helyének, valamint a repedéskép kialakulásának vizsgálata.

2. Az ovális kupola kialakulása, története

Ebben a pontban az ovális kupolák fogalmát, építészettörténetét, kialakításuknak, építésüknek jellemzőit, illetve a vizsgálható mechanikai jellemzőket szeretném megismertetni.

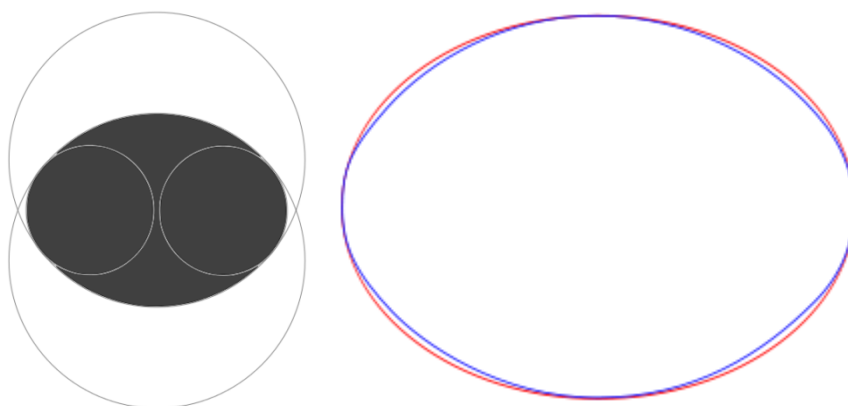
2.1. Az ovális kupola fogalma

Ovális kupoláról akkor beszélünk, ha alaprajzi értelemben vagy valamely függőleges metszetben ovális profillal rendelkezik a boltozat. Az „ovális” szó a latin „ovum” (*tojás*) szóból ered, jelölve ezzel egy görbe, illetve egy felület valamely metszetének alakját (1)¹.

Az oválist gyakran összetévesztik az ellipszissel, ami egy matematikailag pontosan leírt görbe, az ovális ezzel szemben jóval általánosabb görbe lehet. Az építési gyakorlatban alkalmazott oválisok a következő közös tulajdonsággal rendelkeznek (2) :

- konvex, zárt görbék,
- differenciálhatóak, folytonosak, nem metsződnek magukba,
- minimum egy szimmetriatengelyük van,
- speciális esetük az ellipszis.

A rajzi és építési gyakorlatban ezeket a görbéket rendszerint több különböző sugarú és középpontú körív illesztésével alkották/alkotják meg, a végleges görbéknek nem volt pontos matematikai leírása, függvénye. A köríveket úgy illesztették, hogy az illesztési pontokban azonos érintővel kapcsolódjanak egymáshoz, így téve folytonossá a görbét. A fent leírtak szerint tehát az ilyen ovális bármely pontja egy köríven fekszik, bizonyos szakaszokon a görbület így állandó, szemben az ellipszissel, ahol a körtől eltérő általános esetben, a görbület pontról pontra változik. Az **1. ábrán** látható, hogy a görbületi sugarak megfelelő megválasztása esetén az ilyen ovális görbe alig tér el a matematikailag pontos, az eredeti görbével azonos kis és nagy tengelyekkel rendelkező ellipszistől. Az eltérés mértéke természetesen függ az arányoktól, az alkalmazott ívek sugarától stb. Az ilyen körívekből összeállított oválisoknak minimum négy középpontja van, azaz minimum négy körívből állíthatóak össze. Megjegyezzük, hogy ez a leggyakrabban alkalmazott eljárás, bár néhány esetben előfordul lényegesen több ívből illesztett görbe is, lásd például (2)-t.



1. ábra 4 körívből illesztett ovális, eredeti oválist (kék) legjobban közelítő ellipszis (piros)

Már említettük, hogy vannak matematikailag pontosan leírt ovális görbék is, mint például az ellipszis. A következőekben néhány ilyen - matematikailag pontos változatot szeretnék bemutatni.

¹ A továbbiakban (1) formátum az egyes hivatkozásokat, (**I**) formátum a képletek sorszámozását jelöli.

A Descartes-féle ovális René Descartes² „alkotása”, ő 1637-ben kezdett el foglalkozni ezzel a témával, optikai problémák kapcsán. Az ő oválisa a következő tulajdonságokkal bír: legyen P és Q fix pont a síkban, illetve jelölje $d(P, S)$ és $d(Q, S)$ az S pont P -től és Q -tól lévő távolságát. Legyen m és a tetszőleges valós szám. Ekkor a Descartes-féle ovális olyan S pontok halmaza, melyek kielégítik a :

$$d(P, S) + m d(Q, S) = a \quad (2.1)$$

egyenlőséget. Descartes-féle ovális párnak nevezzük azon S pontok halmazát, melyek a fenti egyenlőség további három variációja közül pontonként kettőt kielégítenek :

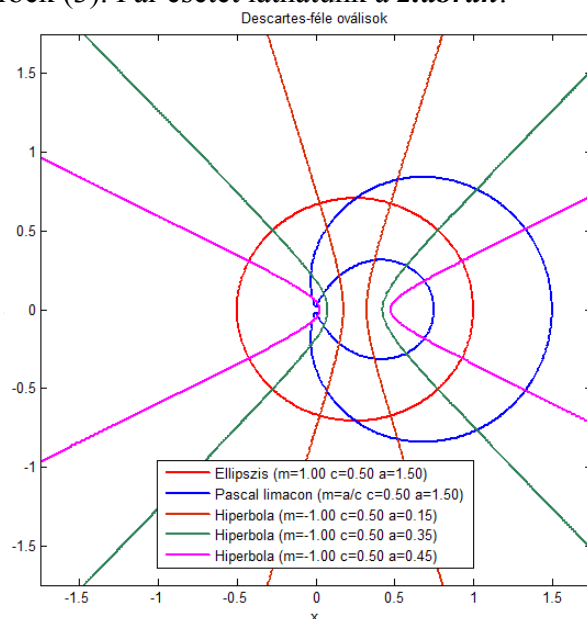
$$d(P, S) + m d(Q, S) = \pm a \text{ és } d(P, S) - m d(Q, S) = \pm a \quad (2.2)$$

egyenlőségekről van szó. A fenti egyenlőségek megoldását felírhatjuk polinominális alakban is :

$$[(1 - m^2)(x^2 + y^2) + 2m^2cx + a^2 - m^2c^2]^2 = 4a^2(x^2 + y^2), \quad (2.3)$$

ahol x, y koordinátpárok egyenként a fent említett négy egyenlőségből kettőt kielégítenek, illetve ahol c a két fókuszpont (P, Q) közötti távolságot jelöli.

A Descartes-féle oválisok néhány speciális esete: az (1) egyenlőségben $m = 1$ és $a > d(P, Q)$ esetén ellipszist kapunk a jól ismert formulával, azaz az ellipszis bármely pontját vizsgálva a pont P és Q -tól való távolságainak összege állandó. Ha $m = a / d(P, Q)$, akkor egy Pascal-féle görbét kapunk, ilyen alakzat például a kardiod is. Ha $m = -1$ és $0 < a < d(P, Q)$, hiperbolákat kapunk, melyek nyilvánvalóan nem zárt görbék (3). Pár esetet láthatunk a **2.ábrán**.



2.ábra Descartes-féle oválisok

Valamivel később, 1680-ban Giovanni Domenico Cassini³ vizsgálta a róla elnevezett Cassini-féle oválisokat. Az előző jelölésformát alkalmazva a Cassini-féle ovális olyan S pontok halmaza, melyek kielégítik a következő egyenlőséget :

$$d(P, S) * d(Q, S) = b^2. \quad (2.4)$$

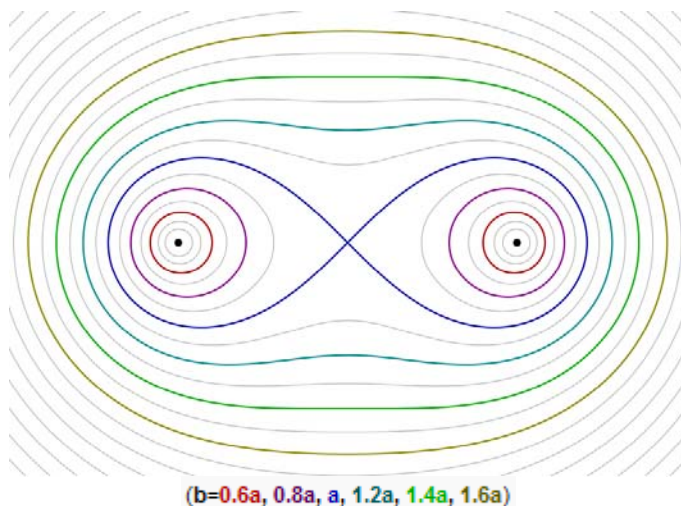
Látható, hogy ez esetben nem a távolságok összegét, hanem azok szorzatát tekintjük konstansnak. Ha a két fókuszpontot az origóra szimmetrikusan $(-a, 0)$ és $(a, 0)$ koordinátpontokba helyezzük el, az egyenlőség a következőképp is felírható :

² René Descartes (1596– 1650) francia filozófus, természetkutató és matematikus.

³ Giovanni Domenico Cassini (1625– 1712) olasz származású francia csillagász.

$$[(x - a)^2 + y^2] [(x + a)^2 + y^2] = b^4. \quad (2.5)$$

A görbe alakja az $e = b/a$ aránytól függ. Ha $e > 1$, a görbe folytonos, mind a két fókuszpontot körbezárja. Ha $e < 1$, akkor két különálló hurkot kapunk, melyek külön-külön zárják körbe a hozzájuk közelebb lévő fókuszpontot. A két eset közötti határ az $e = 1$ eset, amikor egy folytonos görbét, egy fektetett nyolcast kapunk. Az összes eset közül a legspeciálisabb, amikor $a \rightarrow 0$, azaz a két fókuszpont egybe esik, vagyis $e \rightarrow \infty$, ekkor a kapott görbe egyenlete egy b sugarú körnek felel meg (3). Cassini-féle oválisokat láthatunk a **3.ábrán**.

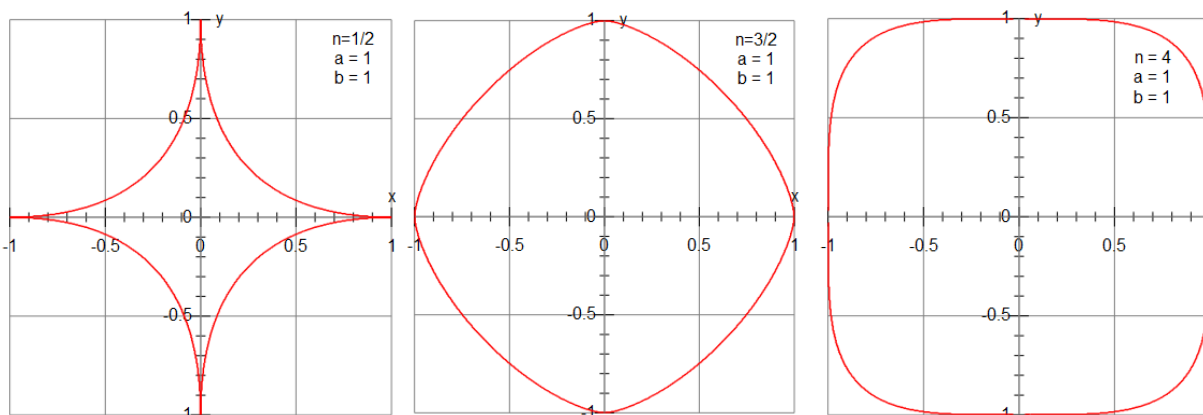


3.ábra Cassini-féle oválisok (3)

A XIX. században a francia matematikus, Gabriel Lamé⁴ volt az, aki általánosította az ellipszis egyenletét. Ezeket a görbéket nevezzük szuperellipsziseknek. Legáltalánosabb felírásuk a következő:

$$|x/a|^m + |y/b|^n = 1, \quad (2.6)$$

ahol m, n pozitív valós számok. Látható, hogy ha $m, n = 2$, akkor az ellipszis jól ismert egyenletéhez jutunk. A **4.ábrán** néhány ilyen szuperellipszist látunk (4).



4.ábra Szuperellipszisek (4)

A fenti példák az oválisok sokszínűségét mutatják. Természetesen ezek közül az építési gyakorlatban csak azokkal találkozunk, melyek tulajdonságai megegyeznek a második bekezdésben felsoroltakkal. Látni fogjuk, hogy főleg a szuperellipszisek köréből akadnak példák megépült boltozatokra, de inkább alaprajzi értelemben, s akkor is – természetesen történeti okokból adódóan –

⁴ Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé (1795 –1870) francia matematikus.

nem a pontos matematikai leírást követve, csupán intuitív alapon, hasonló formákat létrehozva. A legtöbb esetben a legelsőnek említett, körívekből kapcsolt változattal találkozhatunk, hisz akkoriban sem a megfelelő matematikai felkészültség, sem a pontos matematikai görbék kivitelezését megengedő szaktudás nem állt rendelkezésre, köríveket viszont annál egyszerűbben lehetett kitűzni.

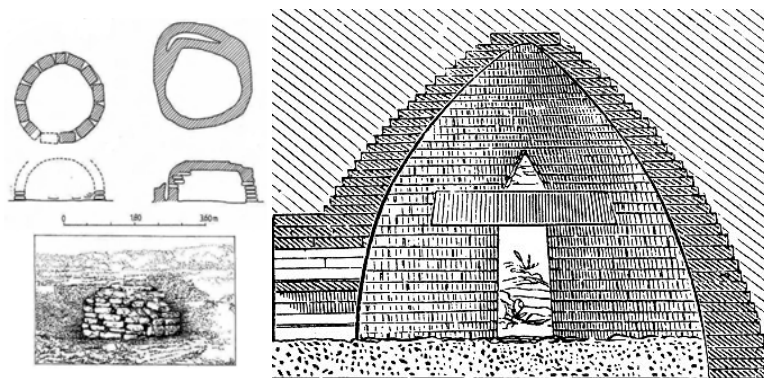
Áttérve a háromdimenziós elemzésre, ovoidnak nevezzük az ovális tulajdonságokkal rendelkező felületeket. Ezeket legegyszerűbben úgy kapjuk meg, ha valamely szimmetrikus ovális görbét egy szimmetriatengelye körül megforgatunk. A kapott forgásfelület konvex, minden pontjában a gömbkupolákra is jellemzően pozitív Gauss-féle szorzatgörbületeket kapunk. Ezek a felületek tehát elliptikus felületek (5).

2.2. Építészettörténeti áttekintés

Az ovális, mint építészeti forma, már az ókori civilizációknál megjelent. Ebben a pontban az ókortól kezdve szeretném bemutatni fejlődését, alkalmazási lehetőségét – nem csak falazott kupolák esetén - napjainkig bezárólag.

2.2.1. A kezdetek

A legkorábbi ismert ovális alaprajzú, ovális keresztmetszetű épületek még matematikailag meghatározott forma nélkül épültek, az emberek egyszerűen megpróbálták lefedni a teret a leghatékonyabb módon. A legrégebbi ismert ilyen épületet, melyet i.e. 4000 körül építettek falazással (5.ábra), a mai Törökország területén fedezték fel (1). Az építéstechnológia egyszerű volt. Szabálytalan formájú vízszintes gyűrűket építettek a téglából, kövekből egymás tetejére, konzolosan befelé haladva, míg végül legfelül az építmény össze nem záródott. A gyűrűk közötti kapcsolati felület vízszintes volt. Ma ezt álboltozatnak, álkupolának hívjuk. Egy ilyen típusú kupolát mutat i.e. 1250-ből az 5.ábra. Ezek a kőkunyhók – eltérően a korábban készült építmények többségétől – már nem ideiglenes célra épültek, hanem a letelepedés következményeként alakultak ki. Hasonló jelenséggel találkozhatunk Európa nyugati részein is, például Spanyolországban nem egy ilyen száraz falazással épült kunyhó áll a mai napig is, évezredek óta túlélve (6).



5.ábra Törökország területén talált kőkunyhók (balra) (1), az Atreusok sírkamrája Mükénében (jobbra) (7)

2.2.2. Mezopotámia és Egyiptom

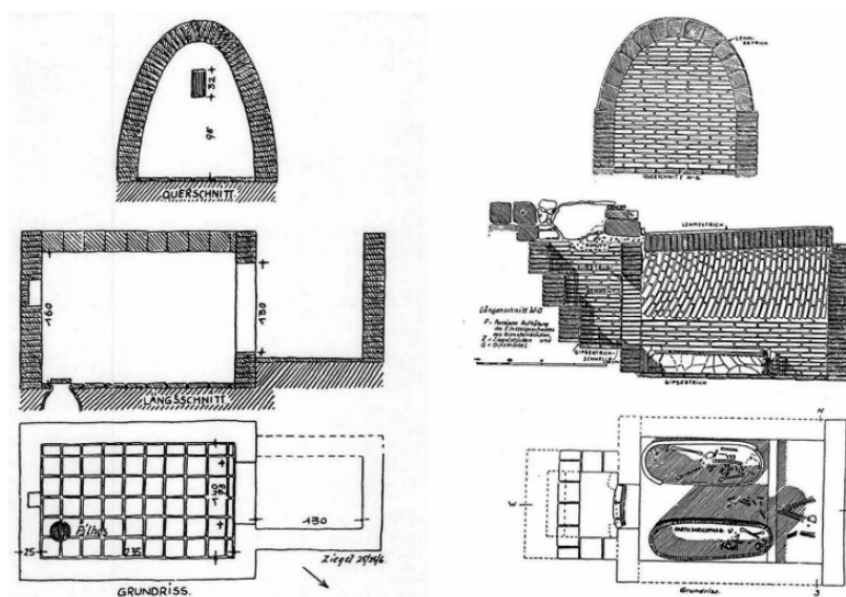
A boltív alkalmazása, felfedezése sokkal később következett be, mint az álkupoláké. Az első boltíveket i.e. 3500 környékén építették Egyiptom és Mezopotámia területén, hogy állandó lefedést biztosítsanak a halotti síremlékek számára (8) (9). Eleinte durva téglából építettek íveket, az

átboltozódás hatását alkalmazva nyílásáthidalásra. Később rájöttek, hogy az ív sokkal hatékonyabban dolgozik, ha a köveket méretre faragják, illetve azokat megfelelő pozícióban egymáshoz illesztik, s így módon a nyomásvonal mentén az erőt levezethetik az alapozásig, illetve a teherhordó falazatra, mely az ívet tartja. (6.ábra)



6.ábra A boltív működési elve (1)

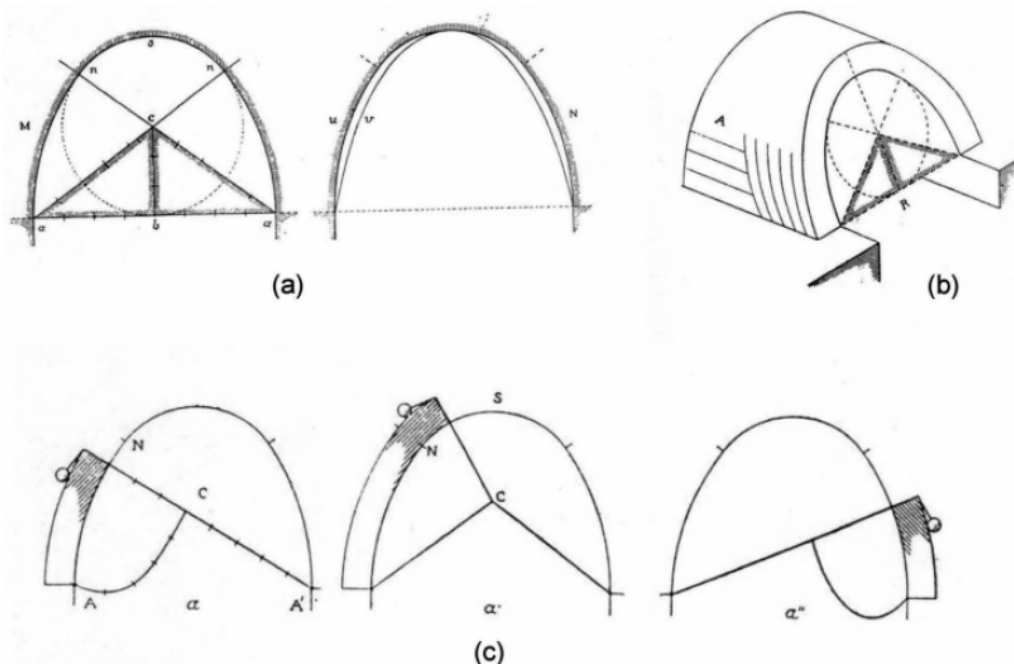
Két évezred alatt sokféle boltív típus létezett egyszerre, nem volt kitüntetett alak, sőt a mai értelemben vett etalon, az ék alakú kövekből épített körív boltozat fejlődésének, kitüntetett szerepének sincs nyoma (8) (9). Alapvetően a dongaboltozatokat építés közbeni alátámasztással, azaz zsaluzással építették, de néhány esetben el lehetett hagyni az állványzatot, mégpedig úgy, hogy a boltozat hossz tengelyére merőleges egyik végén falazat volt, melyre építéskor ferdén döntötték rá az egyes boltíveket, így azok egymásra térben támaszkodva önhordóak maradtak alátámasztás nélkül is (7.ábra).



7.ábra Állvánnyal és állvány nélkül épült kunyhók Mezopotámiában (1)

A sírkamrák lefedésére minimális méreteket alkalmaztak, így az első boltozattípusok támaszköze nem haladta meg az egy-két métert. Az akkori építőmesterek „érzésből” építettek. Különböző formákat alkalmaztak, melyeket rendre finomítottak tapasztalataik alapján. Nem is meglepő, hogy ezért találkozunk az ókori építészetben olyan sok – és sokféle – ovális boltozattal. Ha belegondolunk, hogy egy boltozat, boltív stabilitását tisztán geometriai vizsgálatokkal is kimutathatjuk, belátható, hogy a támaszvonalat sokkal jobban követi az ovális forma, mint a körív, így tehát – szerencsésen eltalált ovális alak esetén – az előbbi biztonságosabbnak mondható ugyanazon vastagság mellett, mint az utóbbi.

Miközben az i.e. második évezredben egyre nagyobb boltozatok épültek – pl. a Ramesseum⁵ mezőgazdasági épületei már 5 méteres fesztávval rendelkeztek – felmerült az igény a szabványos formákra, mellyel megkezdődhetett a tömeges felhasználás. Az egyiptomiak az alkalmazott geometria mesterei voltak, így elsőként ők fogalmazták meg pontos, kitűzhető geometriát az általuk gyakran alkalmazott ovális alakra. A 3-4-5 oldalarányokkal rendelkező derékszögű háromszög elvét alkalmazták, ez az ovális egyszerű csapokkal és zsinórokkal kivitelezhető (10). Az elvet a **8. ábra** mutatja. Az ovális induló és érkező pontjához egy-egy csapot ütünk (*lásd a 8c ábrát*). Egy 8 és egy 5 egység sugarú zsinórt a két csaphoz (A és A' pont) kötünk, majd egymáshoz erősítjük őket úgy, hogy az 5 egységnyi zsinórt a 8 egységnyi zsinórra kötjük annak leeresztésétől 5 egységnyi távolságra. Ezután a kiinduló pontból a hosszabb kötel végét folyamatosan feszítve tartva meghúzzhatjuk az ívet. Így tehát egy-egy szakaszon, ahol a rövidebbik szál elernyed, 8 egység sugarú körívünk, ahol a két 5 egységnyi szál feszül, 3 egység sugarú körívünk lesz.

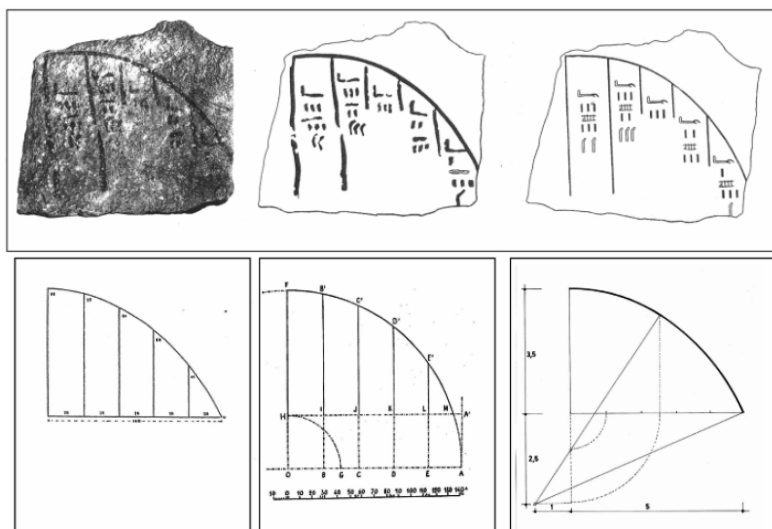


8. ábra Egyiptomi ovális ív kitűzése zsinórokkal (10)

Nem csak az előbb említett módon lehet kitűzni egy boltozatot. A kőművesek gyakran a kapcsolódó falakra vázolták fel az építendő alakot, amit folyamatosan változtattak, míg a megfelelő formát meg nem kapták (1). Ezt a formát véglegesíteni is lehetett. A mester a vázlatához egy vízszintes vonalat húzott, s megfelelő távolságokra, a vízszintes vonal megfelelő számra való osztásával lemérte az egyes magasságokat, így a boltozat később arányosan reprodukálható volt. Ilyen rajzokat találtak i.e. 3000-2700, a III. dinasztia⁶ uralkodásának idejéről a szakkarai lépcsős piramisok mellett. (**9. ábra**) Néhány elmélet szerint az egyiptomiak már ellipszis alakú boltozatokat is építettek, bár ez elég valószínűtlen, hisz mai tudomásunk szerint elsőként a görögök írták le matematikailag pontosan a görbét az i.e. negyedik században. Az elméletek nem alaptalanok. Ha az egyiptomi 3-4-5 típusú oválist egy derékszögű koordináta-rendszerben szerkesztjük fel, akkor annak ordinátái maximum 1-2 %-ban térnek el az ovális-hoz legjobban illeszkedő ellipszistől, mely hibát az építési pontatlanságok érzékelhetetlenné tesznek.

⁵ A Ramesseum II. Ramszesz fáraó emlékére emelt templomegyüttes Egyiptomban, Luxor városának Theban nevű temetkezési helyén

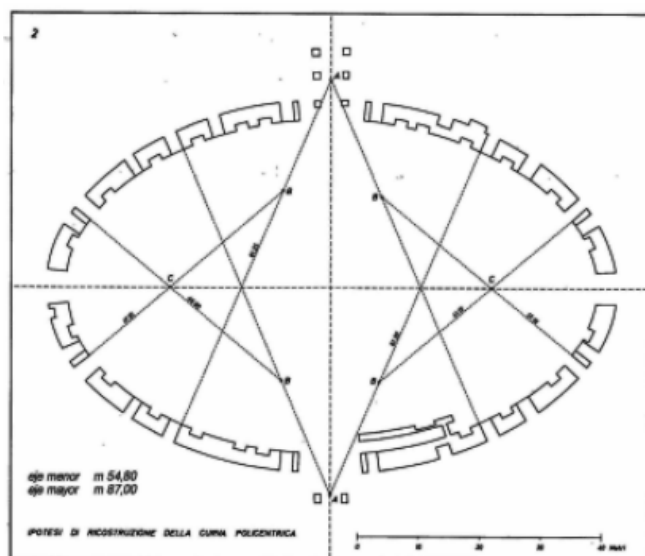
⁶ Az óegyiptomi III. dinasztia az Óbirodalom korának kezdete. Ez az uralkodóház alapozta meg az egységes Egyiptom kulturális és gazdasági rendszerét.



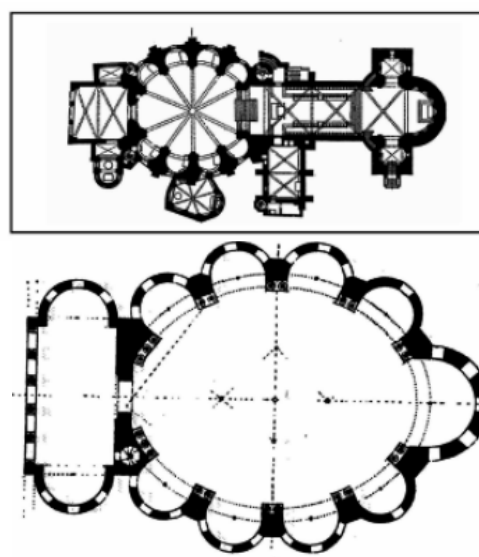
9. ábra Oválisok rajzi kitűzése (1)

2.2.3. A görög világ és a Római Birodalom

A görögök elsődleges építőanyaga a kő volt, ezért előszeretettel alkalmaztak ék alakúra faragott kövekből épült, kivétel nélkül félkör alakú valódi boltíveket. A legtöbb példát alkalmazásukra azonban csak másodlagos építményeknél láthatunk: csatornáknál, városkapuknál. Néhány konzolosan épült álboltozatnál megjelennek ovális formák, de olyan rendszeres alkalmazást nem találunk, mint a téglapítéssel büszkélkedhető Egyiptom vagy Mezopotámia esetében (11) (12).



10. ábra Az amfiteátrumok rekonstruált geometriája (13)



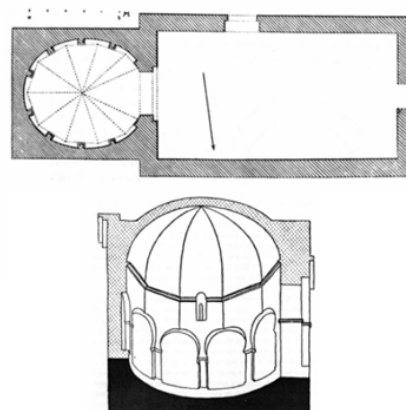
11. ábra St. Gereon temp. (fent), a római előd (lent) (1)

Európában az oválist a Római Birodalom amfiteátrumainál alkalmazták, ezen épületek jellemzően ilyen alaprajzzal épültek (13) (10. ábra). Ettől eltekintve az ovális formák, ovális kupolák nem terjedtek el a rómaiaknál. Ők a tökéletesség szimbólumának a gömböt, illetve a centralizált formákat tekintették, így kupoláik is túlnyomórészt gömbkupolák. Néhány kivételt azért találunk: feltételezések szerint (14) a kölni St. Gereon templom középső nyolcszögletű tere egy régi ovális alaprajzú római épület alapjain áll (11. ábra). Másik ilyen példa egy köhíd az olaszországi Narniban (12. ábra), melynek lejtős vonalvezetését két, egymásba kapcsolt, különböző sugarú negyed körív segítségével

alkotott oválissal tudták követni. A fentiek alapján kimondható, hogy az ovális formák nem jellemzik a Római Birodalom építészetét, azonban különleges kivételekként találhatunk néhány példát rájuk.



12. ábra Narnii híd (15)

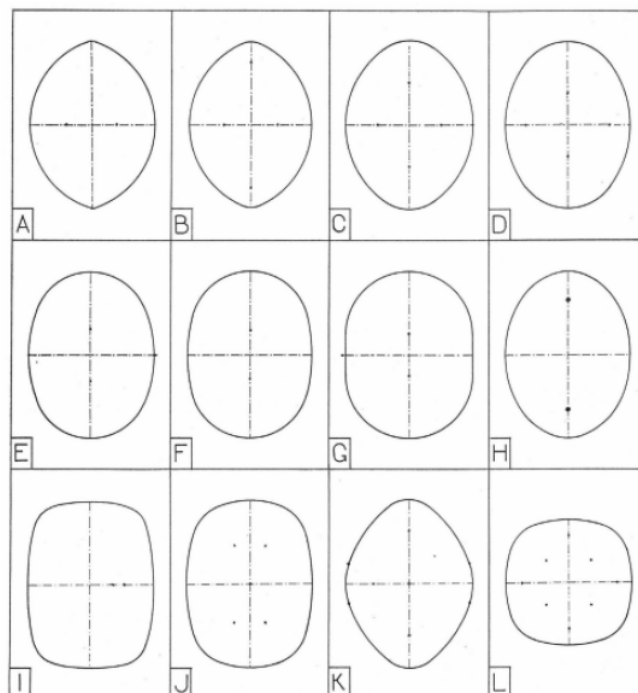


13. ábra Santo Tomás de Olla (16)

2.2.4. Középkor

A legtöbb középkori kupola centralizált elrendezésű, azaz kör alaprajzú, feltehetőleg a római befolyás miatt. A román stílusú templomok legtöbbször vonatkozik ez az állítás, ám itt is akadnak kivételek. A X. századi spanyol Santo Tomás de Olla templom például egy 6,00x5,50 méteres oválisra szerkesztett nyolcszögű kupola, melyet patkó alakú boltívek határolnak (16) (13. ábra).

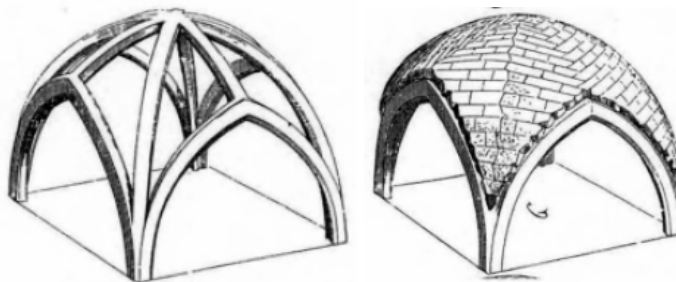
Franciaországban René Chappuis az 1970-es években kimerítő kutatást végzett a boltozatok formájával kapcsolatban. Közel 400 olyan román templomot vizsgált meg Franciaország déli részén, melyekben megjelennek ovális kupolák vagy boltozatok. Ezek közül 130 kupola volt ovális alaprajzú, segítségükkel Chappuis osztályokba sorolta a különböző ovális formákat (17) (14. ábra). Ez jelentős építészettörténeti felfedezés volt, hisz így elsőként mutatta ki a reneszánsz ovális kupoláinak előzményeit. Az ovális formák más szerepben is megjelentek a román boltozatokban, mégpedig a keresztboltozat metszsvonalaként.



14. ábra Chappuis osztályozása (17)

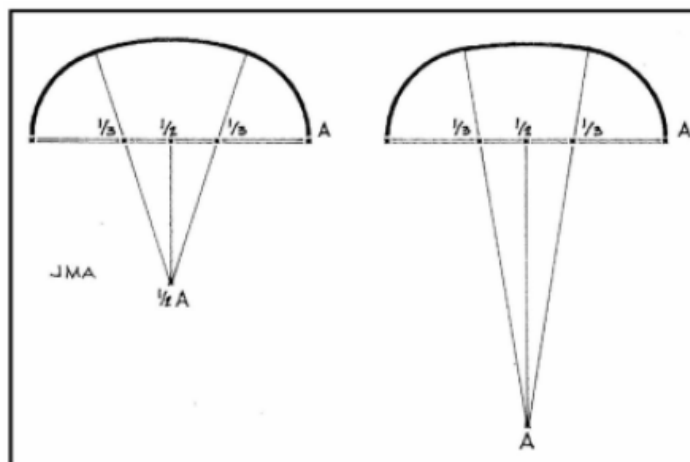
2.2.5. Gótika

A gótikus építészetre az építés egyszerűsítése jellemző. Ez tettenérhető például az egyik jellegzetesebb gótikus építészeti forma, a keresztboltozat szerkesztésében. A keresztboltozatok bordáit mindig körív alakúra szerkesztették, mivel egyszerűbb volt ezt kitűzni, mintsem két egymásba metsződő felület metszéspontjának pontos helyét kiszámítani előre. Ezután a bordák közé elkészítették a falazást, mellyel elkészült a teljes boltozat is (**15. ábra**). Az egyszerűsítés tehát abban állt, hogy nem a felület alakja, hanem az előre definiált törések szabták meg a boltozat alakját. Ez az eljárás feltehetőleg a bizánci építészetben jelent meg először azzal a különbséggel, hogy a metszéspontokat nem erősítették meg külön bordákkal, mint azt Nyugat-Európában tették (18).



15. ábra Gótikus boltozat építésének módja (18)

A kései gótikában főleg Anglia, Németország és Spanyolország egyes részein megjelentek az ovális bordákkal erősített egyedi alakú boltozatok. Az első dokumentált bizonyítékot az ovális alkalmazására ebből az időből a középkori épületek rajzainak leggazdagabb gyűjteménye, a Wiener Sammlung tartalmazza (19) (20). A rajzokból kiderül, hogy igen egyszerű módját találták a németek az ovális kiszerkesztésének: egy vízszintes szakaszt megfelelő számú részre (pl. 3, esetleg 4 részre) osztunk, a két szélső pont által megrajzolhatjuk a szélső részek körívét. A két körívet szimmetrikusan rajzoljuk balról és jobbról, majd ahol ez a két körív megáll – ez a pont tetszőleges, a tervező választja meg, hogy meddig húzza az ívet –, azokból a pontokból a sugár folytatásaként egy-egy vonalat húzunk, melyek így a szimmetriatengelyen fognak összemetsződni, s melyek így a középső szakasz körívét, annak középpontját, illetve sugarát ki is jelölik. (**16. ábra**) Az ábra azt magyarázza, hogy így módon ugyanahhoz a hossz tengelyhez és kisebbik sugarúhoz tetszőleges számú különböző ovális szerkeszthető. Spanyolországban az ovális íveket gyakran alkalmazzák a 15-16. századi gótikában főleg egyházi és civil épületek kapuzatában, illetve alacsony boltozatok merevítő bordájaként, melyek általában a templomi kórus alatt helyezkedtek el. Egy ilyen alacsony ívelésű boltozatot láthatunk a **17. ábrán**.

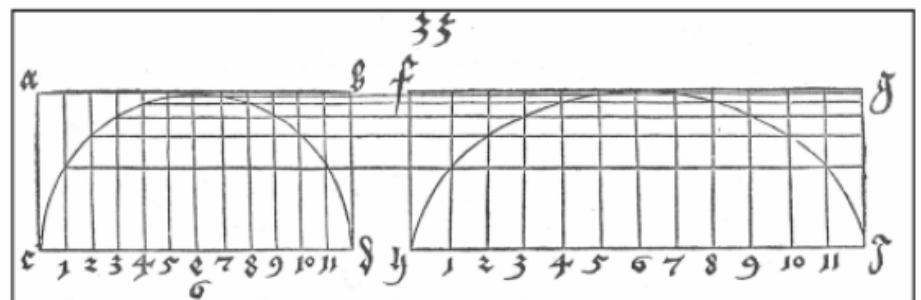
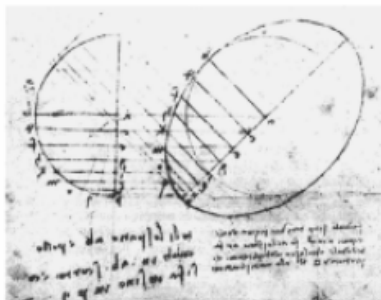


16. ábra Ovális szerkesztése a német iskola szerint (20)



17.ábra A toledoi San Juan de los Reyes templom boltozata (1)

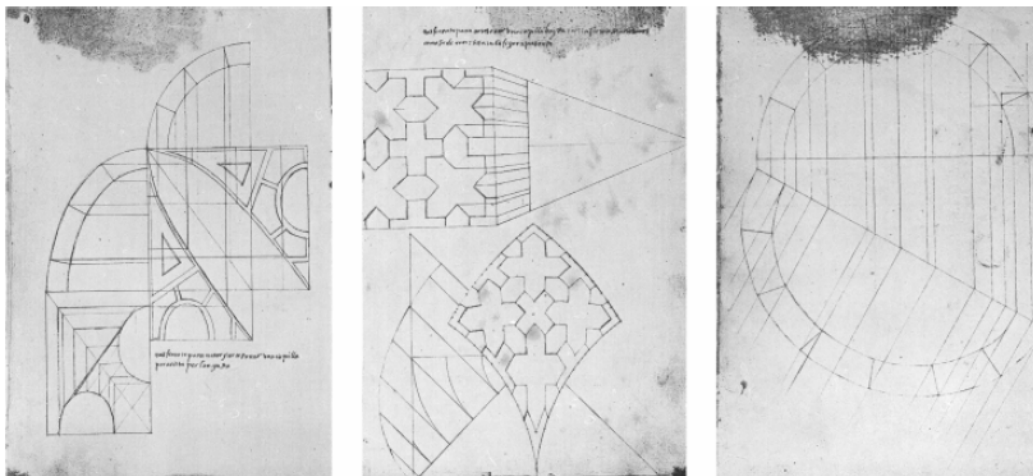
A 16. század elejéről származnak olyan feljegyzések, mely szerint létezik másféle geometriai módszer is ovális rajzolására. Első ízben a Leonardo Da Vinci nevéhez köthető Codex Atlanticus (1510) című műben jelentek meg leírva ezek a módszerek (21), de ismertté Dürer „*Unterweisung der Messung*” című könyve tette 1525-ben. Az eljárás lényege, hogy adott támaszközre és magasságra kell egy olyan ívet szerkeszteni, mely ugyanilyen magas körív nyújtásából keletkezik. Először a félkört egy 1:2 arányú téglalapba rajzoljuk, majd a téglalap alsó oldalát 12 egyforma részre osztjuk. Ezután egy azonos magasságú, de a megfelelő támaszközre illeszkedő téglalapot rajzolunk, s ugyanígy 12 egyenlő részre osztjuk. A 12 osztás során függőleges egyeneseket húzunk minden osztópontba, majd ahol ezek elmetszik a félkört, azokból a pontokból vízszintes vonalakat húzunk. Ahol ezek a vízszintes vonalak a velük megfelelő függőleges vonalakkal elmetszik egymás az új téglalapon belül, ott lesznek a nyújtott körív, azaz az ovális pontjai (18. ábra). Természetesen ez az ovális egyben ellipszis is, de ezt Dürer nem tudta, vagy legalábbis nem említette. Nem tudni pontosan, hogy eredetileg Leonardo vagy Dürer ötlete volt-e a fent említett módszer, vagy csak az akkori építőmesterek tapasztalatait és technikáit írták le.



18.ábra A Dürer-féle ovális szerkesztése (1)

Érdekes megemlíteni, hogy ugyanez a módszer megjelent spanyol építészeti és kőfaragó értekezésekben is, melyeket a XVI. század második felében Hernán Ruiz (1545) (22), Ginés Martínez de Aranda (23) és Alonso de Vandelvira (24) írtak. A legrégebbi ilyen munka az úgynevezett Libro de arquitectura, mely Hernán Ruiz munkáját dicséri. A kézirat 1545 és 1562 között íródott és tartalmazza Vitruvius Pollio „De architectura” című művének első kötetét is, melyet számos geometriai probléma rajzi megoldása, kőfaragás, támpillér tervezés, klasszikus szabályok és templomtervezési témák követnek. Hernán Ruiz olyan rajzokat is mellékel könyvében, melyeken Dürer megoldásához hasonló módszert láthatunk, ám Ruiz megoldása vetítéses módszeren alapszik, mellyel a nyújtásokat ferde tengelyű vetítősíkokkal éri el. Az alábbi három rajzon (19.ábra) látható, hogy semmiféle

instrukciókkal nem látták el azokat, ami azt feltételezi, hogy a kor építőmesterei tisztában voltak ezekkel a szerkesztési eljárásokkal.



19. ábra Ruiz kéziratában megjelent rajzok a vetítése módszerről (22)

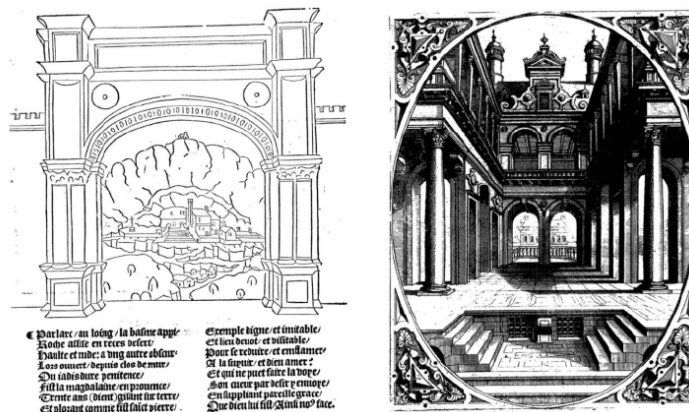
Martínez de Aranda spanyol építész a XVI. század végén alkotott. 1590-ben írta értekezését a kőfaragás művészetéről (23), melyben lényegében a Dürer- és a Ruiz-féle ovális ívek szerkesztésnek eljárását mutatja be. Vandelvira 1580-ban csak a vetítéses módszerről ír, de ő se fűz hozzá elegendő információt, vagy leírást a rajzokon kívül, melyek szintén az akkori kőműves mesterek felkészültségét valószínűsíti.

Részletesebb leírást ovális szerkesztéséről Philibert De L'Orme könyveiben találhatunk, ezek 1561-ben (25) és 1567-ben (26) jelentek meg. Két módszert mutat be, melyek többé-kevésbé a fentebb említett két eljárásnak alapszanak. Kimondja, hogy a keresett görbe, azaz az elnyújtott félkör - mint tudjuk: ellipszis -, és így nem rajzolható fel pontosan körző segítségével, mint a körívekből illesztett ovális. Megmutatja azt is, hogyan lehet egy adott pontban a görbe lokális görbületét megállapítani, így az oda illő követ kifaragni. A megoldás igen egyszerű: a beillesztendő kő helyének közelében a görbén vegyünk fel három pontot, ezek sorban A-B-C. Ezután alkossuk meg az AB és BC szakaszt, mindkét szakaszra állítsunk szakaszfelező merőlegest, majd ezek metszéspontja meg is adja az A-B-C ponton átmenő kör középpontját, mely kör közelítőleg a B pont simuló köre.

2.2.6. A reneszánsz és barokk

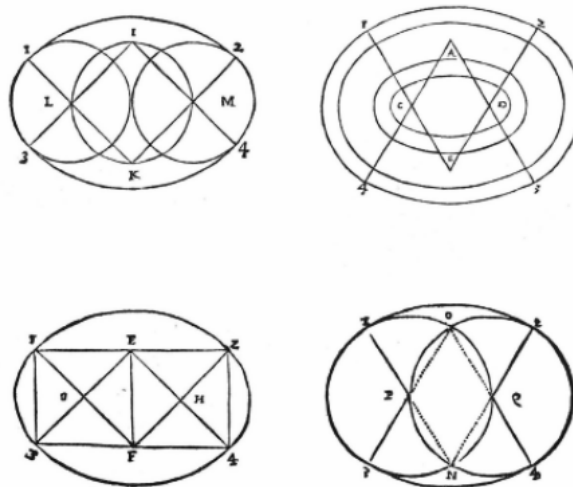
Láthattuk, hogy ovális formákat már a kései gótikában is sok alkalommal használtak. Azt is láthattuk, hogy kőműves mesterek különféle technikákat fejlesztettek ki, hogy bármely támaszköze és magasságra oválist szerkesszenek félkörök nyújtásával vagy zsugorításával. Az ovális tehát nem a reneszánsz találmánya, de itt teljesedett ki jelentősen, itt alkalmazták az építészek arra, hogy új térformálást valósítsanak meg a templomépítésben.

Úgy tűnik, hogy az ovális alkalmazása különböző művészeti irányzatokban már a Cinquecento kezdetén megmutatkozott. Panofsky szerint Michelangelo első munkája, II. Gyula pápa sírkamrája is ovális belső térrel készült (27). Ugyanő azt állította, hogy Correggio volt az első festő, illetve Gian Maria Falconetto az első szobrász, akik oválist alkalmaztak kompozíciójukban (28). Pélerin (1521) egyik könyvének lapjain két oválist tartalmazó rajz is megjelenik: egy reneszánsz ovális boltozatú kapu, valamint egy ovális keret (20. ábra) (29). Az ovális formák színesebbé tették a műveket, ezért előszeretettel alkalmazták őket.



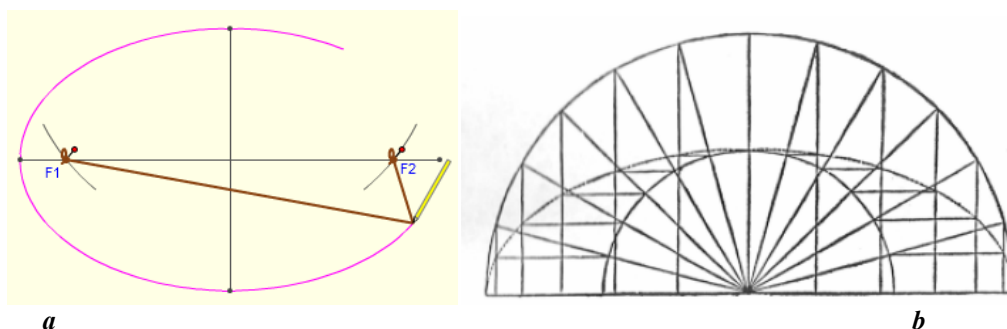
20. ábra Pélerin könyvének illusztrációi (29)

A leghíresebb építészek, akik az oválist tartották az új építészeti formának, az olasz Baldassare Peruzzi, Sebastiano Serlio és Giacomo Vignola voltak. Peruzzi volt az, aki először gondolta, hogy előnyösen alkalmazza az ovális forma jellegzetességét. Halála után tanait, elveit tanítványa Serlio vitte tovább, aki a legjelentősebb befolyással bírt az ovális, mint építészeti forma elterjesztésében a kései reneszánsz és barokk időkben. Geometriáról szóló könyvének első kötetében (1545) oválisokról külön szót ejt (30). Kijelenti, hogy lehetséges oválist többféle módon is szerkeszteni, majd négy különböző eljárást vázol fel (21.ábra). Ezeket a változatokat később majdnem mindegyik ezen témával foglalkozó könyvben fellelhetjük. Az építőmesterek, építészek tudták, hogy az ovális görbék variációinak száma végtelen, mégis a Serlio-féle négy alaptípust használták legtöbbször.



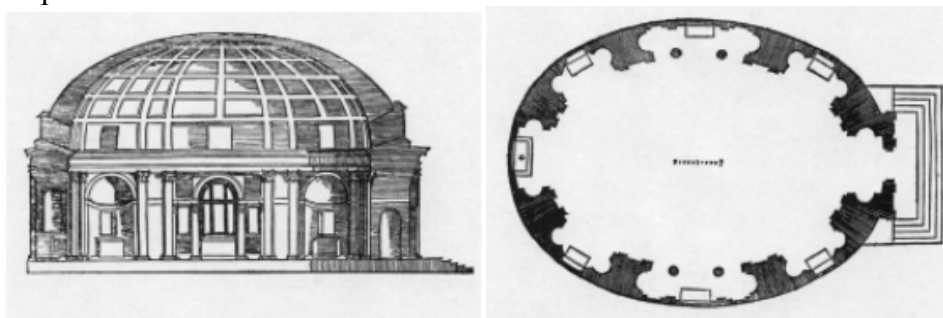
21.ábra Serlio négy ajánlott ovális szerkesztési módszere (30)

Serlio egy újabb kitűzési módszert is javasolt. A később kertész-módszernek emlegetett eljárással ellipszist lehetett szerkeszteni a fókuszpontokba levert csapok és egy zsinór segítségével. A zsinór hosszabb kellett, hogy legyen, mint a két fókuszpont távolsága. A zsinórt ezután megfeszítve bármely pontban a fókuszpontoktól lévő távolságok összege, vagyis a zsinór hossza konstans, így egy ellipszist kapunk (22a.ábra). Később Serlio egy újabb megoldással állt elő: két koncentrikus félkört rajzolunk, majd felosztjuk egyenlő szögekre a kör sugaraival. Ahol a sugarak metszik a nagyobbik kört, ott függőleges vonalakat, ahol a sugarak elmetszik a kisebbik kört ott vízszintes vonalakat rajzolunk, majd az összetartozó függőleges és vízszintes vonalak metszéspontja adja az ovális pontjait, ami, mint Ruiz eljárása esetén, itt is ellipszis lesz. (22b.ábra)



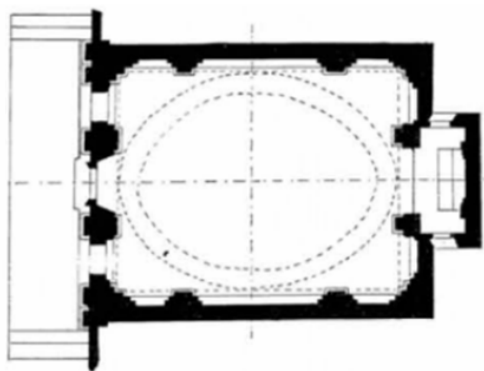
22. ábra Serlio javaslatai ovális szerkesztésére (30)

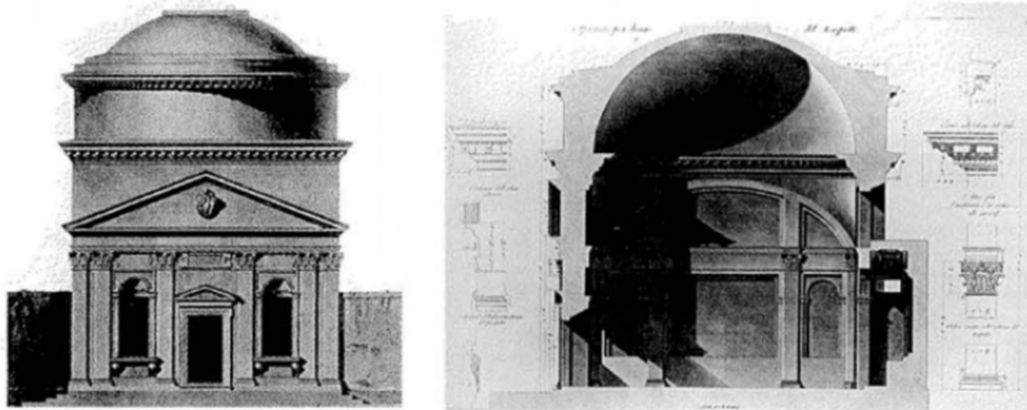
Amikor Serlio az oválisok kitűzéséről, szerkesztéséről szóló részt is befoglalta könyvébe, nem csak geometriai problémaként kezelte azt, hanem észben tartotta mestere, Peruzzi törekvéseit is, hogy egy újfajta templomot alkosson meg. Építészeti könyvének V. kötetében, melyet 1547-ben írt (31), több templom-variáció között megjelenik egy ovális templom is (23. ábra). Ez a terv óriási hatást gyakorolt az építészetre a reneszánszban, sőt a barokkban is. Ez az ovális alkalmazásában mérföldkönek tekinthető : olyan jelentőséget kapott ezzel az ovális, mint építészeti forma, mint azelőtt soha. Ebben az időben a kört is felülmúlta népszerűsége, pedig a kör az antik korok óta a geometriai tökéletesség jelképe volt.



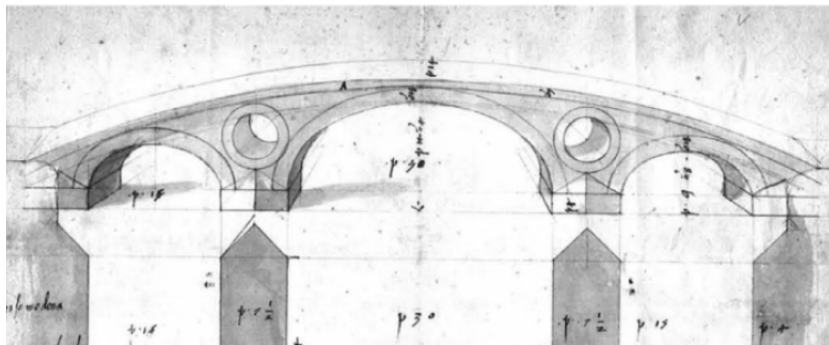
23. ábra Serlio ovális templomának tervei (31)

Peruzzi és Serlio lefektette az elméleti alapokat, de Vignola volt az, aki először gyakorlatban is kamatoztatta ezt a tudást, s megépítette az első ovális templomot, a Sant'Andrea-t Via Flaminia-ban (1550-1554) (24. ábra). Korábban, 1547-ben, Vignola már megtervezett egy hidat alacsony nyílmagasságú ovális boltívekkel (25. ábra). Az ovális boltívek alkalmazása a hidak esetében az ő munkája nyomán vált gyakorivá a XVIII. század elején. Perronet hasonló, de policentrikus ovális boltívű hidakat épített, s vált róluk híressé a XVIII. század második felében.





24. ábra Sant' Andrea templom Via Flaminiában (1)

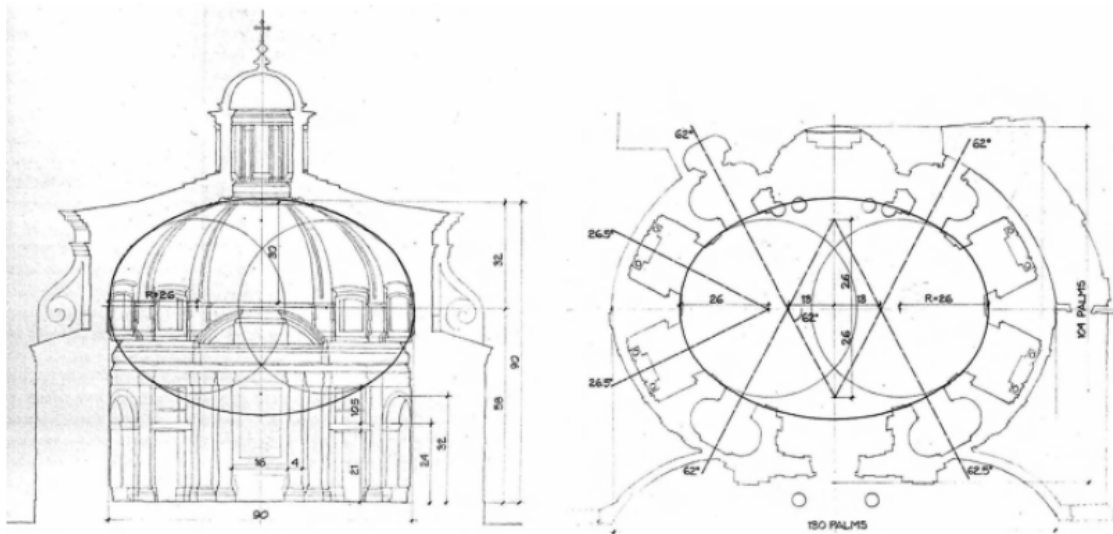


25. ábra Vignola ovális boltívű hídjának tervei (1)

Serlio és Vignola után az ovális kupolák gyorsan elterjedtek, de nem csak Olaszországban, hanem Spanyolország, Franciaország és Közép-Európa jelentős részén is. Fontos megemlíteni, hogy Vandelvira kézirata a kőfaragás művészetéről (1575) hat különféle ovális kupola rajzát tartalmazza. A barokk legjobb építészei leleményességüket használták az immár nem kör alaprajzú terek miatt fellépő problémák megoldására. Egyik leghíresebb építész az olasz Giovanni Lorenzo Bernini (1598 – 1680) volt, akinek egyik legjelentősebb munkája a Sant'Andrea al Quirinale templom (26. ábra). Az épület ovális alaprajza nem teljesen követi Serlio modelljét, finom változás mutatkozik a belső tér kialakításában. Mégis Bernini oválisát klasszikusnak nevezhetjük. Úgy, mint Serlio terveiben, a keresztmetszet profilja megegyezik az alaprajzával, a felület úgy alakul ki, mintha az alaprajzot megforgattuk volna a hossz tengely körül. (27. ábra)

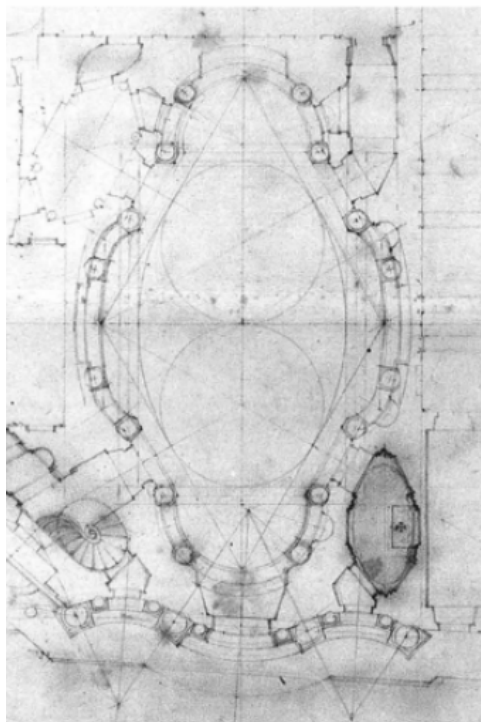


26. ábra Sant' Andrea al Quirinale kupolája belülről (32)



27. ábra Sant'Andrea al Quirinale keresztmetszete és alaprajza (33)

A kor másik híres építész a svájci származású, de Itáliában tevékenykedő Francesco Borromini, eredetileg Francesco Castelli (1599 –1667). Egyik munkája a San Carlo alle Quattro Fontane (1663) már egy komplikáltabb alaprajzi kialakítást vázol fel. Az alaprajzi ovális alakja megváltozik a kupola alapjánál (28.ábra). Ez az ovális eléggé eltér az akkoriban alkalmazott szokásos formáktól. Kétségtelen, hogy Borromini feszültséget akart kelteni a belső térben, ezért alkalmazta ezt a furcsa megoldást. A barokk ötletességet és határokat nem ismerő művészetét jellemzi, hogy ezen oválisok egyike sem hasonlít a Serlio által lefektetett alapformákhoz.



28.ábra San Carlo alle Quattro Fontane kupolájának terve és megépült képe belülről (34)

A 18. században az elméleti és gyakorlati megoldások kezdtek szétválni. Attól, hogy elméletben ismertek egy módszert, még nem biztos, hogy azt a gyakorlatban is alkalmazták, főleg, ha az körülményesen volt csak megoldható. A körívek alkalmazása rendkívül megkönnyítette a gyakorlati

kivitelezést, ez is lehet az oka annak, hogy bár Bernini és Borromini ismerték az ellipszis szerkesztésének módját, mégis körökből szerkesztettek ovális templomi formákat. Ha belegondolunk, hogy az ellipszisnek pontról pontra változik a görbülete, arra a megállapításra juthatunk, hogy ez esetben minden egyes követ egyedire kell faragni. Írott és rajzi bizonyítékok vannak rá, hogy a legtöbb templom körívekből szerkesztett oválisokkal épült, gondoljunk csak a feljebb említett Sant'Andrea és Carlo alle Quattro Fontane templomok rajzaira. Európa egyik legnagyobb ilyen kupolájú (36 x 25 m) temploma, a Santuario di Vicoforte (**29.ábra**) sem ellipszis formával készült, bár kivételes esetek léteznek. Ilyen a spanyol építész, Plo y Camin munkája (1757) (35), mely esetében fa mintaívvel ellipszis, ellipszoid kupolát alkotott meg.



29.ábra Santuario di Vicoforte (36)

2.2.7. A klasszicizmustól napjainkig

A barokk művészet meglehetősen egyéni módon kezelte, sőt lényegesen átformálta a klasszikus formákat. A XVIII. század végén az építészek újra az antik művészet újjáélesztésén fáradoztak. Már nem elégedtek meg késői korok közvetítésével, hanem az eredeti, ókori alkotásokból merítettek. Felkutatták, felmérték és lerajzolták a még meglévő római és görög épületeket. A **2.2.3.pontban** láthattuk, hogy ezen korok művészete, építésze csak kivételes esetekben alkalmazta az általános ovális formákat (37).

Ez az építészeti megközelítés napjainkban is érvényes. Csakúgy, mint azt a rómaiak építészeténél láthattuk, az ovális kupolákat a mai napig főként középületek, stadionok, sportcsarnokok lefedésére alkalmazzák, felszínre juttatva a mai építészek határtalan kreativitását (**30.ábra**). A reneszánszban és főleg a barokkban a szakrális építészetben tért nyert forma a modern kori templomoknál viszonylag ritkán jelenik csak meg. Természetesen a jelen kor építészetében elsősorban már nem falazott szerkezetként találkozunk ovális kupolákkal. A modern szerkezetek a vasbeton héjak, acél rácsfelületek, fa lécrács héjak, légsátrak stb. Falazott ovális kupolát például egyes különleges lakóépületekben találhatunk.



30.ábra „The Egg” művészeti központ, Peking (2007) (38) és a Mansueti Library, Chicago (2011) (39)

2.3. Falazott kupolák kitűzése és kivitelezése

Ebben a pontban szeretném bemutatni, hogy az építőmesterek számára milyen lehetőségek, milyen ismert technikák álltak rendelkezésre egy ovális alaprajzú falazott kupola geometriájának definiálására, kitűzésére, megépítésére.

A kupolák általában tengelyszimmetrikusak, azaz valamilyen forgásfelületként kezelhetők. Egy kupola állványzat nélkül is megépíthető vízszintes gyűrűkből, hiszen minden egyes gyűrű zárásakor az addig kész felület térben teherhordóvá válik. Az egyedi köveket a gyűrű zárásáig egyszerűen hátrahorgonyozzák, vagy megtámasztják valamilyen módon. Az építéshez azonban mégis szükség van egy könnyű állványzatra, de nem a terhek hordása miatt, hanem a térbeli alak kijelölésére. Néha ezeket falazatból előre megépítették, mint térbeli bordarendszert, s a köztük lévő teret falazták ki. Gyakran vasgyűrűkkel alkalmaztak, mely merevítette az alakzatot, ameddig a habarcs megszilárdult (1).

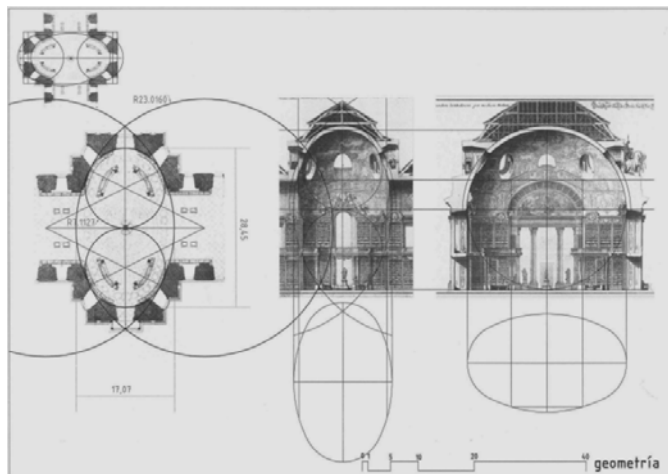
Az ovális kupolák geometriája sokkal komplexebb, mint az egyszerű gömbkupoláé, melynek forgásszimmetria tengelye a központi függőleges tengelye. A modern építész vagy mérnök azonnal matematikai transzformációkban gondolkodik: forgatás, eltolás, affin transzformációk stb. Egy építésznek minden egyes paramétert meg kell vizsgálnia, mely a belső felületet meghatározza: a kis és nagy tengelyek aránya az alaprajzon, a támaszköz és a magasság aránya keresztmetszeti értelemben, a keresztmetszeti forma stb. Minden egyes paraméter összefügg egymással valamilyen módon. Ezután át kell gondolnia, hogyan is épül majd meg a kupola, hogyan határozzák meg a belső felület geometriáját a térben, melyhez az előbb említett vezető állványzatokat használhatják majd. Ha a kupola kőből épül, külön figyelmet kell szentelni a kövek faragására. Mindezeket együtt kezelve a legfontosabb szempont a gazdaságosság lehet.

A felület definiálásának egyszerű módja, ha azt az alaprajzi ovális görbe kis vagy nagy tengelye körüli megforgatásával, forgásfelületként hozzuk létre. Mindkét esetben a forgástengelyre merőleges keresztmetszetek körívek lesznek. A vezető állványzatot, vezetőíveket a gyakorlatban mindig a kisebbik tengellyel párhuzamosan - a kisebb nyílás áthidalása érdekében - helyezik el.

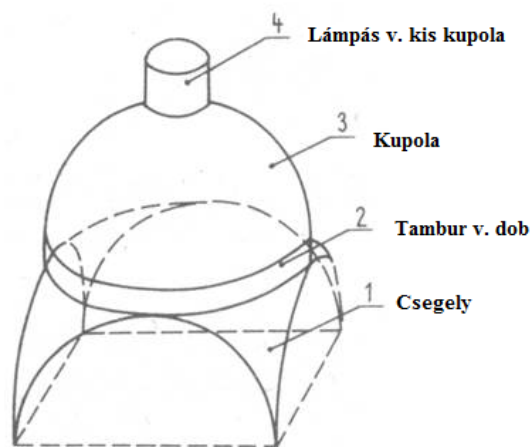
Forgassuk meg az alaprajzi görbét először a hossz tengely körül! Ekkor a rövidebbik tengellyel párhuzamos keresztmetszetek, tehát a vezetőívek geometriája rendre különböző nagyságú körívek. A vezetőív sugarának hosszát megadja a vezetőív helyében az alaprajzi görbén a hossz tengelytől felmért merőleges távolság. Nagyon sok barokk templom ilyen geometriával épült, pl. a San Andrea del Quirinale is.

A másik eset, ha a rövidebbik tengely körül történik a forgatás. Ekkor a hossz tengellyel párhuzamos keresztmetszetek lesznek körívek, a rövidebbik tengellyel párhuzamosak pedig ovális görbék. A vezetőívek megépítéséhez tudnunk kell az ív helyén az ovális keresztmetszet pontos alakját. Sajnos

ezek a keresztmetszetek csak speciális esetben – amikor a felület ellipszoid – arányosak egymáshoz, ezért a vezetőíveket mind egyedire kellene készíteni. Már említettük, hogy a gyakorlatban alkalmazott ovális kupola, illetve a hozzá legjobban illeszkedő ellipszoid – például, ha az alaprajz felett lévő magasságokat hasonlítjuk össze – csak pár százalékban térnek el egymástól. Az építési pontatlanság ezt a különbséget teljesen elfedi, ezért közelítésként a vezetőívek alakját a gyakorlatban a mesterek arányosnak feltételezték egymással, tehát a vezetőívek alakját az alaprajzi görbéhez hasonló görbék adták. Így épült a Sant'Andrea Via Flaminia és a bécsi Cesarean Library kupolája is (31.ábra).



31.ábra A bécsi Cesarean Library rajzai (40)



32.ábra A kupola részei (41)

Az oválkupola ugyanazokból a szerkezeti részekből épül fel, mint a gömbkupola (32.ábra). A kupolát gyakran a vele megegyező alaprajzi keresztmetszetű tamburra vagy más néven dobra ültették fel. A dobot egyszerű falnyílásokkal törték át vagy oszlopsorra helyezték, illetve annak terheit térbeli boltozattal, a csegellyel is le lehetett vezetni, ekkor nagyobb teret engedve az átjárhatóságnak. Az ablakokat, felülvilágítókat a dobban vagy a kupola tetején, azt áttörve helyezték el (41). Az kupola áttörése statikai gondokat nem szül, hisz a felső gyűrűsorok minden esetben stabilak a nagy gyűrű- és meridián irányú nyomóerők miatt. Ilyen áttörés esetén a kupola tetejére rendszerint még egy úgynevezett lámpást vagy kis kupolát is építenek.

2.4. Falazott kupolák mechanikai vizsgálata

A falazott szerkezetek a legrégebbi történelmi múlttal rendelkező szerkezetek, mégis tudásanyagunk ezek mechanikai működéséről viszonylag kicsi, ha azt nézzük, hogy a modern építőanyagokkal kapcsolatban (acél, vasbeton) mennyi ismeretünk van. A mai napig igen sok kutató foglalkozik ezért ezzel a témával.

A falazott szerkezet semmiképp sem mondható homogén, izotróp szerkezetnek. A falazóelemek anyaga valamilyen kőzet - márvány, mészkő, gránit, homokkő – vagy égetett agyagtégla volt. Az alkalmazott kőzetek néhány fontosabb mechanikai tulajdonságát mutatja az 1. táblázat.

	Egyirányú nyomószilárdság (N/mm ²)	Súrlódási szög (°)	Rugalmassági modulus (GPa)	Poisson-tényező (-)	Térfogsűrűség (kg/m ³)
Gránit	70-280	34-37	40-70	0.2-0.3	2600
Márvány	50-180	36-43	50-100		2600-2900
Homokkő	50-100	29-39	5-100		2000-2600
Mészkő	20-200	23-28	20-70		2000-2900

1.táblázat Kőzetek mechanikai tulajdonságai

Az égetett agyagtégla esetén is hasonló változatosságot mutatnak a különböző mechanikai jellemzők. Előfordul 1-2, de akár 100 N/mm^2 egyirányú nyomószilárdságú téglafalazóelem is. Mindenesetre mind kő, mind téglafalazat esetén a nyomási szilárdság igen magas lehet, általánosságban pedig elmondható, hogy a gyakorlatban előforduló kupolaméretek esetében a kialakuló nyomófeszültségek rendszerint meg sem közelítik a falazóanyag teherbírását. A súrlódási szög mind téglafalazat, mind kőfalazat esetén 30° körüli érték. A köveket, téglákat habarccsal vagy egyszerűen száraz kötéssel illesztették egymáshoz. A habarcs általában hidraulikus kötőanyagból készült, húzószilárdsága igen kicsi, $0.2\text{-}0.8 \text{ N/mm}^2$ körüli érték.

A 18. századtól az anyagok szilárdságára vonatkozó méréseket végeztek, igény volt a mechanika gyakorlatban való alkalmazására. A kövek szilárdságának mérését először a párizsi Panthéon építésénél alkalmazták a 18. század második felében. A 18. és 19. századra teljesedett ki az ismeretanyag, mely által a falazott boltozatok klasszikus elmélete kialakult. A klasszikus elmélet (42) több feltételezéssel is él. Az elemek közötti súrlódás – a körülbelül 30° súrlódási szög nagy nyomóerővel párosulva – elég nagy ahhoz, hogy a megcsúszás veszélye ne álljon fenn, a nyomószilárdsághoz képest pedig elegendően kicsi nyomófeszültség keletkezik egy általános elrendezésű és terhelésű boltozatban ahhoz, hogy törés ne lépjen fel. Például a római Szent Péter bazilika oszlopainak lábánál a nyomófeszültség értéke nem haladja meg a $1,7 \text{ N/mm}^2$ -t (43).

Összességében tehát a falazott szerkezet kompozit, heterogén, viszonylag nagy nyomószilárdsággal és minimális húzószilárdsággal rendelkezik, a megcsúszás veszélye pedig elhanyagolhatóan kicsi. Ezek a megállapítások már ismertek voltak a 18-19. században a falazott boltozatok hagyományos elméletében. Az elméletet Jacques Heyman rendszerezte (44), újította meg, melynek feltételezései a falazott boltozatok mechanikai viselkedésére így a következők voltak :

- elcsúszás nem jöhet létre az elemek között,
- a húzószilárdság elhanyagolhatóan kicsi,
- a nyomószilárdság végtelen nagy.

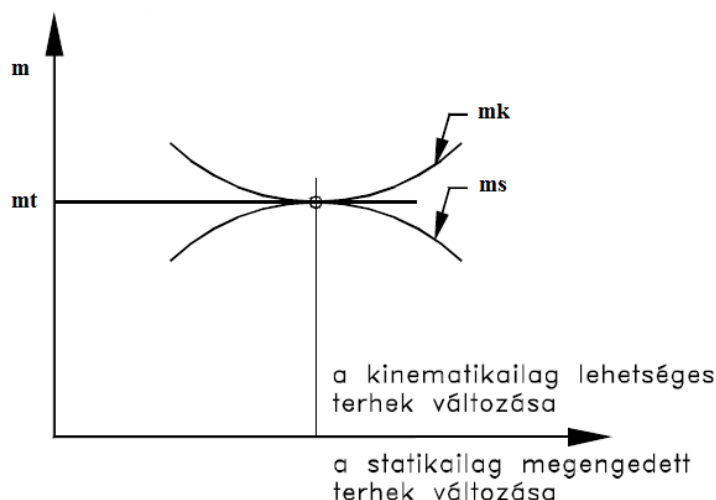
Az utolsó pont szerint a boltozat tönkremenetele nem lehet szilárdsági probléma. Az elmélet az ún. nyomásvonal illetve nyomásfelület meghatározásán alapszik. A teher hatására a keresztmetszetekben fellépő feszültségeloszlások eredő ereje szükségszerűen nyomás, illetve minden érintkezési felületen az eredő támadáspontja a keresztmetszeten belül kell, hogy legyen. E feltételeknek a falazat húzószilárdságának hiánya miatt kell fennállnia. Ha a támadáspontokat összekötjük, akkor megkapjuk a nyomásvonalat két-, illetve nyomásfelületet háromdimenziós esetben (például boltozatok esetén). Ha a nyomásfelület megfelelő számú pontban, illetve valamilyen vonal mentén érinti a szerkezet külső vagy belső felületét, azaz elegendő számú felnyílás, s így csukló vagy csuklósor alakul ki ahhoz, hogy a szerkezet kinematikailag határozatlanná váljék, akkor az adott teherelrendezésre a boltozat nem stabil, nem teherbíró. Ahhoz, hogy ez ne történjen meg, megfelelő vastagságot kell biztosítanunk, tehát a teherbírás problémája visszavezethető geometriai problémára.

A 18. században, a rugalmasságtan fejlődésének hatására rugalmas alapon próbálták meghatározni a nyomásvonalat, nyomásfelületet. Bizonyos körülmények között, bizonyos feltételek mellett ez lehetséges is. Ha például egy boltívet rugalmas anyagúnak tekintünk, a támaszokat pedig végtelen merevnek és mozdulatlanoknak, akkor egy statikailag határozatlan szerkezetet kapunk, és az anyagi viselkedés ismeretében ez a feladat megoldható. A valóságban azonban a támaszok sosem mozdulatlanok, fontos jellegzetessége a boltozatoknak, hogy a kialakuló nyomásvonal ill. nyomásfelület geometriája igen érzékeny a támaszmozgásokra, kicsiny süllyedések is jelentősen megváltoztathatják a belső erőjátékot (43) (44).

A másik megközelítési mód – mely az említett problémát megkerüli – a képlékeny analízis, mely nem az aktuális állapotot, hanem az összeomlás határállapotát vizsgálja. Coulomb (45) volt az, aki először alsó és felső korlátokkal vizsgálta falazott szerkezetek, boltozatok lehetséges tönkremeneteli

módjait. Kooharian (1953) mutatta meg elsőként, hogy a képlékenységtan alapelvei miként alkalmazhatóak falazott boltozatokra; Heyman pedig a fentebb említett mechanikai tulajdonságok egyszerűsítését bevezette, és a határállapot-vizsgálatot rendszerbe foglalta falazott szerkezetekre (44).

A képlékenységtan statikai és kinematikai tételét (lásd Godzev (1938) and Drucker, Prager és Greenberg (1952) munkáit, valamint (46)-t) alkalmazhatjuk a törési határállapot vizsgálatára. Tegyük fel, hogy a boltozatra úgynevezett arányos teher hat, azaz a teher elrendezése, iránya változatlan, azt csak az úgynevezett m teherintenzitás paraméterrel jellemezhetjük, azaz arányosan növelhetjük vagy csökkenthetjük a terhet. A következőkben a töréshez tartozó teherintenzitást jelöljük m_t -vel. Nyilvánvaló, hogy a töréshez tartozó és a ténylegesen ható két intenzitás aránya adja a törési biztonságot. A statikai tétel kimondja, hogy a teher törőintenzitása nagyobb, mint bármelyik statikailag elérhető teherintenzitás (m_s), vagy legfeljebb egyenlő vele : $m_t \geq m_s$. Statikailag elérhető teherintenzitásról beszélünk, ha az adott teherre az egyensúlyi egyenletek illetve a folyási feltételek kielégülnek. A kinematikai tétel kimondja, hogy a teher törőintenzitása kisebb, mint bármelyik kinematikailag elégséges teherintenzitás (m_k), vagy legfeljebb egyenlő vele : $m_t \leq m_k$. Kinematikailag elégséges teherintenzitásról beszélünk, ha a teher elegendően nagy ahhoz, hogy a testet, illetve szerkezetet az adott mechanizmusban folyamatosan mozgásban tartsa. Az unicitás tétele azt mondja ki, hogy a legnagyobb statikailag elérhető teherintenzitás megegyezik a legkisebb kinematikailag elérhető teherintenzitással. A tételekből következik, hogy a törőintenzitás a legnagyobb statikailag elérhető teherintenzitással, illetve a legkisebb kinematikailag elégséges teherintenzitással egyenlő (33.ábra).



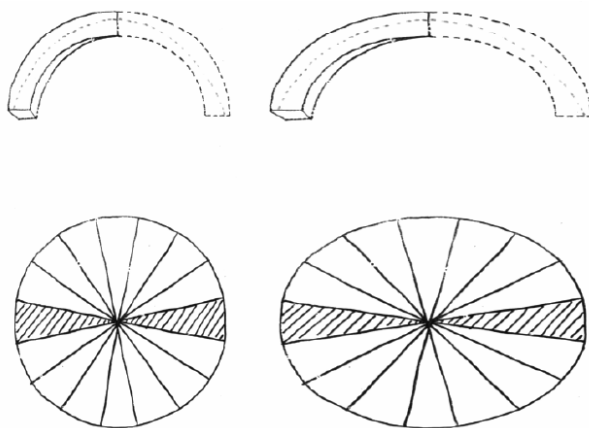
33.ábra Az unicitás tétele

Falazott szerkezetre a statikai és kinematikai módszert a következőképp alkalmazhatjuk. A statikai módszer (a szakirodalomban gyakran „lower bound theorem”) szerint, ha a jelenlegi teherre csupán egyensúlyi megfontolásokkal – azaz a kinematikai és anyagegyenleteket mellőzve – találunk legalább egy, statikailag elérhető erőrendszert – értve itt statikailag elérhetőn, hogy a nyomásvonal vagy nyomásfelület a szerkezeten belül marad –, akkor a szerkezet törési teherintenzitása a jelenleginél nagyobb, azaz a szerkezet biztonságos. A kinematikai módszer szerint, ha a jelenlegi teherhez találunk legalább egy olyan mechanizmust – csuklókat, csuklósorokat beiktatva kinematikailag határozatlanná téve a szerkezetet –, melynek kialakulása során az elmozduló szerkezet potenciális energiája csökken, akkor a jelenlegi teherszint biztosan a törési teherintenzitás felett van, a szerkezet nem képes a terhet viselni. Ha nem az adott teherszint biztonságosságát, hanem a törési teherintenzitás mértékét akarjuk meghatározni, akkor a két módszerben néhány választott paraméterrel jellemezzük a terhelést, majd statikai esetben maximumot, kinematikai esetben minimumot keresünk.

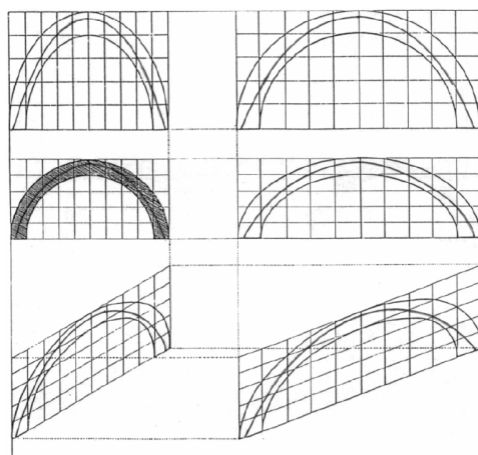
Ezeket az elveket alkalmazza J. Heyman által falazott szerkezetekre kidolgozott „Masonry Limit Analysis” nevű elmélet is. A módszer hátránya, hogy a tönkremeneteli mechanizmust – hasonlóan a duktilis anyagok, például acél képlékeny viselkedésének vizsgálatakor – csak a csuklók, csuklósorok, tehát az elemek közti elfordulás kialakulásában keresi, nem veszi figyelembe az elemek közti elcsúszás, azaz a rideg töréshez hasonló tönkremeneteli mód lehetőségét. A határállapot-analízisen alapuló újabb programokba már ezt a lehetőséget is beépítették.

A két legismertebb ilyen módszert alkalmazó program az *ArchiM* (47) és a *ring2.0* (48). Az *ArchiM* szoftver a statikai (az irodalomban gyakran „lower bound theorem”) módszert alkalmazza. Bármely teheresetre megmutatja a lehetséges nyomásvonalat, nyomásfelületet. Ha az teljesen a szerkezeten belül halad, akkor az adott teherre a szerkezet biztonságos. Ezzel ellentétben a *ring2.0* matematikai optimalizációs eljárással dolgozik. Az adott teherelrendezés teherintenzitását addig növeli, míg meg nem találja a törési állapotot. Így ez a szoftver a biztonság mérőszámának kimutatására is alkalmas. A *ring2.0* véges sűrűlődést alkalmaz, így a megcsúszást is modellezhetjük vele. A kereskedelmi szoftvereken kívül számos „házi” gyártott programmal is találkozhatunk. Szép példa Hughes és társ. által Microsoft Excel felületen létrehozott program, mely ívek törési mechanizmusát keresi meg adott teherre (49).

Térbeli boltozatok, így a kupolák statikai módszer szerinti vizsgálata a biztonság javára való közelítéssel visszavezethető boltívek vizsgálatára, ha megfelelő szeleteléssel egymással szemben összetámaszkodó szeleteket emelünk ki, majd azokat boltívként vizsgáljuk. Ha minden egyes ilyen boltív vizsgálata során azt találjuk, hogy a nyomásvonal a keresztmetszeten belül van, akkor a teljes kupola is egyben biztonságos. Ez a módszer nagyot tévedhet a biztonság javára. Statikailag sokszorosan határozatlan szerkezetről lévén szó, a szeletelés geometriai módja jelentősen befolyásolhatja az eredményt: előfordulhat, hogy a választott szeletelési módszerre azt kapjuk, hogy valamelyik szelet nem stabil, így nem stabilnak vélhetjük a boltozatot, amely pedig másfajta szeleteléssel stabilnak bizonyulhat. A statikai tétel értelmében a boltozat biztonságosnak bizonyulásához elegendő egyetlen olyan szeletelési módot találnunk, amely esetén a nyomásvonal a szeleten belül halad. Bouguer (1734) és Frézier (1737) (50) alkalmazta ezt a technikát először. Huerta (2004) megmutatta, hogy ez a technika ugyanígy alkalmazható ovális alaprajzú kupolákra is. (34. ábra) (51)



34. ábra Szeleteléses technika gömb- és ovális kupolára (51)



35. ábra Nyomásvonal affin transzformációja (52)

A szeleteléses technikával, mivel így egyszerű, különálló boltíveket vizsgálunk, a kupolákra is kimutatható az a minimális, kritikus falvastagság (lásd Couplet vizsgálatait), melyre önsúlyt feltételezve a kupola még éppen stabil marad, azaz amikor éppen kialakul a csuklósoros mechanizmus.

Ezt a legkönnyebben az egyszerű geometria miatt gömbkupolára lehet levezetni. Teljes félgömbre ez az érték a középsugár 4,2 % -a. Jelöljük a meridián szöget α -val, melynek kezdő értéke 0 a kupola tetőpontjánál, illetve $\pi/2$ a kupola alsó pereménél. Ha nem teljes félgömbről, hanem csak gömbsüvegről beszélünk, akkor a minimálisan szükséges falvastagság értéke rohamosan csökken a kezdő α meridián szög csökkenésével – azaz egyre kisebb gömbsüveg részt metszünk le a teljes gömbkupoláról -, illetve egy elméleti határérték után a vastagság elméletileg - legalábbis végtelen nagy nyomószilárdság esetén - nullára is vehető. Ez a határszög 51.8° . A membránelmélet szerint ezen szög felett nem alakul ki húzás a kupolában (44). A minimális vastagságnak persze határt szab az, hogy valójában nem végtelen nagy a nyomószilárdság, illetve a horpadási ellenállást is biztosítani kell. Ovális kupolák geometriájának változatossága miatt ez t nem könnyű általánosítani, a vizsgálataimban mégis szeretnék majd valamilyen következtetést levonni ezzel kapcsolatban.

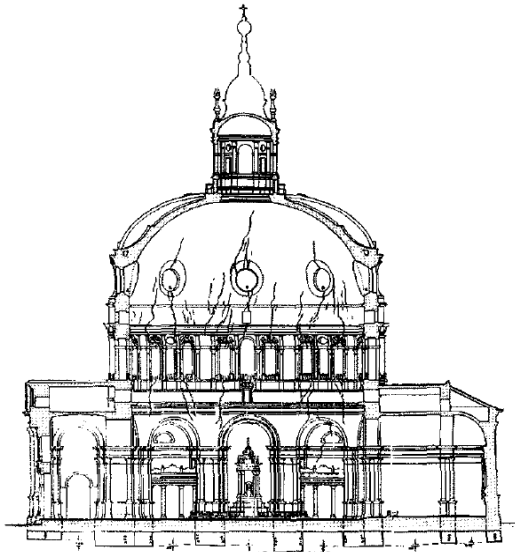
Rankine (1858) (52) megmutatta, hogy önsúly esetén a falazott szerkezetek stabilitása, illetve biztonsága nem változik meg affin transzformációk során. (35.ábra) A nyomásvonal, illetve a nyomásfelület tehát együtt változik a transzformációval. A biztonságot definiálhatjuk, mint az aktuális teherelrendezéshez tartozó minimális vastagság és az aktuális vastagság arányát. Ha például kétszer vastagabb a kupolánk a szükségesnél, akkor a biztonság mérőszáma kettő. Affin transzformáció például, ha a gömböt ellipszoiddá torzítjuk, s ekkor, ha az eredeti gömb biztonsága megfelelő volt, akkor az ellipszoid kupoláé is az lesz, sőt az önsúlyra vonatkozó geometriai biztonsági mérőszámuk is megegyezik. Fordítva gondolkozva, ha megengedhetjük, hogy az ovális kupolát a vele legjobban illeszkedő ellipszoiddal helyettesítsük, azaz a két felület alakjának eltérése olyan minimális, hogy az építési bizonytalanság elfedi azt, akkor a biztonság megítélését visszavezethetjük a gömbkupola vizsgálatára. Persze ez csak önsúlyra vonatkozik, de általános körülmények között leggyakrabban az önsúly a mértékadó teher.

A fenti vizsgálatok általánosságban a kupolák biztonságának megítélését szolgálják. A kupolák erőjátékában rendkívüli fontos szerepet játszik az alátámasztás, ami lehet a dob, vagy bármilyen más fal, pillér az épületen belül. Ezeknek a szerkezeteknek nem csak a leadódó függőleges terhet, hanem a vízszintes reakciókat is biztonsággal viselniük kell.

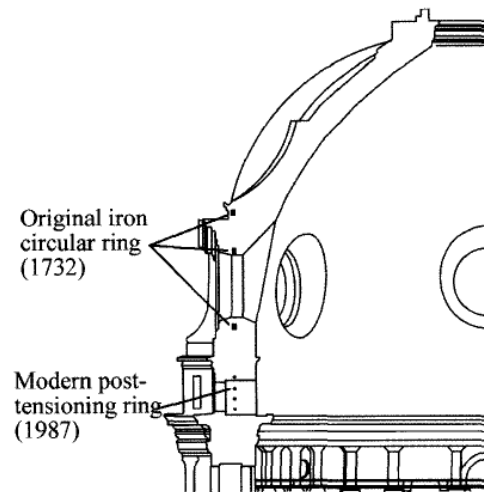
A károsodások leggyakoribb oka éppen ezen szerkezetek mozgásaiból, elégtelen teherviseléséből adódik. A peremek helyzete, a peremfeltételek rendkívül nagy mértékben befolyásolják a fentebb említett nyomásfelület alakját, támaszmozgásra nagyon érzékeny a megoldás. Ha például a kifelé mutató vízszintes reakciók hatására az alátámasztó szerkezet kimozdul a helyéről, a kupola csak úgy tudja követni a meghosszabbodott peremet, ha benne a nyomásfelület megváltozik, egyes helyeken a boltozat megreped és úgymond „kiterpeszkedik”. Ezekből kifolyólag fontos vizsgálni a támaszreakciók alakulását, hogy az alátámasztó szerkezetet megfelelően lehessen méretezni, vagy meglévő szerkezetnél biztonságát kimutatni, illetve az alátámasztó szerkezet rugalmas mivoltát, elmozduló képességét is figyelembe kell venni.

A meglévő, sérült falazott kupolák felülvizsgálatakor elsődlegesen a repedéskép az, amit elemeznünk kell, hiszen igen sokat elárul az erőjátékkal, húzófeszültségek, húzások helyével, süllyedések kialakulásával kapcsolatban. A repedések, illetve azok kialakulása, a felrepedés utáni erőjáték nem csak felülvizsgálatkor, de a teher növelésére való mechanikai válasz előrejelzésekor, megerősítés előtt, illetve hasonló kupolák építése előtt is hasznos információ lehet. Gondoljunk csak arra, hogy ha egy ilyen épület mellett földalatti üreget fognak építeni, az állagmegóvás céljából mennyire fontos az ilyen előrejelzés.

A kupolákra igen jellemző a meridián irányú repedéskép, mely a gyűrűirányú húzóerőkből ered. Mivel a falazott kupola húzószilárdsággal kvázi nem rendelkezik, ez a repedés mindenképp kialakul teljes gömbkupola és elliptikus kupola esetén is (36.ábra), ha ezt külön nem előzzük meg. Ez a jelenség már régen ismeretes volt.



36. ábra Santuario di Vicoforte repedéseke (53)



37. ábra Szent Péter Bazilika erősítő rendszere (53)

Példaként említhetjük a Michelangelo által tervezett, majd halála után Della Porta által befejezett vatikánvárosi Szent Péter Bazilikát. Már az építés során megjelentek meridián irányú repedések, ezért Della Porta a kupola alapkörének közelében $60\text{--}70\text{ cm}^2$ átmérőjű erősítő vaslánc-abroncsozást építtetett be. A kupola repedései idővel tovább nőttek, többször is felülvizsgálatra szorult. 1743 és 1748 között Poleni és Vanvitelli foglalkoztak a kupola állapotával. Poleni a fentebb említett szeleteléses módszerrel kimutatta, hogy bár a kupola repedezett, az nem befolyásolja a teherbírást, mert az egymással szemben álló, egymásnak támaszkodó szeletek külön-külön biztonságosak, azaz a kupola biztonságos. Ezen felülvizsgálatok során a repedések ellen azonban további vasláncokat építettek be, így azok átmérője összesen már elérte a 207 cm^2 -t. Az utolsó megerősítésre 1987-ben került sor, mely során már feszítőrudakat alkalmaztak, így hatékonyabban kezelve a problémát (53). Érdekes megemlíteni, hogy a bazilika mellett lévő, Bernini munkáját dicsérő tér ovális alaprajzzal büszkélkedik.

Az az elméleti közelítés, hogy az építőelemek nyomószilárdsága végtelen nagy, nem lehet kifogás arra, hogy ne vizsgáljuk meg a szilárdsági biztonságot, főleg azért is, mert az idő múlásával főleg a kövek, de a téglák állagromlása, szilárdságcsökkenése is bekövetkezik. Ezért fontos, hogy a biztonság kimutatása ne merüljön ki nyomásfelület vizsgálatával : a mértékadó helyeken fontos legalább közelítőleg ismerni az ott működő feszültségeket is.

A fentiek alapján kupolák ellenőrzése esetén tehát a következő vizsgálatokat kell elvégezni:

- a nyomásfelület meghatározása
- leadódó támaszerők nagyságának és irányának meghatározása
- rugalmas alátámasztás erőjátékot befolyásoló hatásának meghatározása
- húzások, húzófeszültségek helyének és mértékének meghatározása
- előrejelzés esetén repedéskép megjósolása
- meglévő repedéskép esetén a mechanikai viselkedés visszakövetkeztetése
- a szerkezetben lévő mértékadó feszültségek meghatározása
- a biztonság kimutatása

A következőekben a fenti pontok elméleti vizsgálati módszereihez szeretnék eszközt adni az olvasó számára.

3. A falazott ovális kupolák vizsgálatának módszerei

Statikai szempontból a falazott oválkupola görbe vonalú, kettős görbülettel rendelkező felületszerkezetnek, héjszerkezetnek tekinthető (54). A felületek vizsgálatához elengedhetetlen a geometriai alapok ismerete, ezért először a kupolák felületének differenciálgeometriájával kapcsolatos alapvető tudnivalókat fogjuk áttekinteni.

Már említettük, hogy a falazat korántsem homogén, s nem is folytonos, hanem különálló blokkok, elemek együttdolgozó együttese. Egy ilyen komplex szerkezetet két alapvető modellezési megközelítéssel vizsgálhatunk. Az egyik a helyettesítő kontinuum alkalmazása, a másik pedig az ún. diszkrét elemes eljárás. A két eljárást szokás makro- és mikroszintű analízisnek is nevezni. Az első eljárás természetesen erős közelítés, de megfelelő homogenizációs technikával elérhetjük, hogy az eredeti szerkezet és a helyettesítő kontinuum globális mechanikai viselkedése a lehető legközelebb essék egymáshoz. A diszkrét elemes modellezés jóval részletesebb képet ad a viselkedésről, ezért is nevezzük mikro-szintű analízisnek. A geometriai ismertető után erről a két modellezési megközelítésmódról lesz szó. A továbbiakban részletesebben kiemelem majd a kettő közötti különbséget, valamint a két módszer ötvöztetésének lehetőségeit.

3.1. A falazott kupolák felületének differenciálgeometriája

A falazott oválkupolák a legtöbb esetben általános héjalakkal rendelkeznek, nincsen például a gömbkupolánál olyan előnyösen kihasználható alaprajzi forgásszimmetriájuk. A következőkben éppen ezért általános héjalakkal mutatjuk be a geometriai összefüggéseket.

A felületszerkezeteket egyetlen végtelen vékony felülettel, azok középfelületével jellemezzük, így a felület pontjait két osztályba soroljuk: azon pontok halmaza, melyek a középfelületen, illetve azok, amelyek *nem* a középfelületen helyezkednek el.

A középfelület leírható olyan P pontok halmazaként, melyeket egyenként meghatároz egy folytonosan differenciálható $\mathbf{r}(u, v)$ vektor függvény. Itt $\mathbf{r}(u, v)$ P pont helyzetvektora az u, v paraméterek függvényében egy tetszőleges, előre rögzített térbeli referencia koordinátarendszerben (O, x_1, x_2, x_3) . A következőkben index jelöli valamely változó szerinti parciális deriváltat, azaz legyen $\mathbf{r}_{,i}(u, v)$; $i = u, v$ az első, illetve a második paraméter szerinti derivált. Ezek a deriváltak geometriai értelemben a felület azon két érintővektorát adják a P pontban, melyek külön-külön az $u = konst.$ és $v = konst.$ paraméterekhez tartoznak. A két vektor tehát benne van a felület P ponthoz tartozó érintősíkjaiban. Ennek tudatában a két derivált vektoriális szorzata ($TFH : \mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v} \neq 0$ bármely u, v értékpárra) az $\mathbf{r}(u, v)$ helyvektorral jellemzett P pontban lévő normálvektort adja meg. Így tehát az egységnyi normálvektor a P pontban :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}}{|\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}|}. \quad (3.1)$$

Ha a referencia koordinátarendszer derékszögű Descartes-féle koordinátarendszer, akkor az egyes koordináták, azaz az $\mathbf{r}(u, v)$ helyvektor elemei u, v paraméterek függvényében : $x_i = x_i(u, v)$, ahol $i = 1, 2, 3$. A felület függvényét ezen koordináták szerint megadhatjuk explicit módon :

$$x_3 = x_3(x_1, x_2), \quad (3.2)$$

illetve implicit módon is :

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3(x_1, x_2) - x_3 = 0. \quad (3.3)$$

Az implicit alak előnye, hogy gradiensét képezve a felületi normális függvényét kapjuk meg a referencia koordináták függvényében. Az egységnyi normálvektor tehát :

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}(F)}{|\text{grad}(F)|}, \quad (3.4)$$

$$\text{grad}(F) = \left[\frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}, \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right] = [x_{3,1}, x_{3,2}, -1]. \quad (3.5)$$

Ebben a derékszögű koordináta-rendszerben legyen a paraméterezés $u = x_1$ és $v = x_2$, ekkor a helyzetvektor $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2))$ alakba írható át, melynek parciális deriváltjai:

$$\mathbf{r}_{,1} = \mathbf{t}_1 = [1, 0, x_{3,1}], \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r}_{,2} = \mathbf{t}_2 = [0, 1, x_{3,2}]. \quad (3.7)$$

A deriváltak értékeit a P pont koordinátaiban értelmezve ezeket a vektorokat a P pontban a felület koordinátatengelyekkel párhuzamos érintővektorainak nevezzük. Az általános paraméterezéshez hasonlóan a vektoriális szorzat, mely csak irányítottságában tér el a $\text{grad}(F)$ szerinti megoldástól:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & x_{3,1} \\ 0 & 1 & x_{3,2} \end{vmatrix} = [-x_{3,1}, -x_{3,2}, 1]. \quad (3.8)$$

A felület normálisainak ismeretében az általános, nem középfelületen lévő pontok koordinátáit (helyzetvektorát), vagyis $\mathbf{R}(u, v) - t$ is meghatározhatjuk:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \lambda * \mathbf{n}(u, v), \quad (3.9)$$

ahol $-h/2 \leq \lambda \leq h/2$, illetve h a héj vastagsága.

Most definiáljuk a felület síkmetszeteinek görbületét. Vizsgáljunk egy tetszőleges P pontot a felületen. Ezen a ponton keresztül metsszük el egy tetszőleges síkkal a felületet, ekkor a metszésvonal mentén egy általános görbét kapunk. A görbe görbületét ezen P pontban többféleképpen definiálhatjuk. Ha a görbe egy kicsiny Δs hosszúságú szakaszának két végpontjához húzott érintők, ill. a Δs szakasz két végpontjához húzott normálisok által bezárt szöget $\Delta\theta$ – val jelöljük, a görbületet a

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad (3.10)$$

kifejezés adja. A görbület egy másik értelmezés szerint a görbéhez a vizsgált pontban simuló kör sugarának reciproka:

$$k = \frac{1}{R}. \quad (3.11)$$

Általános definíció szerint a görbületet a Δs ívhossz és az ő egységkörre leképezett $\Delta s'$ képének hányadosa adja. Ha a görbe paraméteres egyenlete ismert, akkor a görbületre vonatkozó összefüggés:

$$k = \frac{f''(t)}{[1+f'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.12)$$

Eddig általános síkmetszetekről beszéltünk. A legtöbb esetben nekünk a felület normálmetszeteinek görbületére van szükségünk. A normálmetszetet a P pontban felvehető érintő- és normálvektorok által kifeszített sík és a felület metszetvonalja adja. Mesnier-tétele szerint egy normálmetszet és az azt kijelölő sík érintővektorának tengelye körüli α szögű elforgatásával kapott másik sík metszete – általános metszet - közötti összefüggést a következő képlet adja:

$$k_\alpha = \frac{k_n}{\sin(\alpha)}, \quad (3.13)$$

ahol k_n a normálmetszet, k_α az általános metszet görbületei, α pedig az általános metszet és az érintősík által bezárt szög. Látható, hogy a normálmetszet a legkisebb görbületű metszet, az érintősík „metszete” pedig a végtelenhez tart.

Mivel érintővektor minden olyan vektor, mely az érintősíkban fekszik, végtelen sok normálmetszetünk lehet az adott P pontban. Euler-tétele szerint ezen metszetek görbületei között találunk egy minimumot és egy maximumot. Ezt a két görbületet hívjuk főgörbületeknek, irányukat pedig főgörbületi irányoknak. Hasonlóan a feszültségi vagy alakváltozási állapot leírásához, a görbületeket is jellemezhetjük Mohr-körökkel. A feszültségekhez hasonlóan itt is tenzorba foglalhatjuk a görbületeket, ám szükségünk lesz a nyírófeszültséggel analóg mennyiségre. Ez nem más, mint a felület elcsavarodása. A tenzor elemei tehát :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_\xi & k_{\xi\eta} \\ k_{\eta\xi} & k_\eta \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Amelyik irányban a $k_{\xi\eta}$ elemek eltűnnek, ott a főátló elemei lesznek a főgörbületek, a hozzá tartozó irány, illetve a rá merőleges irány pedig a főgörbületi irányok. Fontos mennyiségek még a görbületi tenzor invariánsai. Az egyik az átlaggörbület, mely a tenzor nyomának átlaga, a másik a tenzor determinánsa, melyet szorzatgörbületnek is nevezünk. Ha a tenzor éppen a főgörbületi irányokat jellemzi, a determinánsa (azaz a szorzatgörbület) éppen a két főgörbület szorzata.

Hasonlóan a görbe görbületének definíciójához, felület esetén is kiragadhatunk egy tetszőleges, a felületre szerkesztett idomot, melyhez hozzárendelhetünk egy gömbi képet, melyet a felületi idom peremén körbefuttatott normálisokkal párhuzamos gömbsugarak rajzolnak ki az egységgömb felületén. A gömbi kép előjeles területét a felületi idom térszögének nevezzük. Jele : Δ . Gauss vizsgálatai szerint ha egy felületi pont köré zsugorított tetszőleges alakú idomra vonatkozóan elvégezzük a térszög és a terület hányadosára a

$$K = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta}{A} \quad (3.15)$$

határátmenetet, eredményül a felületi idom alakjától független, csak a pont helyétől függő értéket kapunk, amely megegyezik a felület itteni szorzatgörbületével:

$$K = \det(\mathbf{k}) = k_1 * k_2. \quad (3.16)$$

A K mennyiséget hívjuk Gauss-féle szorzatgörbületnek, mellyel a felületek osztályozását is elvégezhetjük. A Gauss-görbület a felület egy pontját jellemzi. Parabolikus a pont, ha $K = 0$, hiperbolikus, ha $K < 0$ és elliptikus, ha $K > 0$. Ha egy felület minden pontja azonosan parabolikus, hiperbolikus vagy elliptikus, akkor a teljes felületet is eszerint osztályozzuk. Az eddigieket részletesebben a (55) (56) (57) művekben találjuk.

A továbbiakban szükségünk lesz a felületek első (58) és második (59) fundamentális alakjára, melyeket a fent leírtak ismeretében könnyen előállíthatunk. Az első fundamentális alak két érintővektor – legyen $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ - skaláris szorzatát jelenti, jele $\mathbf{I}$. Legyen a parametrizált felület $\mathbf{r}(u, v)$, ekkor :

$$\mathbf{I}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad (3.17)$$

Itt $\mathbf{v}$ -t és $\mathbf{w}$ -t az $\mathbf{r}_{,u}$ és $\mathbf{r}_{,v}$ érintővektorok lineáris kombinációjaként vesszük fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(a * \mathbf{r}_{,u} + b * \mathbf{r}_{,v}, c * \mathbf{r}_{,u} + d * \mathbf{r}_{,v}) &= ac \langle \mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,u} \rangle + (ad + bc) \langle \mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,v} \rangle + bd \langle \mathbf{r}_{,v}, \mathbf{r}_{,v} \rangle = \\ &= Eac + F(ad + bc) + G(bd), \end{aligned}$$

$$I(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \mathbf{w}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

A fenti kifejezésben az első fundamentális tenzor elemeit $g_{ij} = \mathbf{r}_{,i} * \mathbf{r}_{,j}$, $i = 1, 2$ szerint, a két érintő vektor skaláris szorzatai adják.

A második fundamentális alak jele **II**. Gauss foglalkozott a témával először. A felület paraméterezése megválasztható úgy, hogy bármely P pontban az explicit módon megadott felület függvény függvényértéke és első parciális deriváltjainak értéke a P pontban eltűnjön. Ilyen módon a Taylor-sorba fejtésnél kiesnek a konstans és lineáris elemek, kvadratikus alakhoz jutunk, ahol a magasabb rendű elemeket elhagyjuk. Felírása a következőképpen történik :

$$II = L * du^2 + 2M * dudv + N * dv^2. \quad (3.20)$$

A második fundamentális tenzor :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Itt h a második fundamentális tenzor, melynek elemei az $\mathbf{r}(u, v)$ függvény – kvadratikus leírasmódról lévén szó – második parciális deriváltjaival állnak összefüggésben a következő módon :

$$L = \mathbf{r}_{,uu} * \mathbf{n}, \quad M = \mathbf{r}_{,uv} * \mathbf{n}, \quad N = \mathbf{r}_{,vv} * \mathbf{n}. \quad (3.22)$$

Az első és második fundamentális alak, illetve azok tenzorainak, tenzorelemeinek ismeretében egy sor geometriai problémát tudunk egyszerűen leírni. Ilyen például a felületen fekvő görbe elemi hosszának négyzete :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (3.23)$$

A felületen t paraméterrel jellemzett $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ görbénél t paraméter szerinti integrálással a teljes görbe hossza meghatározható a (t_0, t_1) szakaszon a következő módon :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (3.24)$$

A felület elemien kicsiny, alaprajzban du , dv szakaszok által meghatározott paralelogramma területéről tudjuk, hogy nagyságát éppen a paralelogramma oldallapjait adó két vektor vektoriális szorzatából keletkező vektor hossza fogja adni :

$$dA = |\mathbf{r}_{,u} \times \mathbf{r}_{,v}| dudv = \sqrt{\langle \mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,u} \rangle \langle \mathbf{r}_{,v}, \mathbf{r}_{,v} \rangle - \langle \mathbf{r}_{,u}, \mathbf{r}_{,v} \rangle^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (3.25)$$

Látható, hogy az első fundamentális alak tenzorának determinánsa található a gyökjel alatt, azaz a tenzor determinánsa megadja a vetületi és felületi területek arányának négyzetét.

A fentebb tárgyalt Gauss-féle görbületet is definiálhatjuk az első és második fundamentális tenzorok elemeinek segítségével :

$$K = \frac{\det(\mathbf{h})}{\det(\mathbf{g})} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (3.26)$$

Héjszerkezetek vizsgálatokor gyakran alkalmazunk felületi koordinátarendszert. Felületi koordinátarendszernek nevezzük a felületre fektetett kétirányú vonalsereg metszéspontjaiba állított felületi normálisok irányával térbelivé tett koordinátarendszert. Ezen koordinátarendszer előnyös tulajdonsága más koordinátarendszerekhez képest, hogy így automatikusan elkülönülnek a héj síkjában lévő, és a héjra merőleges irányok. Ilyen módon az ezekben működő feszültségek, alakváltozások is majd könnyebben vizsgálhatóak a későbbiekben. További előny, hogy a szerkezet alakváltozásait a

középfelület pontjaival mozgó koordináta-rendszerben írjuk le, így az összefüggések egyszerűsödhetnek. Gondoljunk csak a Kirchhoff-Love hipotézis azon feltételezésére, hogy a felületre merőleges irányban a fajlagos alakváltozások hatásait figyelmen kívül lehet hagyni. Ez azt jelenti, hogy az azonos normálison lévő pontok a deformált állapotban is ugyanolyan távol lesznek egymástól, mint kezdetben. Ez a távolság a felületi koordináta-rendszer harmadik, felületre merőleges koordinátatengelyén mérhető, azaz ezen koordináták ilyen esetben állandóak. A felületi koordináták hátránya viszont, hogy sokkal nehezebben paraméterezhető velük a felület.

Mivel kétszeresen görbült felületekről beszélünk, a későbbi vizsgálatokhoz szükségünk lesz a felület kezdeti görbületi tenzorára. Ez a felületi és egy referencia koordináta-rendszer – rendszerint derékszögű Descartes-féle globális koordináta-rendszer – közötti kapcsolatként értelmezhető.

Legyen a deformálatlan, felületi koordináta-rendszer x, y, z görbe tengelyekkel jelölt ortogonális rendszer, a referencia koordináta-rendszer pedig egy globális derékszögű a, b, c egyenes tengelyekkel jelölt rendszer. A deformálatlan rendszer egységvektorai rendre : $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$. A referencia koordináta-rendszer egységvektorai pedig rendre : $\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_b, \mathbf{i}_c$.

A felület paraméterezését ismertnek tekintjük. Bármely pontban így ismert a pont helyvektorának függvénye a választott paraméterek függvényében. Korábban ezt a paraméterezést u, v függvényében adtuk meg. Most itt ezen paraméterek a felületi koordináta-rendszer x, y tengelyei által történik. A felületi koordináta-rendszer pontról pontra változik, így egy pontban a koordináta egységvektora nem más, mint a felület két azon érintővektora, mely a felületi x, y koordinátatengelyekkel párhuzamos. Láthattuk, hogy ezt a két vektort a helyvektor u és v , esetünkben x és y paraméterek szerinti parciális deriváltak adják. A helyvektor most $\mathbf{r}(x, y)$ vektor függvény. A bázisvektorok közötti kapcsolat így :

$$\mathbf{j} = \mathbf{T} * \mathbf{i}_{abc} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{j}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x^T \\ \mathbf{r}_y^T \\ (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)^T \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{i}_b \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Itt a $\mathbf{T}$ ortogonális transzformációs tenzor sorait a helyvektor x és y szerinti deriváltjainak, illetve ezen vektorok vektoriális szorzatának transzponáltjából állítjuk össze.

A $\mathbf{K}$ kezdeti görbületi tenzor a felületi koordináta-rendszer egységvektorai és azok változása, deriváltjai között teremt kapcsolatot, definíció szerint :

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} = \mathbf{K}_1^0 * \mathbf{j}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = \mathbf{K}_2^0 * \mathbf{j}. \quad (3.27)$$

A következőket felhasználva :

$$\frac{\partial \mathbf{j}_m}{\partial x} \mathbf{j}_m = \frac{\partial \mathbf{j}_m}{\partial y} \mathbf{j}_m = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{j}_m}{\partial x} \mathbf{j}_n = -\frac{\partial \mathbf{j}_n}{\partial x} \mathbf{j}_m \quad \frac{\partial \mathbf{j}_m}{\partial y} \mathbf{j}_n = -\frac{\partial \mathbf{j}_n}{\partial y} \mathbf{j}_m \quad (3.28)$$

a kezdeti görbületi tenzorok :

$$\mathbf{K}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{1,x} * \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_{1,x} * \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_{1,x} * \mathbf{j}_3 \\ \mathbf{j}_{2,x} * \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_{2,x} * \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_{2,x} * \mathbf{j}_3 \\ \mathbf{j}_{3,x} * \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_{3,x} * \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_{3,x} * \mathbf{j}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_5^0 & -k_1^0 \\ -k_5^0 & 0 & -k_{61}^0 \\ k_1^0 & k_{61}^0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_2^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{1,y} * \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_{1,y} * \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_{1,y} * \mathbf{j}_3 \\ \mathbf{j}_{2,y} * \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_{2,y} * \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_{2,y} * \mathbf{j}_3 \\ \mathbf{j}_{3,y} * \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_{3,y} * \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_{3,y} * \mathbf{j}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_4^0 & -k_{62}^0 \\ -k_4^0 & 0 & -k_2^0 \\ k_{62}^0 & k_2^0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

ahol k_1^0, k_5^0, k_{61}^0 az x tengelyre, k_2^0, k_4^0, k_{62}^0 hasonlóan az y tengelyre vonatkozó hajlítási, spirális és csavarási görbületek. Abban az esetben, ha $k_4^0 = k_5^0 = k_{61}^0 = k_{62}^0 = 0$, akkor x és y tengelyek éppen főgörbületi tengelyek, k_1^0 és k_2^0 pedig főgörbületek. Érdeemes megjegyezni, hogy héjaknál és lemezeknél $\partial j / \partial z$ mindig zérus, hisz az egyenes vonalú z tengely merőleges a felületre. A kezdeti görbületek számítására a részleteket lásd (60)-ban.

A fentiekben ismertettük azokat az alapvető összefüggéseket, fogalmakat, változókat, melyek a későbbiekben segítségünkre lehetnek. A továbbiakban a héjszerkezetek mechanikai tárgyalását végezzük el.

3.2. Kontinuummechanikai vizsgálatok

A kontinuummechanika legfontosabb alapfeltevése az, hogy a vizsgált testet – lehet szilárd anyag, de folyadék is – kontinuum-számosságú pontok halmazának tekintjük. Ezen ponthalmazhoz térben és időben folytonos függvényeket rendelhetünk, melyekkel a vizsgált test minden mechanikai jellemzője – tömeg, feszültségállapot stb. - leírható. Geometriai vagy szilárdsági diszkontinuitást – repedést, lyukat, zárványt stb. – csak véges számban engedünk meg a test belsejében vagy annak peremén, így még a kontinuummechanika szokásos eljárásával kezelhető marad a probléma.

A kontinuummechanika időbeli folyamatokat vizsgál. Az elméletben a hangsúly azon van, hogy az időben lejátszódó folyamatok során a ponthalmaz elemeinek relatív helyzete állandóan változik, – pl. egy szilárd test deformálódik – de a ponthalmaz folyamatos, szakadás nélküli, s teljesen kitölti az általa elfoglalt teret (61) (62).

Ennek tudatában már tudjuk, hogy milyen korlátai vannak az elméletnek. Nem modellezhetünk vele olyan problémákat, ahol szakadás, progresszív törés következik be, de vizsgálhatjuk annak kialakulásának előzményeit, például az erőjátékot, a kialakuló deformációkat. Az elmélet kiválóan alkalmas rugalmas testek feszültségi és deformációs vizsgálatára. Kontinuummechanikai vizsgálatokkal megjósolhatjuk a falazott kupola globális viselkedését, így például a mértékadó támaszerőket és mértékadó feszültségeket, illetve azok helyét. A mértékadó húzófeszültségek helyeinek tudatában a repedések kialakulásának helyei is vizsgálhatóak, ám pont a folytonossági feltétel miatt a további, repedés utáni feszültségátrendeződés és alakváltozások követhetetlenek.

A következőkben néhány elméleti modellt szeretnék bemutatni kontinuummechanikai vizsgálatok elvégzésére.

3.2.1. Membránelmélet

A membránelmélet szerint a hég térbeli alakja által tisztán a hég középfelületén működő tárcsaszerű igénybevételekkel, nyomatékmentesen viseli a terheket. Esetünkben a hég alakja egészen általános is lehet – pl. nem forgásszimmetrikus – ezért az általános membránelmélettel vizsgálható a probléma, melynek kidolgozása A. Pucher nevéhez fűződik (1934) (57).

Az említett tárcsaszerű igénybevételek a felületi metszeterők, melyek sorra a két koordinátatengely menti normál, illetve a csúsztató metszeterő : N_x, N_y, N_{xy} . Vezessük be a vetületi metszeterőket: n_x, n_y, n_{xy} , melyek a felületi metszeterők alaprajzi vetületén fajlagosított metszeterői. Legyen a felület függvénye $z = z(x, y)$, ekkor a két erőrendszer közötti kapcsolat :

$$n_x = N_x \sqrt{\frac{1+z_y^2}{1+z_x^2}}, \quad (3.31)$$

$$n_y = N_y \sqrt{\frac{1+z_x^2}{1+z_y^2}}, \quad (3.32)$$

$$n_{xy} = N_{xy}. \quad (3.33)$$

A felületre ható erők egyensúlyát három vetületi egyenlettel írhatjuk le, melyből a két vízszintes vetületre vonatkozó egyenlet a tárcsáknál már ismert alakra hozható, egyszerűen csak a felületi vízszintes erőket kell fajlagosítani alaprajzi vetületre :

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + p_x \sqrt{EG - F^2} = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial n_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + p_y \sqrt{EG - F^2} = 0. \quad (3.35)$$

A függőleges vetületi egyensúlynál már figyelembe kell venni a felület alakját is, hiszen éppen ezért képes a szerkezet membrán teherviselésre. A függőleges vetületi egyensúly :

$$z_{xx}n_x + 2z_{xy}n_{xy} + z_{yy}n_y = \{-p_z + p_x z_x + p_y z_y\} \sqrt{EG - F^2}. \quad (3.36)$$

Ezután Pucher egy remek ötlettel egyszerűsítette a differenciálegyenletet. Bevezetett egy Φ feszültségfüggvényt a következő módon :

$$n_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int p_x \sqrt{EG - F^2} dx, \quad (3.37)$$

$$n_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \int p_y \sqrt{EG - F^2} dy, \quad (3.38)$$

$$n_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (3.39)$$

A vízszintes vetületi egyenletbe behelyettesítve a tagokat az egyenlet azonnal teljesül, a függőleges vetületi egyenletnél pedig a metszeterők kifejezésében lévő terhet tartalmazó tagokat átrendezhetjük az egyenlet jobb oldalára :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \\ & \left\{ -p_z + p_x \frac{\partial z}{\partial x} + p_y \frac{\partial z}{\partial y} \right\} \sqrt{EG - F^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int p_x \sqrt{EG - F^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int p_y \sqrt{EG - F^2} dy^7. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ez az általános terhelésű membránhéjak Pucher-féle differenciálegyenlete. Pucher tiszteletére a feszültségfüggvényt Pucher-féle feszültségfüggvénynek is nevezik. Ha a felületre csak függőleges erő hat, akkor az egyenlet a következőképp egyszerűsödik, bevezetve a Kármán-féle héjoperátort :

$$\mathcal{P}(*,**) = \frac{\partial^2 *}{\partial x^2} \frac{\partial^2 **}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 *}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 **}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 *}{\partial y^2} \frac{\partial^2 **}{\partial x^2}, \quad (3.41)$$

$$\mathcal{P}(z, \Phi) = -p_z \sqrt{EG - F^2}. \quad (3.44)$$

⁷ Érdekes lehet itt megemlíteni a Prandtl-féle csavarási feladatnál ismeretes membrán analógiát (93). Egy sík membrán felületére merőleges teher viselésére csak alakjának megváltozása után képes. Ekkor a w lehajlásfüggvény adja az új, kétszer görbült alakot. Ha konstans húzóerőt működtetünk a membrán peremén, akkor homogén feszültségállapotba kerül, azaz $n_x = n_y = n$ és $n_{xy} = 0$. Ekkor, ha a $z = w$ helyettesítéssel élünk, a Pucher-féle differenciálegyenlet a következő alakú lesz függőleges teher esetén :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p_z}{n}, \quad (3.42)$$

mely a csavarás ismeretes differenciálegyenletével analóg :

$$\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial y^2} = 2Gk. \quad (3.43)$$

Az analógia segítségével összetett keresztmetszetek csavarási feszültségállapota vizsgálható például szappanbuborékok segítségével. Részletekért lásd (94)-t vagy (95)-t.

Ebben az esetben egy másik feltétel is megfogalmazható. Bármely zárt görbe mentén, azaz például bármely vízszintes metszet mentén a függőleges peremerők vonalmenti integrálja meg kell egyezzen a függőleges külső teher vonal által körbezárt területi integráljával :

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t} \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \int_A \bar{p}_z dA = 0. \quad (3.45)$$

A Pucher-féle differenciálegyenlet egyensúlyi egyenlet, hisz csak az erők vetületi egyensúlyát írja le, az alakváltozások kompatibilitását nem használjuk fel. Ha a megtámasztásokból adódó peremfeltételek olyanok, hogy a differenciálegyenletnek matematikailag határozott megoldása van, akkor maga a héj is statikailag határozott erőjátékú.

A héj membrán teherviseléséhez elengedhetetlen a megfelelő megtámasztás kialakítása. Ha a megtámasztásokkal nem tudjuk elérni, hogy a hajlítási igénybevételek elhanyagolhatóak legyenek, a membránelmélet feltevései nem lesznek valóságosak. A megtámasztást úgy kell kialakítani, hogy az pontosan a peremen leadódó erő hatásvonalába essen, valamint a perem alakváltozásait ne akadályozza meg. Teljes ováلكupola esetén a felület meredeksége a peremnél éppen függőleges, így elegendő, ha a kupolát vízszintes, sík felületre fektetjük rá. Az alakváltozásokat emélettleg például görgős csuklóssal engedhetjük meg gyűrű és sugár irányban egyaránt. A valóságban a peremen akkora nyomóerők működnek, hogy a feltámaszkodási felületen lévő súrlódás ezt a mozgást éppen gátolja, így bizonyos, hogy a perem környékén hajlítási elmélettel vizsgálható csak az erőjáték. Gondoljunk csak bele, hogy membránelmélet szerint a vastagság mentén konstans a feszültségállapot egy-egy keresztmetszetben, így az eredő erők éppen a középfelületen vannak. Ha ez így lenne, a falazott boltozatok erőjátékánál ismertett csuklóssal mechanizmus sosem alakulna ki, hisz a nyomásfelület sosem érné el a héj külső vagy belső felületét. A membránteherviselés teljesen tehát csak akkor alakulhat ki, ha adott terhelésre, például önsúlyra a boltozat alakja éppen a nyomásfelületet követi. Példának okáért gyakran építettek ilyen alakú dongaboltozatokat.

A megtámasztások tehát valóságos körülmények között sosem engedik meg a tökéletes membrán teherviselést, de mivel az erőjáték csak a perem kis környezetében módosul, a mértékadó metszeterők, támaszerők helye, nagyságrendje azért még számítható. A peremnél fellépő súrlódás, a gátolt alakváltozásokat csak hajlítási elmélettel vizsgálhatjuk, így lehetséges az, hogy a nyomásfelület nem a középfelületen halad, illetve ebből kifolyólag a támaszerő ferdén is leadódhat, így vízszintes reakciót is keltve az alátámasztó szerkezeten. A továbbiakban a hajlítási elmélet alapvető összefüggéseit is szeretném bemutatni.

3.2.2. Vékony héjak hajlítási elmélete

A vékony héjak hajlítási elmélete abban különbözik a membránelmélettől, hogy ebben az esetben már lemezszerű igénybevételekkel, hajlító- és csavarónyomatékokkal, illetve a felületre merőleges nyírással is számolunk.

Vékony héjon olyan héjat értünk, amelynek vastagsága valamely globális méretéhez, általában a héj legkisebb görbületi sugarához mérten elhanyagolható. Ez akkor tehető meg, ha a vastagság ezen sugár körülbelül huszadánál kisebb. Ebben az esetben feltehetjük, hogy a nyírási alakváltozások elhanyagolhatóak a nyomatékok okozta alakváltozásokhoz képest. Fajlagos nyíróerő itt is keletkezik, de azt a nyomatékból származtatjuk, nem független mennyiség. Ezt az elméletet gyakran Kirchhoff-Love-féle héjelméletnek is nevezik.

A felületek differenciálgeometriájának bemutatásánál ismertettük a kezdeti görbületi tenzor elemeit. Vizsgáljunk most egy állandó h vastagságú héjat melynek egy tetszőleges pontjának eltolódásvektora :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{j}_1 + u_2 \mathbf{j}_2 + u_3 \mathbf{j}_3 = (u + z\theta_2) \mathbf{j}_1 + (v - z\theta_1) \mathbf{j}_2 + w \mathbf{j}_3. \quad (3.46)$$

A képletben u , v és w a deformálatlan koordináta-rendszer három koordinátatengelye mentén létrejövő eltolódások értéke, θ_1, θ_2 pedig a deformálatlan állapothoz tartozó két elfordulás. A kezdeti görbületek miatt ezek az elfordulások most nem származnak közvetlenül a középfelületre merőleges, azaz a w eltolódás függvény deriváltjából. Kis elmozdulásokat feltételezve az elfordulások a következők:

$$\theta_1 = w_{,y} - uk_{62}^0 - vk_2^0, \quad (3.47)$$

$$\theta_2 = -w_{,x} + uk_1^0 + vk_{61}^0. \quad (3.48)$$

Az alakváltozások az eltolódások és elfordulások ismeretében, azok deriváltjaiból képezve:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} j_1 = u_{,x} - k_5^0 v + k_1^0 w + z(\theta_{2,x} + k_5^0 \theta_1), \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u}{\partial y} j_2 = v_{,y} + k_4^0 u + k_2^0 w + z(-\theta_{1,y} + k_4^0 \theta_2), \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial x} j_2 + \frac{\partial u}{\partial y} j_1 = u_{,y} + v_{,x} - k_4^0 v + k_5^0 u + k_6^0 w + z(\theta_{2,y} - \theta_{1,x} + k_4^0 \theta_1 + k_5^0 \theta_2), \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{13} = z(k_{61}^0 \theta_1 - k_1^0 \theta_2), \quad \varepsilon_{23} = z(k_2^0 \theta_1 - k_{62}^0 \theta_2). \quad (3.52)$$

A fentiekben feltételeztük a $k_{61}^0 = k_{62}^0 = k_6^0/2$ egyenlőséget, ami a lineáris héjelmélet sima és deformálatlan felületeire igaz. A keresztirányú nyírási deformációkat a vékony héjak elméletében elhanyagoljuk, ezért ez esetben $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Az anyagmodell egyenlete az alakváltozásokból:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \left(\begin{bmatrix} u_{,x} - k_5^0 v + k_1^0 w \\ v_{,y} + k_4^0 u + k_2^0 w \\ u_{,y} + v_{,x} - k_4^0 v + k_5^0 u + k_6^0 w \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \theta_{2,x} + k_5^0 \theta_1 \\ -\theta_{1,y} + k_4^0 \theta_2 \\ \theta_{2,y} - \theta_{1,x} + k_4^0 \theta_1 + k_5^0 \theta_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.53)$$

Az igénybevételek az anyagmodellből:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} u_{,x} - k_5^0 v + k_1^0 w \\ v_{,y} + k_4^0 u + k_2^0 w \\ u_{,y} + v_{,x} - k_4^0 v + k_5^0 u + k_6^0 w \\ \theta_{2,x} + k_5^0 \theta_1 \\ -\theta_{1,y} + k_4^0 \theta_2 \\ \theta_{2,y} - \theta_{1,x} + k_4^0 \theta_1 + k_5^0 \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

$$[N_1 \ N_2 \ N_6] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}] dz, \quad [M_1 \ M_2 \ M_6] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}] dz. \quad (3.55)$$

A héj mozgásegyenleteit megkapjuk a Hamilton-elvet használva. Az elv kimondja, hogy ha az időváltozó szerint integráljuk a kinetikus energia és a teljes potenciális energia variációinak különbségét, minden esetben zérust kell, hogy kapjunk:

$$\int_0^t (\delta K - \delta \Pi_b + \delta \Pi_k) dt = 0. \quad (3.56)$$

A kinetikus energia variációja az elmozdulás deriváltja és variációja alapján:

$$\delta K = - \iint \rho \dot{u} \delta u \, dz \, dA, \quad (3.57)$$

a belső potenciális energia variációja az alakváltozások variációja alapján:

$$\delta \Pi_b = \iint (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12}) dz \, dA \quad (3.58)$$

A levezetést mellőzve a mozgásegyenletek :

$$N_{1,x} + N_{6,y} - k_4^0 N_2 - k_5^0 N_6 + k_1^0 Q_1 + k_{62}^0 Q_2 = I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_2, \quad (3.59)$$

$$N_{6,x} + N_{2,y} - k_4^0 N_6 + k_5^0 N_1 + k_{61}^0 Q_1 + k_2^0 Q_2 = I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{\theta}_1, \quad (3.60)$$

$$Q_{1,x} + Q_{2,y} - k_1^0 N_1 - k_2^0 N_2 + k_6^0 N_6 = I_0 \ddot{w}, \quad (3.61)$$

$$-M_{2,y} - M_{6,x} - k_4^0 M_6 - k_5^0 M_1 + Q_2 = I_2 \ddot{\theta}_1 - I_1 \ddot{v}, \quad (3.62)$$

$$M_{1,x} + M_{6,y} - k_4^0 M_2 - k_5^0 M_6 - Q_1 = I_2 \ddot{\theta}_2 + I_1 \ddot{u}. \quad (3.63)$$

Mint említettük a keresztirányú nyíróerők nem függetlenek, a negyedik és ötödik egyenletből fejezhetők ki :

$$Q_1 = -I_2 \ddot{\theta}_2 - I_1 \ddot{u} + M_{1,x} + M_{6,y} - k_4^0 M_2 - k_5^0 M_6, \quad (3.64)$$

$$Q_2 = I_2 \ddot{\theta}_1 - I_1 \ddot{v} + M_{2,y} + M_{6,x} + k_4^0 M_6 + k_5^0 M_1. \quad (3.65)$$

A mechanikai alapegyenletek ismeretében a használhatóságot kell megvizsgálnunk. A membránelméletnél láttuk, hogy nagyon speciális körülmények között és akkor is csak globális viselkedés, erőjáték meghatározására alkalmas. A vékony héjak elmélete ennél tovább lép, s a hajlítási hatásokat, illetve a keresztirányú nyírást is vizsgálja, így egy komplexebb erőjáték, s a valódi nyomásfelület közelítő meghatározására alkalmas. A héj vastagságából arra a következtetésre jutottunk, hogy a nyírási alakváltozások elhanyagolhatóak. Pontosabb vizsgálatra a mérsékelt vastag héjak hajlítási elméletét alkalmazhatjuk.

3.2.3. Mérsékelt vastag héjak hajlítási elmélete

Ez az elmélet a vékony héjak hajlítási elméletétől abban tér el, hogy a nyírási deformáció hatását is figyelembe veszi. Vizsgáljuk ismét a héj egy tetszőleges pontjának eltolódásvektorát :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{j}_1 + u_2 \mathbf{j}_2 + u_3 \mathbf{j}_3 = (u + z\theta_2 + g\gamma_5) \mathbf{j}_1 + (v - z\theta_1 + g\gamma_4) \mathbf{j}_2 + w \mathbf{j}_3 \quad (3.66)$$

ez esetben γ_4 és γ_5 a héjban nyírás hatására bekövetkező elfordulások, g pedig a nyírási torzulás függvénye. A g nyírási torzulási függvény a vastagság mentén írja le a nyírási deformáció változását. Gyakori eset, hogy ezt a függvényt lineárisnak vesszük fel, ekkor lineáris nyírási torzulásról és az úgynevezett Reissner-Mindlin-féle héjmodellről beszélünk. Az alakváltozások a következők :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} j_1 = u_{,x} - k_5^0 v + k_1^0 w + z(\theta_{2,x} + k_5^0 \theta_1) + g(\gamma_{5,x} + k_5^0 \gamma_4), \quad (3.67)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u}{\partial y} j_2 = v_{,y} + k_4^0 u + k_2^0 w + z(-\theta_{1,y} + k_4^0 \theta_2) + g(\gamma_{4,y} + k_4^0 \gamma_5), \quad (3.68)$$

$$\varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} - k_4^0 v + k_5^0 u + k_6^0 w + z(\theta_{2,y} - \theta_{1,x} + k_4^0 \theta_1 + k_5^0 \theta_2) + g(\gamma_{4,x} + \gamma_{5,y} + k_5^0 \gamma_5 - k_4^0 \gamma_4), \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{13} = g_z \gamma_5 - g(k_1^0 \gamma_5 + k_{61}^0 \gamma_4), \quad \varepsilon_{23} = g_z \gamma_4 - g(k_{62}^0 \gamma_5 + k_2^0 \gamma_4). \quad (3.70)$$

A feszültségek és alakváltozások kapcsolata :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{hajl} \left([\mathbf{A}] + z[\mathbf{B}] + g \begin{bmatrix} \gamma_{5,x} - k_5^0 \gamma_4 \\ \gamma_{4,y} + k_4^0 \gamma_5 \\ \gamma_{4,x} + \gamma_{5,y} + k_5^0 \gamma_5 - k_4^0 \gamma_4 \end{bmatrix} \right), \quad (3.71)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{nyír} \left\{ g_z \begin{bmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} k_1^0 \gamma_5 + k_{61}^0 \gamma_4 \\ k_{62}^0 \gamma_5 + k_2^0 \gamma_4 \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.72)$$

ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ a vékony héjaknál bemutatott anyagegyenletben szereplő első két vektor. Az igénybevételek szempontjából az $N_1, N_2, N_6, M_1, M_2, M_6$ a vékony héjnál ismertett módon számolható, további igénybevételek pedig :

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_6 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{D}}_{hajl} \begin{bmatrix} \gamma_{5,x} - k_5^0 \gamma_4 \\ \gamma_{4,y} + k_4^0 \gamma_5 \\ \gamma_{4,x} + \gamma_{5,y} + k_5^0 \gamma_5 - k_4^0 \gamma_4 \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{D}}_{nyír} \begin{bmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_4 \\ k_1^0 \gamma_5 + k_{61}^0 \gamma_4 \\ k_{62}^0 \gamma_5 + k_2^0 \gamma_4 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$$[m_1 \ m_2 \ m_6] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}] dz, \quad [q_1 \ q_2] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g_z [\sigma_{13} \ \sigma_{23}] dz, \quad (3.75)$$

$$[s_1 \ s_2] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g [\sigma_{13} \ \sigma_{23}] dz. \quad (3.76)$$

Ismét a Hamilton-elvet alkalmazva, a levezetéseket mellőzve a mozgásegyenletek :

$$N_{1,x} + N_{6,y} - k_4^0 N_2 - k_5^0 N_6 + k_1^0 Q_1 + k_{62}^0 Q_2 = I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_2, \quad (3.77)$$

$$N_{6,x} + N_{2,y} - k_4^0 N_6 + k_5^0 N_1 + k_{61}^0 Q_1 + k_2^0 Q_2 = I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{\theta}_1, \quad (3.78)$$

$$Q_{1,x} + Q_{2,y} - k_1^0 N_1 - k_2^0 N_2 + k_6^0 N_6 = I_0 \ddot{w}, \quad (3.79)$$

$$-M_{2,y} - M_{6,x} - k_4^0 M_6 - k_5^0 M_1 + Q_2 = I_2 \ddot{\theta}_1 - I_1 \ddot{v}, \quad (3.80)$$

$$M_{1,x} + M_{6,y} - k_4^0 M_2 - k_5^0 M_6 - Q_1 = I_2 \ddot{\theta}_2 + I_1 \ddot{u}, \quad (3.81)$$

$$m_{6,x} + m_{2,y} + k_5^0 m_1 + k_4^0 m_6 - q_2 + k_{61}^0 s_1 + k_2^0 s_2 = I_5 \ddot{\gamma}_4 + I_3 \ddot{v} - I_4 \ddot{\theta}_1, \quad (3.81)$$

$$m_{1,x} + m_{6,y} - k_4^0 m_2 - k_5^0 m_6 - q_1 + k_1^0 s_1 + k_{62}^0 s_2 = I_5 \ddot{\gamma}_5 + I_3 \ddot{u} - I_4 \ddot{\theta}_2. \quad (3.83)$$

Látható, hogy az első három vetületi, illetve a harmadik és negyedik nyomatéki egyenlet változatlan a vékony héjak elméletéhez képest. Két újabb egyenletünk van azonban, így összesen hét egyenletből kettő – a negyedik és ötödik – szolgál a Q_1 és Q_2 nyíróerők, a maradék öt pedig sorra az u, v, w elmozdulások, valamint γ_4 és γ_5 elfordulások meghatározására. Q_1 és Q_2 jelen esetben az egységnyi hossza eső keresztirányú nyíróerő intenzitást jelenti :

$$[Q_1 \ Q_2] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{13} \ \sigma_{23}] dz, \quad (3.84)$$

azaz geometriai átlagként kell kezelni, míg q_1 és q_2 energiaértelmű átlagot jelent. Ha Reissner-Mindlin-féle lineáris nyírási torzulásról beszélünk, akkor a két érték megegyezik.

Ebben a modellben már figyelembe vettük a nyírási deformáció hatását, legyen a torzulási függvény akár lineáris vagy akár teljesen általános alakú, de mégis ezek a modellek feltételezik, hogy a héj felületére merőleges irányban nem következnek be alakváltozások, a feszültségállapot is csak síkbeli. Ha térbeli feszültségállapotot szeretnénk vizsgálni, akkor a vastag héjak elméletét kell alkalmaznunk.

3.2.4. Vastag héjak elmélete

Ez az elmélet, mint azt előbb már említettük, figyelembe veszi a héj középfelületére merőleges normálfeszültségeket is. Ez azért lehet fontos, mert falazott szerkezeteknél, kőanyagoknál, égetett agyag téglánál a térbeli feszültségállapot során fellépő fő húzófeszültségek teszik tönkre az anyagot, nem pedig a nagy nyomófeszültség. A térbeli feszültségállapot lehetőséget nyújt különböző feszültségcsúcsok, illetve keresztirányú feszültségek vizsgálatára is.

A vizsgálatokat mindenképp valamilyen közelítő eljárással tudjuk elvégezni. A modellezést a végeselemes technika bemutatásakor tárgyaljuk, de előszóként annyit elmondhatunk, hogy 3D-s test modellel, vagy abból származtatott vastag héj modellel vizsgálódhatunk.

Az eddigiekben azon mechanikai modellekről írtam, melyekkel falazott kupolák kontinuummechanikai vizsgálata elvégezhető. A hajlított héjak itt bemutatott összefüggéseit részletesebben az -ban találhatja meg az olvasó. Ezen modellek matematikai megoldási módszerei igen sokfélék lehetnek. A következőkben a mechanikában leggyakrabban alkalmazott két közelítő megoldási módszert, a véges differenciák és a véges elemek módszerét mutatom be.

3.2.5. Véges differenciák módszere

A véges differenciák módszere diszkrét pontokban állítja elő a megoldást. Ezen diszkrét pontokat a tartományon belül szabályos vagy szabálytalan rácsrendszerre illesztve kapjuk meg. A megoldás a differenciálegyenletet közvetlenül oldja meg, mégpedig úgy, hogy az egyenletben szereplő parciális deriváltakat véges differenciákkal közelítjük (63) (64).

Az egyszerűség kedvéért tekintsük egy egyváltozós függvény Taylor-sorát, melyet $x + \Delta x$ illetve $x - \Delta x$ pontokban vizsgálunk :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} (\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} (\Delta x)^n + \dots, \quad (3.85)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{df(x)}{dx} (\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} (\Delta x)^2 - \dots - \frac{(-1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} (\Delta x)^n + \dots. \quad (3.86)$$

A véges differenciákat ilyen sorozatokból származtathatjuk. Ha például elhanyagoljuk a másodfokú, illetve magasabb rendű tagokat és a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor a következőt kapjuk :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2(\Delta x)} = \frac{df(x)}{dx} + O(\Delta x^2), \quad (3.87)$$

ahol az $O(\Delta x^2)$ a hibát jelöli, mely jelen esetben a felvett rácspont távolság négyzetével arányos. Ha az első derivált értékeit már ismertnek tekintjük, már csak harmad, illetve annál magasabb rendű tagok elhagyásával a második deriváltra vonatkozó közelítést kapjuk meg :

$$\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.88)$$

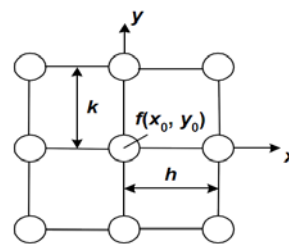
Lehetőségünk van több pontra is kiterjeszteni a vizsgált pont Taylor-sorát, ekkor annyi egyenletünk lesz, ahány pontra kiterjesztettük azt. A megfelelő tagok elhanyagolásával az egyenletrendszer megoldva szintén a deriváltak közelítéséhez jutunk. Például öt pont bevonásával az első és második derivált :

$$\frac{f(x-2\Delta x) - 8f(x-\Delta x) + 8f(x+\Delta x) - f(x+2\Delta x)}{12(\Delta x)} = \frac{df(x)}{dx} + O(\Delta x^4), \quad (3.89)$$

$$\frac{-f(x-2\Delta x) + 16f(x-\Delta x) - 30f(x) - 16f(x+\Delta x) - f(x+2\Delta x)}{12(\Delta x^2)} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + O(\Delta x^4), \quad (3.90)$$

Látható, hogy több és több pont bevonásával egyre magasabb fokon függ a hiba a lépésköztől, azaz egynél kisebb szám esetén a hiba egyre jobban csökken.

Többváltozós esetben a deriváltak számítása hasonlóan történik, annyi a különbség, hogy itt több lépcsőben számítjuk azt. Például szabályos rácsot feltételezve (38.ábra) vegyes derivált esetén először az egyik rácsirányban kiszámítjuk az összes szükséges értéket azon rácspontokban, melyek a másik irányhoz szükségesek lesznek, majd ezek kiindulópontként a másik rácsirány egyenletébe írva számítható a teljes derivált.



38.ábra

Szabályos rácsok esetén gyakori az úgynevezett csillag operátorok alkalmazása. A csillagoperátor egy olyan szimbólum, melynek a középső elemét a vizsgált pontra állítva megmutatja, hogy a keresett derivált – parciális, vegyes, első vagy magasabb rendű – közeítésében a környező pontokban lévő értékeket milyen súllyal vegyük figyelembe. A fentiekben már bemutatott első derivált csillagoperátora két vizsgált pont esetén $\frac{1}{2(\Delta x)} [-1 \ 0 \ 1]$, hiszen ekkor a vizsgált pont 0, az előtte lévő -1, a követő pontban lévő érték 1 súllyal szerepel az egyenlőségben. Néhány fontosabb csillag operátor $\Delta x = \Delta y = \Delta$ szabályos rácson (64) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} [-1 \ 0 \ 1] , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta^2} [1 \ -2 \ 1] , \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} = \frac{1}{2\Delta^3} [-1 \ 2 \ 0 \ -2 \ 1] , \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{2\Delta^3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta^3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} , \\ \Delta \Delta &= \frac{1}{\Delta^4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 2 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 2 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 1 & 2 & -8 & 2 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (3.91)$$

Előfordulhat olyan eset is, például éppen az ovális alaprajzú falazott kupolák esetében, hogy a vizsgált tartományt nem tudjuk szabályos rácsra felosztani, szabálytalan rácson kell dolgozzunk, mely általános poligonokból állhat. Ilyen esetben egy n oldalú poligonon belül számítható x és y irányú parciális deriváltak értékei (65) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{A} \sum_{m=1}^n f_m \Delta y_m , \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx -\frac{1}{A} \sum_{m=1}^n f_m \Delta x_m . \quad (3.93)$$

A fentiekben a szummázás a határoló oldallapokra vonatkozik, ahol f_m az oldallapoz tartozó két csomópontban számított függvényérték átlaga, Δy_m és Δx_m a csomópontok x és y koordinátáinak különbsége, A pedig a poligon területét jelöli. Az első deriváltak ismeretében a már bemutatott módon származtathatóak a magasabb rendű deriváltak is.

Mivel a differenciálegyenletnek a tartomány minden pontjában teljesülnie kell, ezért mindegyik diszkrét pontban felírhatjuk a differenciálegyenlet véges differenciákkal való közelítését. A

szerkezetépítésben előforduló problémákat leíró differenciálegyenletek a legtöbb esetben a keresett függvények lineáris alakját tartalmazzák, (gondoljuk pl. a Pucher-féle differenciálegyenletre, ahol a feszültségfüggvény minden esetben első rendben szerepel). Ha a keresett függvényértékeket egy X vektorba soroljuk, az egyes egyenletekben szereplő függvényértékek együtthatóit pedig egy A együtthatómátrixba rendezzük, ahol minden sor egy rácspontban felírt egyenletnek felel meg, akkor egy $A * X = b$ lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Ennek biztosan van egyértelmű megoldása, hisz n db rácspontban keressük a függvényértékeket, s mindegyikre egy egyenletet tudunk felírni. Az A együtthatómátrix általában sávós szerkezetű, hisz az egyes rácspontokban felírt egyenletekben csak néhány szomszédos rácspont szerepel.

Az egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a keresett függvény (pl. feszültségfüggvény) függvényértékeit az általunk választott diszkrét pontokban. Ezekből a megfelelő egyenletekben lévő deriváltak véges differenciákkal történő közelítésével számíthatóak a származtatott mennyiségek. (pl. a metszeterők a feszültségfüggvényből).

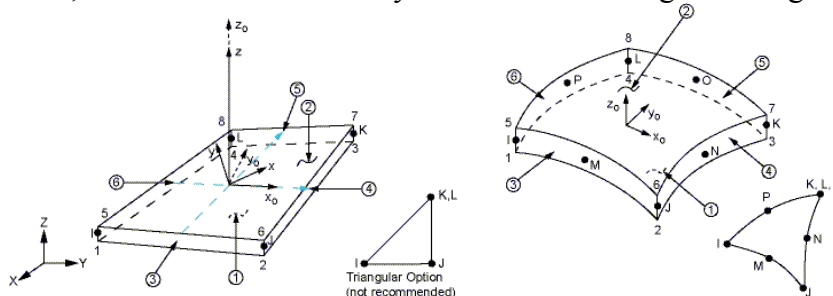
3.2.6. Véges elemek módszere

A végelelemes módszer - szemben a véges differenciák módszerével – a mechanikai problémák kapcsán felmerülő differenciálegyenleteket nem közvetlenül, hanem energetikai, illetve variációs elvekre építve oldja meg. A módszer ma már a mérnöki alapképzettség része, ezért nem kívánok foglalkozni az alapvető összefüggésekkel (részletekért lásd (62)-t és (66)-t), inkább a módszer által alkalmazható elemtípusokat (67), az általuk reprezentálható mechanikai modelleket mutatnám be.

A kétszer görbült felületek geometriáját követhetjük egyenes vonalakkal összeállított poliéderrel, de akár a geometriát egészen pontosan megközelítő görbült elemekkel is. Nyilván utóbbi pontosabb megoldást fog eredményezni, hisz magasabb fokszámú polinomokkal közelítjük a megoldást, ám az első változat is elegendően pontos lehet az elemméret megfelelően kicsire vételével.

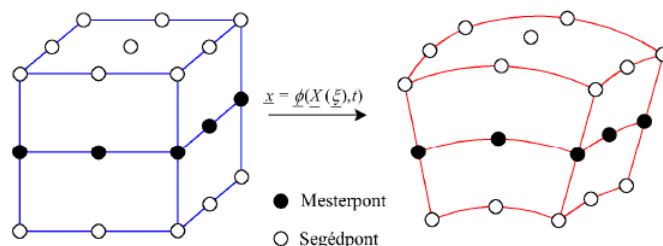
A membránelmélet vizsgálatához nem alkalmazhatunk egyszerű síkbeli feszültségállapotú elemeket – pl. ANSYS esetén a PLANE elemek -, hisz ezen elemeknek minden csomópontjának egy síkban kell lennie, mivel ezek úgynevezett 2D-s elemek. Csupán ilyen síkbeli elemekkel lefedhetjük ugyan felületet, az elemek éleinél azonban törés keletkezik, ott pedig az egyik elemről a másikra átadódó erő nem csak az elem síkjába eső komponenssel bír, így ez kezelhetetlenné teszi az elemet. Membrán teherviselés esetén is célszerű „valódi” héj elemet kell alkalmaznunk. Az ANSYS programban ilyen tárcsa hatás vizsgálatára is alkalmas elemek például a SHELL28 és a SHELL41 elem. A falazott boltozatok membrán teherviselése igen erős közelítés, ha már valamilyen szoftvert alkalmazunk a modellezéshez, ez a megközelítés nem igazán ajánlott.

A vékony és mérsékelten vastag héj modellezésére szintén alkalmazhatunk sík, lineáris vagy akár görbült, kvadratikusan héj elemeket is. Sík geometriájú elem az ANSYS programban a 4 csomópontú SHELL63 és SHELL181, görbült elemek a 8 csomópontú SHELL150 és SHELL281. Lineáris analízisre a SHELL63 és SHELL150, nemlineáris analízisre pedig a SHELL181 és SHELL281 ajánlott, melyek lineáris, Reissner-Mindlin-féle nyírás torzulást is magukban foglalnak. (39.ábra)



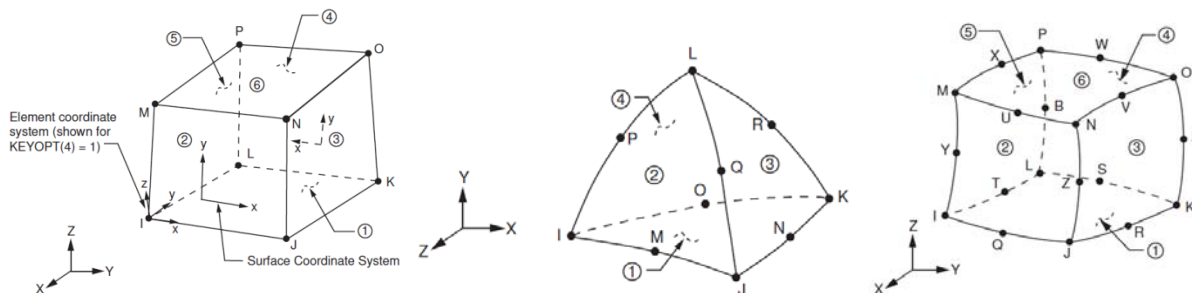
39.ábra Lineáris és kvadratikusan héjelemek (67)

A mérsékelt vastag héjak modellezésére test elemből „összelapított” héjelemmel is lehetőségünk van (40.ábra) (66). Jelöljük a tényleges szerkezet felületére merőleges felületi koordinátatengelyt ζ – val. Ekkor a $\zeta = 0$ menti felület, azaz a középfelület mentén mesterpontokat definiálunk, ez lesz a referenciafelület. A ζ tengely menti vonalakat száalnak, a száalhoz illesztett egységvektorokat direktoroknak nevezzük. Ezzel az elemmel a Reissner-Mindlin-féle lineáris nyírási torzulást is kezelhetjük, ehhez azonban az eredeti térfogatelem alsó és felső felületén segédpontokat kell definiálnunk, melyeket páronként összekötve kimetszhetjük a referenciafelületen a mesterpontokat. A vastagság mentén tehát legalább két segédpontot kell definiálni. Az elemkhez alkalmazott bázisfüggvények Lagrange-típusúak. Az ilyen típusú elem előnye, hogy gyorsabb velük az analízis, mint a hagyományos térfogatelemekkel, valamint a vastagság mentén az anyagi változások (vagy akár vasalások) könnyebben követhetők..



40.ábra Térfogatelemből átalakított héjelem (66)

Vastag héjakat térfogatelemekkel - ANSYS esetén SOLID típusú elemekkel – is modellezhetünk (41.ábra). Ezekre az elemekre jellemző, hogy csomópontonként csak három szabadságfokkal, x , y és z irányú eltolódással rendelkeznek. Az ANSYS programban a SHELL elemekhez hasonlóan lineáris, illetve magasabb fokú kvadratikusan térfogatelemek is megtalálhatóak. A legegyszerűbb a SOLID45 nyolc csomópontú, lineáris általános elem. Kvadratikusan tetraéder elem a 10 csomópontú SOLID187, kvadratikusan téglalest elem pedig a 20 csomópontú SOLID95 és SOLID186 elemek.



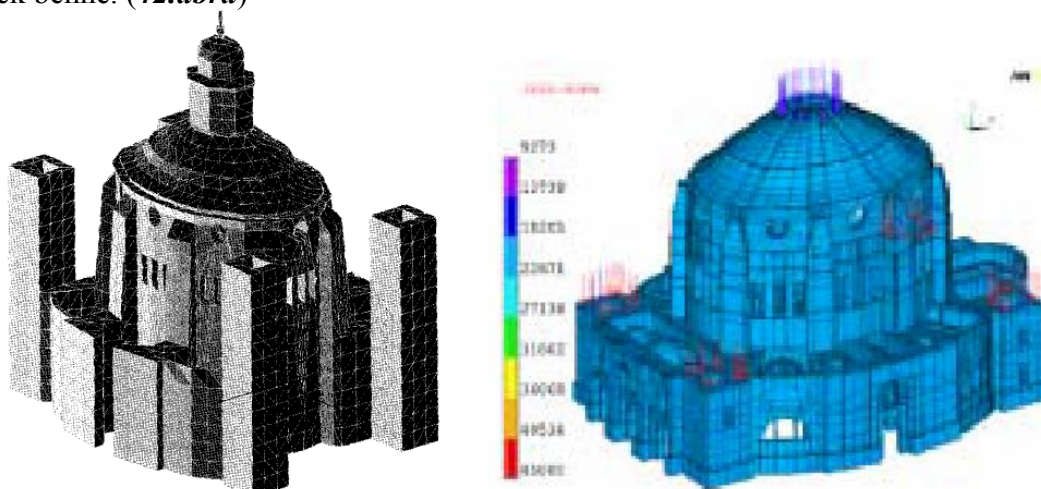
41.ábra Lineáris és kvadratikusan térfogatelemek (67)

Mivel ennél a modellezési módszernél is kontinuumként kezelünk egy inhomogén, anizotrop szerkezetet, ezért nagyon fontos a mechanikai jellemzők helyes felvétele. Biztosítanunk kell, hogy a valódi szerkezet és annak modellje globális értelemben azonosan viselkedjen.

A szakirodalom több műve foglalkozik térbeli boltozatok véges elemes analízisével, érdekes, hogy még ovális kupola viselkedésének vizsgálatára is találhatunk egy-két példát. Majd látni fogjuk, hogy más módszereket – pl. DEM - még nem igazán terjesztették ki ilyen kupolák vizsgálatára.

Takayoshi és társ. (53) a Santuario di Vicoforte (lásd 29.ábra) felülvizsgálatát végezték, s keresték a lehetséges megerősítési lehetőségeket. Ehhez első közelítésben COSMOS 2.5 programmal dolgoztak, melyben 10 csomópontú test elemeket alkalmaztak lineárisan rugalmas anyagmodellel. A

második, pontosított modell már ANSYS 6.0 programmal készült, mely már 20 csomópontú SOLID95, illetve SHELL93 elemet tartalmazott, de szintén lineárisan rugalmas anyagmodellrel feltételezték benne. (42.ábra)



42.ábra A Santuario di Vicoforte véges elemes modelljei

Mindkét modell az épület globális erőjátékának megismerésére, makroszintű vizsgálatára törekedett, hisz a kontinuum vizsgálatok korlátai ezt engedték meg. Az analízis során tendenciákat, a repedések lehetséges helyeit, a főfeszültségeket, feszültségkoncentrációkat, leadódó támaszerőket vizsgálták. A húzási főfeszültségek helyei a valósághoz hű módon kirajzolták a repedések helyeit.

Amint már említettük, ilyen típusú analízisre a kontinuum alapú modellek teljesen megfelelőek. A mikro szintű viselkedés, az esetleges mechanizmusok kialakulásának változatainak, az egyes kövek megcsúszásának lehetőségének megismerése azonban csak részletesebb diszkontinuum vizsgálatokkal hajtható végre.

3.3. Diszkrét felépítésű modellek

Ebben a pontban olyan vizsgálati módszereket szeretnék bemutatni, melyek nem helyettesítő kontinuumot alkalmazó modelleken alapulnak, hanem a falazat pontosabb vizsgálatára diszkrét elemekből, kapcsolatok segítségével összeépített rendszert alkalmaznak. Ilyen modellezést a végeselem-módszerrel is – mint majd látni fogjuk – elvégezhetünk. Ennek bemutatása után szeretném ismertetni részletesebben a speciálisan ilyen diszkrét rendszerek vizsgálatára kidolgozott diszkrét elemek módszerét, illetve szót ejtenék a két módszer ötvözéséből kapható VEM/DEM eljárásról is.

3.3.1. VEM alkalmazása diszkrét felépítésű szerkezetek vizsgálatára

A véges elemek módszerével kicsit körülményesen ugyan, de modellezhetünk falazott szerkezetet diszkrét testek együtteseként is. Ekkor a kontinuumot olyan résztartományokra osztjuk, melyek éppen egy adott építőelemnek felel meg, majd ezeket kapcsolati elemekkel kötjük össze. Az elemeket célszerűen három dimenziós testként (ANSYS esetén SOLID elemcsalád) modellezzük. Ipari célú véges elemes programok tartalmaznak kontakt elemeket. ANSYS esetén a 170-es elemcsaládot ajánlott alkalmazni (67):

CONTA171/172
CONTA173/174
CONTA175
CONTA178

2D 4 csp. felület-felület kapcsolat
3D 4 csp. felület-felület kapcsolat
csomópont-felület kapcsolat
csomópont-csomópont kapcsolat

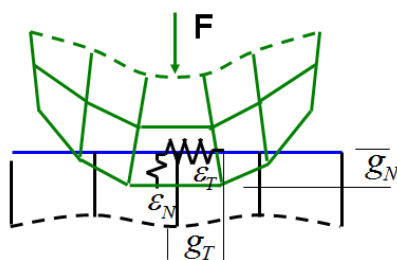
Ezek közül kiemelt szerepű a CONTA173 és 174, hisz ezek alkalmasak térbeli boltozat modellezésénél használt SOLID elemek felületeinek összekapcsolására. A CONTA174 elem annyiban különbözik a 173-as elemtől, hogy közbenső csomóponttal rendelkező, azaz magasabb rendű SOLID elemekhez alkalmazható. Mindkét típus normál és érintő irányú kapcsolati erőket, súrlódási – akár egyedien definiálva – modellt és a két elem közötti esetlegesen meglévő húzási szilárdságot is tud kezelni.

A modellezés nehézségét az adja, hogy előre kell definiálni, hogy mely felület mely másik felülettel fog kapcsolatba kerülni. Ehhez szükség van ANSYS esetén például célelem (TARGET) definiálására. Mindkét elem a kapcsolódó felületre illeszkedik, a kapcsolati erők pedig a relatív elmozdulások függvényében keletkeznek. A CONTA173 és 174 elemekhez a TARGE170 elemet kell alkalmazni. Falazott boltozatok esetén a kapcsolatok egyértelműek, hisz a faragott kövek, illetve téglák illeszkedési felülete adja azokat, azonban a modellezés igen időigényes ez esetben.

Két felület érintkezésekor a benyomódást kapcsolati feltételekkel adhatjuk meg. Az egyik eljárás, mellyel ez kezelhető a büntetőfüggvényes módszer. Ez azt jelenti, hogy a kapcsolati feltétel megsértése „büntetésként” növeli a teljes virtuális munkát :

$$\delta W = \int_V \sigma^T \delta \varepsilon dV + \int_\Gamma (\varepsilon_N g_N \delta g_N + \varepsilon_T g_T \delta g_T) dA . \quad (3.94)$$

ahol ε_N és ε_T a normál, illetve tangenciális „büntető” merevség, g pedig a relatív elmozdulásokat jelenti a 43. ábra szerint.



43. ábra

A klasszikus véges elemes formulázás szerint pedig :

$$(K + \varepsilon G^T G) u = F . \quad (3.95)$$

Az ANSYS programban megadhatunk úgynevezett FKN kapcsolati merevséget, illetve FTOLN benyomódási toleranciát. A módszer hátránya, hogy a megoldás konvergenciája a kapcsolati merevségtől erősen függ, hisz nagy kapcsolati merevség esetén a „büntetés” olyan mértékű lehet, hogy a megoldás az egyensúly körül oszcillál, a két kapcsolódó elem pattog. Az ANSYS 8.1, illetve magasabb verziószám esetén a kontakt elem KEYOPT(10)=2 -re állításával a program automatikusan állítja be minden iteráció során a megfelelő merevséget, de kézi beállítás esetén se vegyük nagyobbra egynél. Hátrány még, hogy a tolerancia megadásával – mert matematikailag szükséges az egyensúlyhoz némi benyomódás megengedése – a kapcsolati feltételek nem tökéletesen elégülnek ki. A módszer előnye viszont, hogy nincs újabb szabadságfok – mint majd a Lagrange-szorzos változatnál látni fogjuk -, illetve a mátrix felépítésének köszönhetően iteratív megoldók alkalmazhatóak az egyenletrendszer megoldásához, így nagy modellek is vizsgálhatóak vele, ami esetünkben előnyös lehet.

A másik megoldási módszer a már említett Lagrange-szorzókkal dolgozik. Beépítve a feltételeket a virtuális munkába a szorzók segítségével :

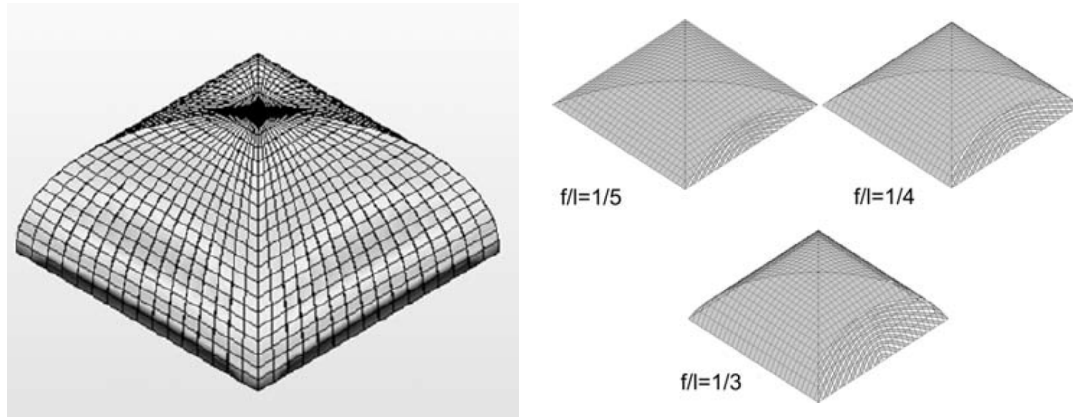
$$\delta W = \int_V \sigma^T \delta \varepsilon dV + \int_\Gamma (\lambda_N \delta g_N + \lambda_T \delta g_T) dA . \quad (3.96)$$

Az egyenletrendszer lineáris, ha lineárisan rugalmas anyagot és pont-pont kapcsolatot alkalmazunk. Máskülönben nemlineáris esetben iteratív megoldást, például Newton-Raphson-módszert kell alkalmaznunk. Lineáris esetben az egyenletrendszer :

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ g_0 \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

alakban is felírható. Látható, hogy a szorzók miatt újabb ismeretlenek szerepelnek az egyenletrendszerben, így a megoldási idő növekszik, melyet a főátlóbéli zero elem azzal fokoz, hogy iteratív megoldókat miatta nem alkalmazhatunk. Előnye viszont, hogy a kapcsolati feltételek pontosan kielégülnek, nem kell külön a kapcsolati merevség konvergenciát befolyásoló hatását vizsgálni (68).

Szép példa ilyen módszerrel való térbeli boltozat modellezésére D'Ayala (2008) munkája (69). Térbeli boltozatok erőjátékát vizsgálta a klasszikus elmélet szerint, ám kiegészítette azt a súrlódás hatásának figyelembe vételével. Analitikus megoldást dolgozott ki, majd ezt vastag héjelemek és kapcsolati elemek segítségével *Algor V19* véges elemes programmal ellenőrizte, modelljét az **44. ábra** mutatja.



44. ábra Kolostorboltozat vizsgálata különálló héjelemek és kapcsolati elemek segítségével (69)

3.3.2. Diszkrét elemek módszere

Fentebb már említettem, hogy a diszkrét elemek módszerét kifejezetten a diszkrét felépítésű szerkezetek vagy anyagok mechanikai viselkedésének előrejelzésére fejlesztettek ki. Ilyen szerkezet lehet pl. bármilyen falazott, kövekből összeépített szerkezet – boltív, boltozat, falak, oszlopok –, anyag pedig bármilyen szemcsehalmoz, – pl. talaj, silóban tárolt gabona, stb (70).

A kezdeti DE modelleket olyan sziklás lejtők, rézsúk vizsgálatára hozták létre, melyekben a tönkremeneteli mechanizmus a már létező törések mentén az elemek elválásával vagy megcsúszásával jön létre. A talaj- és közetmechanika terén a hatvanas években gyakori volt ennek a modellezése merev blokkokból összekapcsolt rendszerként, ám az analitikus eljárások korlátai miatt csak igen egyszerű problémákat lehetett megoldani. A diszkrét elemek módszerét, mely egy numerikus megközelítése a fenti modellnek, Cundall ajánlotta 1971-ben (71). A numerikus megoldáshoz a blokkok mozgásegyenleteinek időintegrálását választotta, mellyel lehetőség nyílt a nagy elmozdulások vizsgálatára is az elemek aktuális helyének folyamatos követésével. Egy numerikus eljárást – némileg pontosítva Cundall és Hart 1992-es definícióját – akkor tekinthetünk diszkrét elemes modellnek, ha

- egymástól egyértelműen elkülönülő elemekből épül fel;
- az elemek önálló elmozdulási szabadságfokokkal rendelkeznek oly módon, hogy a modell
- képes követni az elemek véges nagyságú eltolódásait és elfordulásait (esetleg deformációit is);
- az elemek között új kapcsolatok jöhetnek létre és meglévő kapcsolatok szűnhetnek meg,

tehát a végelelemes módszerrel ellentétben itt a kapcsolatok bármely két elem között létrejöhetnek, melyek kölcsönhatásba kerülnek egymással.

A következőekben bemutatjuk a módszer fő lépéseit, alapegyenleteit, a megoldási módszereit, illetve alkalmazhatóságát falazott szerkezetek esetén.

3.3.2.1. Geometria definiálása, elemek típusai

Mint minden probléma modellezésének esetén, itt is a modell geometriájának definiálása az első lépés. Az elemek geometriájának szempontjából két fő elem típust különböztetünk meg, melyet a szoftverek használnak:

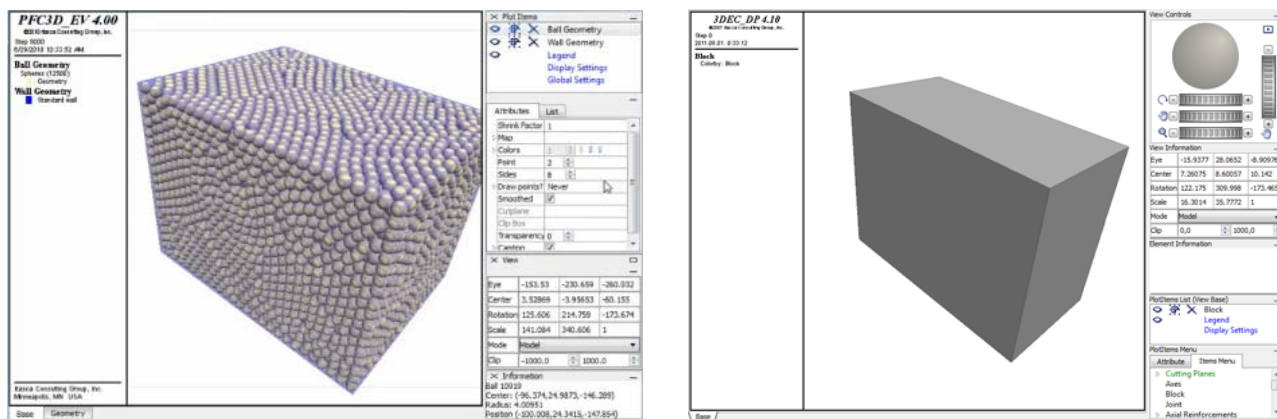
- blokk elemek, poligonból vagy poliéderekből;
- szemcsé elemek, kör vagy gömb alakú, illetve több körből vagy gömbből összeállítva.

Poligonból összeállított elemeket használ az UDEC nevű szoftver, poliéder elemeket ennek három dimenziós változata a 3DEC (vizsgálataimban én is ezt alkalmaztam), kör, illetve gömb alakú elemeket a PFC2D és a PFC3D, valamint gömb- illetve kördarabokból összeillesztett elemeket az OVAL, az EDEM és számos hasonló diszkrét elemes program.

Az egyedi elemek geometriájának definiálása igen egyszerű. Polygon/poliéder esetén a sarokpontok koordinátaival és a köztül lévő élek és oldallapok megadásával, kör/gömb esetén a középpont koordinátájával és a sugár megadásával, egyedi alakú elem esetén az alak lokális koordináta-rendszerben felvett függvényével, illetve a lokális koordináta-rendszer origójának helyének megadásával végezhetjük ezt el.

Nehezebb a dolgunk akkor, amikor az elemekkel valamely teret szeretnénk kitölteni szabálytalan rendszerben. Erre számtalan algoritmus létezik már, melyeknek két csoportja van. Az egyik (pl. gravitációs ülepítés) a probléma megoldásánál használt mozgásegyenletek integrálását alkalmazza, így rendkívül időigényes folyamat lehet. A másik (pl. Stienen-modell, lily-pond modell, SSI, inwards packing technika stb.) pusztán geometriai számításokat használ. Mivel általában szemcsés anyagok vizsgálatánál van szükségünk ilyen geometria definiálására, ezért a részletesebb tárgyalástól eltekintek. (Részletekért lásd (70)-t.)

Falazott szerkezeteknél kézenfekvő megoldás poligonok/poliéderek alkalmazása az egyes építőelemek geometriai modellje számára, de megemlíteném, hogy például síkbeli esetben körökből, térbeli esetben gömbökből összeállított téglamodellt is készíthetünk (45. ábra).



45. ábra Gömbökből (PFC3D), illetve poliéderekből (3DEC) felépített építőelem modelljei

Az elem geometriája még nem határozza meg teljes egészében az elemtípust. Az elemek mechanikai viselkedésének modellezése szempontjából is két opciónk van :

- merev vagy
- deformálható elemek alkalmazása.

A merev elemek esetén – ilyeneket használ a PFC, az OVAL és a Contact Dynamics programok – a teljes szerkezet deformálhatóságát a kapcsolati modellekbe sűrítették bele.

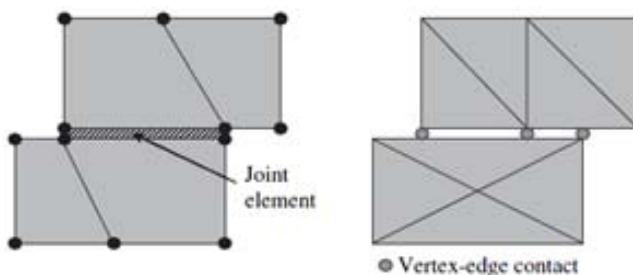
Deformálható elemek között is két típust találunk. Az egyik a végelem technikánál megismert hálógenerálással belső csomópontokat hoz létre az elemen belül, így egy adott elem önmagában kontinuumként kezelhető (UDEC, 3DEC). Egy elem felosztásakor ez a két program szimplexeket, azaz síkbeli esetben háromszög, térbeli esetben tetraéder elemeket hoz létre. A szimplex csúcspontjainak eltolódásaiból lineáris interpolációval származtatva a többi pont eltolódásvektorát, a bázisfüggvények lineáris függvények, melyből következik, hogy mind az alakváltozási, mind a feszültségi állapot konstans egy szimplexen belül (ún. „uniform strain” elemek). Megjegyzem, hogy – elsősorban kutatási célokra – léteznek olyan modellek is, amelyek bonyultabb végelemeket alkalmaznak, ezek azonban jóval nagyobb futtatási időt és tárolóterületet igényelnek, így használatuk a mérnöki gyakorlatban még nem terjedt el. Az elemfelosztás sűrűségének növelésével persze egy blokkon belül a „uniform strain” elemek esetén is igen változatos feszültségállapot is leírható.

Egy teljesen más jellegű eljárás, melyet például a DDA (Discontinuous Deformation Analysis) (72) típusú programok használnak az, hogy egy blokkon belül nincs hálógenerálás, hanem a feszültség- és alakváltozástenzort konstansnak közelítve egy-egy diszkrét elemen belül, a szabadsági fokok kiegészülnek az alakváltozástenzor konstans elemeivel. A konstans alakváltozások ill. feszültségek alkalmazása igen durva közelítés, ennek ellenére számos gyakorlati probléma modellezésére használtak ilyen technikát.

3.3.2.2. Kapcsolati modellek

A kapcsolat modellezése, a paraméterek helyes megadása épp olyan fontos, mint egy rugalmas anyag analízise során az anyagjellemzők megadása, hiszen ez alapjaiban befolyásolja a megoldás helyességét, valóságszerűségét.

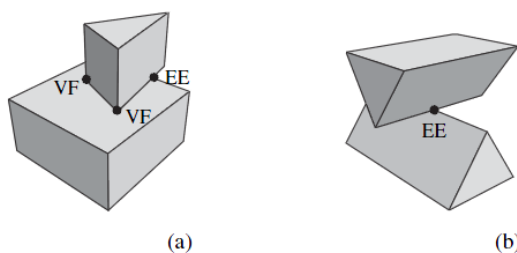
A kapcsolatokat a DE modellek egy része pontszerűen modellezi, tehát az elemek közötti interakciót kontakt pontokkal jellemzi, a kapcsolati erők pedig ezen kontakt pontokban létrejövő relatív elmozdulások függvénye. Ennek a módszernek előnye, hogy általános és egyszerű, hisz ilyen kontakt pontokkal többféle geometriai interakciót, illetve nagy elmozdulásokat is kezelhetünk. Könnyedén modellezhetjük például két poliéder alakú elem esetén valamely csomópont és oldallap kapcsolatát is. A VEM programok kapcsolati elemei például képtelenek csomópont és él kapcsolatot létesíteni, illetve az elemre nem generálható háló a kapcsolatot meghatározó csomópontok figyelmen kívül hagyásával (46.ábra). Nyilvánvalóan a VEM kapcsolati elemeinek előnye, hogy a kapcsolat folyamatos, így ott feszültségeloszlás megoldása eleve pontosabb, ezért szükséges, hogy DEM modell esetén a kapcsolati pontok számát elég nagyra vegyük a pontosság növelése érdekében.



46.ábra VEM kapcsolati elem, illetve DEM pont-pont kapcsolatának sematikus ábrája (73)

Kapcsolati pontok helyett néhány DE program él-él kapcsolatokat használ (74) (75) (76). Ebben az esetben a kapcsolatot egymással interakcióba kerülő diszkrét vonalelemekkel modellezzük, így a kapcsolati felületen a feszültségek lineáris kombinációját állíthatjuk elő. Ilyen modellel már nagyobb pontosságot érhetünk el, de néhány esetet nehezebben tudunk vele kezelni. Például, ha egy él-él kapcsolat átmegy sarokpont-él kapcsolatba vagy fordítva.

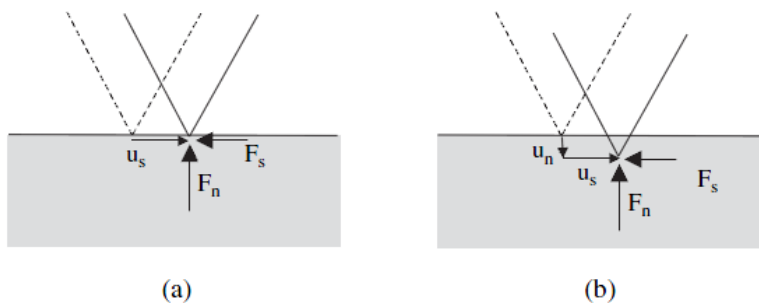
3D esetben a geometriai interakciók típusa igen sokféle lehet, ami a probléma komplexitását, illetve ezáltal numerikus kezelését megnehezíti. Az általam is használt 3DEC program (Hart és társ., 1988) (77) például kontakt pontokkal dolgozik, a kapcsolatok típusát pedig két nagy osztályba sorolja: csomópont-oldallap és él-él kapcsolat. Ezzel a két fő kapcsolati típussal a 3DEC által használt poliéderek lehetséges geometriai interakciói leírhatóak. (47.ábra)



47.ábra 3DEC program által használt kapcsolati típusok (73)

Cundall és Hart (1989) (78) két osztályba sorolja a kapcsolatokat viselkedésük szerint :

- kemény (vagy merev) kapcsolat, mely nem enged semmiféle átfedést két elem között (48a.ábra), illetve
- puha (vagy deformálható) kapcsolat, melyben kapcsolati merevségeket definiálhatunk normális és érintő irányban (vagy akár elfordulásra) egyaránt, mely a kapcsolati pontok relatív elmozdulásai és a kapcsolati erők között teremt kapcsolatot. Ilyenkor kis átfedés, benyomódás megengedett két elem között nyomás esetén (48b.ábra).



48.ábra Merev, illetve deformálható kapcsolat modellje (73)

Merev kapcsolati modelleket alkalmaztak a kezdeti DE programok, melyek a merev testek mechanikáját vizsgálták lineáris programozási módszereket használva. A benyomódás tiltása kényszerekkel definiálható. Az ún. DDA (Discontinuous Deformation Analysis) módszer eredeti változata is ilyen merev kapcsolatokkal operál, a kényszerre vonatkozó feltételeket azonban minden lépésben iteratív módon teljesíti egy megengedett hibakorláttal.

A legtöbb DE program deformálható kapcsolatokat alkalmaz. A normális és érintő irányú merevségeket tekinthetjük büntető együtthatóknak is, hiszen minél nagyobb merevségeket veszünk fel, a kényszer, hogy ne legyen átfedés a két elem között, annál pontosabban teljesül. A falazatok esetén azonban nem csak numerikus értelemben fontos ezen merevségek megválasztása. Nedves eljárással kialakított falazat esetén a habarcs mechanikai tulajdonságait modellezhetjük csupán kapcsolati

szinten, száraz falazás esetén pedig a nem egyenletes felfekvés, érdes felület következtében létrejövő feszültségkoncentrációk miatti lokális deformációkat vehetjük figyelembe. Ebben az esetben laboratóriumi kísérleti eredmények használata ajánlott.

A kapcsolatok mechanikai modellje igen sokféle lehet. A legegyszerűbb modell, melyet mindegyik program tartalmaz lehetséges opcióként a lineárisan rugalmas, Coulomb-súrlódásos modell. Ebben az esetben a normálerő csak nyomás lehet, mely a kapcsolati normálmerevség és a relatív normálirányú elmozdulás szorzataként definiálható :

$$N^c = k_N^c \delta_N^c \quad ; \quad N^c \leq 0 \quad , \quad (3.98)$$

a két egymásra merőleges, érintőirányú kapcsolati erő pedig a kapcsolati érintőirányú merevségek és relatív elmozdulások szorzataként számítható, eredőjük nagyságának pedig a normálerő és súrlódási tényező szorzata ad maximumot :

$$\begin{bmatrix} T_t^c \\ T_w^c \end{bmatrix} = k_T^c \begin{bmatrix} \delta_t^c \\ \delta_w^c \end{bmatrix} \quad ; \quad \sqrt{(T_t^c)^2 + (T_w^c)^2} \leq -\nu N^c \quad . \quad (3.99)$$

A fentiek alapján, ha a kapcsolati erő húzássá alakul, a kapcsolat megszűnik, a két kölcsönhatásban lévő test elválik egymástól. A nyíróerőre vonatkozó feltétel szerint a nyíróerő ha eléri a maximumot, onnantól kezdve konstans kapcsolati erő mellett bármekkora relatív érintő irányú eltolódást szenvedhet el.

A programok megengedik kohéziós kapcsolatok modellezését is. Ekkor a kapcsolat szilárdsági paramétereit is definiálnunk kell, azaz a kapcsolat például csak megfelelő nagyságú húzás mellett szakad fel :

$$N^c = k_N^c \delta_N^c \quad ; \quad N^c \leq N_{max} \quad , \quad (3.100)$$

$$\begin{bmatrix} T_t^c \\ T_w^c \end{bmatrix} = k_T^c \begin{bmatrix} \delta_t^c \\ \delta_w^c \end{bmatrix} \quad ; \quad \sqrt{(T_t^c)^2 + (T_w^c)^2} \leq T_{max} \quad . \quad (3.101)$$

A nyírás szempontjából a kapcsolat a maximális kapcsolati nyíróerő elérése után megcsúszik, megszűnik vagy súrlódásos kapcsolatként, állandó T_{max} mellett működik tovább.

Szemcséből összeálló szilárd anyagok esetén lehetőség van a szemcsék között nyomatékbíró kapcsolat definiálására is. Ily módon modellezhetünk például beton anyagú szerkezeteket is. Ez esetben is egyszerűen merevségeket, mely a relatív elfordulások és a kapcsolati nyomatékok között teremt kapcsolatot, illetve hajlítási, csavarási szilárdságot kell definiálnunk, hogy tudjuk mikor szakad fel a kapcsolat. Ilyen kapcsolati modelleket a szemcsés anyagokra vizsgálatára kifejlesztett programok, például a PFC2D, PFC3D programok alkalmaznak.

A fent említett – legegyszerűbb, de legtöbbször is alkalmazott – modelleken kívül rendkívül sokféle, összetett kapcsolati modell is létezik (időfüggő, fellazuló, képlékeny) , melyet az újabb programok kezelni tudnak, sőt egyes programokban lehetőség van felhasználó által definiált kapcsolati összefüggések megadására is.

3.3.2.3. Mozgásegyenletek

Mint az már említettük, a diszkrét elemek módszere egy olyan numerikus módszer, mely az elemekre felírható mozgásegyenleteket oldja meg az egyes időpillanatokban, lépésként. Ezért fontos, hogy ismerjük az alapvető egyenleteket, melyeket ezek a módszerek használnak (70).

Az egyenleteket alapvetően befolyásolja, hogy azt merev vagy deformálható elemekre írjuk fel. Mint láttuk a deformálható elemek között is két típust ismerünk, ezért három ilyen alapvető egyenletünk lesz. Kezdjük az elsővel, a merev testek mozgásegyenletével. Az egyenleteket Descartes-féle koordináta-rendszerben közlöm.

Egy általános alakú térbeli merev test mozgásegyenlete hat egyenettel írható le, melyből három vetületi és három nyomatéki egyenlet. Jelölje a test tömegét m^p , gyorsulását a^p , forgásának szögsebességét ω^p , szöggyorsulását β^p . Ekkor a hat egyenlet :

$$m^p a_x^p = f_x^p, \quad (3.102)$$

$$m^p a_y^p = f_y^p, \quad (3.103)$$

$$m^p a_z^p = f_z^p, \quad (3.104)$$

$$I_{xx}^p \beta_x^p - I_{xy}^p \beta_y^p - I_{xz}^p \beta_z^p + \omega_y^p (\omega_z^p I_{zz}^p - \omega_x^p I_{zx}^p - \omega_y^p I_{zy}^p) - \omega_z^p (\omega_y^p I_{yy}^p - \omega_x^p I_{yx}^p - \omega_z^p I_{yz}^p) = m_x^p, \quad (3.105)$$

$$I_{yy}^p \beta_y^p - I_{yx}^p \beta_x^p - I_{yz}^p \beta_z^p - \omega_x^p (\omega_z^p I_{zz}^p - \omega_x^p I_{zx}^p - \omega_y^p I_{zy}^p) + \omega_z^p (\omega_x^p I_{xx}^p - \omega_y^p I_{xy}^p - \omega_z^p I_{xz}^p) = m_y^p, \quad (3.106)$$

$$I_{zz}^p \beta_z^p - I_{zy}^p \beta_y^p - I_{zx}^p \beta_x^p + \omega_x^p (\omega_y^p I_{yy}^p - \omega_x^p I_{yx}^p - \omega_z^p I_{yz}^p) - \omega_y^p (\omega_x^p I_{xx}^p - \omega_y^p I_{xy}^p - \omega_z^p I_{xz}^p) = m_z^p. \quad (3.107)$$

A jobb oldalon szereplő f^p és m^p eredő erőket és nyomatékokat a testre ható erők és nyomatékok referenciapontba – általában tömegközéppontba – redukálásával kapjuk meg. A képletekben az indexelésnek megfelelően I a referenciaponton átmenő x, y és z tengelyekre vett forgási tehetetlenségeket jelöli. Az index azt jelöli, hogy melyik két tengelyre vonatkoztatjuk ezt a mennyiséget. Jelölje x_p, y_p, z_p a referenciapont koordinátáit, illetve $\mu(x, y, z)$ a test sűrűségfüggvényét, ekkor :

$$I_{xy}^p = \int_V (x - x_p)(y - y_p) \mu(x, y, z) dV, \quad (3.108)$$

ezzel analóg módon az indexelésnek megfelelően számítható a többi tehetetlenségi érték is, melyeket egy 3x3-as tehetetlenségi tenzorba gyűjthetünk. Ezen tenzor sajátértékei adják a fő tehetetlenségeket, a sajátvektorok pedig a fő tehetetlenségi irányokat, melyekbe forgatva a koordinátatengelyeket csak a főátlóbéli elemek maradnak nemzérusok, így az egyenletek egyszerűsödnek, sőt gömbszimmetria esetén a három főtehetetlenség megegyezik.

Ha átrendezzük az egyenleteket úgy, hogy a szögsebességet tartalmazó tagokat a jobb oldalra visszük át, a következő tömör alakot kapjuk :

$$\mathbf{M}^p(t) \mathbf{a}^p(t) = \mathbf{f}^p(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)). \quad (3.109)$$

Itt $\mathbf{f}^p$ nem csak az időtől, illetve az elem elmozdulásaitól és sebességétől függő erőhatásokat, hanem más elemekkel való érinthezésből keletkező erőhatásokat is tartalmazza. Az $\mathbf{a}^p(t)$ vektor a gyorsulási és szöggyorsulási tagokból, az $\mathbf{M}^p(t)$ mátrix pedig a tömeg és tehetetlenségi tagokból áll. $\mathbf{M}^p(t)$ szintén időfüggő, hiszen az elem mozgása során változnak a rögzített tengelyekre vonatkozó értékek. Ha a teljes rendszert vizsgáljuk, az egyes elemekre vonatkozó egyenleteket összegeznünk kell :

$$\mathbf{M}(t) \mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)), \quad (3.110)$$

ahol $\mathbf{M}(t)$ az $\mathbf{M}^p(t)$ elemekből összeállított blokkdiagonál mátrix. Merev elemei révén ezt használja a PFC2D és 3D, valamint az OVAL programok.

Deformálható, részekre osztott elemek esetén a mozgásegyenletet minden egyes – a belsőkre is vonatkozóan – csomópontra fel kell írjuk. A programok a legegyszerűbb felosztást alkalmazzák, szimplexeket hoznak létre, azaz két dimenziós esetben háromszög, három dimenziós esetben tetraéder elemeket. Egy-egy csomópontához tartozó tartományt a csomópont ún. Voronoi-cellájával jelöljük ki. Ez azon pontok halmaza, melyek az adott csomópontához vannak a legközelebb. Jelölje ezt a tartományt V_p , így az anyagsűrűség ismeretében meghatározható a csomópontba redukált tömeg : m_p . A mozgásegyenlet most csak három vetületi egyenletből áll, feltételezve hogy a csomópontba redukált

erőrendszer eredője éppen átmegy a csomóponton. Ez annál durvább közelítés, minél nagyobb elemeket alkalmazunk, azaz sűrítéssel növelhető a pontosság. A mozgásegyenlet tömören :

$$\mathbf{m}^p(t)\mathbf{a}^p(t) = \mathbf{f}^p(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) , \quad (3.111)$$

ahol most a jobb oldalon a csomópont tartományára ható, merev elemeknél felsorolt erőhatásokon kívül a környező csomópontok celláinak feszültségállapotának hatását is figyelembe kell venni. A teljes rendszerre ismét összegezni kell az egyenleteket az összes csomópontra :

$$\mathbf{M}\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) , \quad (3.112)$$

ahol most a tömegmátrix független az időtől. Ezt a leírásmódot alkalmazza a UDEC és 3DEC program, amelyet én is használni fogok a vizsgálataimban.

A deformálható elemek másik nagy csoportja a részekre nem osztott változat. Ekkor, ahogy már említettük, az elem szabadságfokainak száma kiegészül az alakváltozást leíró komponensekkel, a jobb oldalon lévő $\mathbf{f}^p$ vektor pedig a feszültséget leíró komponensekkel :

$$(\mathbf{u}^p)^T = [u_x^p \quad u_y^p \quad u_z^p \quad \varphi_x^p \quad \varphi_y^p \quad \varphi_z^p \quad \varepsilon_x^p \quad \varepsilon_y^p \quad \varepsilon_z^p \quad \gamma_{xy}^p \quad \gamma_{xz}^p \quad \gamma_{yz}^p] , \quad (3.113)$$

$$(\mathbf{f}^p)^T = [f_x^p \quad f_y^p \quad f_z^p \quad m_x^p \quad m_y^p \quad m_z^p \quad V^p\sigma_x^p \quad V^p\sigma_y^p \quad V^p\sigma_z^p \quad V^p\tau_{xy}^p \quad V^p\tau_{xz}^p \quad V^p\tau_{yz}^p] . \quad (3.114)$$

A mozgásegyenlet ezután az előzőekhez hasonlóan írható fel, de itt az utolsó hat egyenlet már a feszültségek és az alakváltozások második deriváltja között adja meg a kapcsolatot :

$$\mathbf{M}(t)\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) . \quad (3.115)$$

Az $\mathbf{M}(t)$ inerciamátrix ebben az esetben igen bonyolult felépítésű. Ilyen elemeket használnak a DDA programok.

3.3.2.4. Megoldási módszerek

A vizsgált rendszer elmozdulásainak számítására, állapotváltozásának szimulálására a DEM szoftverek két fajta megközelítést alkalmaznak. Az egyik a kvázi-statisztikus modellezés, mely a mátrix-elmozdulásmódszerhez hasonló technika, a másik pedig az időléptetési eljárás, mely a differenciálegyenletet időintegrálással oldja meg. Utóbbinak két fajtája is ismert : az explicit és az implicit változat.

A kvázi-statisztikus eljárást alkalmazó programok jelenleg létező verzióinak mindegyike végtelen merev elemeket használ pontszerű kapcsolatokkal, így egy elemnek hat szabadságfoka lehet általános, térbeli esetben. A modell feltételezi, hogy a rendszer sebessége és gyorsulása zérus, majd keresi azt az elmozdulásrendszer-növekményt, melyre teljesül a

$$0 = \mathbf{f}(\Delta\mathbf{u}) \quad (3.116)$$

összefüggés. Egy adott konfigurációban $\Delta\mathbf{f}$ kiegyensúlyozatlan erőrendszerünk van. Ha ismerjük azt a K merevségi mátrixot, mely az adott időpillanatban megadja a $\Delta\mathbf{u}$ és $\Delta\mathbf{f}$ közötti kapcsolatot, akkor a következő egyenletrendszerhez jutunk mátrixos alakban :

$$K\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f} . \quad (3.117)$$

A $\Delta\mathbf{u}$ megoldás tehát megmutatja, hogy a pillanatnyi kiegyensúlyozatlan erőrendszer milyen $\Delta\mathbf{u}$ elmozdulásnövekménnyel elért új állapotban lesz a teljes rendszer egyensúlyban. A K merevségi mátrix 6×6 -os blokkokból áll, hisz hat ismeretlenünk van elemenként. Részletes összeállításának bemutatásától most eltekintünk, ám hasonlóan a mátrix-elmozdulásmódszerhez, a kényszereket itt is a megfelelő főátlóban lévő elemekhez rendelt rugómerevségekkel kezelhetjük. Ha a rendszer

statikailag határozott vagy határozatlan, akkor a K mátrix nem szinguláris, s így invertálható is, Δu egyértelműen meghatározható. A gyakorlatban a modellezendő rendszerek gyakran kinematikailag határozatlanok, – pl. üreges szemcsehalmoz, töréskor szétpattanó részecskék – azaz vannak olyan elemek, melyek elmozdulása valamely irányban korlátozás nélkül bekövetkezhet. Ekkor a merevségi mátrix szinguláris. Ennek a problémának a kezelésére többféle algoritmust fejlesztettek ki. (lásd Kishino- (1987) (79), valamint Bagi és Bojtár-féle (70) algoritmusokat).

Az első kvázi-statisztikus modell Serrano és Rodriguez-Ortiz (1973) (80) nevéhez köthető, melyben a szinguláris mátrix problémája még nem volt megoldott. Kereskedelmi forgalomban nem található ilyen típusú program, szemcsés anyagok mikromechanikájának kutatására alkalmazzák.

A mozgásegyenlet kezdetiérték feladatának explicit numerikus megoldása esetén a t_i időpillanatokban ismert változókból határozzuk meg a t_{i+1} időpont keresett változóit, tehát azok explicit módon vannak kifejezve. Implicit módszer esetén a mozgásegyenletet a t_{i+1} időpontban írjuk fel, s a keresett változóknak ebben az időpontban kell teljesíteni az egyenletet. Mivel explicit esetben az előző időpontból következtetünk, ezért a megoldás implicit esetén jóval pontosabb, emellett persze időigényesebb is. Explicit módszer az Euler-módszer, illetve annak pontosított változatai (Runge-Kutta és a centrális differenciák módszere), implicit megoldás pedig például a Newmark-féle β -módszer. (Részletekért lásd (70)-t és (81)-t).

Explicit időintegrálást alkalmazó programok - például a PFC2D, PFC3D, UDEC és 3DEC – tipikusan a centrális differenciák módszerét használják. A mozgásegyenletben lévő gyorsulásokat közelítjük a $t_{i-1/2}$ és $t_{i+1/2}$ időpontban lévő sebességek centrális differenciájának felhasználásával. Ekkor a mozgásegyenlet a következő alakú :

$$M_i^p \frac{v_{i+1/2}^p - v_{i-1/2}^p}{\Delta t} = f_i^p, \quad (3.118)$$

átrendezve pedig :

$$v_{i+1/2}^p = v_{i-1/2}^p + \Delta t (M_i^p)^{-1} f_i^p, \quad (3.119)$$

így ismerjük az intervallumra vonatkozó átlagsebességet, melyet kis időlépés esetén konstansnak feltételezve az elmozdulás :

$$u_{i+1}^p = u_i^p + \Delta t v_{i+1/2}^p. \quad (3.120)$$

Az eljárás jellemzője, hogy az elmozdulásokat túlbecsüli, így ezáltal a következő lépésben a ténylegesnél nagyobb belső erők keletkeznek. Előfordulhat, hogy emiatt a megoldás az egyensúlyi helyzet körül oszcillál. Ennek kivédésére a programok korlátozzák a maximális lépésközt, illetve ún. „lokális” és „kapcsolati” csillapításokat alkalmaznak, melyek a valóságban is létrejövő energiadiSSIPációt modellezik, valamint a konvergenciát is javítják. A lokális csillapítás alkalmazása a mozgásegyenlet megoldásakor a következőképpen történik :

$$v_{i+1/2}^p = v_{i-1/2}^p + \Delta t (M_i^p)^{-1} \left(f_i^p - \alpha |f_i^p| \frac{v_{i-1/2}^p}{|v_{i-1/2}^p|} \right), \quad (3.121)$$

ahol α tetszőlegesen választott – pl. 0.5-0.7 – csillapítási paraméter. A képletből kitűnik, hogy a csillapító erő nagysága az eredeti kiegyensúlyozatlan erő nagyságával egyenesen arányos, iránya pedig ellentétes a sebesség, azaz az mozgás irányával. A kapcsolati csillapítás esetén a kapcsolatban létrejövő relatív sebességnek a függvényében a mozgással ellentétes hatást kifejtő erőt adunk a rendszerhez. Deformálható, belső csomópontokkal rendelkező elemek esetén beszélhetünk adaptív globális csillapításról is. Ekkor a program – pl. UDEC, 3DEC – a csomópontokra olyan csillapító erőt helyez, hogy a kinetikus energia egy része disszipálódjon, így stabilizálva a numerikus megoldást (a részletekről lásd pl (70)-t).

Az időintegrálásos modellek másik nagy csoportja az implicit módszereket alkalmazza. Ilyenek a DDA programok, melynek első változatát Gen-Hua Shi publikálta 1988-ban (72). Implicit megoldás esetén a mozgásegyenletnek a t_{i+1} időpontban kell teljesülnie :

$$0 = \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}(t), \mathbf{v}_{i+1}(t)) - \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{a}_{i+1}(t) . \quad (3.122)$$

Ebben az időpontban $\mathbf{u}_{i+1}$, $\mathbf{v}_{i+1}$ és $\mathbf{a}_{i+1}$ is ismeretlen. Legyen $\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i$, ekkor közelítésképp a sebességet és gyorsulást felírva a t_{i+1} időpillanatra :

$$\mathbf{a}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t^2/2} (\Delta \mathbf{u}_{i+1} - \Delta t \mathbf{v}_i) , \quad (3.123)$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta t \mathbf{a}_{i+1} , \quad (3.124)$$

ami a Newmark-féle β -eljárás szerinti közelítés $\beta = 1/2$ és $\gamma = 1$ paraméterekkel, azaz egy lépésköz alatt átlaggyorsulást feltételezve. A mozgásegyenlet így már leírható csak $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ függvényeként :

$$\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}) - \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{r}(t_{i+1}, \Delta \mathbf{u}_{i+1}) . \quad (3.125)$$

Az egyenlőség akkor teljesül pontosan a t_{i+1} időpillanatban, ha ez a maradékfüggvény zérus: $\mathbf{r}(t_{i+1}, \Delta \mathbf{u}_{i+1}) = 0$. A maradékfüggvény zérushelyeinek, azaz $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ -nek a megkereséséhez a Newton-Raphson-módszert használhatjuk. A k -adik iteráció a következőképp történik :

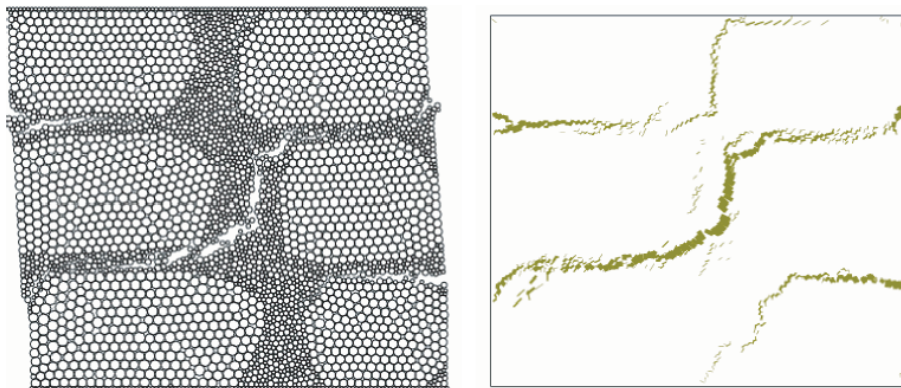
$$\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(k)} - \mathbf{J}(t_{i+1}, \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(k)})^{-1} \mathbf{r}(t_{i+1}, \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(k)}) , \quad (3.126)$$

ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{r}$ maradékfüggvény Jacobi-mátrixát jelöli. Az iteráció leállításának feltétele lehet például az, hogy az $\mathbf{r}$ maradékfüggvény abszolút értéke egy bizonyos határ alá csökkenjen, illetve ha a zérushely környéke „lapos” – $\mathbf{J}$ közel szinguláris –, akkor a két iterációs lépés különbségének abszolút értékére is megadhatunk határértéket.

Az implicit megoldás tehát sokkal pontosabb az explicitnél, sőt éppen a visszaellenőrzés miatt Δt lépésköz lényegesen nagyobbra vehető ebben az esetben. (Ennek ára azonban az egyes időlépésekhez tartozó nagyobb futási idő.)

3.3.2.5. Diszkrét elemek módszerének alkalmazása falazott szerkezetekre

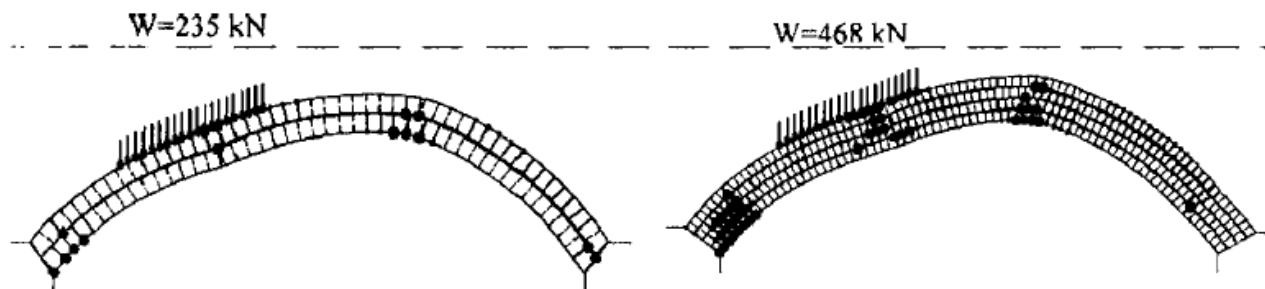
A falazatok felépítésének modellezésére két különböző megközelítés létezik. Már említettük, hogy lehetőség van egyes programokban – pl. PFC2D és 3D - szemcsék nyomatókbíró kapcsolatának kialakítására. Ilyen módon szemcsékből összeállítva a falazóelemeket, mikroszinten modellezhetjük a tönkremenetetelt, azaz az egyes téglá vagy kő elemek törését, illetve ha van, akkor a habarcsrétegeket is szemcsékből építjük fel. A szemcsék közt felszakadó kapcsolatokkal törésmechanikai szempontból modellezhetjük a falazat viselkedését. A 49.ábra egy kőfal repedésterjedésének modellezését mutatja függőleges és nyírási terhekre.



49.ábra Kőfal modellezése gömb alakú részecskék segítségével (73)

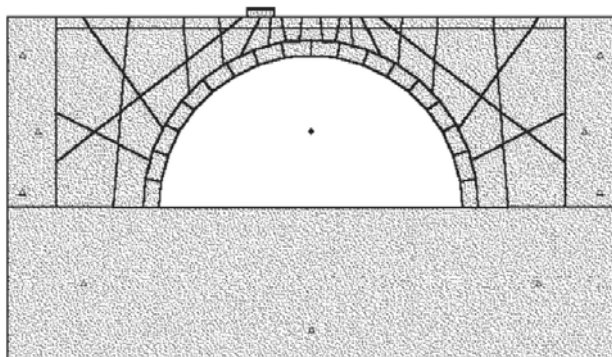
Másik megközelítés lehet, ha a diszkrét elemek magát a falazat építőelemeit reprezentálják. Az UDEC, 3DEC, illetve a DDA típusú programok poligonokat/poliédereket alkalmaznak, így ezek megfelelőek téglák, faragott kőtömbök modellezésére.

Már említettük, hogy a korai DEM programok gyakorta alkalmaztak merev elemeket. Ívek, boltozatok törési terhének, a kinematikai határozatlanság bekövetkezésének vizsgálatára ezek a modellek is megfelelőek (lásd határállapot elmélet (44)). Gilbert és Melbourne (1995) (82) több ívsorból álló boltíveket vizsgált ilyen eljárással (50.ábra), eredményeiket kísérletekkel is igazolták.

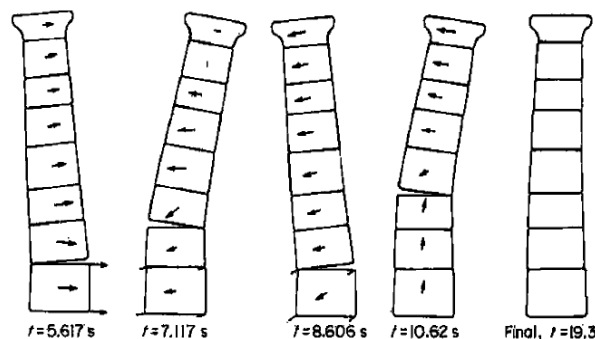


50.ábra Határállapot analízis boltívek vizsgálatára

Ívek esetén jelentős szerepe van a feltöltés teherelosztó hatásának. Ennek modellezése deformálható, akár nemlineáris viselkedésű elemekkel ajánlott. Petrinic (1996) (76) például kör alakú szemcsékkel vizsgálta a teher terjedésének útját, Bicanic (2001) (83) pedig olyan DDA modellen vizsgálta ugyanezt, melyen a feltöltést véletlenszerűen darabolt deformálható elemek együttese jelentette. (51.ábra)



51.ábra Falazott ívhíd és háttöltés DDA modellje (83)

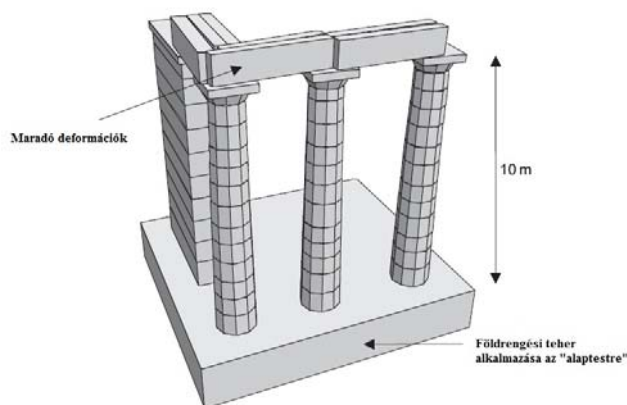


52.ábra Oszlopok szeizmikus vizsgálata (UDEC) (84)

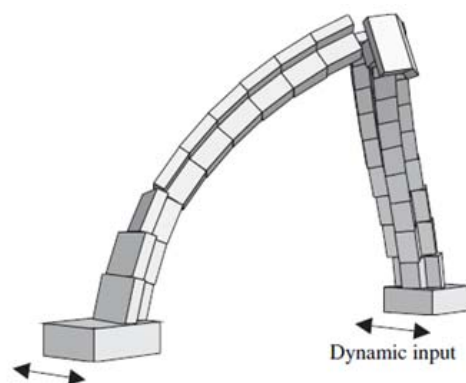
A DEM egyik legnagyobb előnye, hogy a mozgásegyenlet megoldásával dinamikai problémák kezelésére alkalmas. Dinamikai problémán az építőmérnöki gyakorlatban természetesen elsősorban a földrengési analízist értjük, sok erősen szeizmikus zónában lévő ország építészetében jelen vannak a falazott szerkezetek. Más dinamikai vizsgálat lehet bármilyen ütközés – például földrengés esetén elbírja-e a boltozat a lehulló törmelékeket - vagy akár robbanás is. Szeizmikus vizsgálatok esetén háromdimenziós modell ajánlott a reális szerkezeti válaszokhoz. A számítási igény csökkenthető, ha merev elemeket alkalmazunk – ezt az UDEC és 3DEC is engedi -, illetve ha a kapcsolati normálmerevségek nem túl nagyok (így a szoftver által alkalmazott, még numerikusan stabil viselkedést biztosító időlépés hosszabbra adódik). A szeizmikus teher igen egyszerűen modellezhető. A szerkezet alapjául szolgáló blokkot, vagy blokkokat elkészítjük, majd erre - mint ahogy azt modellkísérletek esetén a rázóasztalnál szokás – működtetjük a kívánt terhelési történetet elmozdulásteher formájában.

Papastamatiou és Psycharis (1993) (84) egy korai UDEC változattal vizsgálta antik oszlopok szeizmikus válaszait merev elemekkel. (52.ábra)

Psycharis és társ. (2003) (85) térbeli modellt készített a Parthenon szeizmikus analíziséhez, melyet jónéhány, a környéken mért földrengési rekord alapján vizsgált, s ily módon különböző megerősítési és felújítási lehetőségeket keresett. (53.ábra)



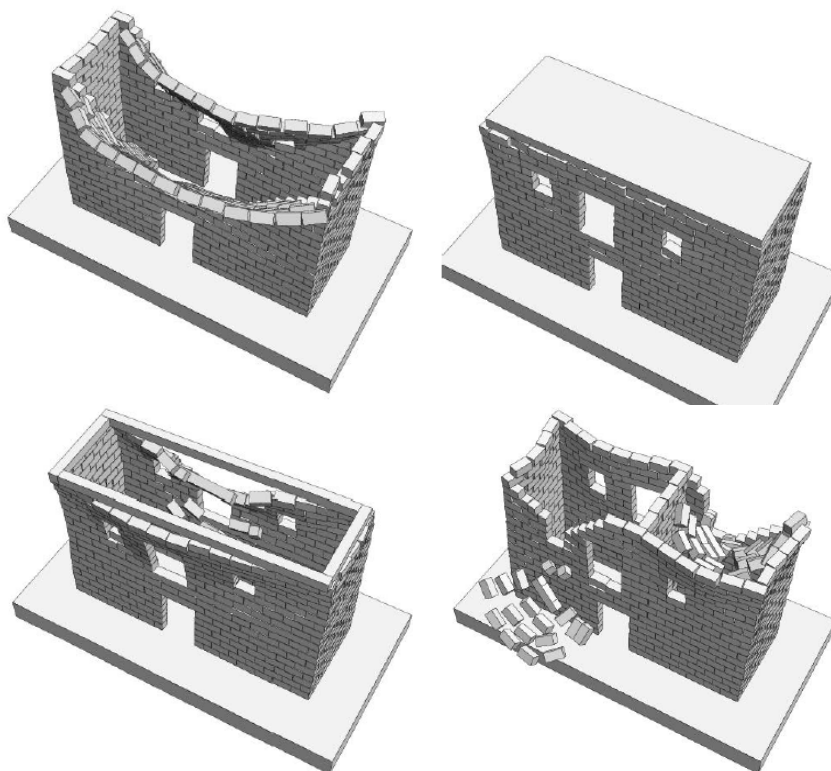
53.ábra Parthenon szeizmikus vizsgálata (3DEC) (85)



54.ábra Csúcsíves ív szeizmikus vizsgálata (3DEC) (86)

Ívek vizsgálatára is van példa szép számmal. Lemos (1998) (86) merev elemekkel és deformálható kapcsolatokkal modellezte különböző típusú – félkör, csúcsíves – ívek szerkezeti síkra merőleges tönkremeneteleit. (54.ábra) Érdekes megállapításra jutott azzal kapcsolatban, hogy a modellben alkalmazott kapcsolati merevségi érték döntően befolyásolhatja az eredmények helyességét. „Puha” kapcsolat esetén ugyanis sokkal kisebb gyorsulási értékeknél ment tönkre a szerkezet.

Alexandris (2004) (87) tradicionális ciprusi lakóházakat vizsgált földrengési terhekre. Mind két, mind három dimenziós esetben a megerősítés módjait vizsgálta. (55.ábra)



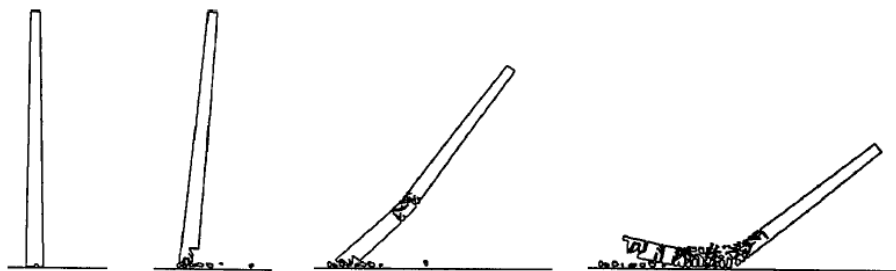
55.ábra Tradicionális ciprusi lakóházak szeizmikus vizsgálata (3DEC) (87)

Nagyobb, komplexebb szerkezetek vizsgálatánál egy olyan megoldás is létezik a diszkrét elemes számítások időigényének csökkentésére, mely során egy elem nem az egyes építőelemeket reprezentálja, hanem egy nagyobb szerkezeti részt is akár (egy-egy diszkrét elemmel mint helyettesítő kontinuummal közelítve több falazóelem együttes viselkedését). Ez a fajta modellezés igen felelősségteljes, nagy tapasztalatot és szakértelmet igénylő feladat. A kapcsolatok helyét, az elemek határait úgy kell felvenni, hogy a lehetséges tönkremeneteleket jól tükrözze a vizsgálat, valamint a kapcsolatok és elemek mechanikai jellemzője most már globális szinten kell visszaadja az eredeti, kisebb blokkokból felépülő szerkezet viselkedését. Egy példa ilyen modellre Oliveira (2002) (88)munkája, aki egy világítótorony földrengési károsodását vizsgálta ilyen módszerrel.

3.3.3. DEM/VEM eljárások

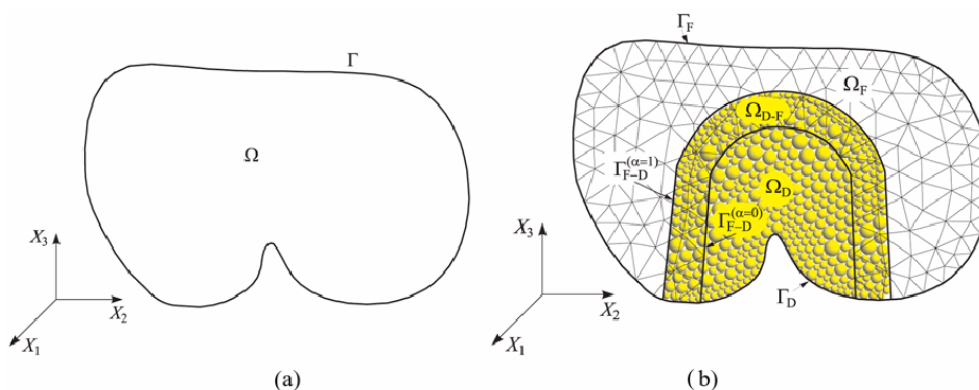
Már láthattuk, hogy VEM esetén létrehozhatjuk elkülönülő elemek kontakt elemekkel összekapcsolt rendszerét, illetve DEM esetén végeselemhálót generálhatunk – még ha csak igen egyszerű elemekkel is – a deformálható blokkokba. Látható, hogy kezdenek elmosódni a határok a két eljárás között. A kontakt elemek kezelése igen megnehezítheti a modellépítést, a nem megfelelő hálósűrítés pedig pontatlan eredményeket szolgáltat a DEM esetén, mégis megfelelően felvett modellen dolgozva a két módszer egyaránt hatékony lehet falazott boltozatok vizsgálatára.

A két eljárás ötvözésére több kutató is kísérletet tett. Munjiza (2004) (89) törésmechanikai vizsgálatokra fejlesztette ki véges-diszkrét elemes numerikus algoritmusát, mely olyan deformálható blokkokat alkalmaz, amik háromszög elemekre vannak osztva. Ezek a háromszögek a terhelés során elszakadhatnak egymástól a törésmechanikai feltételeknek megfelelően, így például épületek összeomlása és darabokra hullása modellezhető (56.ábra). A repedés terjedésével az elszakadó háromszög elemek szomszédos elemeire a program automatikusan új hálót készít.



56.ábra Kémény összeomlásának modellezése DEM/VEM eljárással (Munjiza) (89)

Petricic (1996) (76) olyan két dimenziós modellt fejlesztett ki, ahol deformálható poligon elemek és merev szemcsék együttesen szerepelhetnek. Ívhídra készített modelljét már ismertettük feljebb. Jerzy Rojek és Eugenio Oñate modellje (90) a feladat során vizsgált tartományt véges és diszkrét elemes részekre, valamint átmeneti zónára osztja fel (57.ábra).



57.ábra A test véges, átmeneti és diszkrét zónákra osztása (90)

Ezután feltételezi, hogy a teljes virtuális munka a két tartományra felírható virtuális munkák lineáris kombinációjaként származtatható :

$$\delta W = \alpha \delta W^F + (1 - \alpha) \delta W^D, \quad (3.127)$$

ahol δW^F a véges elemek, δW^D a diszkrét elemek virtuális munkája. Az α paraméter Ω_F tartományon 1, Ω_D esetén 0, az átmeneti tartományban pedig tetszőleges, például lineáris átmenet 0-1 között. Ahhoz, hogy a két módszert közösen lehessen vizsgálni a VEM alapvető egyenleteit mozgásegyenletek formájában kell felírni :

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{u}}_F = \mathbf{F}_F^{k\ddot{u}ls\ddot{o}} - \mathbf{F}_F^{b\ddot{e}ls\ddot{o}}, \quad (3.128)$$

ahol $\mathbf{M}_F$ a rendszer tömegmátrixa, $\ddot{\mathbf{u}}_F$ a keresett elmozdulások idő szerinti második deriváltja, azaz a gyorsulási vektor, a jobb oldalon pedig a rendszerre ható külső és belső erők különbsége található. A mátrixok/vektorok compilálása az alábbi egy elemre felírható mátrixok/vektorok segítségével történik :

$$\mathbf{m}_e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (3.129)$$

$$\mathbf{f}_e^{b\ddot{e}ls\ddot{o}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e, \quad (3.130)$$

$$\mathbf{f}_e^{k\ddot{u}ls\ddot{o}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e, \quad (3.131)$$

ahol ρ a sűrűség, $\boldsymbol{\sigma}$ a Cauchy-féle feszültségtenzor, $\mathbf{b}$ a térfogaterők vektora, $\mathbf{t}$ a felületi teher vektora, $\mathbf{N}$ a bázisfüggvények mátrixa, $\mathbf{B}$ az alakváltozási mátrix. A mozgásegyenlet megoldása a diszkrét elemek módszerénél már ismertetett centrális differenciák módszerével :

$$\mathbf{v}_{i+1/2}^F = \mathbf{v}_{i-1/2}^F + \Delta t (\mathbf{M}_i^F)^{-1} (\mathbf{F}_i^{k\ddot{u}ls\ddot{o}} - \mathbf{F}_i^{b\ddot{e}ls\ddot{o}}), \quad (3.132)$$

$$\mathbf{u}_{i+1}^F = \mathbf{u}_i^F + \Delta t \mathbf{v}_{i+1/2}^F. \quad (3.133)$$

Szerencsés eset, ha azzal a közelítéssel élünk, hogy a tömegmátrix diagonális, hisz ekkor különálló egyenletekké esik szét az egyenletrendszer, az invertálást nem kell elvégezni. A különböző kényszereket feltételi függvények megadásával, azokat pedig a virtuális munkába beépítve büntetőfüggvényes-módszerrel vagy Lagrange-féle multiplikátoros eljárással kezelhetjük. A feltételi függvény legyen :

$$\chi(\delta \mathbf{u}_F, \delta \mathbf{u}_{DC}) = 0 \quad (3.134)$$

általános alakban felírva, ahol $\delta \mathbf{u}_F$ és $\delta \mathbf{u}_{DC}$ a véges és diszkrét elemekre vonatkozó kinematikai kényszereket jelöli. A virtuális munka a következő alakban írható fel büntetőfüggvény :

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{u}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{u}}_F - \mathbf{F}_F^{k\ddot{u}ls\ddot{o}} + \mathbf{F}_F^{b\ddot{e}ls\ddot{o}}) + \delta \mathbf{u}_{DU}^T (\mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{u}}_{DU} - \mathbf{F}_{DU}) + \delta \mathbf{u}_{DC}^T (\mathbf{M}_{DC} \ddot{\mathbf{u}}_{DC} - \mathbf{F}_{DC}) \\ & + \delta \Phi_D^T (\mathbf{J}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \mathbf{T}_D) + \delta \mathbf{u}_F^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial (\delta \mathbf{u}_F)} \right]^T \chi \mathbf{k}_{DF} + \delta \mathbf{u}_{DC}^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial (\delta \mathbf{u}_{DC})} \right]^T \chi \mathbf{k}_{DF} = 0, \end{aligned} \quad (3.135)$$

illetve Lagrange-féle módszerrel :

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{u}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{u}}_F - \mathbf{F}_F^{k\ddot{u}ls\ddot{o}} + \mathbf{F}_F^{b\ddot{e}ls\ddot{o}}) + \delta \mathbf{u}_{DU}^T (\mathbf{M}_{DU} \ddot{\mathbf{u}}_{DU} - \mathbf{F}_{DU}) + \delta \mathbf{u}_{DC}^T (\mathbf{M}_{DC} \ddot{\mathbf{u}}_{DC} - \mathbf{F}_{DC}) \\ & + \delta \Phi_D^T (\mathbf{J}_D \dot{\boldsymbol{\Omega}}_D - \mathbf{T}_D) + \delta \mathbf{u}_F^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial (\delta \mathbf{u}_F)} \right]^T \lambda + \delta \mathbf{u}_{DC}^T \left[\frac{\partial \chi}{\partial (\delta \mathbf{u}_{DC})} \right]^T \lambda = 0. \end{aligned} \quad (3.136)$$

A részleteket mellőzve a mozgásegyenletek differenciálegyenlet-rendszere büntetőfüggvény alkalmazása esetén :

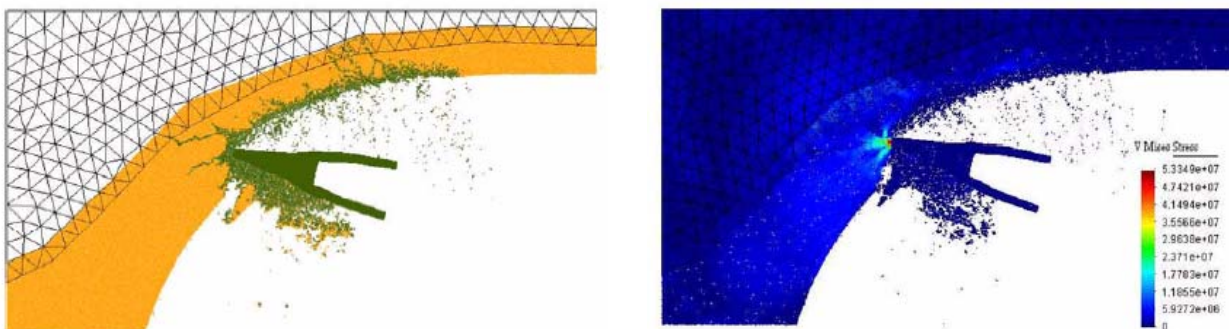
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{DU} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{DC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_F \\ \ddot{\mathbf{u}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{DC} \\ \dot{\mathbf{\Omega}}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_F^{külső} - \mathbf{F}_F^{belső} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\chi} \mathbf{k}_{DF} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} - \boldsymbol{\chi} \mathbf{k}_{DF} \\ \mathbf{T}_D \end{bmatrix}, \quad (3.137)$$

$\mathbf{M}$ és $\mathbf{J}$ a globális tömeg és inercia mátrixok, $\mathbf{k}_{DF}$ pedig a diszkrét büntető függvény vektora. A mozgásegyenlet Lagrange-szorós esetben :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_F & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{N}^T \\ 0 & \mathbf{M}_{DU} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{DC} & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{J}_D & 0 \\ \mathbf{N} & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_F \\ \ddot{\mathbf{u}}_{DU} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{DC} \\ \dot{\mathbf{\Omega}}_D \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_F^{külső} - \mathbf{F}_F^{belső} \\ \mathbf{F}_{DU} \\ \mathbf{F}_{DC} \\ \mathbf{T}_D \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.138)$$

A feltételek ezen két kezelési módjának előnyeit, hátrányait már a **3.3.1.pontban** bemutatam. A differenciálegyenlet-rendszert ezután explicit időintegrálási technikával lehet megoldani.

A módszer szépsége abban rejlik, hogy csak azok részeket modellezzük diszkrét elemekkel, ahol a mikro szintű analízis szükséges lehet, így a számítási idő drasztikusan csökkenhet. Ilyen megvalósult modellezési példa (Rojek és Onate, 2007) alagútfalazat fejtése, ahol csak a fejtendő rész környezetét építjük fel „fejthető” diszkrét szemcsékből, a távolabbi, csak a globális erőjátékban szerepet játszó rész véges elemekből áll. (58.ábra)



58.ábra Alagútfalazat fejtésének modellezése DEM/VEM eljárással (Rojek és Onate) (90)

Falazatokra történő alkalmazása lehet olyan modellek építése, mely a Petrinic-féle hídmodellhez hasonlóan a feltöltés hatásával foglalkozik. Vizsgálható pl. a tehereloszlás, valamely tárgy becsapódása során a feltöltés tompító hatása, földrengés esetén a boltozattal mozgó tömeg csillapító hatása stb. A módszer segítségével esetlegesen olyan téglákat, kő elemeket modellezzünk, melynek belseje véges elemekből, külső rétege diszkrét elemekből áll. Ilyen esetben lehetőség van a feszültségkoncentrációk, illetve ennek következtében morzsolódó, letörő darabok vizsgálatára.

3.4. Összefoglalás

A felsorolt vizsgálatok csak kiragadott példák a VEM, DEM, illetve a két módszer ötvözésének lehetséges alkalmazásaira falazott szerkezetek vizsgálatában. Egyre több cikk jelenik meg ilyen szerkezetek diszkrét elemes vizsgálatával kapcsolatban. Térbeli boltozatokról azonban ma még szegényes a téma szakirodalma, olyan cikk pedig, mely ovális alaprajzú kupolákkal foglalkozik, tudomásom szerint nem létezik. Ezért azt remélem, hogy a TDK során elkészített vizsgálataim hasznosak lehetnek ezen szerkezetek mechanikai viselkedésének alaposabb megismerésére

4. Saját vizsgálatok

A saját vizsgálataimban a következő célokat tűztem ki : az önsúlyra szükséges minimális falvastagságok meghatározása, a támaszerők eloszlásának vizsgálata merev támasz és önsúly teher esetére, az összeomlási módok és repedéskép megismerése különböző kialakítású ovális kupolák – beleértve a már jól ismert gömbkupolát is –, illetve önsúly esetére.

Először szeretném bemutatni, hogy ezen boltozatok geometriáját, felületét hogyan lehet megadni matematikailag teljesen általánosan parametrizálva, mely a legkülönbözőbb kialakításokat képes reprezentálni. Az egyik legfontosabb kérdés, hogy ezen felületet hogyan tudjuk előállítani, lefedni diszkrét, poliéder elemekkel. Erre egy algoritmust írtam, mely ezen elemek koordinátáit számítja ki. Ezt az algoritmust szeretném részletesen bemutatni.

A vizsgálatok egyik fő célja az önsúlyra vonatkoztatott minimális falvastagságok megtalálása volt. Itt részletesebben tárgyaljuk az eddigi elméleti vizsgálatokat, azok hátterét, illetve gömbkupolára vonatkozó értéket megkísértem levezetni a kinematikai módszer segítségével. A 3DEC programmal végzett minimális falvastagságra vonatkozó futtatásokat kalibrációs és mérőhatás vizsgálatok előzték meg. Ezek után közlöm és értékelem az eredményeket, melyben a gazdaságossági szempontokat is kiemelem.

A támaszerők eloszlásának vizsgálatát a legkülönbözőbb kialakításokra végeztem el parametrikusan, több paramétert vizsgálva. A rengeteg futtatás eredményeként egy olyan adathalmaz állt rendelkezésemre, mely segítségével grafikonokat, táblázatokat tudtam készíteni. Ezek a táblázatok, grafikonok alkalmasak arra, hogy merev támasz esetére megjósolják a függőleges és vízszintes támaszerők nagyságrendjét, nagyságát, illetve a támasz menti eloszlását adott kialakítású ovális boltozat esetén.

Az utolsó pontban ábrákkal és szöveges értékeléssel mutatom be az egyes tönkremeneteli, összeomlási mechanizmusok jellemzőit, kialakulását, illetve a repedések kialakulását is jellemzem pár mondatban.

4.1. A felület matematikai definiálása

Ovális alaprajzú boltozat céljára szolgáló felületet – a már ismertetett módon (lásd. **2.3.pont**) – az alaprajz megforgatásával, forgásfelületként definiálhatjuk legegyszerűbben. Az építési gyakorlatban a négy körív szakaszból illesztett ovális alaprajz a legelterjedtebb, így én is ezt a szerkesztési módot választottam. Az **59. ábra** szerint az ovális alakját egy nagyobb, R sugarú és egy kisebb, r sugarú körív, valamint a középpontjuk távolságát kifejező a méret határozza meg. Jelölje x azt a tengelyt, amelyen mindkét körív középpontja fekszik. A kisebbik körívvel törés nélkül csatlakozó, az ábrán ρ sugárral jelzett körív sugara:

$$\rho = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2(R-r)}, \quad (4.1)$$

a középpontja pedig:

$$y_R = \frac{(R-r)^2 - a^2}{2(R-r)}. \quad (4.2)$$

Jelöljük a köríveket rendre C_R , C_r és C_ρ betűkkel. A C_r és C_ρ körívek csatlakozási pontjának koordinátáit a következő képletek adják meg:

$$x_0 = \frac{a(a^2 - r^2 + R^2)}{a^2 + (R-r)^2}, \quad (4.3)$$

$$y_0 = \frac{2a^2r}{a^2 + (R-r)^2} - r. \quad (4.4)$$

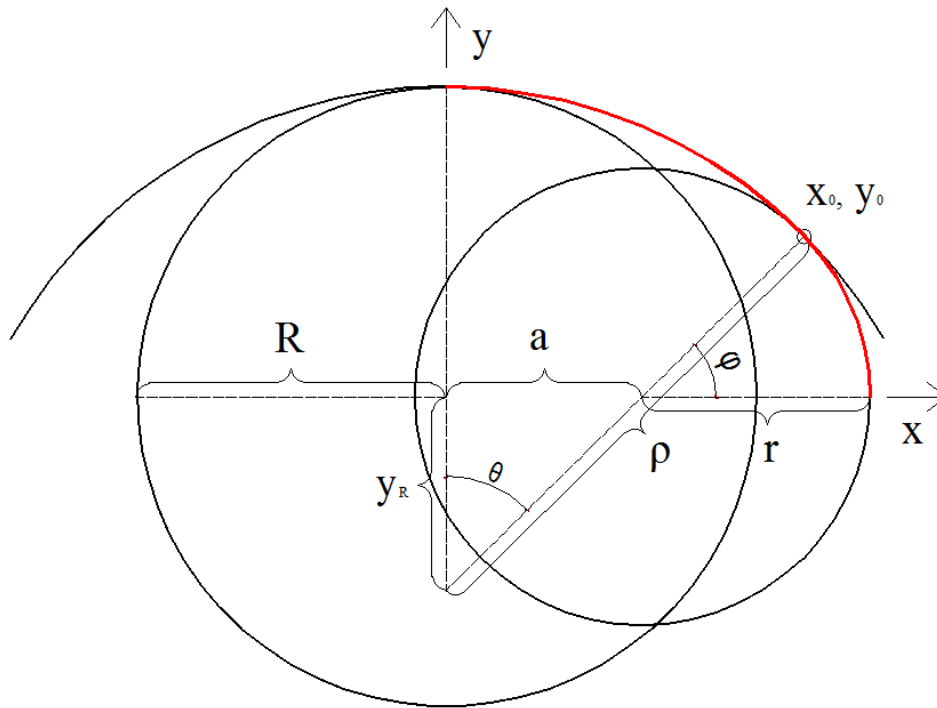
Most legyen a ρ sugarú körcikk szöge θ , az r sugarú körcikké pedig ϕ :

$$\theta = \arctan\left(\frac{a}{y_R}\right), \quad (4.5)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 - a}\right). \quad (4.6)$$

Az ovális által határolt területet könnyedén kiszámíthatjuk. Az ovális jobb felső negyedének területét az **59.ábra** szerint úgy kapjuk, hogy a C_ρ θ szögű körcikkéhez hozzáadjuk a C_r ϕ szögű körcikkét, majd a ρ sugarú körcikk x tengely alatti kis háromszögét kivonjuk belőle. A teljes terület pedig nyilván ennek négyszerese lesz:

$$A = 4\left(\frac{1}{2}\rho^2\theta + \frac{1}{2}r^2\phi - \frac{1}{2}ay_R\right) = 2(\rho^2\theta + r^2\phi - ay_R). \quad (4.7)$$



59.ábra Négy körívből illesztett ovális.

Az ovális definiálásához tehát három paraméterünk van: R , r és a . Mivel két különböző görbe illesztéseként kaptuk az oválist, a görbe függvényét az x , y koordinátarendszerben csak szakaszonként tudjuk definiálni. Lehetőség van $y = f(x)$, illetve $x = f(y)$, azaz x és y független változó szerint megadni a függvényt. Ha x a független változó, akkor a görbe függvénye a következő lesz:

$$y = f(x) = \begin{cases} \pm(\sqrt{\rho^2 - x^2} + y_R) & \text{ha } x \geq -x_0 \text{ és } x \leq x_0 \\ \pm(\sqrt{r^2 - (x - a)^2}) & \text{ha } x > x_0 \\ \pm(\sqrt{r^2 - (x + a)^2}) & \text{ha } x < -x_0 \end{cases}. \quad (4.8)$$

Ha y a független változó, akkor a függvény a következő:

$$x = f(y) = \begin{cases} \pm(\sqrt{r^2 + y^2} + a) & \text{ha } y \geq -y_0 \text{ és } y \leq y_0 \\ \pm(\sqrt{\rho^2 - (y - y_R)^2}) & \text{ha } y > y_0 \\ \pm(\sqrt{\rho^2 - (y - y_R)^2}) & \text{ha } y < -y_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Most, hogy ismerjük a görbék függvényeit, a forgásfelületet egyszerűen elkészíthetjük. A görbe függvényét tehát azon tengely mentén definiáljuk, amely körül megforgatjuk. Ekkor a másik, függő változó egy hengeres koordináta-rendszer r változójának feleltethető meg, mely éppen az adott függő változó, illetve az eredeti derékszögű koordináta-rendszer z koordinátáinak négyzetösszegéből vont gyökkel egyezik meg. Így például a (4.8)-as képlet első sora a következőképpen írható fel:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = \pm(\sqrt{\rho^2 - x^2} + y_R), \quad (4.10)$$

melyből z , azaz a felület függvénye átrendezéssel explicit módon kifejezhető. A felületek függvényei a hosszabbik tengely körül megforgatva :

$$z(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(\sqrt{\rho^2 - x^2} + y_R)^2 - y^2} & \text{ha } x \geq -x_0 \text{ és } x \leq x_0 \\ \sqrt{r^2 - (x - a)^2 - y^2} & \text{ha } x > x_0 \\ \sqrt{r^2 - (x + a)^2 - y^2} & \text{ha } x < -x_0 \end{cases}, \quad (4.11)$$

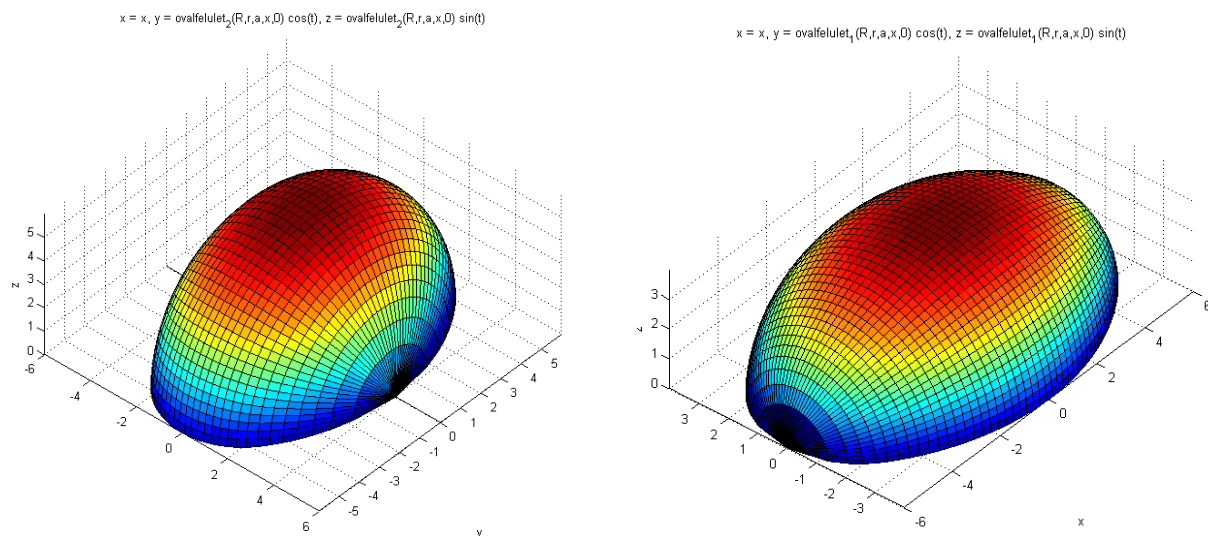
illetve a rövidebbik tengely körül megforgatva:

$$z(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(\sqrt{r^2 - x^2} + a)^2 - y^2} & \text{ha } x \geq -x_0 \text{ és } x \leq x_0 \\ \sqrt{\rho^2 - (x - y_R)^2 - y^2} & \text{ha } x > x_0 \\ \sqrt{\rho^2 - (x + y_R)^2 - y^2} & \text{ha } x < -x_0 \end{cases}. \quad (4.12)$$

A (4.12)-es képletben x és y szerepét felcseréltem, azaz mostantól x mindig a forgástengelyt fogja jelölni. A matematikai programokban – mint például a *Matlab*, melyet a dolgozat elkészítése közben én is használtam – lehetőség van parametrizálni a görbét, így egyszerűen definiálni a forgásfelületet a gyors megjelenítés érdekében, ekkor nem kell ismernünk a Descartes-féle koordináta-rendszerben a felület függvényét. Ha az alaprajzi görbe $f(x)$, akkor a három paraméteres koordináta a következő:

$$x; f(x) * \cos(t); f(x) * \sin(t). \quad (4.13)$$

A (4.8) vagy (4.9) képletekkel megadott ovális görbék pozitív függvényértékekre értelmezett függvényeit $f(x)$ -nek tekintve az x paraméter a (4.8)-as esetben $-(a + r)$ -től megy $(a + r)$ -ig, a (4.9)-es esetben pedig $-R$ -től R -ig. A t paraméter egy félkörnek megfelelően 0 -tól π -ig megy. Az egyiptomi ovális alaprajzot $R = 4, r = 3, a = 3$ értékekkel kapjuk, illetve akkor, ha ezen értékek arányait betartva hasonló értékhármassokat alkalmazunk. Az egyiptomi ovális kétféle megforgatásával keletkező felületeket mutatja a 60.ábra.

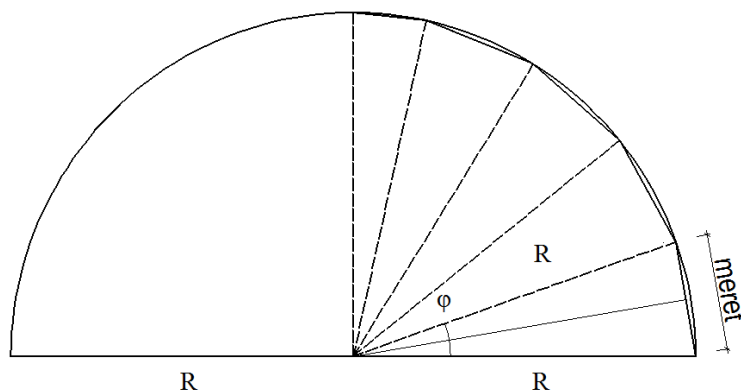


60.ábra Egyiptomi oválisból rövidebb, illetve nagyobbik tengely körüli megforgatással képzett felületek.

4.2. A diszkrét elemes modell geometriájának kialakítása

A geometriai modell megalkotásánál a fő probléma az volt, hogy hogyan lehet lefedni egy görbült felületet poliéder elemekkel. Mivel a gyakorlatban is rendszerint gyűrűként készítik el a falazást, a modellt is úgy kellett megalkotni, hogy az elemeket egy kezdő ponttól a gyűrű mentén sorban haladva építse fel az eljárás, majd zárás után a következő gyűrűvel folytassa és így tovább. Építés során a belső felület az, melyet a lehető legpontosabban ki lehet tűzni, így én is először a belső felület pontjainak meghatározására írtam egy algoritmust (ez a belső felület a lehető legpontosabban közelíti a matematikailag pontos forgásfelületet), a külső felület pontjait pedig a belső felület normálisainak ismeretében származtattam. Az általam alkalmazott diszkrét elemes program, a 3DEC programkörnyezete, belső programnyelve csak alapvető algoritmusok megírását teszi lehetővé – *if, for, while, stb.* –, ami megnehezítette az algoritmus elkészítését. Így azt az utat választottam, hogy egy magasabb szintű matematikai programmal – jelen esetben a *Matlabbal* – oldom meg a feladatot, melyben rendelkezésre állnak beépített, numerikus megoldást alkalmazó függvények, majd ezzel a programmal generáltatom le a 3DEC számára szükséges formátumú input file-t.

A két fenti forgatási módszerrel előállított forgásfelületek előnye, hogy a forgástengelyre merőleges metszetek körívek, és közülük a legnagyobb sugarú körívet egyenlő szakaszokból álló poligonnal megközelítve – ahol az egyenlő szakaszok hossza éppen az építőelem jellemző mérete – kiszámíthatjuk az egyes gyűrűk magassági értékeit (61.ábra).



61.ábra Legnagyobb sugarú kör keresztmetszet közelítése poligonnal.

Az ábra szerint a φ szöget a következőképpen kapjuk meg:

$$\varphi = 2 * \arcsin\left(\frac{meret/2}{R}\right). \quad (4.14)$$

A kupola készülhet felülvilágítóval, illetve anélkül. Felülvilágító esetén azt kell tudnunk, hogy a felülvilágító pereme – a „középső”, kör alakú keresztmetszetben vizsgálva – a vízszintestől mérve mely szögénél található. Ezt a szöget nevezzük $\varphi_{határ}$ -nak. Ha nincs felülvilágító, akkor ez az érték elméletileg $\pi/2$, azonban ilyen esetben is definiálunk felülvilágító lyukat, ám méretét igen kicsire vesszük, majd ezt a lyukat egy zárókövel töltjük ki. Ezért tehát minden esetben egy $\varphi_{határ}$ értéket kell definiálnunk, hogy tudjuk, hogy a gyűrűs falazás mely magasságig érvényes. A megadott $\varphi_{határ}$ valószínűsíthetően nem lesz a számított φ érték egész számú többszöröse, azaz a gyűrűk magasságát – a kövek „magassági” méretét – a következőképpen módosítjuk (ennek során z_{db} számú falazott, vízszintes gyűrűnk lesz z_i magassági értékekkel):

$$z_{db} = \text{round}(\varphi_{határ}/\varphi), \quad (4.15)$$

$$\varphi_{új} = \frac{\varphi_{határ}}{z_{db}}, \quad (4.16)$$

$$z_i = R * \sin(i * \varphi_{új}). \quad (4.17)$$

A gyűrűk magassági pontjainak ismeretében rendelkezésünkre áll ezen magasságokban vett vízszintes metszetek görbéinek függvénye is. Forgásfelület esetén legyen a forgástengely az x tengely, a rá merőleges alaprajzi tengely pedig az y tengely. Ekkor rögzített y vagy z esetén a két változó szerepe felcserélhető, hisz bármely forgástengellyel párhuzamos, $y = k = konst.$ függőleges síkmetszetben a görbe $f(x)$ függvénye formálisan megegyezik $z = k = konst.$ vízszintes síkmetszetben lévő görbe függvényével. Egy-egy z_i magasságban tehát a vízszintes metszetben keletkező ovális görbe függvényét úgy kapjuk, hogy a felület függvényébe y változó minden értékére a konstans z_i értéket helyettesítjük be:

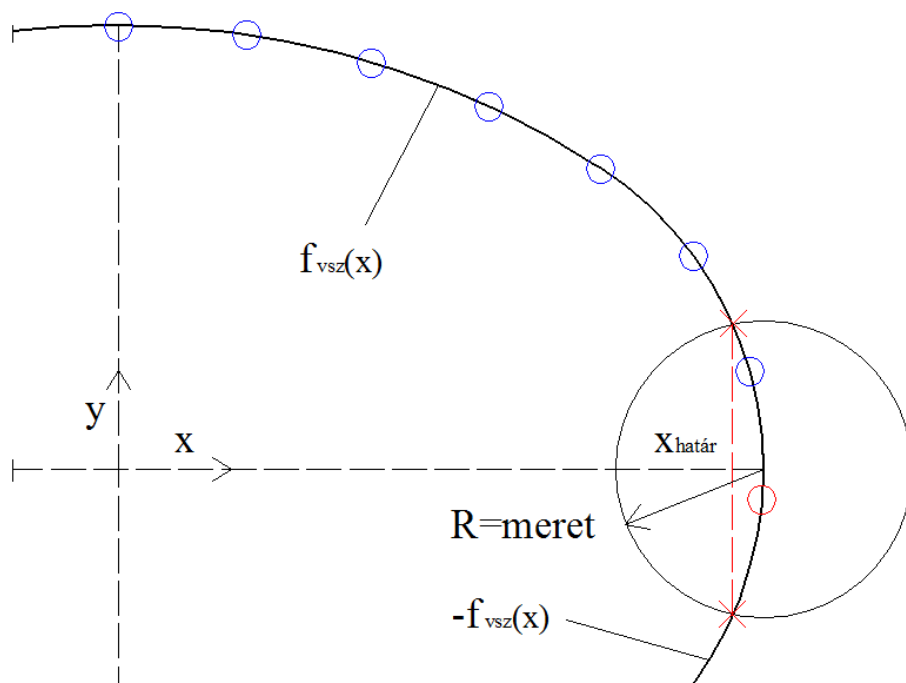
$$f_{vsz}(x) = y(x) = z(x, z_i). \quad (4.18)$$

Az egyes építőelemek koordinátáit úgy számítottam ki, hogy egy kiinduló pontból az előre definiált elemmérettel lépegettem végig az adott magasságban lévő $f_{vsz}(x)$ függvény görbéjén. A keresett pont előtti pontba egy elemméret sugarú kört rajzolunk, majd az így felvett körnek és a vízszintes metszet ovális görbéjének metszéspontja lesz az új pont helye. Így minden egyes új pont megkereséséhez egy nemlineáris egyenletet kell megoldani. A kör függvényébe az y koordinátát helyettesíteni kell a $f_{vsz}(x)$ függvénnyel, majd nullára rendezni, és így a következőt kapjuk:

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (f_{vsz}(x_{i+1}) - y_i)^2 - meret^2 = 0. \quad (4.19)$$

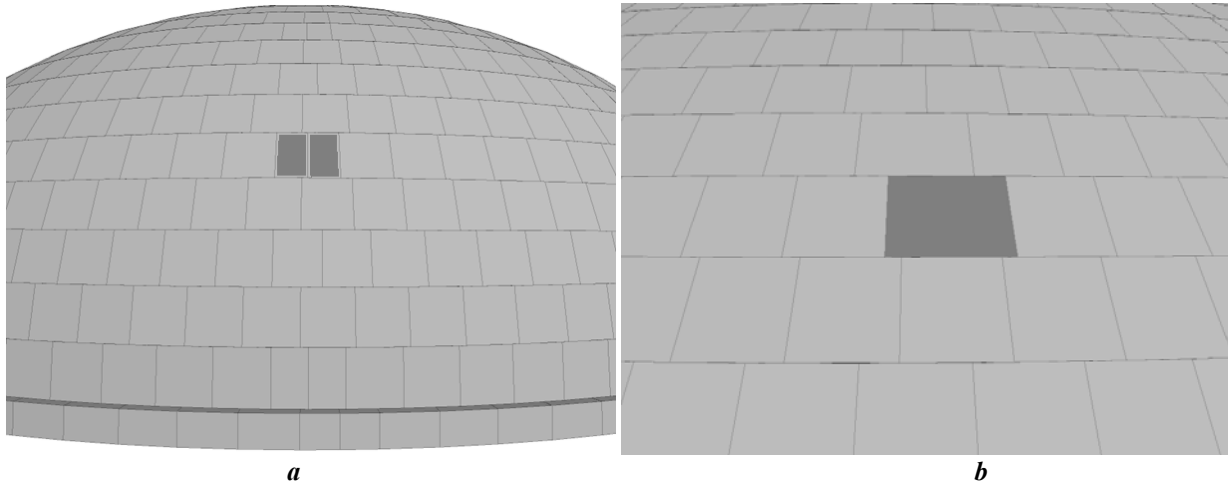
Az egyenletet megoldva megkapjuk az új pont x koordinátáját, az y koordinátát pedig egyszerű visszahelyettesítéssel nyerhetjük. Mivel másodfokú egyenlettel van dolgunk, két megoldás is lehetséges. Az algoritmus felismeri, hogy éppen pozitív vagy negatív y értékeknél járunk, s eszerint alkalmazza az $f_{vsz}(x)$ vagy $-f_{vsz}(x)$ függvényeket. A nullpontot nem csak kiindulási értékből kereshetjük meg, mint az a *Newton-módszernél* ismeretes, hanem egy tartományon is vizsgálódhatunk. Ilyen megoldást kínál a *Matlab fzero* függvénye is. A pontok keresése $x = 0$ -tól indul, óramutató járásával egyező irányban, azaz a tartományt, amin keressük a *null* értéket, az éppen az előző pont, illetve az adott magasságban lévő $f_{vsz}(x)$ függvény legnagyobb pozitív vagy negatív x értéke jelöli ki. Mivel a teljes vízszintes metszet görbéje $f_{vsz}(x)$ és $-f_{vsz}(x)$ függvényekből áll, gond lehet akkor, amikor az előző pontunk még pozitív y koordinátával rendelkezik, de a következő pontunk már a

negatív y értéket venne fel. Ezt úgy kezeltem, hogy minden egyes vízszintes metszet vizsgálatakor a program kiszámolja, hogy milyen mértékben kell megközelítenie az előző pontnak az $f_{vsz}(x)$ függvény legnagyobb (vagy legkisebb) pontját ahhoz, hogy az előbb felvetett eset fennálljon. A $f_{vsz}(x)$ függvény legnagyobb felvehető x értéke az $f_{vsz}(x) = 0$ egyenlet megoldásával adódik. Ebbe a pontba egy téglaméret sugarú kört állítva, a kör és a görbe metszéspontja adja ezt az x értékre felállítható határértéket. Ha a haladási irány szerint valamely pont ezen határértéket megelőzi, az algoritmus a (4.19)-ös képletbe az eddigi $f_{vsz}(x)$ függvény -1 -szeresét helyettesíti be. Ezt illusztrálja a 62.ábra, ahol a legutolsó, új (pirossal jelölt) pont már a negatív függvényértékek tartományába esik.



62.ábra A függvényváltás problémájának vázlata.

Szintén problémát jelenthet az éppen elkészülő vízszintes gyűrű zárásánál, hiszen itt nem biztos, hogy a lépések során az egész méretű téglá befér az utolsó helyre. Az algoritmus ezt úgy küszöböli ki, hogy amikor két téglányi távolságra megközelítjük a kezdő/záró pontot, akkor oda két töredék téglát helyez el, ahelyett, hogy egy egészet és egy kis darabot építene be (63a.ábra). A gyűrűk kezdőpontját a különböző magasságokban eltolva veszi fel az algoritmus, így az egymás felett lévő téglák függőleges fugái nem lesznek egy vonalban. A gond ebben az esetben az, hogy az egymás feletti gyűrűk nem egyforma hosszúak, azaz egy idő után a felső sor „beéri” az alsó gyűrűnek a kezdésnél beiktatott eltolási előnyét, és a függőleges fugák elkerülhetetlenül egymás fölé kerülnek. Ezt úgy védtem ki, hogy minden egyes új koordináta meghatározásánál a program megvizsgálja, hogy az előző, alsóbb gyűrűben lévő téglák csúcsainak – azaz a fugáknak – a koordinátái ezen új csomópont koordinátáitól milyen távolságra vannak. A távolságot az éppen vizsgált két pont – egyik az újonnan meghatározandó pont, a másik az alsóbb gyűrű éppen vizsgált pontja – helyvektorának különbségének az hossza adja. Erre a távolságra egy feltételt adhatunk meg, hogy milyen tűréshatárral dolgozzon a program. Ha nincsenek túl közel egymáshoz – azaz a távolság a tűréshatáron kívül van –, akkor a számított koordináta az új koordináta, ha viszont a határon belül vannak, akkor az elmetsző kör sugarát, amely az új koordinátát kijelöli, egy bizonyos mértékkel megnöveli, így az éppen elhelyezésre kerülő téglá a többinél kicsit nagyobb lesz, de a fugák egymásra kerülését elkerültük (63b.ábra).



63.ábra a. A gyűrű záró köveinek darabolása b. Az építés során az algoritmus egy nagyobb kövel „átugorja” a fugát.

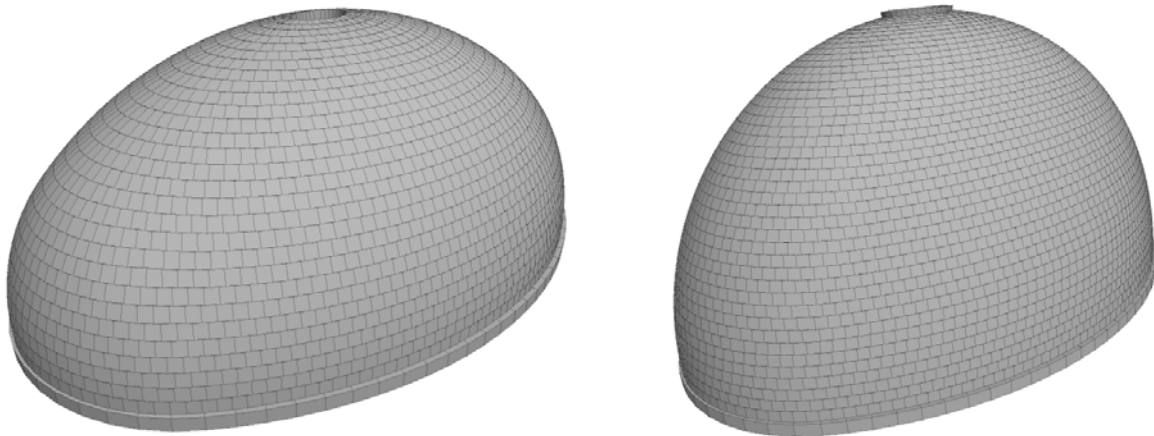
Az egyes téglák belső-felső csomópontjainak koordinátáit a következőképpen határoztam meg az előző koordinátákból. Az alsó csomóponton átmenő (4.18)-ban definiált $f_{vsz}(x)$ függvény csomópontban vett érintő vektora – mivel a z koordinátája éppen nulla – éppen azon függőleges sík normálisát adja meg, mely alaprajzi vetületben merőleges a görbére. Ezen sík, illetve a z_{i+1} magasságban értelmezett új $f_{vsz}(x)$ függvény metszéspontja adja a felső csomópontot.

A külső felületen lévő csomópontok koordinátáit – mint azt már fentebb említettem – egyszerűen meghatározhatjuk a hozzájuk tartozó belső csomópontok koordinátaiból való származtatással. A belső koordinátákhoz egyszerűen hozzá kell adjuk az adott belső csomópontban értelmezett felületi és egységnyi normálvektor falvastagságszorosát:

$$\mathbf{X}_{\text{külső}} = \mathbf{X}_{\text{belső}} + \mathbf{n} * t, \quad (4.20)$$

ahol $\mathbf{X}$ vektorok a külső és belső x , y és z koordinátákat tartalmazzák, t a falvastagság, $\mathbf{n}$ pedig az adott pontban értelmezett egységnyi normálvektor. A normálvektort egyszerű geometriai összefüggésekkel lehet meghatározni, hisz a felület körívek megforgatásából jön létre, ezért nem kell deriváltakat alkalmazni.

A *Matlabban* írt algoritmusban megadhatjuk az alaprajzi ovális három paraméterét – R , r és a –, illetve kiválaszthatjuk, hogy mely tengely körül történjen a megforgatás (64.ábra), így a legkülönbözőbb felületeket hozhatjuk létre, sokféle geometria vizsgálhatóvá válik. A kiszámított koordinátákat egy táblázatba menti el a program, amit a számítás végén egy *excel* munkalapra exportál. Az előnye ennek a megoldásnak az, hogy akár karakterláncot is megadhatunk cellaértéknek, tehát a majdani 3DEC-es futtatásokhoz teljes szöveges input file is generálható.



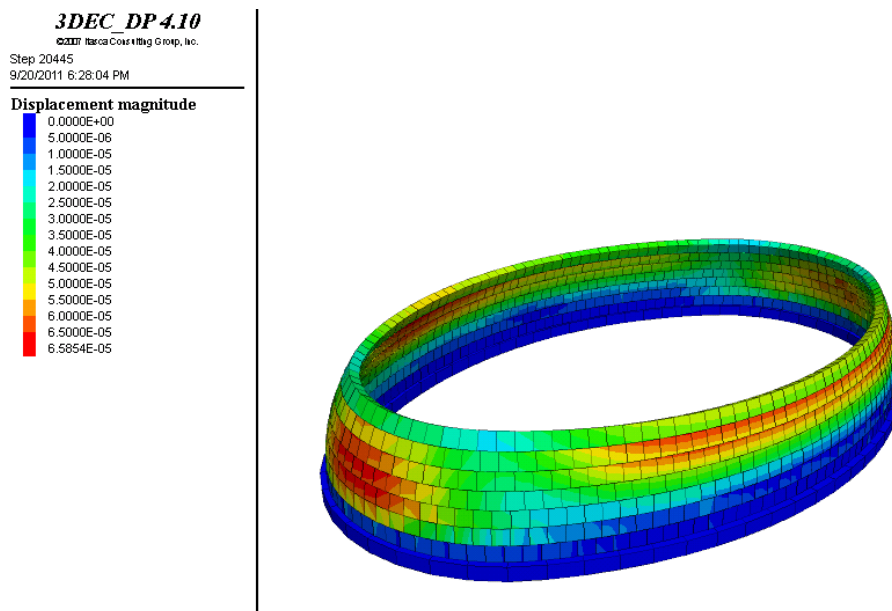
64.ábra A két féle megforgatással előálló ovális kupola geometriai modellje ($R = 4, r = 3, a = 3$).

4.3. Építési módok szimulálása

A 2.3. pontban már volt szó arról, hogy az ovális kupola épülhet állvány nélkül, azaz vízszintes gyűrűnkénti falazással, illetve állványozással is. A *Matlabban* megírt algoritmus ezt a két lehetőséget is figyelembe tudja venni: külön opcióként meg lehet adni, hogy mely építési módot választjuk, s a program eszerint generálja a 3DEC számára az input file-t.

A 3DEC explicit időintegrálást alkalmaz a mozgásegyenletek megoldására. Ez azt jelenti, hogy bizonyos lépésszám szükséges ahhoz, hogy akár csak az önsúlyra is megtalálja az egyensúlyi állapotot. A program folyamatosan közli a teljes rendszerben fellépő kiegyensúlyozatlan erők legnagyobb abszolút értékét. Ez lehetőséget ad arra, hogy definiáljunk egy hibahatárt, mely alá ha a kiegyensúlyozatlan erők abszolút értéke lecsökken, a rendszer egyensúlyban lévőnek tekinthető. A 3DEC programban ez a kiegyensúlyozási folyamat automatikusan kivitelezhető a „*solve*” paranccsal.

Állványzat nélküli építés esetén a *Matlab* algoritmus minden egyes gyűrű zárása után beiktat egy „*solve*” parancsot, mellyel önsúlyra kiegyensúlyozza az aktuálisan megépült gyűrűsort. Egy ilyen modellt mutat építés közben a 65. ábra, ahol az elmozdulások szumma értékét láthatjuk.



65. ábra Állványzat nélküli építés szimulációja.

Állványzattal épülő esetben külön megadhatjuk, hogy hány részből álljon a zsaluzat, azaz hány ütemben bontsa azt le a program. Ilyenkor a teljes geometriát felépítjük, az úgynevezett „*fix*” paranccsal minden blokkot rögzítünk a kiindulási állapotában, majd ahol éppen kivételre kerül a zsaluzat, ott a „*free*” paranccsal feloldjuk a megkötést, s a „*solve*” paranccsal kiegyensúlyozzuk a megfelelő blokkokat. Ez felülről lefelé történik, míg mindegyik blokk feloldásra nem kerül. A 66. ábrán a 65. ábrán már bemutatott kupola állványzattal épült változatának szimulációja látható. A kék szín a még mozdulatlan blokkokat jelöli, a többi részen az állványzat kivétele miatt a kiegyensúlyozódás során mozgások következtek be.

A fentiek szerint egy teljesen általános ovális alaprajzzal rendelkező ovális kupola teljes építését modellezhetjük le, mindehhez csak a kiinduló adatokat kell megadnunk.

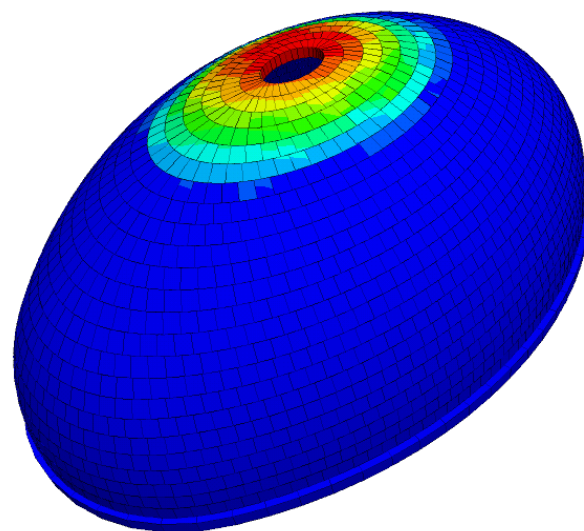
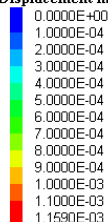
3DEC DP 4.10

©2007 Itasca Consulting Group, Inc.

Step 7301

9/20/2011 6:44:39 PM

Displacement magnitude



66.ábra Állványzattal való építés szimulációja.

4.4. A boltozatmodell anyagának jellemzői

Fontos megemlíteni, hogy a *Matlab* program akár merev, akár deformálható elemekre is el tudja készíteni a 3DEC input file-t. Merev elemek esetén a 3DEC számára elég a blokkok sűrűségét megadni, deformálható elemek esetén pedig a nyírási (G) és térfogatváltozási modulus (K) is szükséges adat. Mivel a 3DEC szoftvert elsősorban geotechnikai problémák megoldására fejlesztették ki, az anyagmodell megadásakor a szokásos rugalmassági modulus (E) és a Poisson-tényező (ν) helyett a nyírási- és térfogatváltozási modulusot kell megadni. A két adatpár kifejezhető egymásból a következő módon:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (4.21)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.22)$$

Diszkrét elemes modell esetén az építőelemek megszokott anyagjellemzőinek definiálása mellett meg kell adnunk a kapcsolati modell jellemzőit is (részletek a **3.3.2.2.pontban**). Falazott szerkezetek esetén egyszerű Coulomb-féle súrlódásos modellt alkalmazhatunk. Ekkor bemenő adat a normális- és érintő irányú merevségek, illetve a súrlódási szög nagysága. Ha a falazott szerkezetek klasszikus elmélete szerint modellezünk, akkor merev elemeket, és elviekben végtelen nagy kapcsolati normális- és érintő irányú merevségeket kell alkalmaznunk, a súrlódási szöget pedig 90° közelében kell felvenni. Ekkor ugyanis semmiféle deformáció – sem az építőelem, sem a kapcsolat szintjén – nem következik be, a megcsúszás a végtelen nagy súrlódási tényező miatt nem alakulhat ki. A későbbiekben valós, mért adatokkal kalibrált anyagi és kapcsolati jellemzőket is felhasználtam a futtatásaim során. Az adatokat Földi Anita (*BME Hidak és Szerkezetek Tanszék*) laborkísérletei és ezekhez igazított 3DEC modellje alapján vettem fel. A két fajta esetben alkalmazott anyagi és kapcsolati jellemzőket a **2.táblázat** tartalmazza. A program nem alkalmaz mértékegységeket, ezért ügyelni kell arra, hogy egységes rendszerben adjuk meg az anyagjellemzőket, illetve az eredmények leolvasásánál is tudni kell, hogy az értékek milyen alap mértékegységekből származnak. A számítások során a hosszúság alapegységének a métert, a tömeg alapegységének a kilogrammot, az idő alapegységének pedig a másodpercet választottam. Ezekből az erő alapegységére Newton dimenzió adódik, így bármilyen más, származtatott mértékegységet ilyen alapegységekkel kell megadni. Az eredmények esetében az elmozdulások így méterben, a feszültségek N/m^2 -ben értendők. A **2.táblázatban** feltüntettem az alkalmazott mértékegységeket is.

	Anyagjellemzők					Kapcsolati jellemzők		
	Sűrűség	E	ν	G	K	k_n	k_s	f
	kg/m ³	10 ⁹ Pa	-	10 ⁹ Pa	10 ⁹ Pa	N/m ³	N/m ³	°
Merev elemek	2500	x	x	x	x	10 ¹¹	10 ¹¹	90
Deformálható elemek	2500	25	0.15	10.87	11.90	10 ¹¹	11 ¹⁰	35

2. táblázat

4.5. A Heyman-féle minimális falvastagságok meghatározása

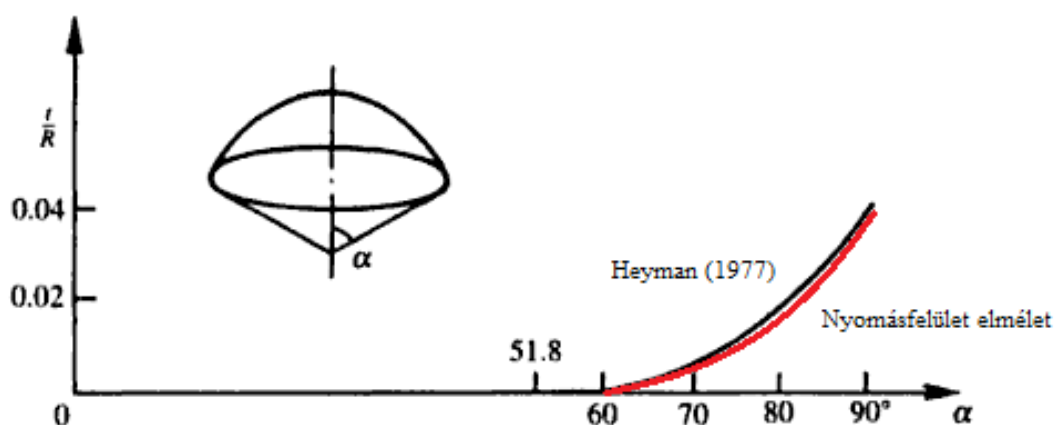
Már említettem a **2.4. pontban**, hogy térbeli boltozatokra – csakúgy, mint boltívre – levezethető egy úgynevezett minimális falvastagság, melyre a boltozat biztonsági mérőszáma éppen 1, azaz éppen a kinematikailag határozatlanná válás, stabilitásvesztés határán van a szerkezet. Fontos tudni, hogy ezeket az elméleti kritikus értékeket pontos, görbült héjfelület feltételezésével, illetve a klasszikus elmélet feltevéseivel – lásd **2.4. pontot**, illetve (44)-t – származtatták. A valóságban azonban a helyzet a következő :

- a blokkok, illetve a szerkezet deformálódik, szemben az elmélet megmerevített szerkezeti vizsgálatával; a diszkrét elemes modellben ezeket a hatásokat figyelembe tudjuk venni;
- a kövek, téglák kisebb-nagyobb megcsúszásai kombinálódhatnak a csuklós mechanizmus kialakulásával, a tönkremeneteli mód összetetté válhat;
- a faragott kövekkel, téglákkal csak megközelíteni tudjuk az elméletileg pontos görbült héjalakot.

Láthatjuk, hogy számos olyan paramétert vizsgálhatunk, ami felveti a kérdést, hogy a klasszikus elmélet feltételezései mennyire érvényesek a gyakorlatban. Ebben a pontban ezt szeretném vizsgálni számítógépes szimulációk segítségével.

4.5.1. Gömbkupola minimális falvastagságának meghatározása kinematikai módszerrel

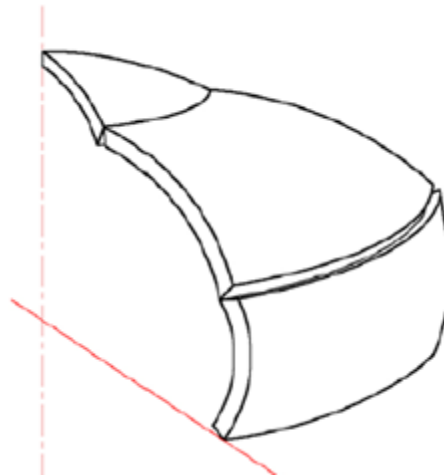
A **2.4. pontban** már szó esett a képlékenységtan statikai, illetve kinematikai módszeréről. A témában fellelhető szakirodalom szerint boltívek, boltozatok minimális falvastagságának vizsgálatát - egy-két esettől eltekintve (lásd (91)-t) - statikai módszer szerint végezték. A 18. században *Poleni* volt az, aki először hivatalos megbízásból statikai analízist végzett a római Szt. Péter bazilikán. A szeleteléses technikával egy szelet vizsgálatát végezte el. Blokkokra osztotta az egész szerkezetet, majd az egyes blokkok súlyát reprezentáló súlyokat akasztott egy kötéltre a megfelelő blokkok súlypontjának helyén. Az így kialakuló görbe vízszintes tengelyre vett tükörképét a kiválasztott szelet határoló vonalain belül el tudta helyezni, amiből azt a következtetést vonhatta le, hogy a szelet stabilnak mondható, s így az egész szerkezet megfelel. *Heyman* hasonló elvek szerint, szeleteléses technikával vizsgálta gömbkupolák esetére a minimális t/R arányokat (t : falvastagság, amelyet állandónak tekintett az egész boltozatra; R : a gömbkupola sugara), azaz feltételezte, hogy a meridián irányú kialakuló repedésekkel a boltozat úgyis különálló szeletek együtteseként viselkedik. Eredményeit a **67. ábra** fekete színű görbéje mutatja az α meridián szög függvényében. Teljes gömbkupola esetén (azaz $\alpha = 90^\circ$) a minimális t/R érték 0.042 .



67.ábra Minimális t/R arány gömbkupola esetében az α kezdő meridiánszög függvényében

Ez az eredmény konzervatív megoldás, hisz a gyűrűirányú erők stabilizáló hatását figyelmen kívül hagyja ez a két dimenziós analízis. Ha pontosabb megoldást szeretnénk, akkor a statikai módszert kiterjeszthetjük három dimenzióra is. Ekkor a membránelméletet kell alkalmazzuk, hisz a nyomásfelület éppen egy membránfelület, erők csak a síkjában működnek. Ekkor az előzőekhez hasonlóan a feladat: meg kell találni azt a legkisebb vastagságot, t/R arányt, melyre még található olyan membránfelület, mely a szerkezeten belül halad. A (92)-ben található doktori dolgozatban a szerző, Wanda W. Lau a statikai módszert ötvözte a membránelmélettel, így létrehozva egy módosított algoritmust, mely a gyűrűirányú erőket, azaz a térbeli teherhordást is figyelembe veszi. Megoldása a **67.ábrán** piros színnel látható, mely végig a konzervatívabb, Heyman-féle megoldás alatt fut. Ezen megoldás szerint teljes gömbkupolára a minimális t/R arány 0.041 . Látható, hogy gömbkupola esetén minimális az eltérés, de más geometriai kialakításnál, ahol a tetőpont körüli gyűrűirányú nyomóerők stabilizáló hatása nagy szerepet játszhat a szerkezet stabilizálásában – például csúcsíves kupolák esetén –, ott az eltérés már jóval nagyobb is lehet a szeleteléses technika és a három dimenziós megoldás között.

Az, hogy keressük azt a nyomásvonalat, illetve nyomásfelületet, mely még éppen a szerkezeten belül halad, más oldalról tekintve azt jelenti, hogy keressük azt a helyzetet, mikor az erők éppen kilépnek a szerkezet síkján kívülre. Csak nyomásnak ellenálló szerkezet esetén elvileg szigorúbb megkötés az, ha nem akarjuk, hogy bárhol is húzás keletkezzen – repedések alakuljanak ki –, mert ekkor a nyomásvonalnak, nyomásfelületnek a keresztmetszet belső harmadában kell futnia. Más esetben is teherbíró marad a szerkezet, csak éppen a húzás helyén felnyílik, illetve ezen keresztmetszetekben átrendeződnek a feszültségek. Ha azonban a szerkezeten kívülre kerül a nyomásvonal, akkor ott csuklóként elfordul egymáson a két szomszédos építőelem. Ha megfelelő számú helyen történik ez meg, akkor a szerkezet kinematikailag határozatlanná válik, kialakul a csuklós törési mechanizmus. Ez a mechanizmus tengelyesen szimmetrikusan ható függőleges teherrel terhelt gömbkupola esetén körszimmetrikus, a **68.ábrán** látható módon következik be. Három csukló sor alakul ki, egy a kupola tövében, kettő pedig a kupola középső magasságában. Az alsó elemek kifelé borulnak, a legfelső elem csak függőlegesen lefelé halad. A statikai módszer egy *alsó közelítést* ad a törőteherre, ezért mondtuk azt, hogy ha találunk olyan nyomásfelületet, mely során az egyensúlyi és törési feltételek fennállnak, akkor a kupola biztonságos, ha nem, akkor a mechanizmus kialakul, az adott teherintenzitás pedig éppen a *törő teherintenzitás*. Mivel önsúly esetén egy intenzitás van, innen következik, hogy ha a vizsgálatok szerint kialakul a mechanizmus, az ellen semmit sem tehetünk, tehát létezik olyan t/R értékkel jellemzett kupola, mely saját súlya alatt összeomlik.



68.ábra Gömbkupola összeomlási mechanizmusának vázlata

A szakirodalomban nem találtam térbeli boltozatok minimális t/R arányát *kinematikai* módszerrel vizsgáló munkát, talán a statikai módszer kiforrottsága miatt. Ezen dolgozatban azonban szerettem volna erre is egy megoldást adni. A kinematikai módszer a statikaival ellentétben éppen a mechanizmus kialakulásának lehetséges változatait vizsgálja (lásd 2.4.pont). Ha ez egyértelmű – például egyenletesen vasalt, két szélén feltámasztott, négyszög alakú vasbeton lemez egyenletesen megoszló teherrel terhelve –, akkor a törőintenzitás az adott teherelrendezésre azonnal meghatározható, ha nem egyértelmű a mechanizmus kialakulása, akkor az azokat jellemző csuklók, csuklósorok helye paraméterként kezelendő. A 68.ábrán látható, hogy esetünkben két paraméterünk van, a két közbenső csuklósor, mert a harmadikról tudjuk, hogy biztosan a talpnál fog kialakulni. A megoldáshoz a virtuális erők tételét használhatjuk, hisz a törés pillanatában az erőrendszerünk még statikailag lehetséges erőrendszer. A külső és belső virtuális munka a következőképpen írható fel:

$$\delta W_k = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{e} + \int_{(S)} \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} dS + \int_{(V)} \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV, \quad (4.23)$$

$$\delta W_b = - \int_{(V)} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (4.24)$$

ahol $\mathbf{f}^T$ a koncentrált jellegű külső erők vektora, $\delta \mathbf{e}$ a velük kompatibilis külső elmozdulásértékek vektora, $\mathbf{q}^T$ és $\mathbf{g}^T$ a test felületén és a térfogata mentén megoszló külső erők vektora, $\delta \mathbf{u}$ a velük kompatibilis elmozdulásfüggvények vektora, $\boldsymbol{\sigma}^T$ a feszültségek, $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ pedig a velük kompatibilis alakváltozás-függvények vektora. Egy statikailag lehetséges erőrendszer bármely virtuális erőrendszeren végzett munkája zérus, tehát a virtuális munkák tétele szerint:

$$\delta W = \delta W_k + \delta W_b = 0. \quad (4.25)$$

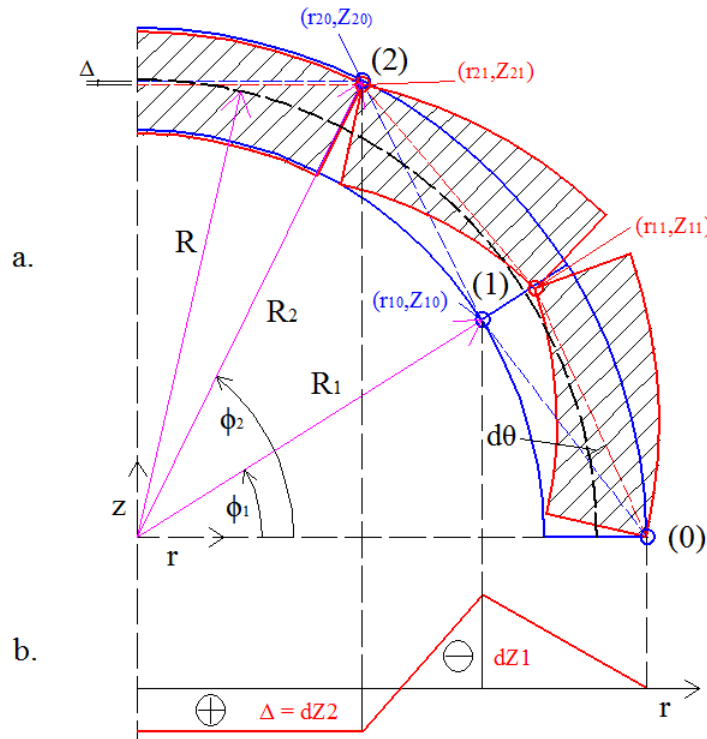
A vizsgálatokat a klasszikus elmélet feltételezései szerint merev testekkel végezzük, illetve a kapcsolatoknál keletkező disszipációt elhanyagoljuk. A (4.23)-as képletben csak a harmadik – térfogati erőket, azaz az önsúlyt leíró – tag marad csak, a (4.24)-es képlet merev testek esetén értelmét veszti, azaz nulla. A végleges formula :

$$\delta W = \delta W_k = \int_{(V)} \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV = 0. \quad (4.26)$$

A képletet úgy értelmezhetjük, hogy ha találunk olyan mechanizmust, melyet végtelen kicsiny, virtuális elmozdulásként működtetünk a szerkezetre, s amelyen a teljes önsúlyi erőrendszer virtuális munkája zérus vagy pozitív, akkor az a mechanizmus valóban ki is tud alakulni. Ha egy adott szerkezeten nem találunk ilyen konfigurációt, tehát ha bármely kis kimozdításon az önsúly által

végzett munka mindig negatív – azaz megfelelően vastag a boltozat –, akkor az *stabil*, önsúlyát biztonsággal viseli.

Első lépésként a *virtuális elmozdulásrendszert* határoztam meg. Az alsó, kifelé billenő elemeknél, azaz a talpnál egy végtelenül kicsiny $\delta\theta$ elfordulást iktattam be a **69a.ábrán** látható módon. Itt láthatóak azok a jelölések is, melyeket az összefüggések felírásánál használni fogok. R_1 és R_2 a gömbkupola belső és külső sugarai, ϕ_1 és ϕ_2 az alsó és felső keresett csukló sor gömbi koordinátákkal vett magassági szögei, az (r, Z) koordinátapárok pedig az indexnek megfelelően az első és második csukló sor hengerkoordinátáit jelöli, ahol a második index kiindulási állapotban 0, elmozdult állapotban 1.



69.ábra

Mivel a teljes feladat körszimmetrikus, az alapvető összefüggéseket egyetlen gömbcikkre írtam fel. A **69b. ábrán** a csukló sorok összekötéséből létrejövő rúdlancolat elvi függőleges elmozdulási ábrája látható. Az összefüggések nem linearizálhatóak $\delta\theta$ szempontjából. A kiindulási állapotban a (r, Z) koordinátapárok a következőképpen határozhatóak meg:

$$r_{10} = R_1 * \cos(\phi_1) , \quad (4.27)$$

$$Z_{10} = R_1 * \sin(\phi_1) , \quad (4.28)$$

$$r_{20} = R_2 * \cos(\phi_2) , \quad (4.29)$$

$$Z_{20} = R_2 * \sin(\phi_2) , \quad (4.30)$$

Bevezetünk néhány segédmenyiséget. A 0 és 1 pontok közötti távolság, azaz az első „rúdelem” hossza, illetve az általuk kijelölt vonal vízszintessel bezárt szöge :

$$L_1 = \sqrt{(R_2 - r_{10})^2 + Z_{10}^2} , \quad (4.31)$$

$$\theta_1 = \text{atan} \left(\frac{Z_{10}}{R_2 - r_{10}} \right) . \quad (4.32)$$

Az 1 és 2 pontok közötti távolság, azaz a második „rúdelem” hossza :

$$L_2 = \sqrt{(r_{10} - r_{20})^2 + (Z_{10} - Z_{20})^2} . \quad (4.33)$$

Az elmozdult állapot koordinátái :

$$r_{11} = R_2 - L_1 * \cos(\theta_1 + \delta\theta) , \quad (4.34)$$

$$Z_{11} = L_1 * \sin(\theta_1 + \delta\theta) , \quad (4.35)$$

$$r_{21} = r_{20} , \quad (4.36)$$

$$Z_{21} = \sqrt{L_2^2 - (r_{11} - r_{21})^2} + Z_{11} . \quad (4.37)$$

Az elmozdulási ábra ordinátái:

$$dZ_1 = Z_{11} - Z_{10} , \quad (4.38)$$

$$dZ_2 = Z_{21} - Z_{20} . \quad (4.39)$$

A virtuális munka felírásához szükség van az egyes merev, elmozduló elemek súlyából származó eredő erők, valamint azok hatásvonalára, azaz az elemek súlypontjára. Egy héjdarab térfogata a következőképpen írható fel gömbkoordinátákkal :

$$V = \frac{1}{3} (\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2)) (\vartheta_1 - \vartheta_2) (R_1^3 - R_2^3) , \quad (4.40)$$

ahol ϕ_1 és ϕ_2 a függőleges síkban, ϑ_1 és ϑ_2 a vízszintes síkban értelmezett gömbi koordinátarendszerben használatos szögek, melyek a héjelemet határolják. A Descartes-koordinátarendszer tengelyeire értelmezett statikai nyomatékokat gömbi koordinátákkal felírva, majd leosztva az elem térfogatával megkapjuk a súlypont koordinátáit:

$$X_s = -\frac{1}{8V} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)) (R_1^4 - R_2^4) \left(\phi_1 - \phi_2 - \frac{\sin(2\phi_1)}{2} + \frac{\sin(2\phi_2)}{2} \right) , \quad (4.41)$$

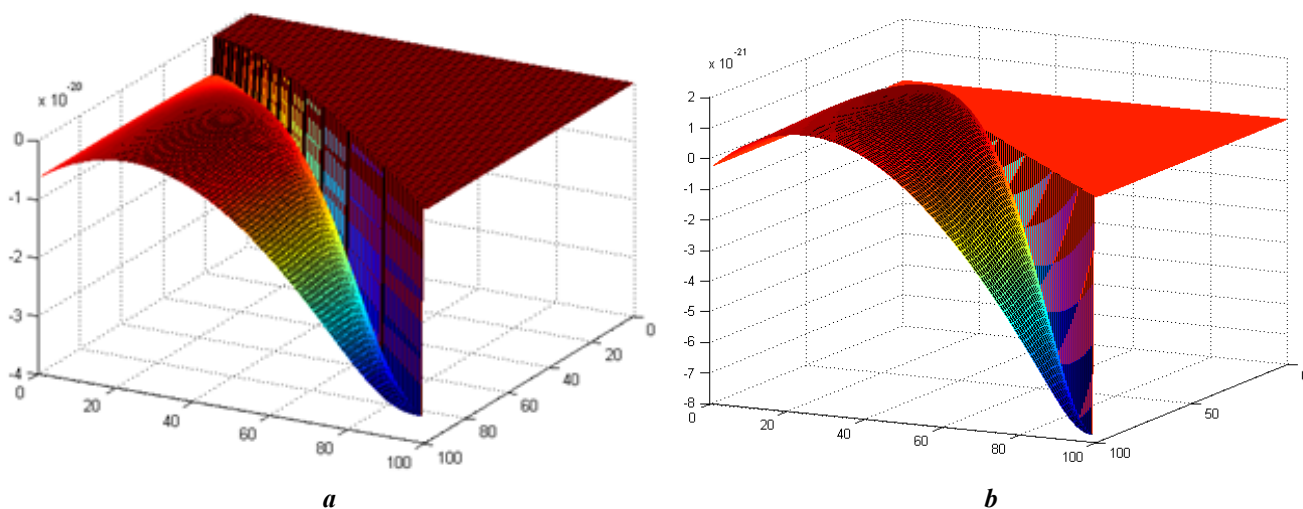
$$Y_s = -\frac{1}{16V} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) (R_1^4 - R_2^4) (2\phi_2 - 2\phi_1 + \sin(2\phi_1) - \sin(2\phi_2)) , \quad (4.42)$$

$$Z_s = \frac{1}{8V} (\cos(\phi_1)^2 - \cos(\phi_2)^2) (R_1^4 - R_2^4) (\theta_1 - \theta_2) . \quad (4.43)$$

Ha ismerjük az elem súlypontjának X_s és Y_s koordinátáit, akkor abból $r_s = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2}$ segítségével az elmozdulási ábráról leolvasható az elem súlypontjának függőleges elmozdulása, amit az elem súlyával összeszorozva megkapjuk az önsúly által az elemen végzett külső virtuális munka értékét. Így tehát bárhol is legyen a két csukló sorunk – ϕ_1 és ϕ_2 paraméterek – a teljes virtuális munka kiszámítható az elemeken végzett munkák összegeként.

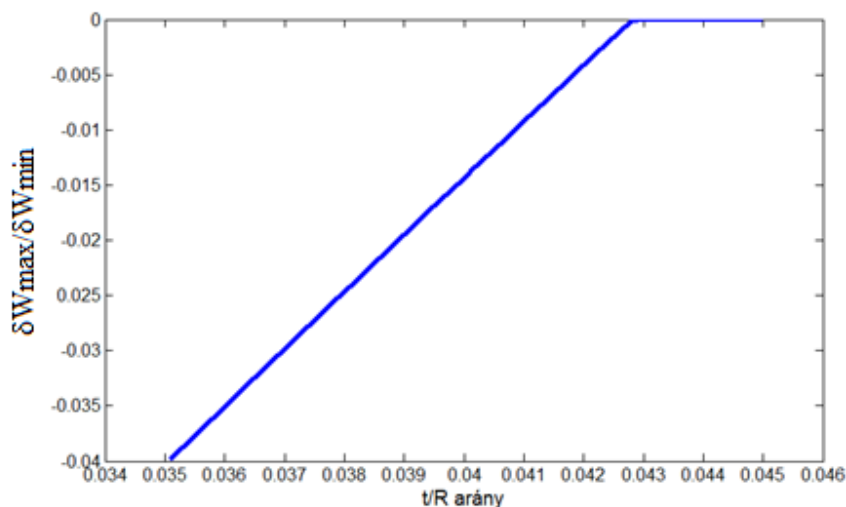
A két csukló sor helyének vizsgálatára, azaz a két paraméter szerinti vizsgálatra két egymásba ágyazott ciklust írtam, mely során a program ϕ_1 és ϕ_2 összes lehetséges értékpárját sorra veszi. Ha $\phi_1 > \phi_2$, azaz a valóságban felső csukló sor az alsó alatt van, akkor a program 0 értéket rendel a munkához, ha nem, akkor kiszámolja a tényleges virtuális munkát. Így egy olyan mátrixot kapunk, melynek elemei az i -edik sorban és j -edik oszlopban lévő $\phi_{1,i}$ és $\phi_{2,j}$ értékpárokhoz tartozó virtuális

munkákat tartalmazza. Ha ezt a mátrixot felületként ábrázoljuk, akkor van a feladatnak megoldása, ha a felület pozitív és negatív értékeket is felvesz, hisz ekkor biztosan lesz olyan $\phi_{1,i}$ és $\phi_{2,j}$ pár, melyre a $\delta W = 0$ lesz. Ha a felület csak a pozitív vagy csak a negatív síkrészben van, akkor a virtuális munka semmilyen $\phi_{1,i}$ és $\phi_{2,j}$ értékpárra nem lehet nulla, azaz az összeomlás nem következhet be. A **70.ábrán** látható felületek maguk a virtuális munkát tartalmazó mátrixok kirajzolt képei, az x és y tengelyen a ϕ_1 és ϕ_2 paraméterek szerepelnek, illetve azok $100/\pi/2$ -vel szorzott értékei. Első körben megvizsgáltam, hogy jó nagy falvastagság esetén – feltételezve, hogy ekkor nem következik be az összeomlás - milyen alakú, elhelyezkedésű a felület. A **70a.ábrán** látható, hogy a virtuális munkák végig negatív értéket vesznek fel. Az algoritmust úgy írtam meg, hogy egy kicsi falvastagságtól indulva az algoritmus minden falvastagság esetére kiszámolja a lehetséges $\phi_{1,i}$ és $\phi_{2,j}$ szögekhez tartozó virtuális munkák értékeit, majd a felület maximum és minimum értékének arányát eltárolja.



70.ábra Számított virtuális munkából képzett felület a két csukló sor helyzetének függvényében

Amikor a (t) falvastagság túl kicsi, azaz bekövetkezik az összeomlás, a virtuális munka felvehet nulla értéket, ezért a felület maximumának és minimumának aránya egy negatív szám. Amint a felület csak negatív értéket vesz fel, a maximum érték nulla lesz, így a tört értéke is nullává válik. Így ha t/R függvényében ábrázoljuk ezt az arányt, a még éppen össze nem omló kupolához tartozó t/R érték ott lesz, ahol a **71.ábrán** látható grafikon először felveszi a nulla értéket.



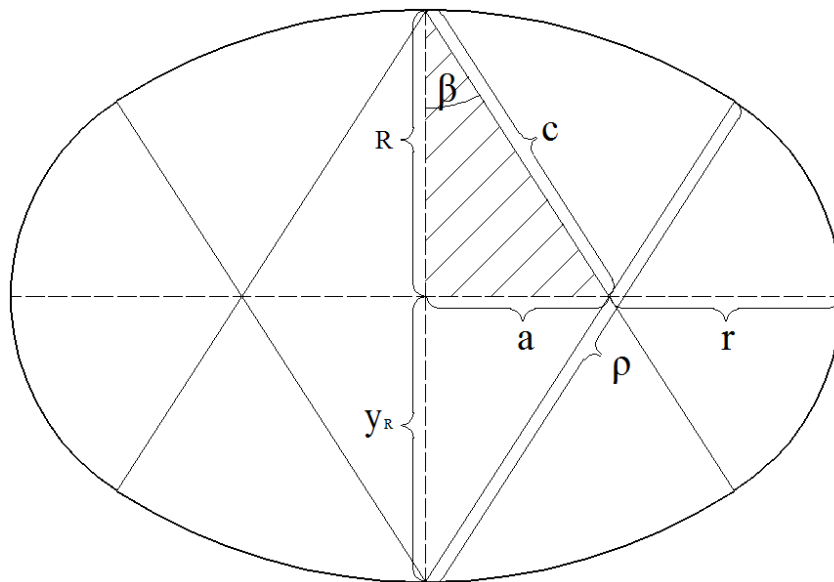
71.ábra

A **71.ábra** szerint a minimálisan szükséges t/R érték 0,0427. A megoldásban elhanyagoltam azt a tényt, hogy a súlypont nem pontosan a csuklósorokat összekötő merev „rúdláncon” fekszik, az elmozdulási ábra pedig ezen „rúdlánchoz tartozik. A hibát növelheti még az a *numerikus* hiba is, mely abból ered, hogy a $\delta\theta$ beiktatott virtuális elfordulást elviekben végtelen kicsire kellene vennünk, melyet csak megközelíteni tudunk, hisz túl kis $\delta\theta$ érték esetén számolnunk kell a kerekítési hibákkal. Az elhanyagolások és közelítések ellenére a megoldás igen jól megközelíti a szakirodalomban található, statikai módszerrel levezetett elméleti értéket.

Óvális kupolák esetében is felírhatunk hasonló összefüggéseket, megoldhatjuk a problémát statikai vagy kinematikai módszerrel is, ám a megoldás komplexitása nagyságrendekkel nagyobb feladatot ad számunkra. Az ovális kupolák esetén nincs körszimmetria, egy csuklósor helyzete már nem csak egy paraméterrel jellemezhető, a csuklósorok térbeli görbét alkotnak, az elemek súlya, súlypontja csak közelítő integrálokkal határozható meg, az elmozdulási ábra egy nem körszimmetrikus felületet alkot. Ezek azok a nehézségek, amik miatt az ovális kupolák esetére inkább egy jól kalibrált diszkrét elemes, numerikus modellt használtam.

4.5.2. Vizsgált geometriai modellek

A vizsgálataim során olyan geometriai kialakítást választottam, melyet már az egyiptomi ovális kapcsán említettem, hisz ez a leggyakrabban alkalmazott ovális kupola forma. Ott láthattuk, hogy az alaprajzot úgy alakították ki, hogy mindkét R sugarú körív középpontja rajta van magán az oválison, így két egymásnak döntött R és a befogókkal rendelkező derékszögű háromszög határozza meg az alaprajz alakját. Az **59.ábra** jelölései szerint ekkor $R = y_R$ egyenlőséghez jutunk. Ilyen általánosított egyiptomi oválist mutat a **72. ábra**.



72.ábra Általánosított egyiptomi ovális parametrizálása

Ennek tudatában rögzített R és a esetén – azaz, ha megadjuk, hogy milyen oldalarányú derékszögű háromszöggel dolgozunk – r értéke számítható a következő módon :

$$r = \rho - c = 2 * R - \sqrt{R^2 + a^2}. \quad (4.44)$$

Ahhoz, hogy rendszerezve tudjuk közölni a különböző geometriai kialakításokhoz tartozó minimális falvastagságokat, találnunk kell egy olyan jellemző adatot, amely az elnyújtottság mértékét fejezi ki. Vizsgálataimhoz a következőképp definiáltam mérőszámot:

$$e = \frac{R}{r} - 1. \quad (4.45)$$

Ennek a mennyiségnek két szélső értéke van általánosított egyiptomi ovális esetén. Első esetben $\beta = 0$, a eltűnik, így $r = R$ egyenlőség miatt $e = 0$, egy kör alaprajzot kapunk, melynek elnyújtottsága valóban nulla. A másik véglet a $\beta = 60^\circ$, ekkor r tűnik el, vagyis az e végtelenné válik. Ilyen módon β változtatásával különféle geometriák vizsgálhatóak. A különböző kialakítású boltozatok közös, megegyező tulajdonságának az alaprajzi területet választottam, hisz gyakorlati szempontból a lefedhető területnek van a legnagyobb jelentősége. Vizsgálataimban tehát azonos területű alaprajzokat alakítottam ki, amelyek az „elnyújtottság” mértékében különböztek egymástól. A két szélső eseten kívül további 4, azaz összesen 6 alaprajzi kialakítást vizsgáltam. Egy rögzített β szög esetén R , a és r aránya állandó, melyet a **3. táblázat** mutat be az egyes típusuk elnyújtottsági értékét is feltüntetve. A $\beta = 60^\circ$ esetet gyakorlati okokból nem lehet felépíteni, hisz ekkor már olyan éles törések vannak a geometriában, hogy az tulajdonképpen kivitelezhetetlenné válik.

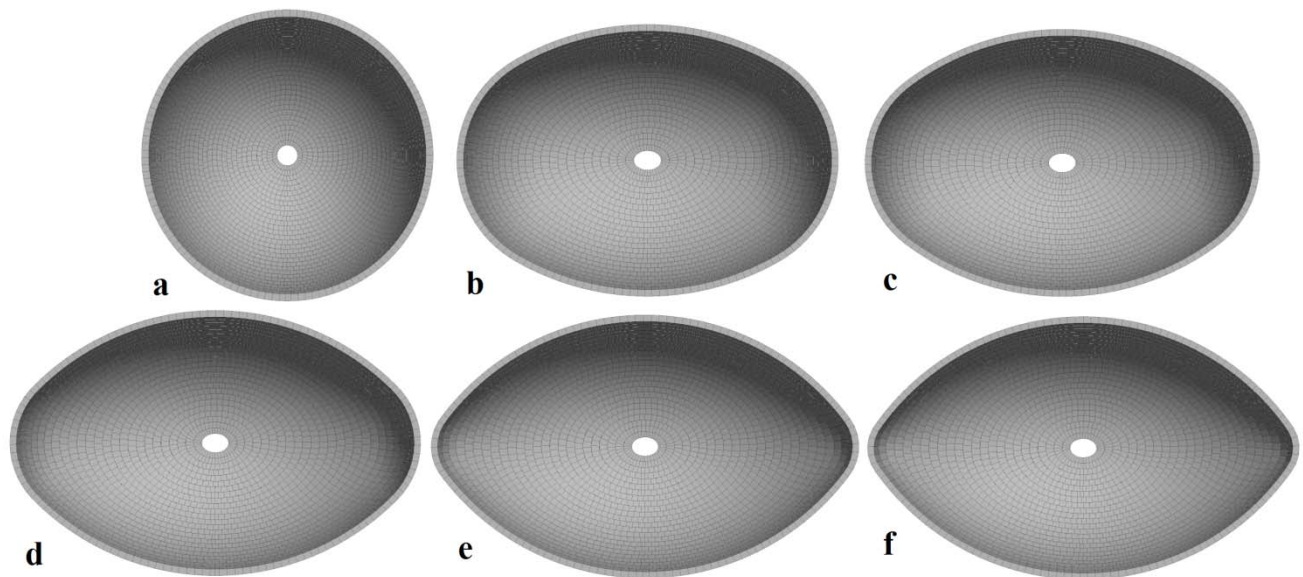
β szög ($^\circ$)	Megjegyzés	$c_R=R/R$	$c_a=a/R$	$c_r=r/R$	$e = R/r-1$	$(a+r)/R$
0.00	Kör alaprajz	1	0.000	1.000	0.000	1.00
30.00	-	1	0.577	0.845	0.183	1.42
36.87	Egyiptomi ovális alaprajz (3-4-5)	1	0.750	0.750	0.333	1.50
45.00	-	1	1.000	0.586	0.707	1.59
53.13	Fordított egyiptomi alaprajz (4-3-5)	1	1.333	0.333	2.000	1.67
55.00	-	1	1.428	0.257	2.898	1.68
60.00	-	1	1.732	0.000	végtelen	1.73

3. táblázat

Az arányok tudatában elegendő egy paraméterrel jellemezni a (4.7)-nél megadott területre vonatkozó összefüggést. Célszerűen ez a paraméter legyen R . A *Microsoft Excel* programjának „solver” moduljával rögzített alapterület esetére R értéke megkereshető. A számítások alapjául egy 5 méter sugarú gömbkupola alaprajzi területét választottam. Ezen értékek mellett a többi geometriai kialakítás R , a és r paramétereit a **4. táblázat** mutatja. A különböző alaprajzi kialakításokat láthatjuk a **73. ábrán**.

β szög ($^\circ$)	$c_R=R/R$	$c_a=a/R$	$c_r=r/R$	$e = R/r-1$	$(a+r)/R$	R (m)	a (m)	r (m)	ρ (m)	y_R (m)	x_0 (m)	y_0 (m)	θ (rad)	ϕ (rad)	A (m ²)
0.00	1	0.000	1.000	0.000	1.00	5.000	0.000	5.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.571	78.5
30.00	1	0.577	0.845	0.183	1.42	4.164	2.404	3.519	8.327	4.164	4.164	3.048	0.524	1.047	78.5
36.87	1	0.750	0.750	0.333	1.50	4.092	3.069	3.069	8.183	4.092	4.910	2.455	0.644	0.927	78.5
45.00	1	1.000	0.586	0.707	1.59	4.036	4.036	2.364	8.071	4.036	5.707	1.672	0.785	0.785	78.5
53.13	1	1.333	0.333	2.000	1.67	4.006	5.341	1.335	8.011	4.006	6.409	0.801	0.927	0.644	78.5
55.00	1	1.428	0.257	2.898	1.68	4.002	5.716	1.027	8.004	4.002	6.557	0.589	0.960	0.611	78.5
60.00	1	1.732	0.000	végtelen	1.73	3.998	6.925	0.000	7.996	3.998	6.925	0.000	1.047	0.000	78.5

4. táblázat

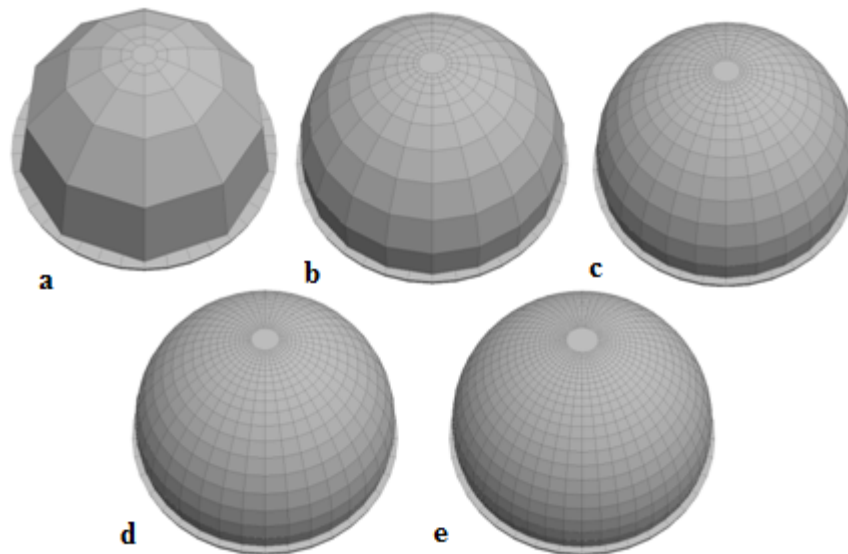


(a) $\beta = 0^\circ$; (b) $\beta = 30^\circ$; (c) $\beta = 36.87^\circ$; (d) $\beta = 45^\circ$; (e) $\beta = 53.13^\circ$; (f) $\beta = 55^\circ$

73.ábra Különböző alaprajzi kialakítások a β szög szerint

4.5.3. Próbaftatások, kalibráció

A diszkrét elemes modell kapcsolati jellemzőinek helyes felvétele kulcsfontosságú a modell megbízható működéséhez. Deformálható elemek esetén láthattuk, hogy az anyagjellemzők, kapcsolati jellemzők kísérleti eredményekhez igazíthatók, a merev elemes futtatásokhoz azonban szükség van a modell kalibrációjára. Ezt a kalibrációt egy *gömbkupola* modellen végeztem el, azaz megvizsgáltam, hogy a minimális t/R arány hogyan függ a kapcsolati normál- és érintő irányú merevségektől. Ezen a modellen a mérethatás vizsgálatának egy típusát is elvégeztem, azaz állandó R sugarú gömbkupola esetére elemeztem, hogy mennyire befolyásolja a megoldást, ha az alapkörön vett elemek számát növelem (tehát a falazóelemek méretét csökkentem). A különböző vizsgált modelleket mutatja a 74.ábra.



Az alapkör felosztásának száma : (a) 10 ; (b) 20 ; (c) 30 ; (d) 40 ; (e) 50

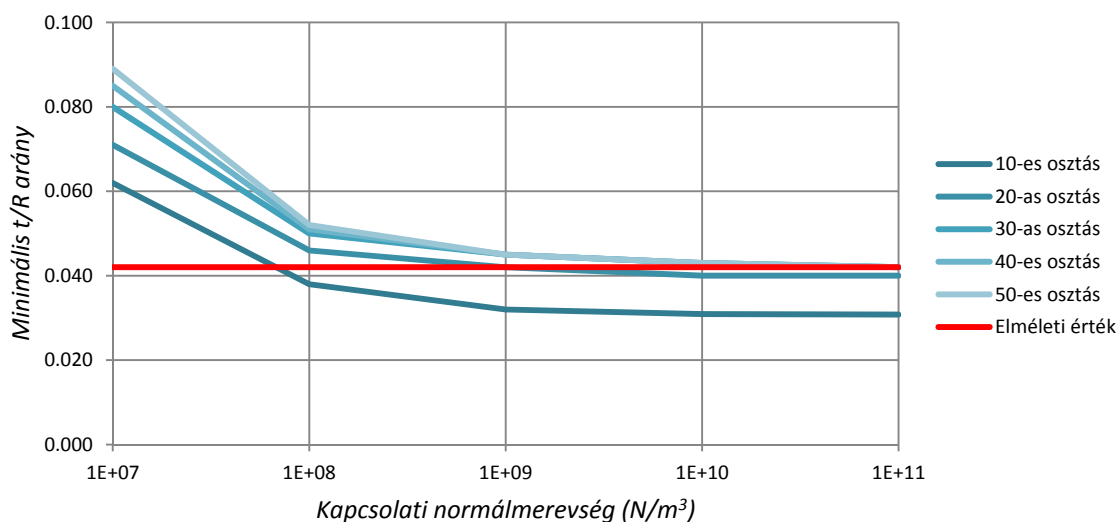
74.ábra A kalibrációhoz alkalmazott gömbkupola modellek

Az eredményeket a **5.táblázatban** foglaltam össze, valamint két különböző elv alapján grafikonon ábrázoltam őket. A **75.ábra** az egyre növekvő normálmerevségek függvényében – logaritmikus skálán – mutatja a saját önsúly alatti összeomlás elkerüléséhez szükséges minimális t/R arányt, az **76.ábra** ugyanezt mutatja, de a felosztás számának függvényében, az **77.ábra** pedig az $elemméret/R$ függvényében. A vizsgálatoknál a súrlódási tényezőt végtelen nagyra vettem fel.

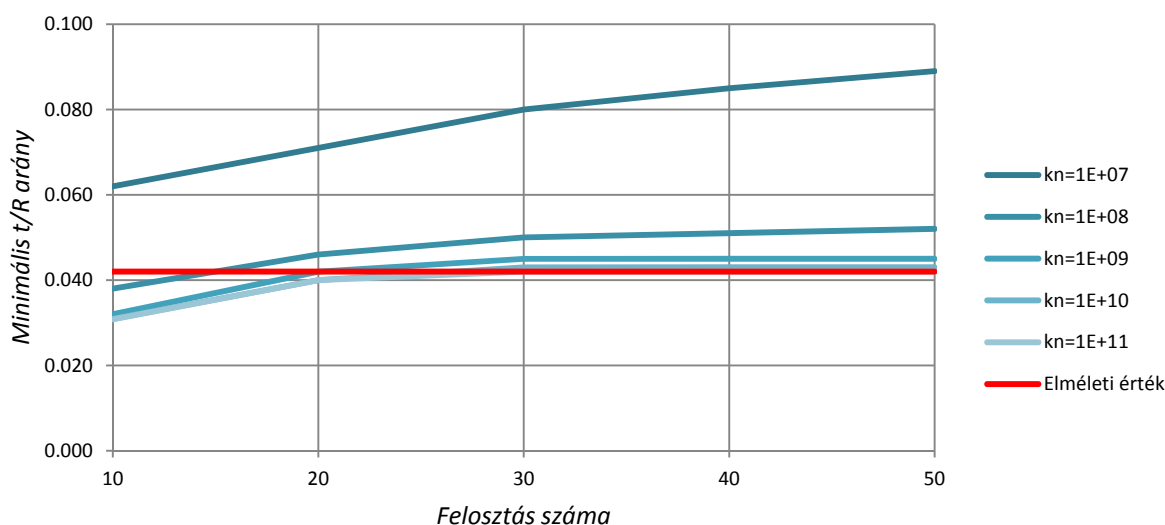
Felosztás száma	Elemméret/R	Kapcsolati normálmerevségek (N/m ³)				
		1E+07	1E+08	1E+09	1E+10	1E+11
10	0.63	0.062	0.038	0.032	0.031	0.031
20	0.31	0.071	0.046	0.042	0.040	0.040
30	0.21	0.080	0.050	0.045	0.043	0.042
40	0.16	0.085	0.051	0.045	0.043	0.042
50	0.13	0.089	0.052	0.045	0.043	0.042

5.táblázat

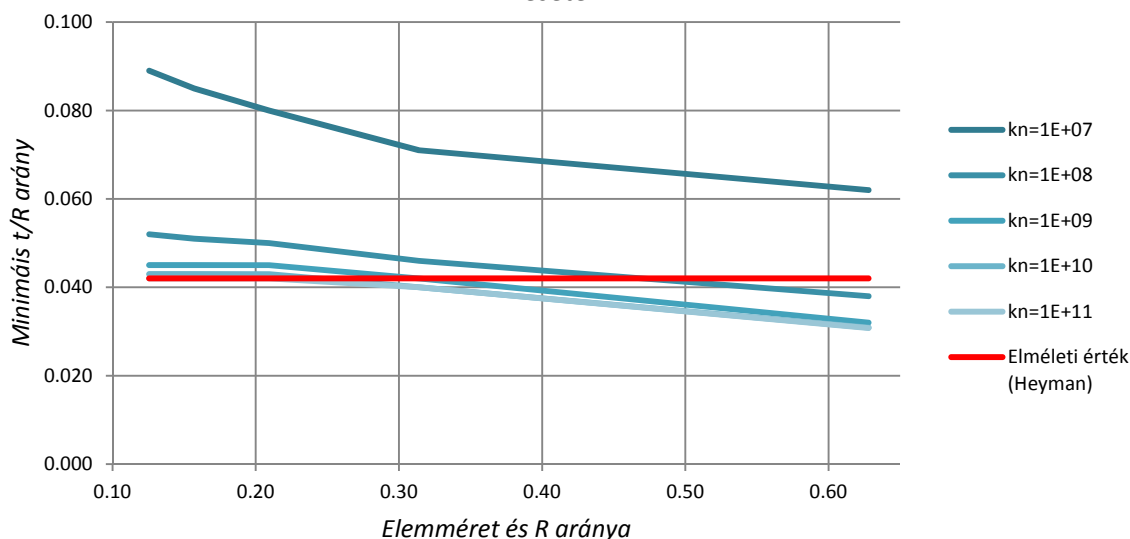
75. ábra A t/R arány változása a kapcsolati normálmerevségek függvényében



76. ábra A t/R arány változása az alapkör felosztásának számának függvényében gömbkupola esetén



77. ábra A t/R arány változása a relatív elemméret függvényében gömbkupola esetén



Az ábrából többféle tanulságot vonhatunk le. A kapcsolati normálmerevség növelésével az eredmények egy határértékhez tartanak. Ez a határérték azonban lényegesen függ a felosztás számától. Látható, hogy nagy elemekből épített, szögletes gömbkupola esetén a minimális t/R arány akár az elméleti érték alá is mehet, azaz ilyen kupola akár kisebb falvastagsággal is épülhet ugyanakkora biztonsággal, mint egy „tökéletes” gömbkupola. Ez azt jelenti, hogy a nagyméretű falazóelemek összefeszülnek, egymásra támaszkodnak, illetve hajlítást egy nagy elem fel tud venni, a sok kicsi viszont nem, így nagyobb elemekből épített szerkezet teherbírása akár nagyobb lehet. Az elméleti értéket akkor közelítjük meg jól, ha a normálmerevséget legalább 10^{10} vagy 10^{11} N/m^3 -re, a maximális falazóelemméretet pedig a boltozat jellemző méretének – jelen esetben a sugárnak – a maximum 20%-ára vesszük fel.

A fenti vizsgálatot elvégeztem $f = 30^\circ$ estére is, azaz a megcsúszás lehetőségét is figyelembe próbáltam venni. Az eredményeket a **6. táblázat** mutatja. Az eredményekben érdemi változás főleg kis felosztás és kis normálmerevségek esetén tapasztalható, de már láttuk, hogy ez a tartomány nem jellemzi jól a falazott boltozat viselkedését, tehát figyelmen kívül hagyható. Érdekes, hogy ezen esetben a minimális t/R arány végértéke 0,043, azaz az elméletinél némileg magasabb érték. Az eredmények különbözősége azt mutatja, hogy az önsúlyra történő összeomlási mechanizmusban a megcsúszások szerepe elhanyagolható, dominánsan a csuklós mechanizmus a tönkremenetel oka.

Felosztás száma	Elemméret/R	Kapcsolati normálmerevségek (N/m^3)				
		1E+07	1E+08	1E+09	1E+10	1E+11
10	0.63	0.068	0.038	0.032	0.031	0.031
20	0.31	0.072	0.046	0.042	0.041	0.040
30	0.21	0.080	0.050	0.045	0.043	0.043
40	0.16	0.085	0.051	0.045	0.043	0.043
50	0.13	0.089	0.052	0.045	0.043	0.043

6. táblázat

Egy másik fajta mérethatás-vizsgálatot is elvégeztem, ahol a kapcsolati jellemzőket már a fenti vizsgálatok tapasztalatait felhasználva adtam meg. Ez esetben az elemek méretét vettem konstansnak, s az egyre nagyobb méretű kupolákra vizsgáltam a minimálisan szükséges t/R arányt. Ebben az esetben már egy $\beta = 30^\circ$ -os általánosított *egyiptomi ovális kupolát* vettem alapul, mely a rövidebbik tengely

körüli megforgatással áll elő. Az eseteket és az eredményeket a **7.táblázat** tartalmazza. Az utolsó előtti oszlop (m/R) az elemméret és a sugár arányát adja meg.

R (m)	a (m)	r (m)	A (m ²)	Rekvivalens (m)	Elemméret (m)	m/R	t/R
0.750	0.433	0.634	2.5	0.9	0.25	0.28	3.4
1.000	0.577	0.845	4.5	1.2	0.25	0.21	3.4
1.500	0.866	1.268	10.2	1.8	0.25	0.14	3.5
2.000	1.155	1.691	18.1	2.4	0.25	0.10	3.5
3.000	1.732	2.536	40.8	3.6	0.25	0.07	3.5
4.000	2.309	3.381	72.5	4.8	0.25	0.05	3.5

7.táblázat

Az egyes esetekben kiszámoltam a kupola által lefedett alapterületet, majd abból egy ekvivalens sugarat számoltam, mintha gömbkupola esete állna fenn. Látható, hogy ezen jellemző hossz – az ekvivalens sugár – 20%-a körül, csakúgy, mint az első típusú mérethatás vizsgálatánál, már megbízhatóak és konstansak az eredmények. Ez azt jelenti, hogy az elemméretet maximálisan ezen jellemző hosszúsági érték 0,2-szeresére vehetjük fel, ami például egy 5 méter sugarú gömbkupola esetén 1 méter. Ilyen méretek a gyakorlatban sehol nem fordulnak elő, tehát megállapítható, hogy a gyakorlatban használatos (elemméret/jellemző hossz) arány mindig olyan, hogy a későbbiekben bemutatott eredmények alkalmazhatóak lesznek rájuk.

4.5.4. A numerikus futtatások eredményei

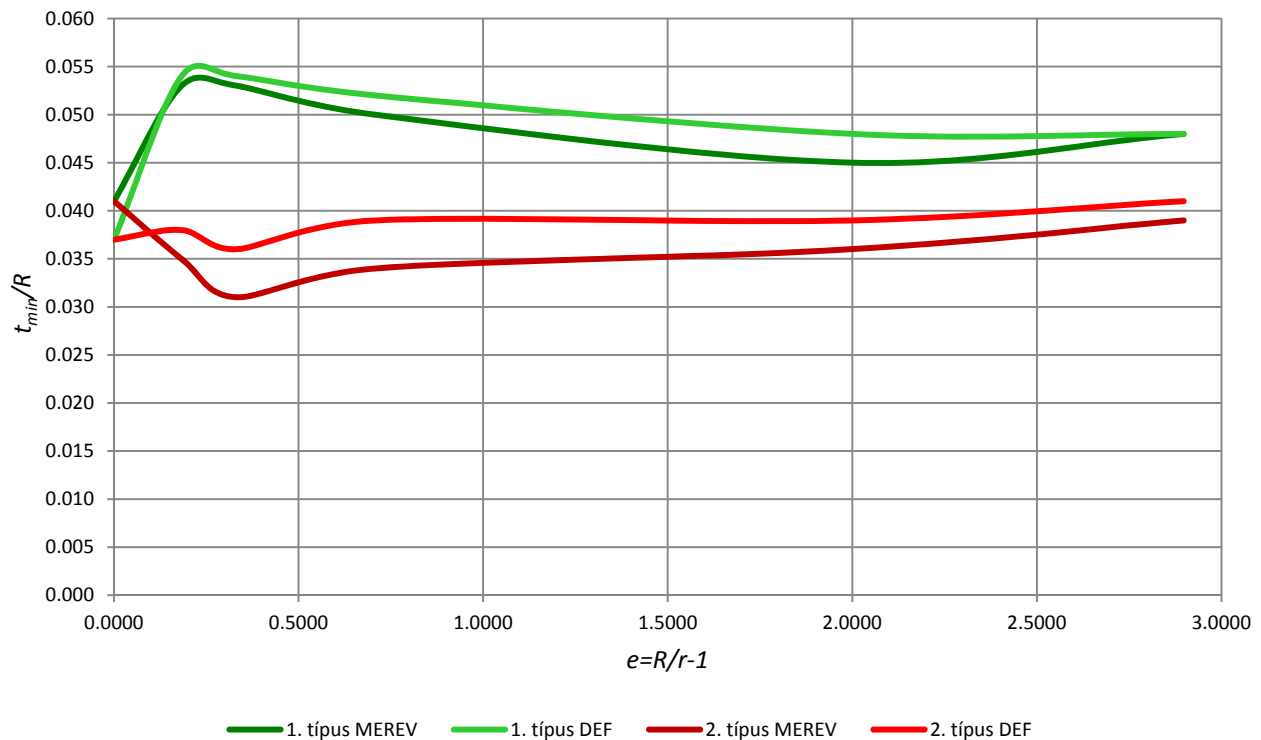
A diszkrét elemes futtatásokat a **2.táblázat** szerinti anyag- és kapcsolati jellemzőkkel és a **4.táblázat** szerinti geometriai kialakításokkal végeztem el, az átlagos elemméretet 0,25 méterben határoztam meg. Az állvánnyal történő építési módot választottam, a teljes állvány egy ütemben kerül kivételre, azaz a megépült szerkezet azonnal megkapja az önsúlyterhet. A megtámasztások kialakítása úgy történt, hogy a kupola legalsó gyűrűsora alá az algoritmus beépít még egy, szélesebb gyűrűsort, alapzatot, melynek alkotó téglá elemeit azután a „fix” paranccsal rögzítettem, így azok az analízis során mozdulatlanok, azaz megtartják a kupola súlyát. Az alapzat és a felszerkezet elemei között ugyanazon kapcsolati jellemzőket állítottam be, mint a felszerkezet elemei között, azaz a kapcsolati normál- és nyírási merevségek, valamint a súrlódási szög azonos. Geometriai szempontból a kupola nem teljesen zárt – ahogyan az a **73.ábrán** is látszódik -, hanem helyet kapott mindegyik modellben egy felülvilágító nyílás is. A nyílás kisebbik mérete – a gyakorlatban szokásos tartományban maradván – a teljes kupola rövidebbik tengelyének 10%-a. Minden egyes kialakításnál iterációs úton kerestem meg a minimális t/R arányt, melynek ezred pontossággal történő meghatározásához olykor 5-10 futtatásra is szükség volt egy adott esetre. Iteráció alatt azt értem, hogy első közelítésben a gömbkupolára jellemző, elméleti t/R érték körül vettem fel a vizsgált kupola vastagságát, majd ha erre a kupola stabil maradt, akkor feleztem, ha összeomlott, akkor kétszereztem a vastagságot. Ekkora lépésközzel már az első lépés után előáll az az eset – illetve ennek a fordítottja is akár - amikor az előző vastagságnál még összeomlott a kupola, a pillanatnyinál pedig nem. Innentől kezdve tartományfelezéssel számol tovább a program, azaz a következő futtatás vastagságát az összeomló és a stabil kupola ismert vastagsági értékeinek számtani közepében veszi fel. Mindegyik futtatás végén a modelleket elmentettem, ily módon rengeteg futtatási eredmény állt rendelkezésemre, melyeken a mechanikai viselkedés számos egyéb jellemzőjét is meg tudtam vizsgálni (lásd **4.6.** és **4.7.pont**). Ebben a pontban a minimális t/R arányok vizsgálatának eredményeit mutatom be, melyet a **8.táblázat** foglal össze. A táblázatban t_{min} a vizsgálatok során megtalált minimális – összeomlás elkerüléséhez szükséges – szerkezeti vastagságot, r_{min} és r_{max} a felület legkisebb és legnagyobb görbületi sugarát jelöli. A minimális görbületi sugár mindkét típusú kialakítás esetén maga az r paraméter, a maximális görbületi sugár pedig első típus esetén – hossz tengely körül megforgatott eset – $2R$, második típus esetén pedig $(a + r)$.

1. típus : Hossztengely körüli megforgatással képzett kupola (merev elemek)										
β szög (°)	R (m)	a (m)	r (m)	A (m ²)	$t_{\min}$	1. $t_{\min}/R$	2. $t_{\min}/(a+r)$	3. $t_{\min}/r_{\min}$	4. $t_{\min}/r_{\max}$	$e=R/r-1$
0.00	5.000	0.000	5.000	78.5	0.205	0.041	0.041	0.041	0.041	0.0000
30.00	4.164	2.404	3.519	78.5	0.221	0.053	0.037	0.063	0.027	0.1830
36.87	4.092	3.069	3.069	78.5	0.217	0.053	0.035	0.071	0.027	0.3333
45.00	4.036	4.036	2.364	78.5	0.202	0.050	0.032	0.085	0.025	0.7071
53.13	4.006	5.341	1.335	78.5	0.180	0.045	0.027	0.135	0.023	2.0000
55.00	4.002	5.716	1.027	78.5	0.192	0.048	0.028	0.187	0.024	2.8979
60.00	3.998	6.925	0.000	78.5	x	x	x	x	x	x
2. típus : Rövid tengely körüli megforgatással képzett kupola (merev elemek)										
β szög (°)	R (m)	a (m)	r (m)	A (m ²)	$t_{\min}$	1. $t_{\min}/R$	2. $t_{\min}/(a+r)$	3. $t_{\min}/r_{\min}$	4. $t_{\min}/r_{\max}$	$e=R/r-1$
0.00	5.000	0.000	5.000	78.5	0.205	0.041	0.041	0.041	0.041	0.0000
30.00	4.164	2.404	3.519	78.5	0.146	0.035	0.025	0.041	0.025	0.1830
36.87	4.092	3.069	3.069	78.5	0.127	0.031	0.021	0.041	0.021	0.3333
45.00	4.036	4.036	2.364	78.5	0.137	0.034	0.021	0.058	0.021	0.7071
53.13	4.006	5.341	1.335	78.5	0.144	0.036	0.022	0.108	0.022	2.0000
55.00	4.002	5.716	1.027	78.5	0.156	0.039	0.023	0.152	0.023	2.8979
60.00	3.998	6.925	0.000	78.5	x	x	x	x	x	x
1. típus : Hossztengely körüli megforgatással képzett kupola (deformálható elemek)										
β szög (°)	R (m)	a (m)	r (m)	A (m ²)	$t_{\min}$	1. $t_{\min}/R$	2. $t_{\min}/(a+r)$	3. $t_{\min}/r_{\min}$	4. $t_{\min}/r_{\max}$	$e=R/r-1$
0.00	5.000	0.000	5.000	78.5	0.185	0.037	0.037	0.037	0.037	0.0000
30.00	4.164	2.404	3.519	78.5	0.225	0.054	0.038	0.064	0.027	0.1830
36.87	4.092	3.069	3.069	78.5	0.221	0.054	0.036	0.072	0.027	0.3333
45.00	4.036	4.036	2.364	78.5	0.210	0.052	0.033	0.089	0.026	0.7071
53.13	4.006	5.341	1.335	78.5	0.192	0.048	0.029	0.144	0.024	2.0000
55.00	4.002	5.716	1.027	78.5	0.192	0.048	0.028	0.187	0.024	2.8979
60.00	3.998	6.925	0.000	78.5	x	x	x	x	x	x
2. típus : Rövid tengely körüli megforgatással képzett kupola (deformálható elemek)										
β szög (°)	R (m)	a (m)	r (m)	A (m ²)	$t_{\min}$	1. $t_{\min}/R$	2. $t_{\min}/(a+r)$	3. $t_{\min}/r_{\min}$	4. $t_{\min}/r_{\max}$	$e=R/r-1$
0.00	5.000	0.000	5.000	78.5	0.185	0.037	0.037	0.037	0.037	0.0000
30.00	4.164	2.404	3.519	78.5	0.158	0.038	0.027	0.045	0.027	0.1830
36.87	4.092	3.069	3.069	78.5	0.147	0.036	0.024	0.048	0.024	0.3333
45.00	4.036	4.036	2.364	78.5	0.157	0.039	0.025	0.067	0.025	0.7071
53.13	4.006	5.341	1.335	78.5	0.156	0.039	0.023	0.117	0.023	2.0000
55.00	4.002	5.716	1.027	78.5	0.164	0.041	0.024	0.160	0.024	2.8979
60.00	3.998	6.925	0.000	78.5	x	x	x	x	x	x

8. táblázat

A fenti táblázatok számozott, kijelölt oszlopainak értékeit grafikonon tettem szemléletessé. A $\beta = 60^\circ$ -os változatot gyakorlati szempontból kizártam a vizsgálatokból. A grafikonok lefutása azt mutatja, hogy az elnyújtottság mértéke, azaz az e érték gazdaságossági, illetve gyakorlati szempontból jó, ha 2 alatt marad. A grafikonokon ugyan ábrázoltam a $\beta = 55^\circ$ -os esetet, de ennek csak elméleti jelentősége van, gyakorlatban ilyen kialakítással nem találkozunk (ezért maradt ki a $\beta = 60^\circ$ -os változat is). Az első grafikonon (78.ábra) a minimálisan szükséges szerkezeti vastagság és az alaprajzi rövidebbik tengely arányát mutatja.

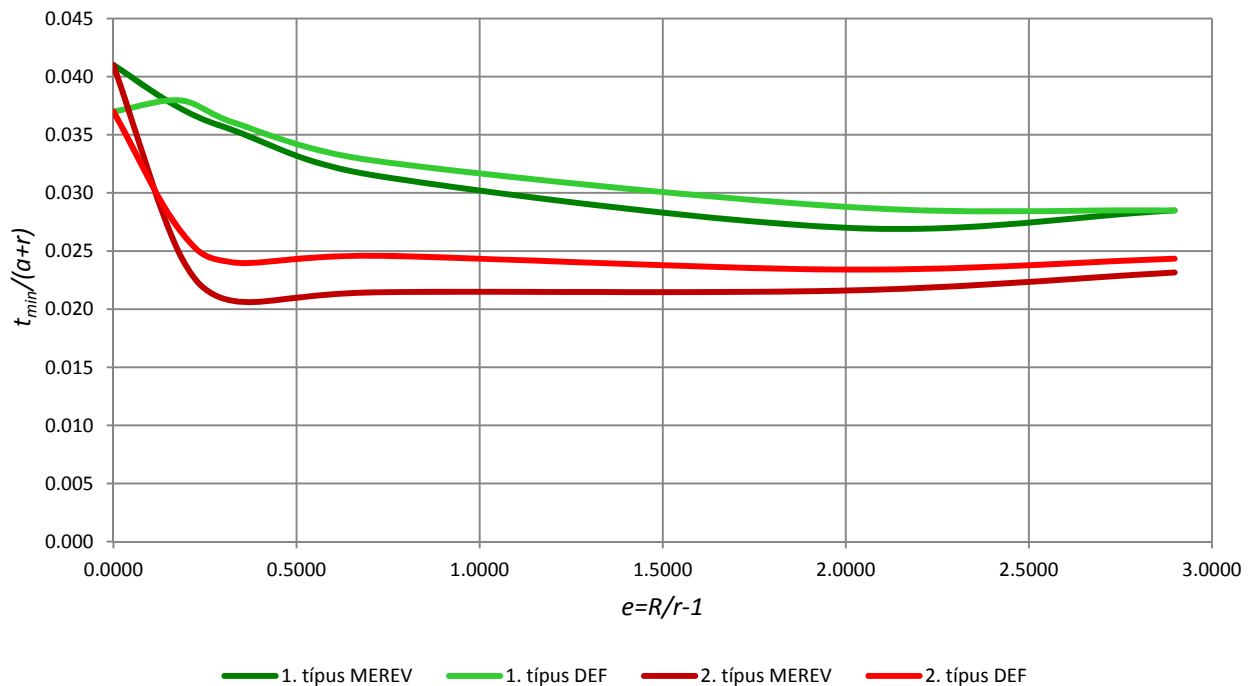
78.ábra t_{min}/R értékei különböző kialakítású ovális kupolák esetén az elnyújtottsági mérték függvényében



Az első fontos megállapítás merev elemes futtatások eredményeire, hogy gömbkupola esetére az arányszám kisebbre adódott (0.041) az elméleti értéknél, az elemek egymásra hatása, a súrlódási kapcsolatok stabilizáló hatása miatt. Itt az elemek kötésben való elhelyezése okozza ezt a hatást. A legszembetűnőbb, hogy a két fajta típus, kialakítás teljesen más eredményeket ad. A laposabb, első típusú, hossz tengely megforgatásával keletkező geometria esetén a minimális értékek minden esetben nagyobbra adódtak, mint a második típus szerinti eredmények. Ennek az az oka, hogy ugyanazon alaprajzi kialakítással a rövidebbik tengely körüli megforgatással keletkező kupola metszeteinek geometriája jóval közelebb áll a láncgörbéhez. Ez előnyös, hisz kedvezőbb az önsúly eloszlása, a nyomásvonal alakja közel áll az eredeti metszet alakjához, így azt csak igen kis vastagság esetén hagyja el. A másik esetben ellaposodott körívek alkotják a metszeteket, melyek előnytelenebb súlyeloszlással bírnak, a nyomásvonal könnyebben hagyja el a keresztmetszetet. Az egyik legfontosabb eredménye a vizsgálatoknak az, hogy valós anyagjellemzők és deformálható elemekkel történő futtatások esetén az értékek végig a merev elemes futtatások eredményei felett futnak, azaz az elméleti, merev elemeket feltételező számítások a biztonság kárára tévednek. Érdekes viszont, hogy gömbkupola esetén egyfajta befeszülés történik az alakváltozások következtében, ez az egyetlen kialakítás, ahol a deformálható elemes számítás kisebb minimális t/R arányt adott. Ilyen értelemben a Heyman-féle 0.042 -es elméleti érték egy konzervatív becslés, mely a biztonság javára ad közelítést a valós eredményre.

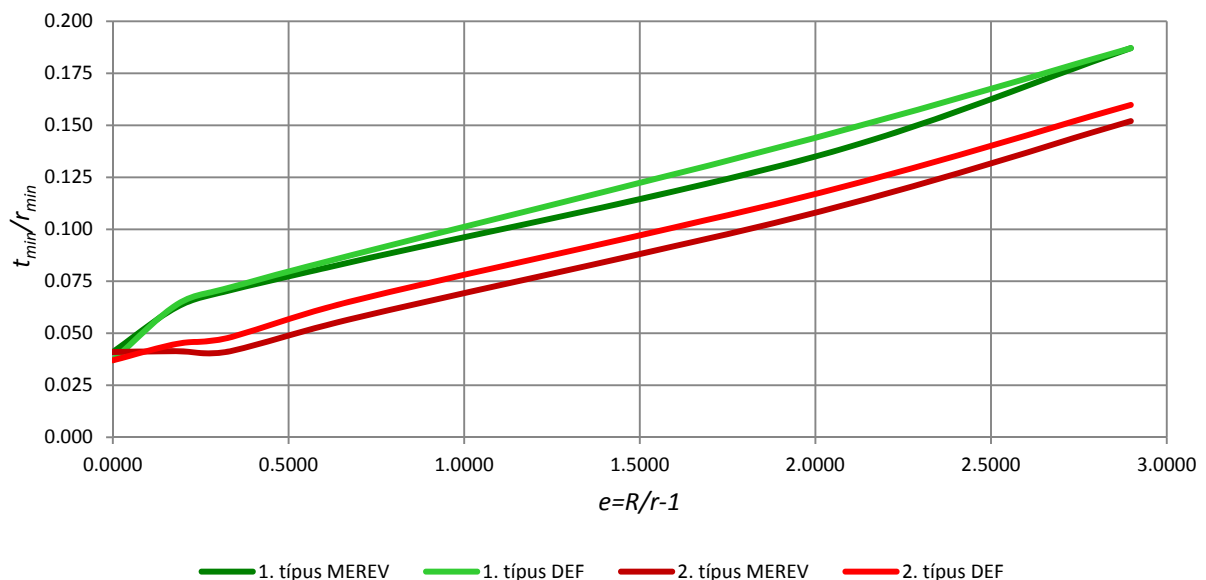
A következő grafikon (**79.ábra**) a minimálisan szükséges falvastagság és az alaprajzi hossz tengely arányát mutatja különböző kialakítások esetére.

79.ábra $t_{min}/(a+r)$ értékei különböző kialakítású ovális kupolák esetén az elnyújtottsági mérték függvényében



Itt már kitűnik, hogy a hosszabbik alaprajzi mérettel történő normálás esetén a gömbkupolánál előnyösebb falvastagságokat kapunk. Az értékek az elnyújtottság növekedésével csökkennek, a tendencia azonban megmaradt. A második típusú kialakítású kupola előnyösebb, a rugalmas eset mindig a merev megoldás felett fut. A következő grafikon (**80.ábra**) a minimálisan szükséges vastagság és a különböző kialakítású kupolák felületének legkisebb görbületi sugarának arányát mutatja.

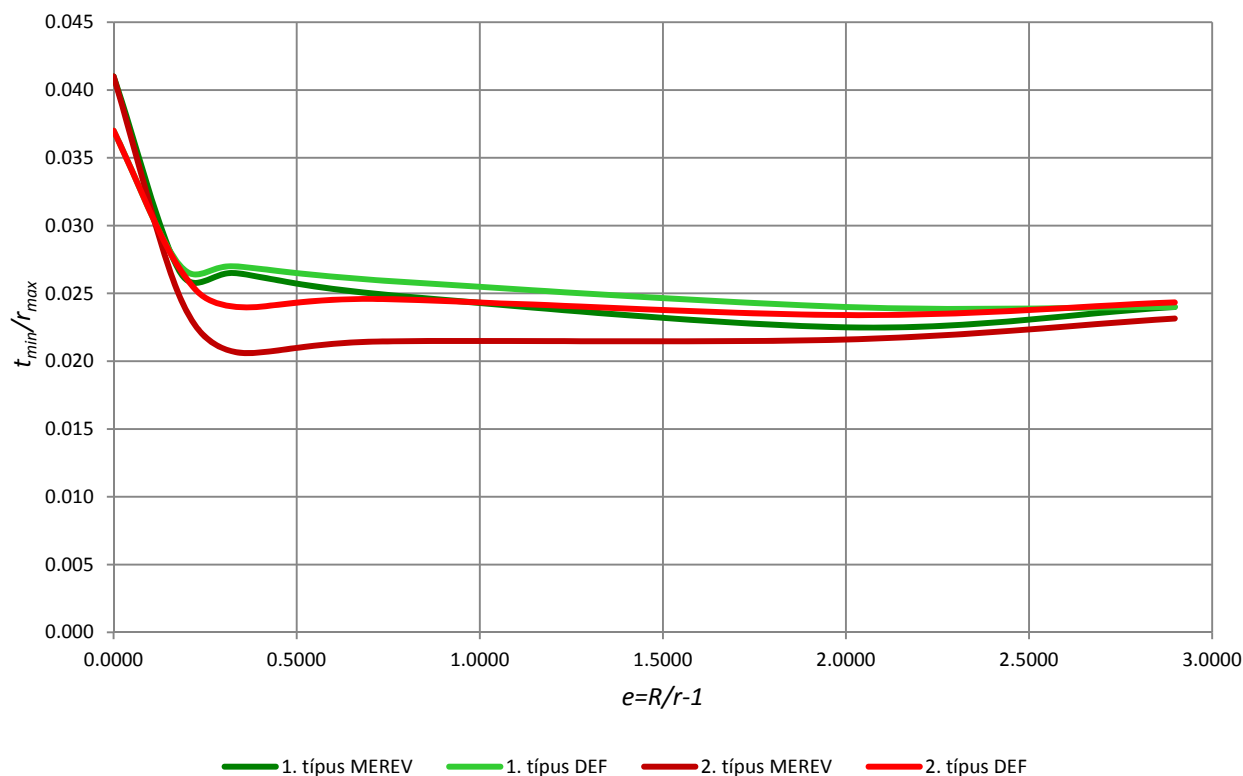
80.ábra t_{min}/r_{min} értékei különböző kialakítású ovális kupolák esetén az elnyújtottsági mérték függvényében



Ezen a grafikonon tűnik ki a legjobban a tendencia. A grafikonon közölt arány az elnyújtottság mértékével folyamatosan nő (hisz az r_{min} érték is így folyamatosan csökken). Érdekes, hogy a két típus görbéinek lefutása azonos, csak egy eltolásban különböznek egymástól. Alul természetesen a második, felül az első típusú kialakítás eredményei futnak.

A következő grafikon (**81.ábra**) már nem a legkisebb, hanem a legnagyobb görbületi sugárral való arányát mutatja a minimális szerkezeti vastagságoknak különböző kialakítású ovákupolák esetén.

81.ábra t_{min}/r_{max} értékei különböző kialakítású ovális kupolák esetén az elnyújtottsági mérték függvényében

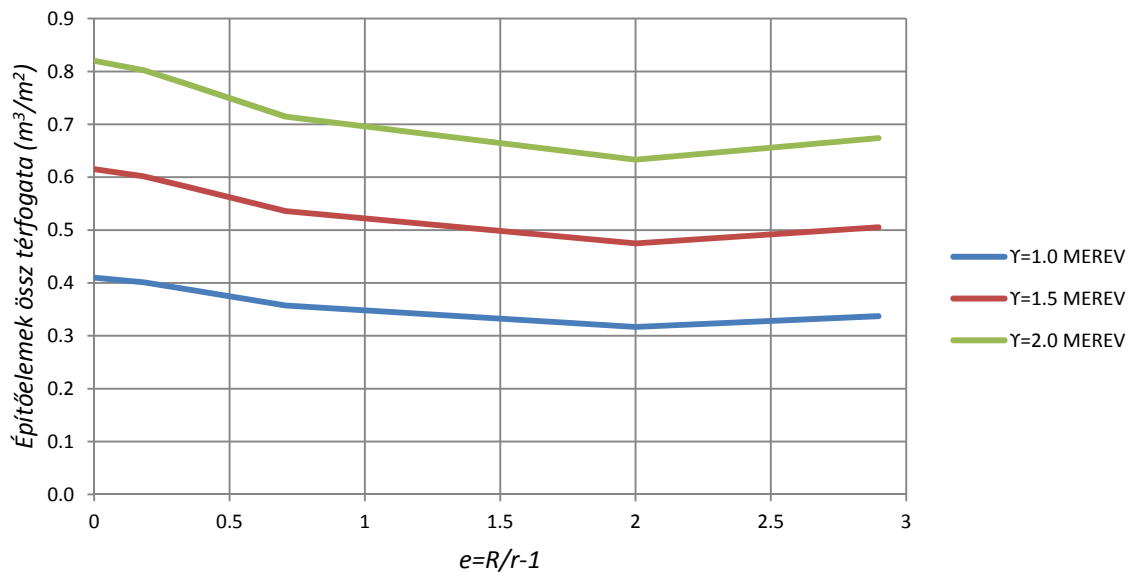


A két merev megoldás, illetve a két deformálható elemes megoldása érdekes módon közel egy értékhez tart (0.001-0.002 körüli eltéréssel). A gömbkupolához képest csökkenő értékeket kapunk a növekvő r_{max} értékek miatt is részben.

4.5.5. Az ovális kupolák gazdaságossága

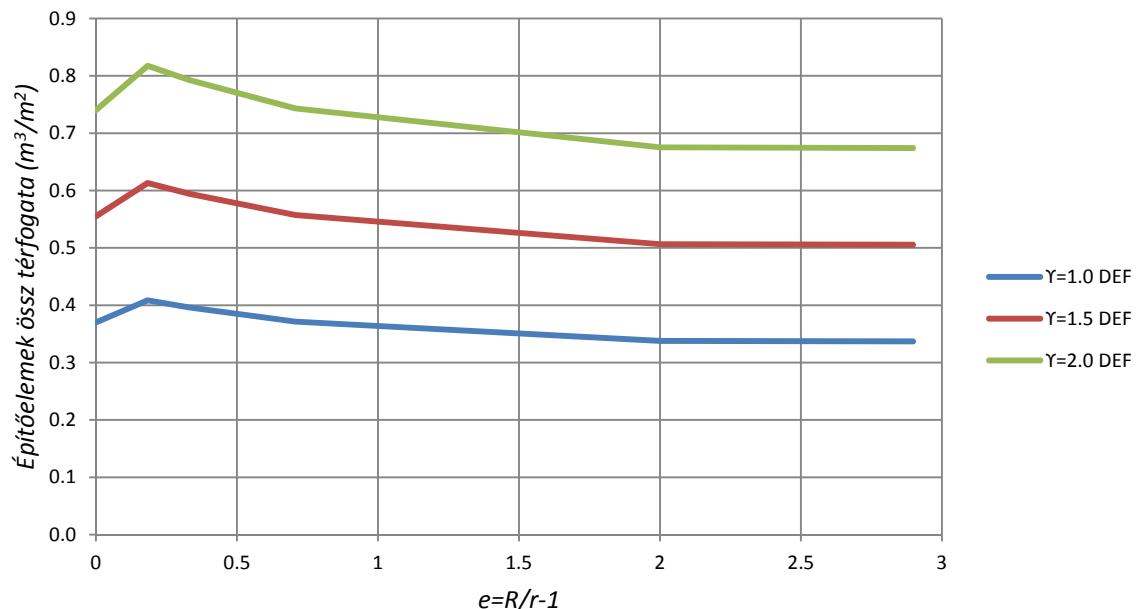
A gazdaságosságról akkor kapunk képet, ha az egyes kialakításokhoz szükséges építőelem mennyiségeket meghatározzuk. A biztonsági mérőszám - jelölje γ - falazott szerkezetek esetén megadja a tényleges és a minimálisan szükséges falvastagság arányát, melyet éppen most határoztunk meg. Három biztonsági mérőszámot vizsgáltam : $\gamma = 1.0$, azaz mikor a falvastagság éppen a minimálisan szükséges falvastagság, $\gamma = 1.5$, illetve $\gamma = 2.0$. Mivel a **4.táblázat** szerinti különböző kialakítások egyenlő alaprajzi területet eredményeznek, gazdaságosságuk megítélhető a fajlagos, 1 m^2 -nyi alapterületre jutó kötőanyag/térfogat alapján. Mindhárom biztonsági tényezőre, mindegyik kialakításra, illetve merev és deformálható elemek esetére (minimális falvastagság ettől függ) meghatároztam az építőelemek fajlagos térfogatát, majd az elnyújtottság függvényében ábrázoltam azt a következő grafikonokon.

82.ábra Építőelemek egységnyi alaprajzi területre eső térfogata 1. típusú kialakítás és merev elemek esetén



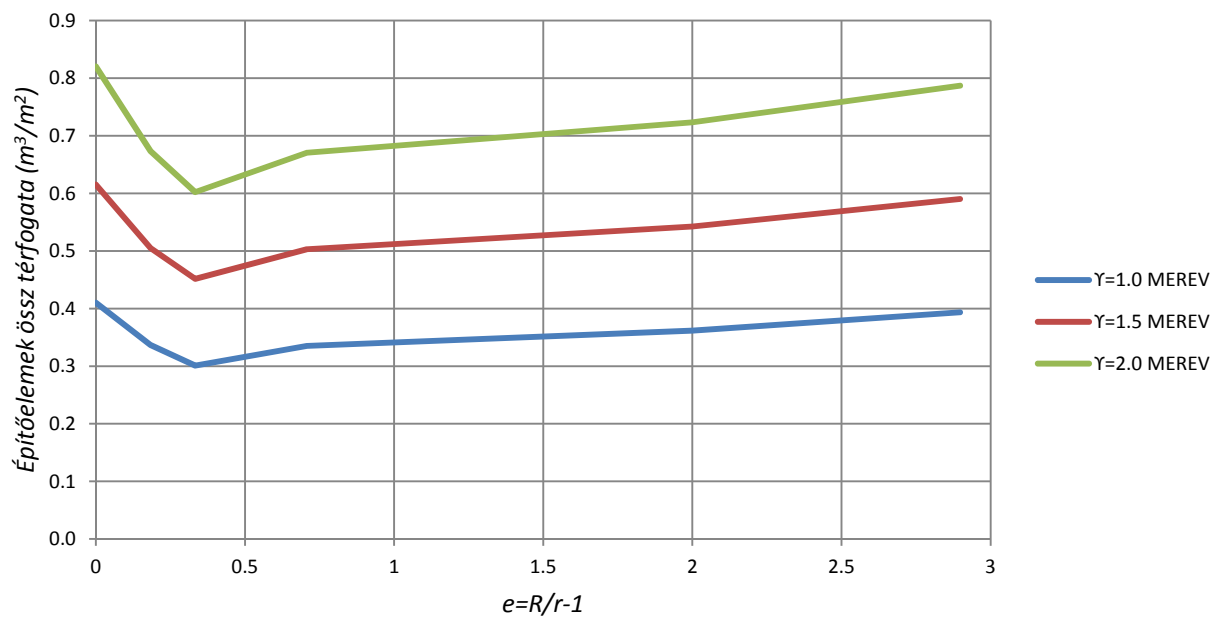
Az 1. típusú kialakítás és merev elemek esetén (**82.ábra**) látható, hogy bármely kialakítás gazdaságosabb a gömbkupolánál. 2-nél nagyobb elnyújtottsági érték fölött ismét nőni kezd a fajlagos térfogat, azaz a gyakorlatban gazdaságtalan ilyen tartományban ovális kupolát építeni (nem is építenek), de meg kell említeni, hogy a gömbkupolánál még így is kedvezőbb lenne az anyagfelhasználás.

83.ábra Építőelemek egységnyi alaprajzi területre eső térfogata 1. típusú kialakítás és deformálható elemek esetén



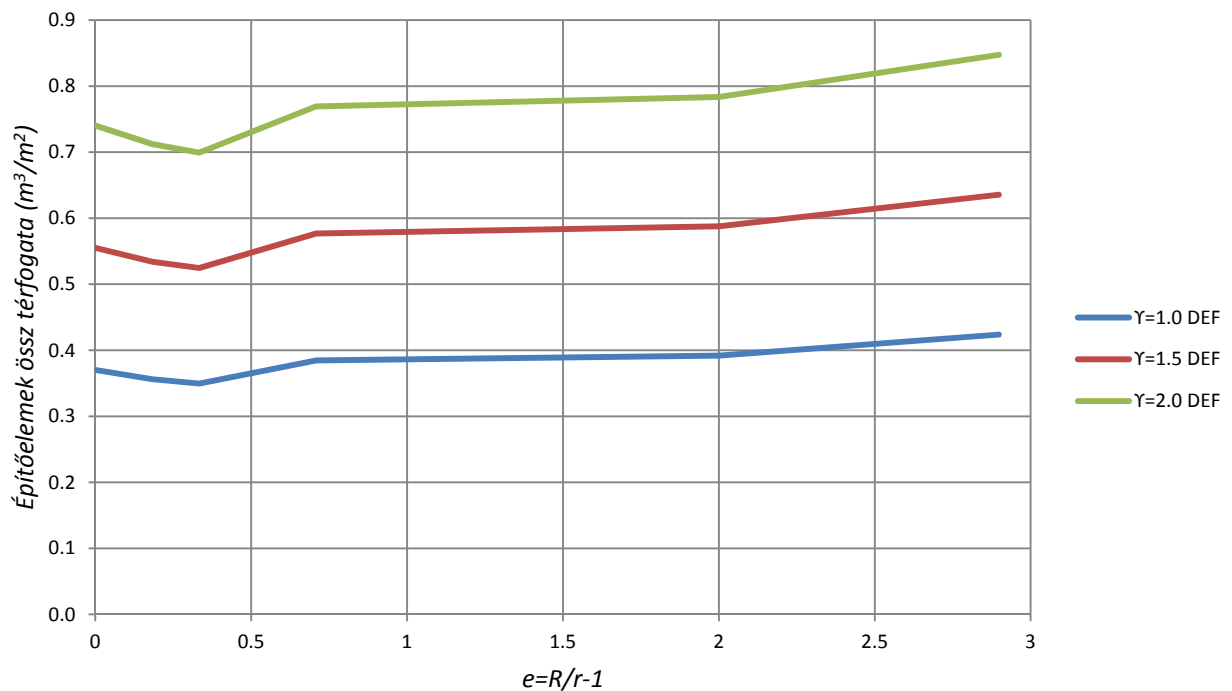
Deformálható elemek esetén (**83.ábra**) – a $\beta = 30^\circ$ -os kialakítást kivéve – szintén elmondható, hogy bár kicsivel, de gazdaságosabb anyagfelhasználáshoz jutunk ovális kupolák esetén.

84.ábra Építőelemek egységnyi alaprajzi területre eső térfogata 2. típusú kialakítás és merev elemek esetén



A 2. típusú kialakítás esetén (84.ábra) $e = 2.0 - 2.5$ elnyújtottsági érték alatt a gömbkupolánál kisebb anyagfelhasználással építhetünk azonos alapterületet lefedő ovális kupolát. Itt a leggazdaságosabb kialakítás a kis elnyújtottsági értékeknél van.

85.ábra Építőelemek egységnyi alaprajzi területre eső térfogata 1. típusú kialakítás és deformálható elemek esetén



Rugalmas esetben (**85.ábra**) – ami közelebb áll a valósághoz, mint a merev elemekből álló modell - az alakváltozások kedvezőtlen hatása révén úgy alakul át a geometria, hogy nagyobb falvastagságokra van szükségünk. A merev elemeknél látott gazdaságosságot így elveszítjük. Az $e = 0.75 - 2.0$ elnyújtottsági érték között csaknem azonos anyagfelhasználással épülhetnek a különböző kialakítású boltozatok. E felett az anyagfelhasználás megnövekszik, ismét olyan tartományba kerülünk, ahol nem érdemes építeni – a kivitelezhetőség miatt sem – ovális kupolát. Megjegyzem, ha a gömbkupola esetén a merev elemes megoldást tekintjük a - biztonság javára történő – megoldásnak, akkor az ovális kupolák anyagfelhasználása még ez esetben is a gömbkupolánál kedvezőbb $e < 2.0$ értékek esetén.

A fenti vizsgálatok, eredmények segítenek egy vizsgált ovális alaprajzú kupola biztonságát és gazdaságosságát megítélni. A minimális vastagságok esetén nyilván az alaprajzi befoglaló méretek – a rövidebbik, illetve a hosszabbik alaprajzi féltengely – szerinti normálással számított görbék alkalmazhatóak a gyakorlatban. Ha ismerjük egy ilyen kialakítású kupola tényleges vastagságát, akkor a minimálisan szükséges vastagságot a grafikonokról leolvashatjuk, s a kettő értékből arányt képezve megkaphatjuk a kupola biztonsági mérőszámát önsúly teherre. Fontos volt látni, hogy a deformálható elemekkel történő számítások nagyobb minimális falvastagsági értékeket adtak, azaz a merev építőelemek feltételezése ovális kupolák esetén akár a biztonság kárára is történhet. Az anyagfelhasználás vizsgálatával megmutattuk, hogy ezek az ovális kupolák azonos biztonsággal és alaprajzi területtel akár gazdaságosabban is épülhetnek, mint a hagyományos gömbkupolák.

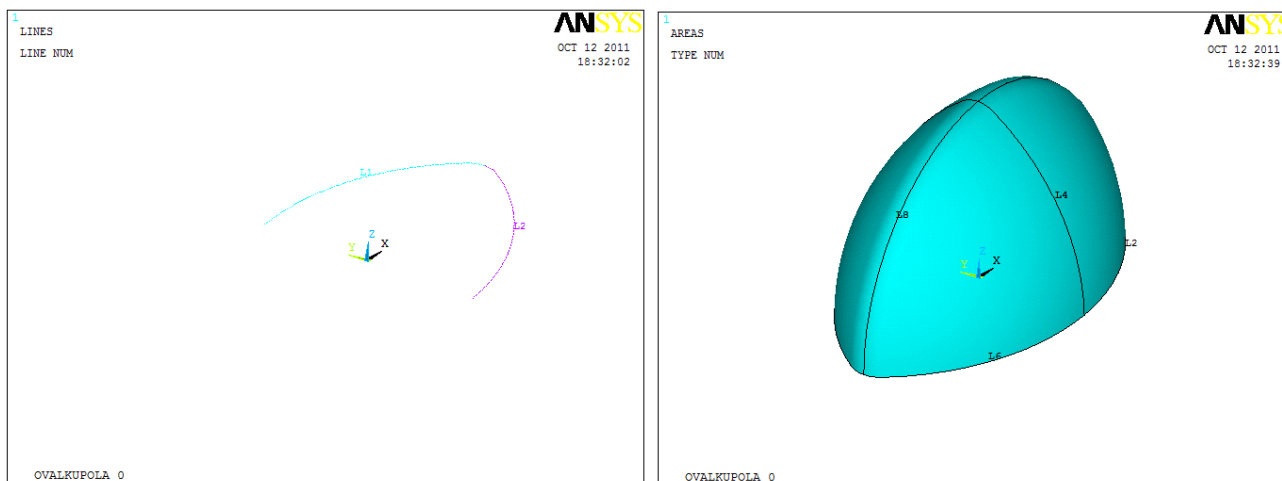
4.6. A támaszerők eloszlásának vizsgálata

A támaszerő eloszlása, annak függőleges és vízszintes komponensének nagysága rendkívül fontos adat számunkra. Ettől függ az, hogy hol lehet biztonsággal megbontani az alátámasztó szerkezeti részt, annak eltávolítása vagy károsodása esetén mekkora erőt kell ideiglenes vagy véglegesen beépített megtámasztó szerkezetekkel felvennünk stb.

Az eloszlás az alátámasztás merevségétől is függ. Jelen dolgozatban csak merev alátámasztást vizsgáltam, hogy egyáltalán képet kaphassunk az **4.táblázatban** felsorolt geometriai kialakítású ovális kupolák globális viselkedéséről. A numerikus modell kalibrációja során láthattuk, hogy önsúly teher esetén a megcsúszások kialakulása nem jellemző. Egy stabil, önsúlyára össze nem omló kupola esetén ez azt jelenti, hogy a támaszerő eloszlás egy olyan globális jellemző, amit lényegesen nem változtat meg a szerkezet folytonos vagy diszkrét jellege. A **3.2.pontban** említettem, hogy ilyen globális tulajdonságok vizsgálatára akár kontinuum modellt is alkalmazhatunk. Egy olyan parametrikus modellt építettem az ANSYS végeleemes programban, mellyel – csakúgy, mint a 3DEC esetén – bármely általános kialakítású ovális alaprajzú kupola vizsgálható. A következőekben ezt a numerikus modellt, valamint az abból kinyert eredményeket szeretném bemutatni.

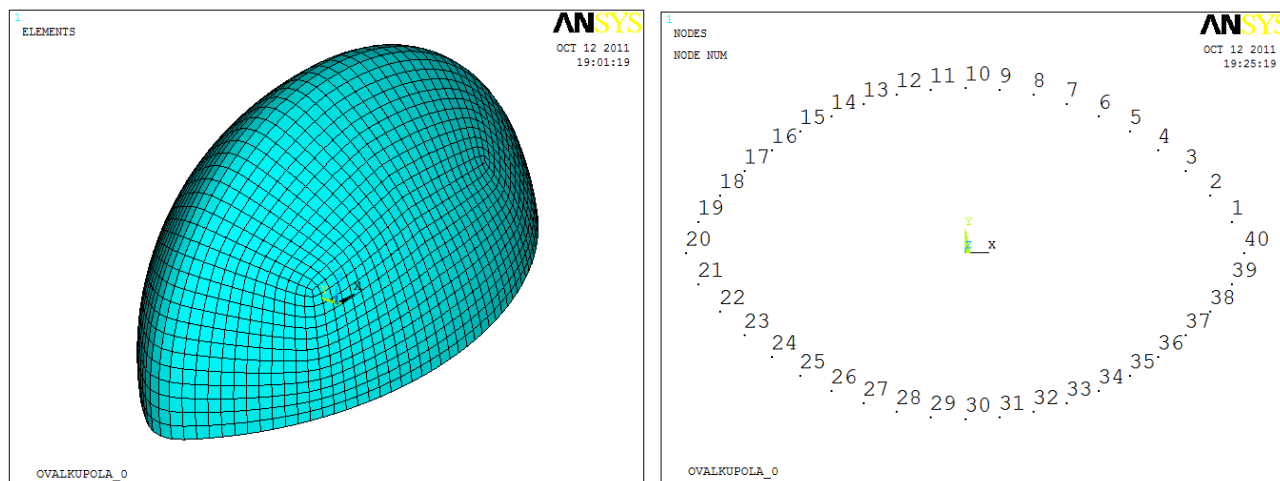
4.6.1. A végeleemes modell

A végeleemes modell esetében egyszerű héjfelületet alakítottam ki, hiszen itt nem a pontos feszültségeloszlás vizsgálata volt a cél, hanem egy globális tulajdonság jellegének kimutatása. A geometria kialakítása jóval egyszerűbb feladat volt, hiszen az ANSYS létre tud hozni forgásfelületet egyszerűen a vezérgörbe adott tengely körüli megforgatásával, tehát elegendő volt az alaprajzi görbét parametrikusan kiszerkeszteni, majd azt a kisebbik vagy a nagyobbik tengely körül megforgatni attól függően, hogy mely kialakítást akarjuk elérni vele. Egy ilyen alaprajzi görbét, illetve a megforgatásából keletkező felületet látunk az **86.ábrán**.



86.ábra Alaprajzi ovális görbe és a megforgatásával keletkező felület

Az elemek SHELL181-es elemek, melyek a Reissner-Mindlin-féle lineáris nyírási modellt alkalmazzák, illetve hajlítási és membránmerevséggel is bírnak. Az elemek vastagsági értéke mellett meg kell adni az anyagjellemzőket is, melyek ez esetben csak a sűrűség, illetve a rugalmassági modulus. Mivel a diszkrét elemes futtatásoknál a kapcsolati merevségek igen magasak voltak, a rugalmassági modulus értékét az építőelem rugalmassági modulusa szerint vettem fel első közelítésben. A hálót strukturáltan alakítottam ki négyszög elemekből. Az ANSYS képes strukturált hálót generálni, ehhez a **86.ábrán** látható kupolát alkotó vonalak mentén meg kell adni, hogy hány elemet osszon ki az adott vonalra, így ennek megfelelően próbálja felvenni a hálózatot. Ezt a strukturált hálót mutatja a **87.ábra**. (A végleges modellben a háló sűrűsége sokkal nagyobb!)



87.ábra Strukturált háló kialakítása

88.ábra Alaprajzi görbén egyenletesen kiosztott csomópontok

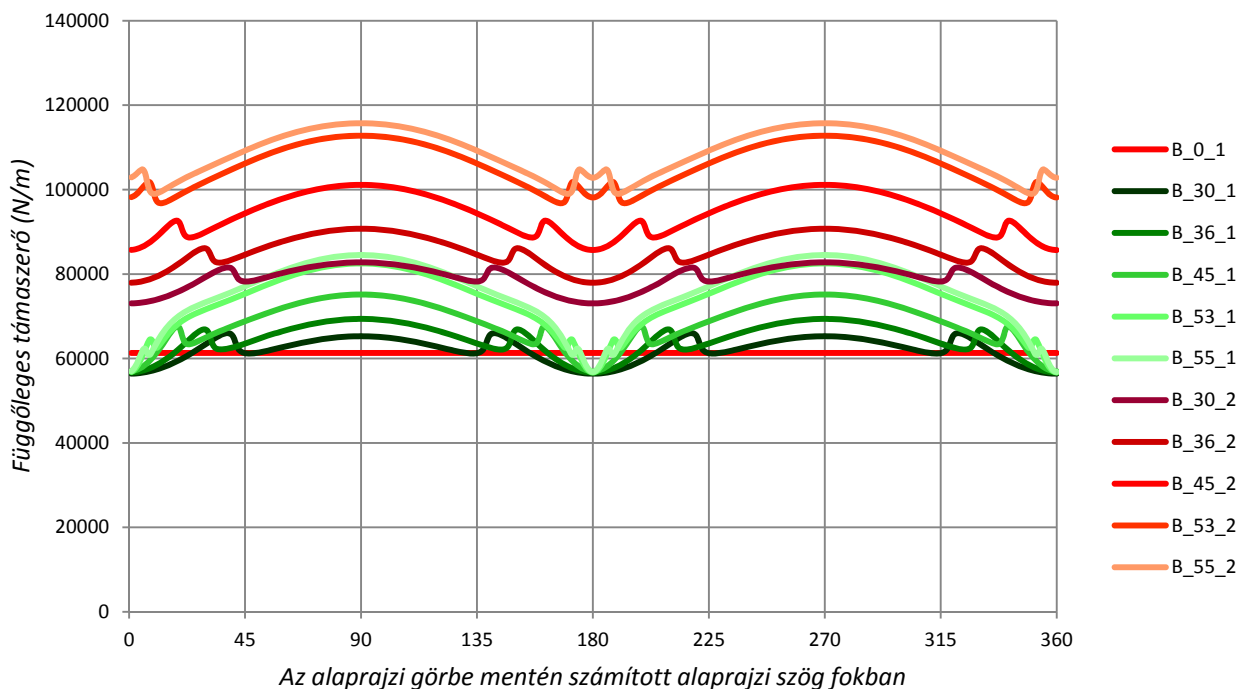
A megtámasztások az alapvonal mentén csak elfordulást engednek meg, azaz fix csuklós kialakítást választottam, hisz abban az esetben, ha a talp mentén a nyomó- és nyíróerő aránya olyan, hogy megcsúszás nem következhet be, az elemek a talp mentén mozdulatlanok, csak elfordulni képesek. A megcsúszást utólag ellenőrizhetjük le a támaszerők ismeretében. A parametrikus input file-t úgy írtam meg, hogy az kimentí egy vektorba a talppontokban működő reakcióerőket, azok x , y és z komponenseit. Ehhez az kellett, hogy az alapvonalon a csomópontok számozása nem csak hogy ismert legyen, hanem a vonal mentén haladva sorban is legyenek (lásd **88.ábra**), ezért ezt a pontsört még a háló felvétele előtt osztottam ki, majd építettem egybe a kész hálóval. A támaszerőket egyszerű lineáris statikai számítással határoztam meg.

4.6.2. Parametrikus vizsgálatok

A támaszerő eloszlása függ a merevségektől. A rugalmassági modulus értékét a **2.táblázat** mérési eredményei által határoztam meg. Ezt az értéket állandónak tekintettem, paraméternek a Poisson-tényezőt, valamint a héj vastagságát vettem. A Poisson-tényezőnek három lehetséges értékét vizsgáltam : 0 – 0.15 – 0.30, hiszen falazott szerkezetek ezen tartományba esnek bele. A héj vastagságát az önsúlyra minimálisan szükséges falvastagságok ismeretében határoztam meg. Ezen értékek a kisebbik alaprajzi tengely 4 – 6 % - a körül mozognak. Figyelembe vettem, hogy a gyakorlatban ezen szerkezetek minimálisan 1,5 – 2,0-szeres biztonsággal rendelkeznek, így hogy a megfelelő tartományt lefedjem a falvastagságokat a kisebbik alaprajzi tengely 5 – 10 – 15 – 20 % - ára vettem fel a parametrikus vizsgálat során. A **3.táblázatban** látható összes – a $\beta = 60^\circ$ - as változatot kivéve – geometriai kialakítást vizsgáltam a fenti paraméterek szerint.

Elsőként a **4.táblázatban** bemutatott, azonos alapterületű különböző kialakítású kupolákat vizsgáltam, melyeknek vastagsága minden esetben az alaprajzi rövidebbik tengely 10%-a, a Poisson-tényező pedig 0.15 egységesen. Az eredményeket a **89.ábra** mutatja. A görbék jelöléseinél a *B* és az utána következő szám a β szöget jelöli, az utolsó szám pedig a kialakítás típusát (1 – hosszabbik tengely körül megforgatva, 2 – rövidebbik tengely körül megforgatva).

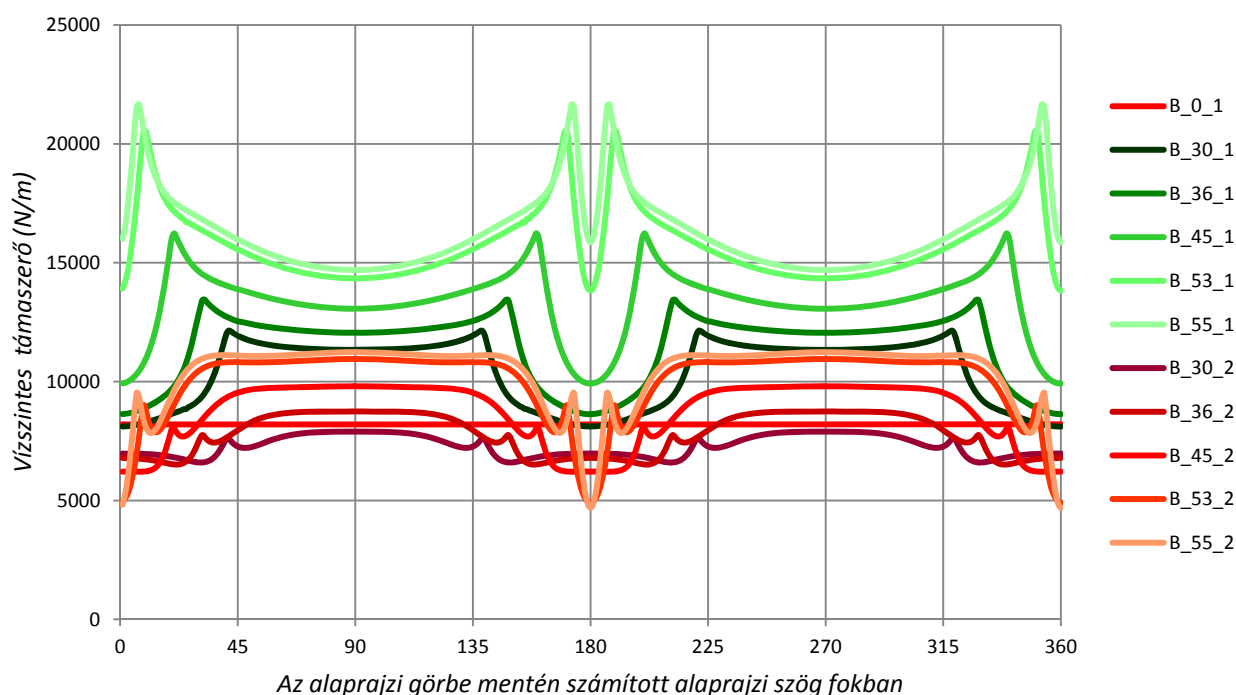
89.ábra Azonos alapterületű és t/R arányú ovális kupolák függőleges támaszerőinek eloszlása



Az ábráról többféle következtetés vonható le. Látható, hogy gömbkupola esetén a támaszerő eloszlás egyenletes. (*Ellenőrzésként: a kupola teljes súlya $M = 2R^2\pi t \rho g = 2 * 5^2 * \pi * 0.1 * 5 * 2500 * 9.81 = 1926132N$, amit a kerülettel leosztva $M/(2R\pi) = 1926132N/(2 * 5 * \pi) = 61312N/m$ adódik.*) Az ovális kupolák – hasonlóan az egyirányban teherhordó lemezekhez – a hossz tengellyel „párhuzamos” peremei mentén hordják a nagyobb függőleges terheket, illetve ennek mértéke annál nagyobb, minél elnyújtottabb a kupola, minél nagyobb a hossz tengely és a rövidebbik tengely aránya. A támaszerő eloszlás görbéjén kiugrásszerű zavarok láthatóak bizonyos helyeken. Ezek a helyek éppen az alaprajzi ovális görbe alkotó köreinek illesztési pontjai. Itt a görbe/felület ugyan folytonos, de a

görbület már nem, az illesztési pont két oldalán két különböző görbület számítható. Ezen zavarok tehát a geometria változtatásával együtt változtatják helyüket az illesztési pontokkal. A második típusú geometriai kialakítás esetén ugyanazon alaprajzi területet lefedő változatok sokkal nagyobb függőleges támaszerőt eredményeznek, mint az első típusúak. A támasz közelében lévő falak sokkal meredekebbek ez esetben, maga a kupola is nagyobb tömegű a kialakítás miatt, a nagyobb függőleges támaszerő ezzel magyarázható. Ezzel egyidőben majd látni fogjuk, hogy a vízszintes támaszerők csökkenni fognak. A következő, **90.ábra** a vízszintes támaszerőket eredőjét mutatja.

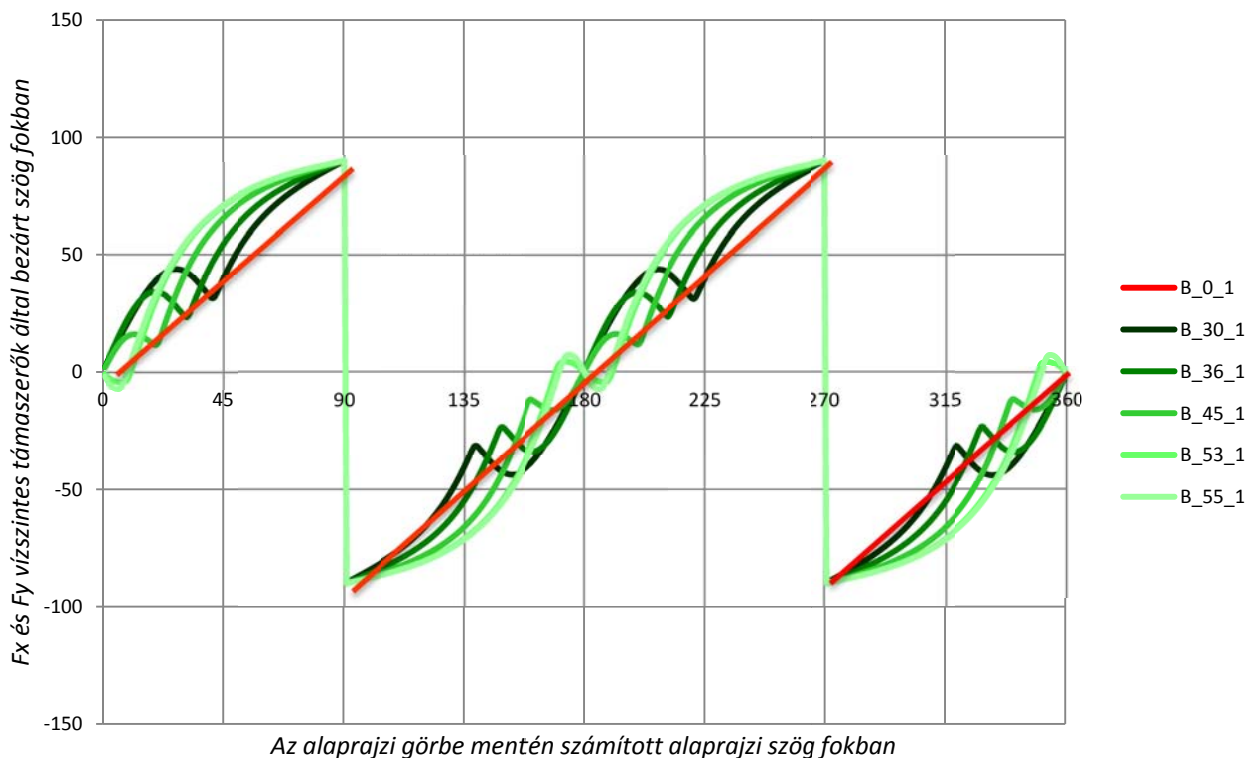
90.ábra Azonos alapterületű és t/R arányú, de különböző kialakítású ovális kupolák vízszintes támaszerőinek eloszlása



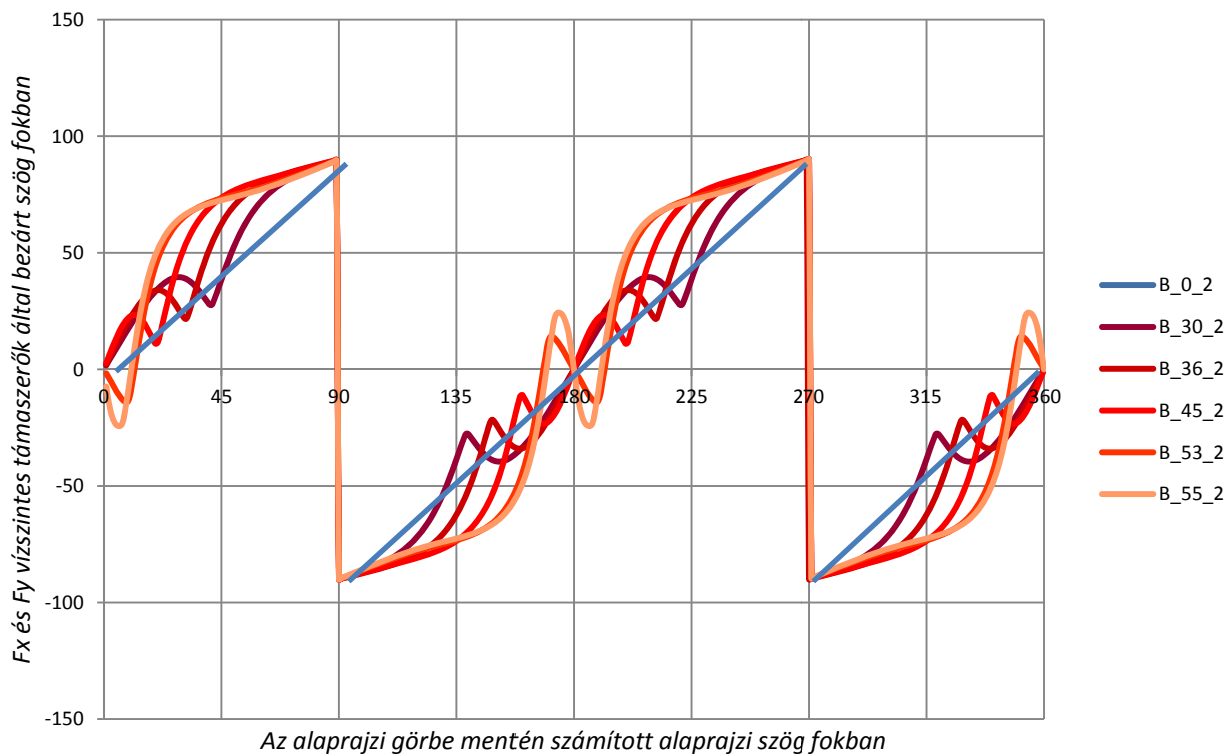
Az ábrán látható, hogy vízszintes támaszerő esetén megfordul a helyzet, az 1. típusú kialakítással, azaz a laposabb kupola esetén nagyobbak a vízszintes reakciók, sőt ha figyelembe vesszük az arányokat, akkor ez esetben sokkal nagyobb a vízszintes/függőleges reakciók aránya, mint a második típusú kialakítás esetén. Általános tendencia, hogy az elnyújtottság növelésével növekedik a vízszintes támaszerő is. Az illesztési pontoknál itt is megjelenik a zavar, ez esetben az első típusú kupolát befolyásolja lényegesebben, tehát éppen azokat a kialakításokat, amik esetében a laposabb geometria miatt eleve nagyobb a vízszintes reakciók értéke. Az már most kitűnik az ábrákból, hogy a megcsúszás valóban nem alakulhat ki. A függőleges reakció legkisebb értéke is 60000 N/m körül van, a legnagyobb vízszintes reakcióé pedig 25000 N/m alatt. Ha minimálisan 30°-os súrlódási szöget feltételezünk, az körülbelül 0.5 – 0.6-os súrlódási tényezőnek felel meg. A vízszintes és függőleges reakció értéke ezen arányszámot meg se közelíti, tehát a fix csuklós megtámasztási feltétel helyesnek bizonyult.

A következő ábrákon (**91.ábra** – 1.típus ; **92.ábra** – 2.típus) a globális derékszögű koordináta-rendszerben értelmezett F_x és F_y támaszerők által bezárt szöveget ábrázoltam.

91. ábra F_x és F_y vízszintes támaszerők által bezárt szögek 1. típusú kialakítás esetén



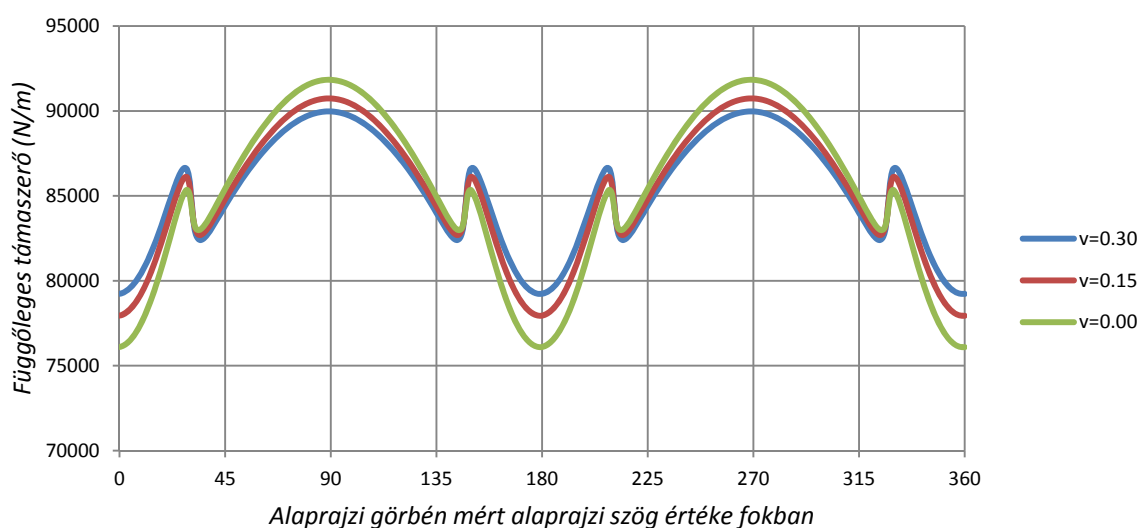
92. ábra F_x és F_y vízszintes támaszerők által bezárt szögek 2. típusú kialakítás esetén



A lineáris vonal jelenti a gömbkupolára vonatkozó adatokat, itt ugyanis a körszimmetria miatt egyenletes a vízszintes reakciók eloszlása is. A zavarok a második típusú kialakításnál nagyobbak, az elsőnél valamivel egyenletesebb a lefutás.

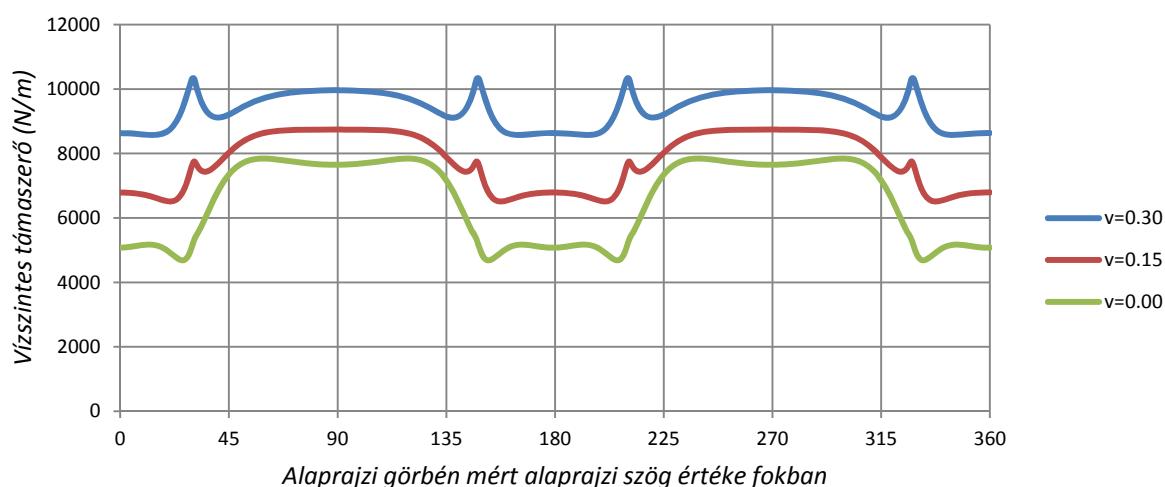
A következő lépésben a Poisson-tényező hatását vizsgáltam meg (**93. ábra**). Értékeit úgy vettem fel, hogy egy esetleges kontinuum modell építése, illetve homogenizáció során alkalmazandó értékek tartományát lefedje a vizsgálat. Csak a tendenciát vizsgáltam, a valódi – 3-4-5 oldalirányú derékszögű háromszöggel szerkesztett – egyiptomi oválist vettem alapul, a héj vastagsága a kisebbik alaprajzi tengely 10%-a, a geometria a rövidebbik tengely körüli megforgatással alakul ki.

93. ábra Függőleges támaszerő eloszlás a Poisson-tényező függvényében egyiptomis ovális kupola esetén



Növekedő Poisson-tényező esetén a hosszabbik tengellyel „párhuzamos” oldal mentén megnövekednek, a hossz tengely végeinél csökkennek a függőleges támaszerők. A növekedés, illetve csökkenés arányosan történik, tehát más Poisson-tényező esetén a görbék között lehet interpolálni. Ez a tendencia bármely más kialakításnál is hasonlóan megfigyelhető.

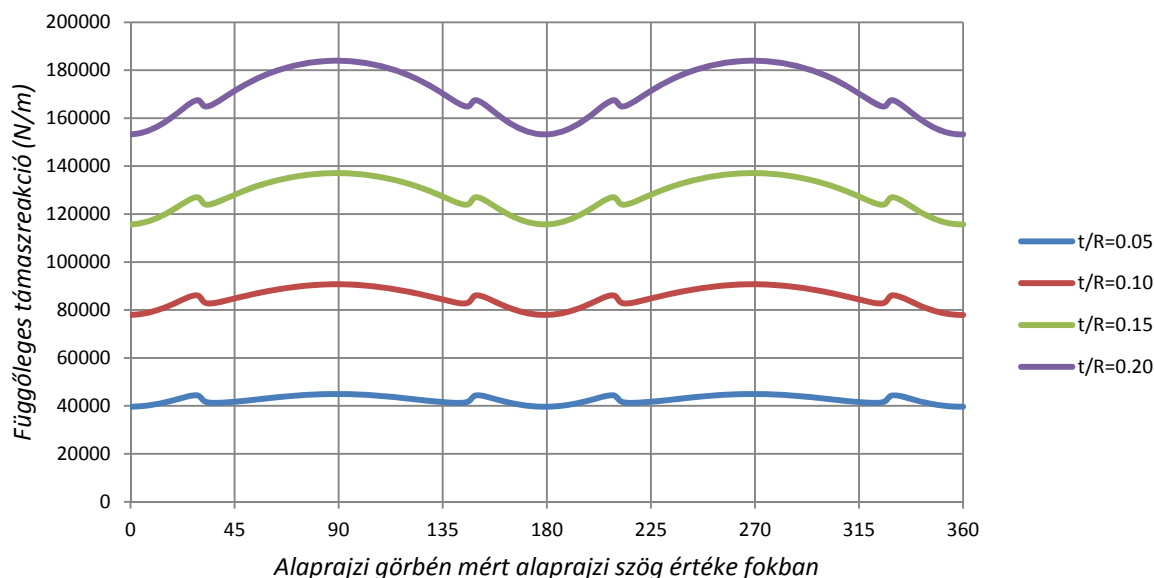
94. ábra Vízszintes támaszerő eloszlása a Poisson-tényező függvényében egyiptomi ovális kupola esetén



A vízszintes reakcióerők láthatóan (**94.ábra**) erősebben függenek a Poisson-tényezőtől, hiszen ezek a reakciók javarészt a gátolt alakváltozásokból, a talp mentén súrlódás által alakulnak ki. A tényező növelésével globálisan minden pontban növekedni fog a vízszintes reakciók értéke, ám nagyobb tényezőnél a maximális és minimális érték közötti különbség csökken, a zavar mértéke viszont nőni fog.

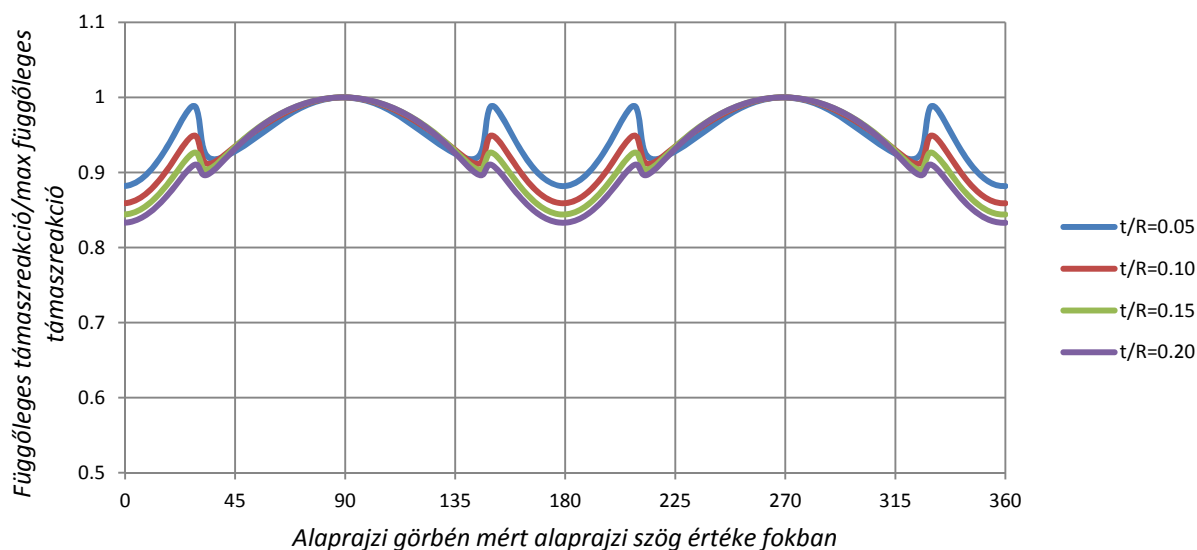
A fentieken kívül a héj vastagságának, mint paraméternek az eloszlásra való hatása is jelentős. A fenti geometriával, valamint az alaprajzi tengely hosszának 5 – 10 – 15 – 20%-ára vett vastagsággal, illetve 0.15-ös Poisson-tényezővel végeztem el a vizsgálatot, melyet a következő, **95.ábra** mutat.

93.ábra Függőleges támaszeloszlás változása a vastagság függvényében



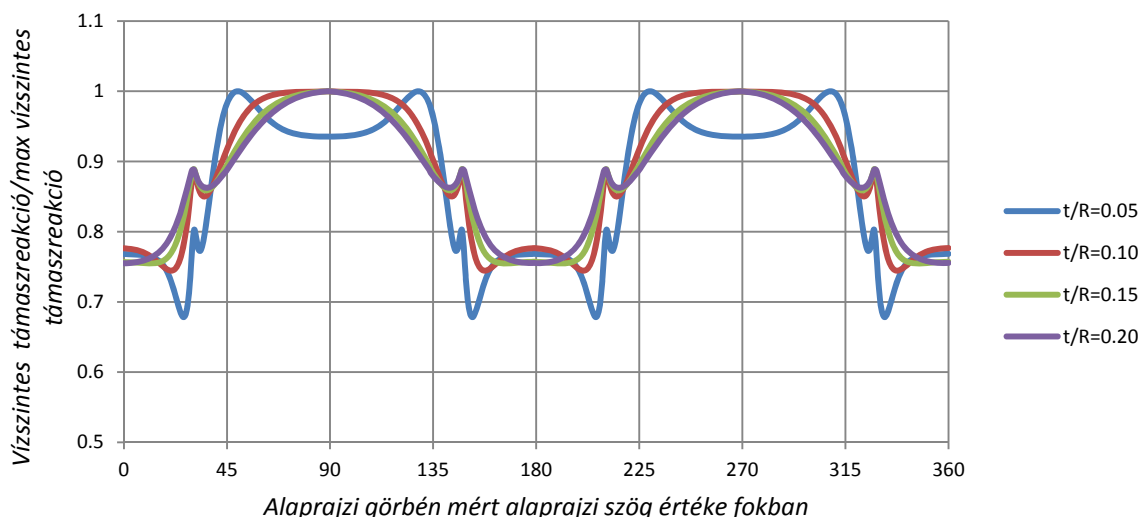
Az ábra várhatóan azt mutatja, hogy növekvő vastagságok mellett növekedni fognak a függőleges támaszerők is. A fontos az, hogy vajon a relatív eloszlás mennyire változik, azaz a talp mentén körbe haladva az eloszlás ugyanolyan marad-e. Ehhez a 90°-os értékhez normáltam le mindegyik görbét, melyet a **96.ábra** mutat.

96.ábra Függőleges támaszerő eloszlásának változása a vastagság függvényében



Látható, hogy a hossz tengellyel „párhuzamos” részekben az eloszlás független a héj vastagságától, a hossz tengely végeihez közeledve azonban a zavar mértéke annál nagyobb, minél vékonyabb a szerkezet. A $t/R = 0.20$ esetben például már alig játszik szerepet az illesztési ponton keletkező ugrás. Hasonló normálással állítottam elő a vízszintes reakcióerők ábráját is (97.ábra).

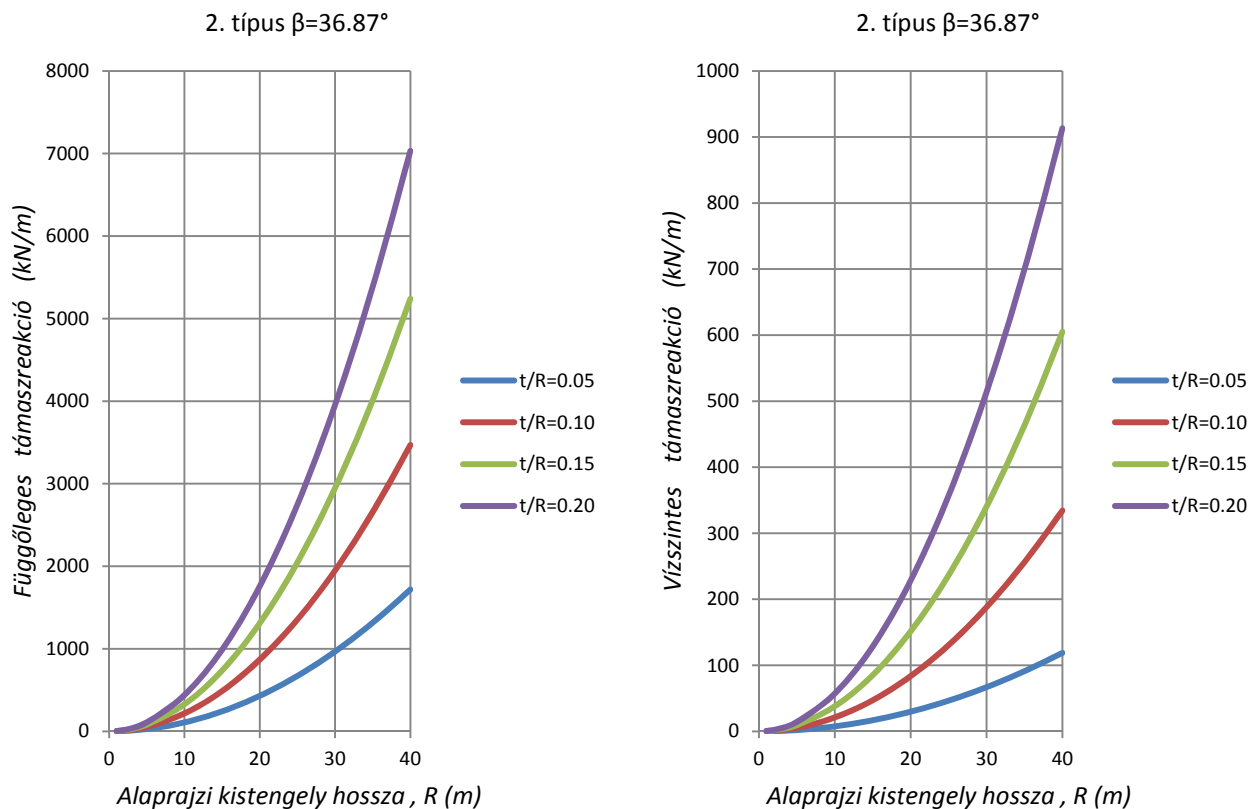
97.ábra Vízszintes támaszerő eloszlásának változása a vastagság függvényében



A függőleges reakcióerőkhöz hasonlóan itt is a vékony héj esetében a legnagyobb a zavar mértéke. A többi esetben – melyek a valós körülmények között reális vastagságok – az eloszlás minimálisan függ a vastagságtól.

Igen fontos következménye volt a vizsgálatoknak az, hogy kiderült, hogy t/R változóval R -tól függetlenül az eloszlás lefutásának jellege, a normált görbék alakja. Ez azt jelenti, hogy adott kialakításra – rögzített β szögére, mindkét fajta megforgatással – a fenti négy, gyakorlatban használatos t/R arányokkal elkészíthetők a normalizált eloszlási ábrák. Ha tehát ismerjük a kupola alapvonala mentén legalább egy pontnak az abszolút támaszerejét, akkor a többi arányosan számítható. Az abszolút támaszerő természetesen függ a kupola globális geometriájától – R -tól –, azaz annak teljes tömegétől, így erre különböző kialakításokra R és t/R függvényében parametrikus vizsgálatot hajtottam végre. A 98.ábra egy ilyen vizsgálat eredményét mutatja $\beta = 36.87^\circ$ -os, második típusú kialakítás, illetve mind függőleges mind vízszintes reakcióerők esetére, valamint 1000 kg/m^3 anyagsűrűséget feltételezve.

Ezeket a grafikonokat a többi kialakításra is előállítottam. A normált, eloszlást reprezentáló grafikonokkal együtt a következőképp használható. Ismerjük az ovális kupolánk kialakítását, valamint az R rövidebbik alaprajzi féltengely hosszát és a falvastagságot. A fenti görbéről így leolvashatjuk, hogy egy ilyen kialakítású kupolának közelítőleg mekkora függőleges és vízszintes támaszreakciója keletkezik a kitüntetett pontban akkor, ha az építőelem anyagának sűrűsége 1000 kg/m^3 . Ezt tehát a valódi anyagsűrűség ezred részével meg kell szorozni, hogy a tényleges, vizsgált kupola reakcióit kapjuk. A kapott reakciók a 96-97.ábra jelölése szerinti 90° -hoz tartozik. Mivel éppen ehhez a ponthoz képest normáltam le az eloszlást reprezentáló görbéket, ezért bármely pontban ezen reakció értéke szorozva a pontban jellemző eloszlási arányszámmal megadja az ottani reakció tényleges értékét. Azt fontos kiemelni, hogy ezek az értékek csak nagyságrendileg adják meg a támaszreakciókat, hiszen ezek teljesen merev támaszok esetére vonatkoznak. A való életben az alátámasztás rugalmas, valamint a támaszmozgások miatt átrendeződhet az erőjáték, mégis a jelleg, a nagyságrend megbecsüléséhez jól alkalmazhatóak a fenti grafikonok.

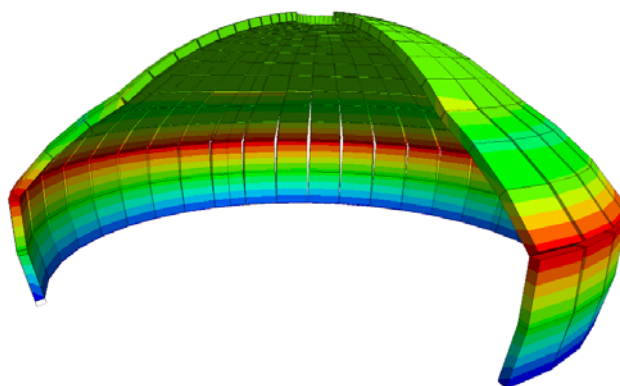


98.ábra

4.7. Összeomlási módok, repedéskép vizsgálata

Ebben a pontban néhány mondatban, illetve képpel illusztrálva szeretném bemutatni az egyes futtatások során szerzett tapasztalataim az összeomlási módokkal és a repedéskép kialakulásával kapcsolatban.

A gömbkupola összeomlási mechanizmusát már ismertettem a **4.5.1.pontban**, valamint illusztrációként rendelkezésre áll a **68. és 69.ábra**. Az **99.ábra** egy $t/R = 0.04$ aránnyal rendelkező gömbkupola tönkremenetelét mutatja. Látható, hogy a mechanizmus körszimmetrikus (az ábra az elmozdulások eredőjének nagyságát adja meg), teljesen visszaadja az elméleti, feltételezett csuklós mechanizmust. Ezen gömbkupola geometriai kialakítását, felépítési módját már láthattuk a **4.5.3.pontban**, ahol a mérethatás vizsgálatot, illetve kapcsolati jellemzők kalibrálását végeztem el. Az ábra jól mutatja, hogy ez esetben ténylegesen kialakulnak a „szeleteléses technikánál” ismertetett „szeletek”, a gömbkupola alsó részében a gyűrűirányú nyomóerők megszűnésével el is távolodnak ezek egymástól, azaz meridián irányú repedések jelennek meg. Két szemben lévő fél „szelet” láthatóan nem támaszkodik egymásnak, ha felülvilágítót helyezünk el a kupolán. Az erőátadás ez esetben a kupola felső részében kialakuló gyűrűirányú nyomóerők segítségével valósul meg. Megfelelő falvastagság esetén tehát ez a térbeli teherhordás teszi stabilá és önhordóvá a gömbkupolát.

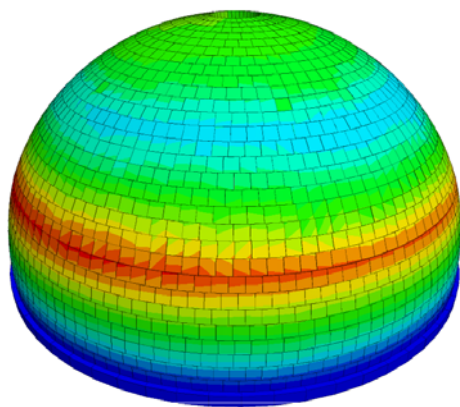


99.ábra Gömbkupola összeomlási mechanizmusa 3DEC programmal szimulálva

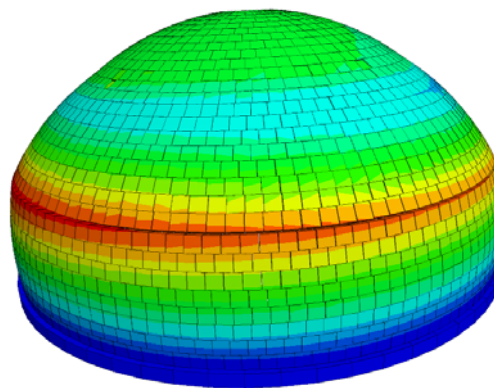
A fenti ábra látott kialakítás csak egy elméleti modell. A gyakorlatban az elemek nyilván kötésben kerülnek elhelyezésre. Ilyen falazással kialakított gömbkupola önsúlyra történő összeomlási mechanizmusait láthatjuk a **100.ábrán**.

A következőekben az első két kép mindig az adott kialakítású kupolát axonometrikus nézetben ábrázolja az összeomlás megindulása előtt (a), illetve közben (b). A színskála az elmozdulások nagyságát jelölik kéktől pirosig növekvő módon (az értékek ez esetben nem fontosak). Az utána következő két kép az összeomlás előtti alaprajzi rövid (c), illetve hosszabbik tengely menti metszetét (d) mutatja, a metszeten fekvő pontok elmozdulási vektorait, valamint a metszet mögötti szerkezeti részek elmozdulási értékeit is ábrázolva. Az utolsó két képen (e)(f) ugyanezen metszetek és ábrázolások láthatóak, ám az összeomlási folyamat közben. Gömbkupola esetén a (c) és (d) ábrát kihagytam, mert érdemi különbség nem mutatkozik az utolsó kettőhöz képest.

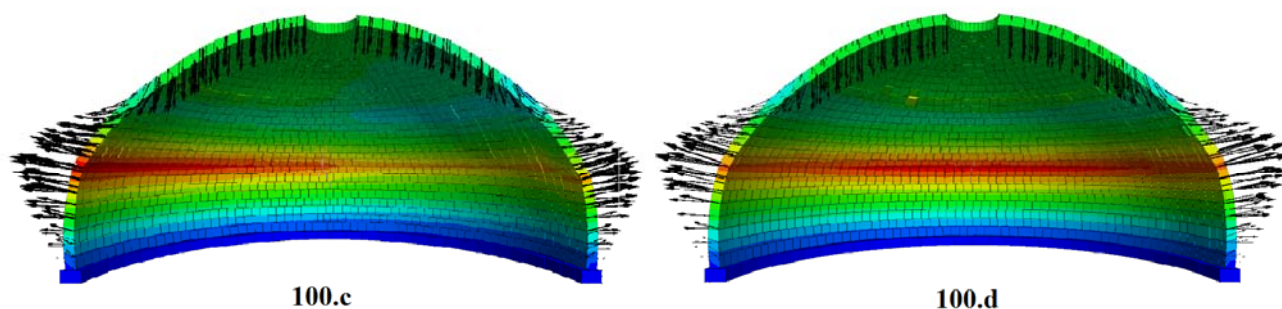
A legérdekesebb dolog, ami rögtön feltűnhet az ábrák tanulmányozása során az, hogy nem teljesen körszimmetrikus falazás esetén az összeomlási mechanizmus sem lesz körszimmetrikus, pedig a gömbkupola esetében ezt jogosan elvárnánk. A **100.a-b-c ábrákon** láthatjuk ezt az aszimmetriát, a **100.c ábra** bal oldalán nagyobb kifelé billenés következik be. A tönkremenetel egyébként a szokásos módon alakul ki, a metszeten ábrázolt vektorábrán látható, hogy a felső rész függőlegesen mozog csak, az alsó rész kifelé billen, a közbenső, két csuklóssal határolt rész pedig kifelé és lefelé mozog egyszerre. Az aszimmetrikus összeomlás kialakulásához elegendő lehet csak annyi, hogy a kövek kiosztása a darabolások révén nem egyenletes. Ekkor ahol több kisebb elem van, ott könnyebben megnyílik gyűrűirányban a kupola – több meridián irányú repedés alakul ki -, s így a gyűrűirányú erők eloszlása sem lesz egyenletes. Az alsó rész kifelé billenése során szintén szétnyílik, s mivel ezt a szétnyílást befolyásolja a gyűrűirányú erő, az aszimmetria ezen keresztül máris biztosított.



100.a

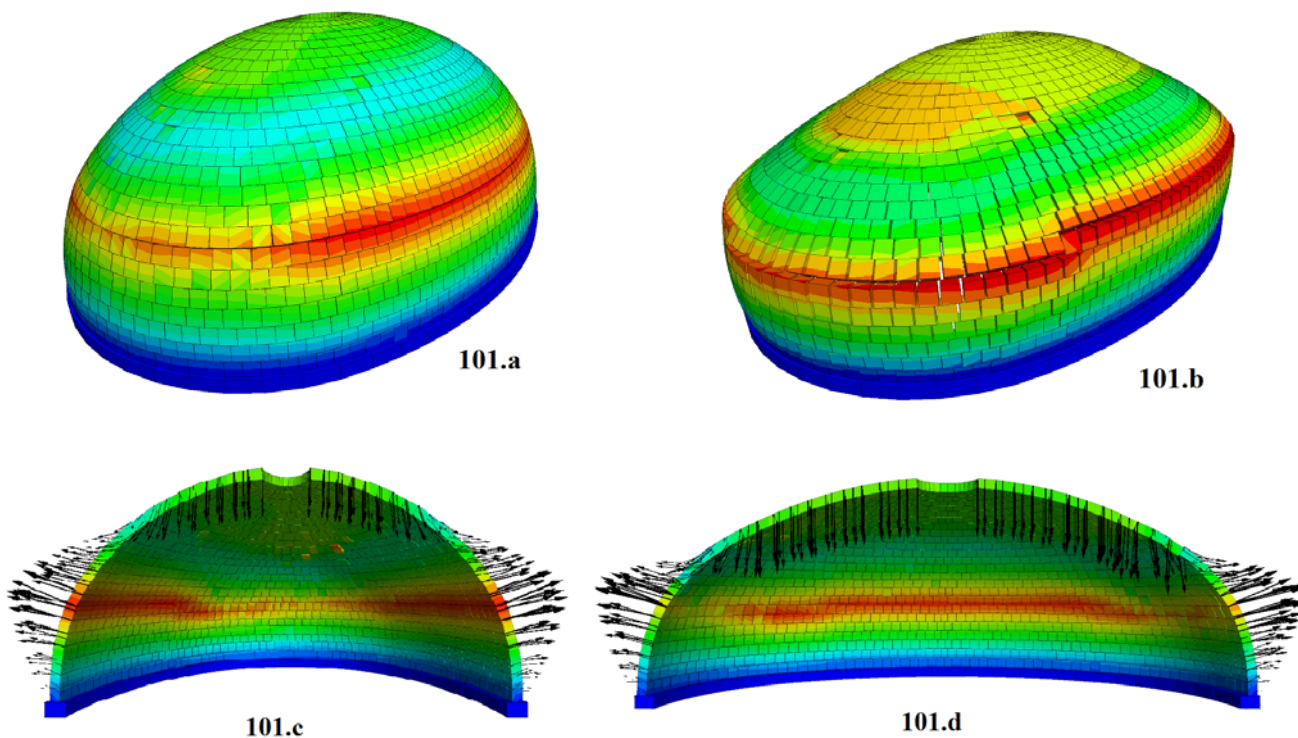


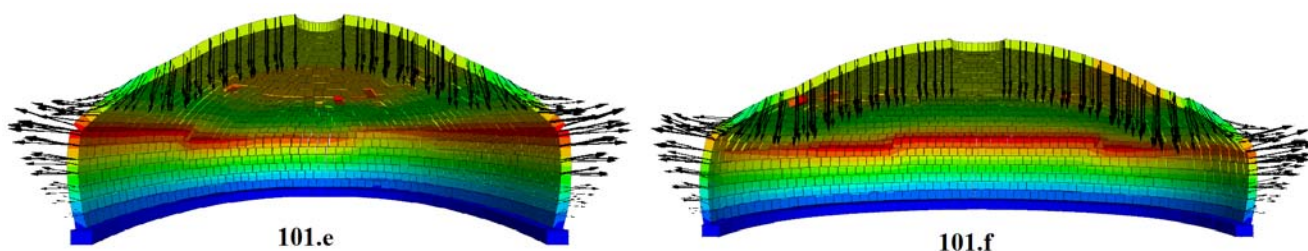
100.b



100.ábra Összeomlási mechanizmus; 1. típusú kialakítás; $\beta = 0^\circ$

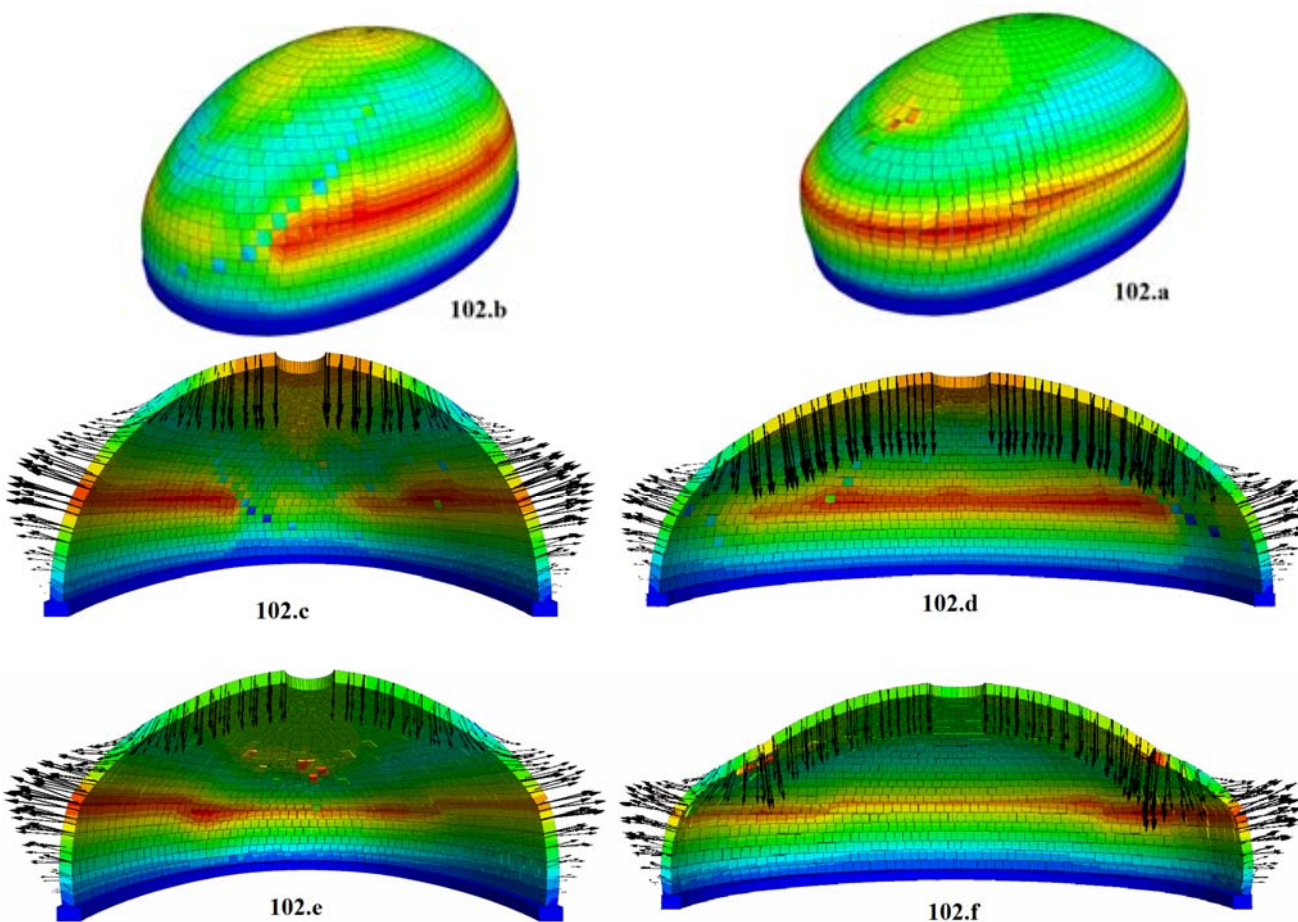
Az 101.ábra a 4.táblázat szerinti kialakítások $\beta = 30^\circ$ -os és első típusú változatának összeomlási mechanizmusait mutatja. A mechanizmus itt is szimmetrikusnak indul, majd a későbbi fázisokban aszimmetrikussá válik. A csukló sorok magassága láthatóan változik, azaz térgörbét alkot egy-egy csukló sor. Az alaprajzi görbe hossz tengelyével „párhuzamos” részekben magasabban, míg a kis görbületi sugarú, hossz tengelyt lezáró részekben alacsonyabban halad ez az elfordulási tengely (piros részek). A mechanizmus ennek ellenére hasonló a gömbkupoláéhoz : három csukló sor osztja meg a szerkezetet, a felső rész lefelé mozog, az alsó rész kifelé billen, a középső rész pedig kifelé és lefelé mozog. Érdekesség, hogy ovális kupolák esetén, ahogy ez ebben az esetben is látható, előfordulhat a geometria kialakításából adódóan az, hogy egyes elemek az összeomlás során egyszerűen kicsúsznak a többi, szomszédos elem közül. A geometriai átalakulások során összefeszülhetnek úgy az elemek, hogy az addig a szomszédai által átadott nyomóerő révén stabilnak vélt elemre már nem hatnak ezen stabilizáló nyomóerők, így kicsúszik a többi elem közül. A repedésképp itt is a meridián irányú repedésekből áll. Ovális kupolák esetében felülnézethől ezek a repedések nem a kupola geometriai középpontja felé tartanak, hanem mindig a vízszintes metszetek alkotta görbékre merőlegesen futnak. A megnyílások mindig a kisebb görbületű részekben lesznek nagyobbak, azaz esetünkben a hossz tengely végénél lévő részekben.





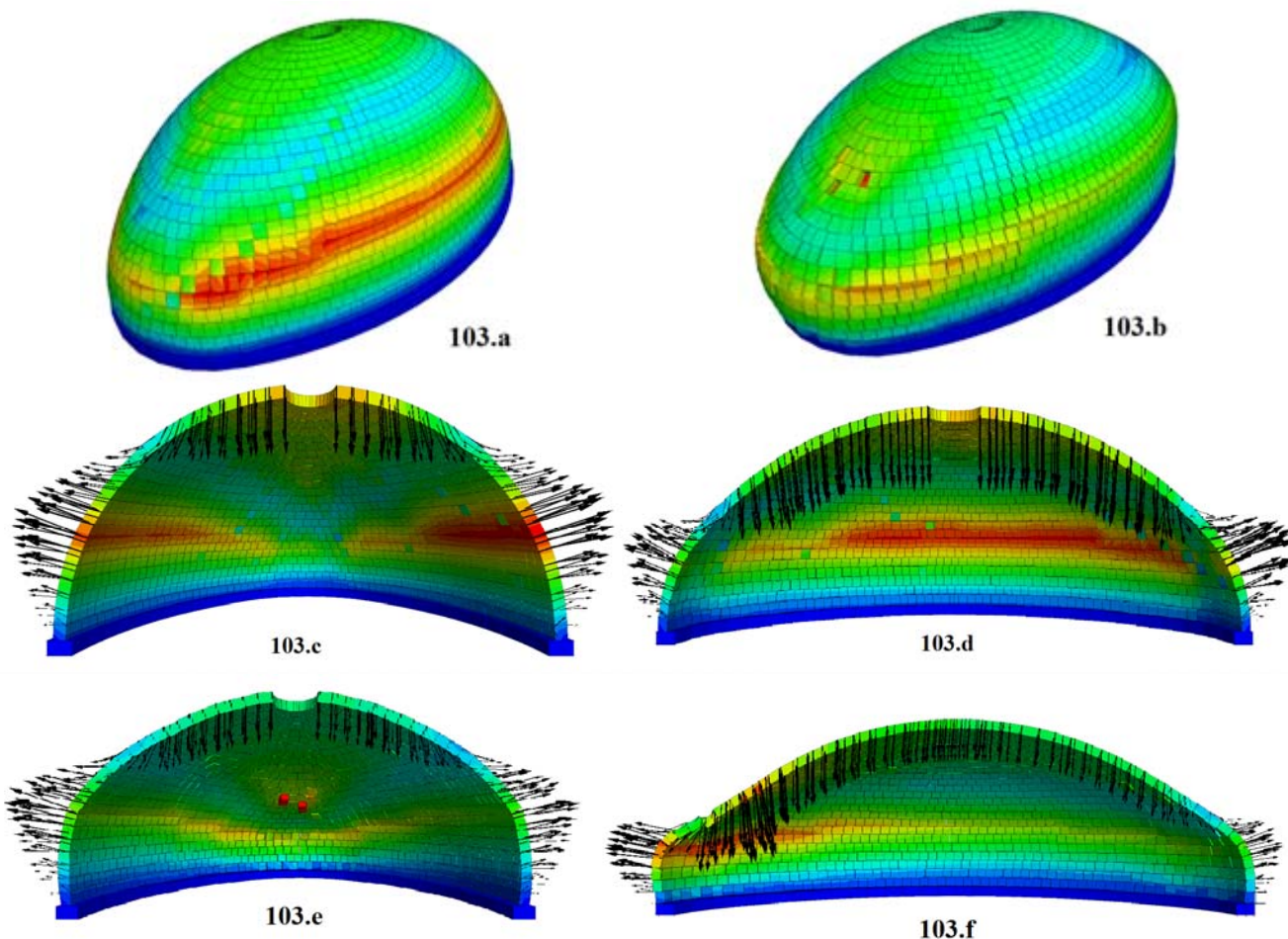
101.ábra Összeomlási mechanizmus; 1.típusú kialakítás; $\beta = 30^\circ$

A következő, **102.ábrán** a $\beta = 36.87^\circ$ -os, első típusú kialakítás látható. Az előzőekben elmondottak érvényesek itt is, azonban kevésbé látszik, de a közbenső csuklósorok közelebb kerültek egymáshoz, valamint mindkettő pozíciója lejjebb került. Ilyen módon a hossz tengely végénél lévő, kis görbületi sugárral rendelkező részek egyre instabilabbá válnak, kibillenésük a hossz tengellyel párhuzamos részek kibillenését megelőzi. Ekkor a hossz tengely végéhez közeli felsőbb részek alátámasztása megszűnik, ezeken a részeken omlik be elsőként a kupola. Ez látható az **102.f ábrán** is : a hossz tengelyre merőleges metszetekben, a végektől távol, a belső részekben hasonló a mechanizmus, mint a gömbkupolánál, az egyes részek analóg módon mozdulnak el. A hossz tengellyel párhuzamos metszetben azonban az látszik, hogy a felső részek itt is függőlegesen lefelé mozognak ugyan, de az alsó részek kibillenése következtében a közbenső (gömbkupola esetén lefelé és kifelé elmozduló) részek már jórészt a kupola belseje felé mozdulnak, omlanak be.

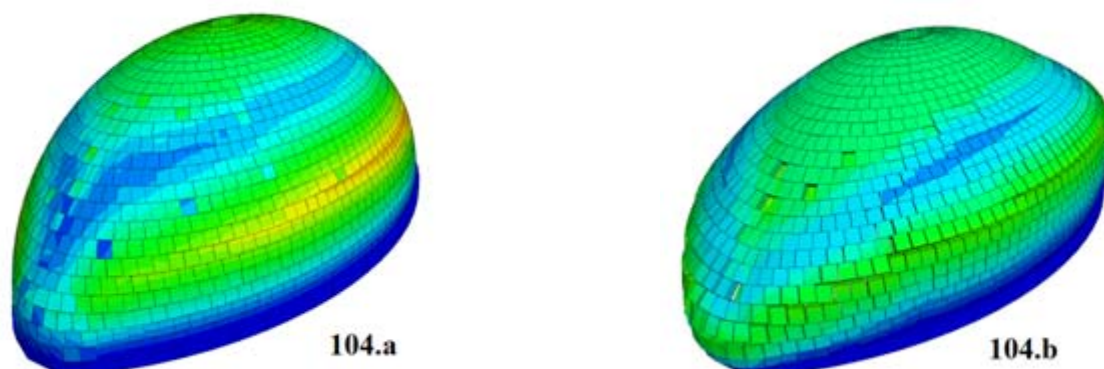


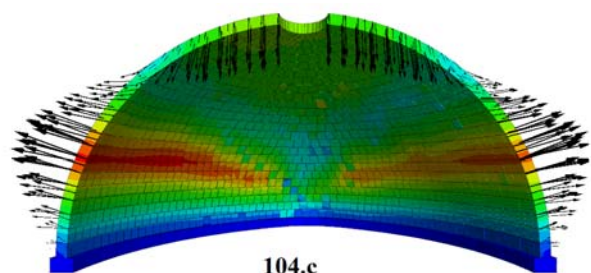
102.ábra Összeomlási mechanizmus; 1.típusú kialakítás; $\beta = 36.87^\circ$

Az első típusú kialakítások között vizsgáltam még a $\beta = 45^\circ - 53.13^\circ - 55^\circ$ -os változatokat is, a fentiekhez hasonló ábrásokat közlöm (103-104-105.ábra). Mindegyik esetre a már említett jellemzőket lehetne felsorolni, természetesen az elnyújtottság (egymáshoz egyre közelebb és alacsonyabbra kerülő csuklósorok, mechanizmus eltérése a gömbkúpólától) és a minimális görbületi sugár (repedéskép, repedéstágasság függése) változásának figyelembevételével.

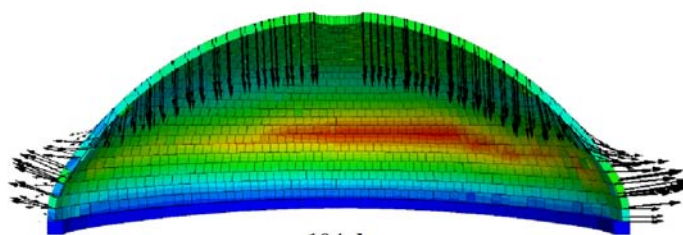


103.ábra Összeomlási mechanizmus; 1.típusú kialakítás; $\beta = 45^\circ$

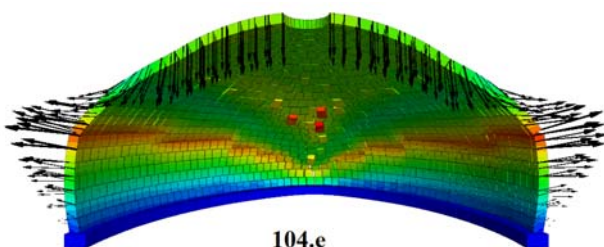




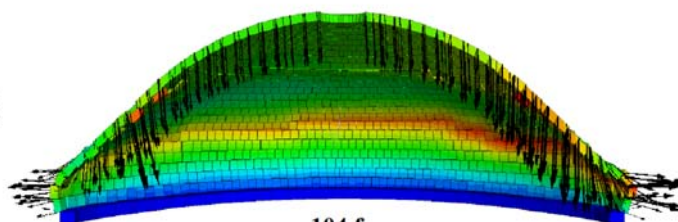
104.c



104.d

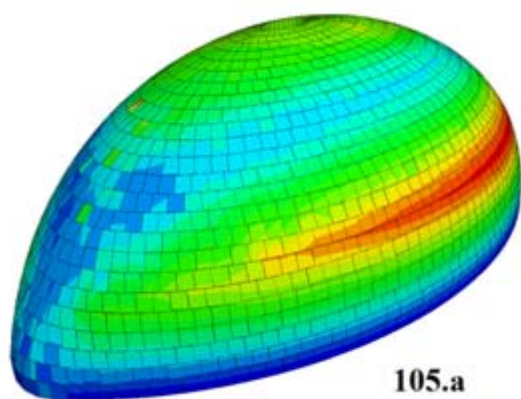


104.e

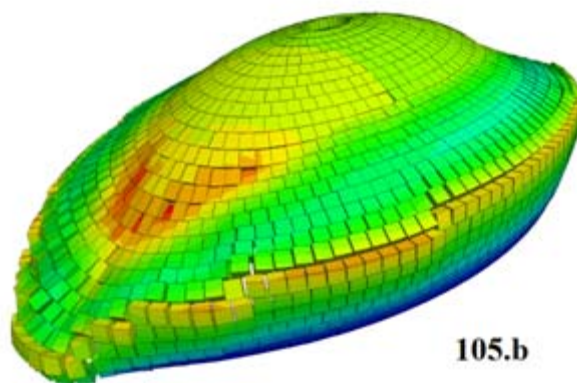


104.f

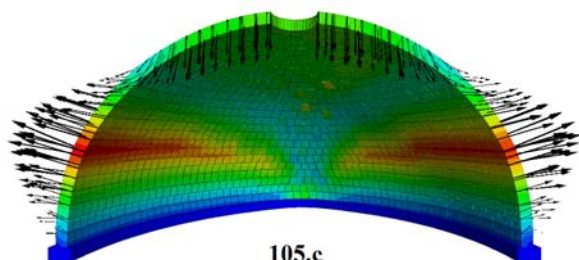
104.ábra Összeomlási mechanizmus; 1.típusú kialakítás; $\beta = 53.13^\circ$



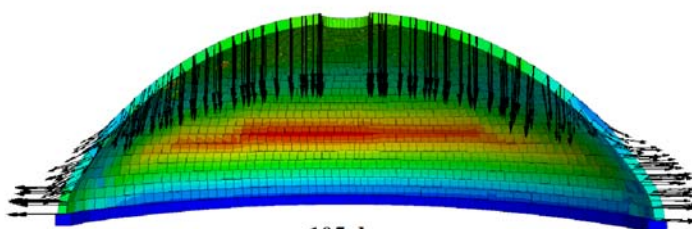
105.a



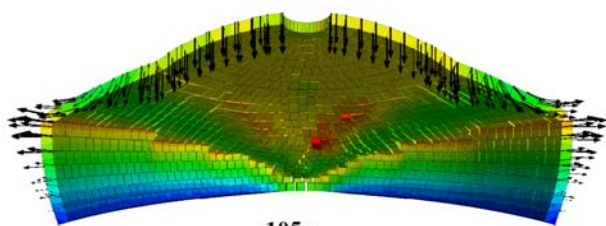
105.b



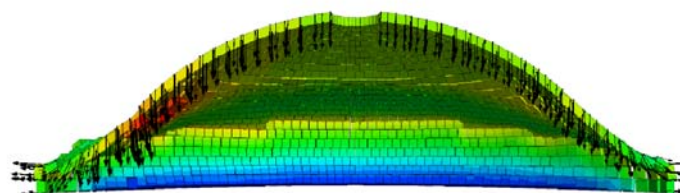
105.c



105.d



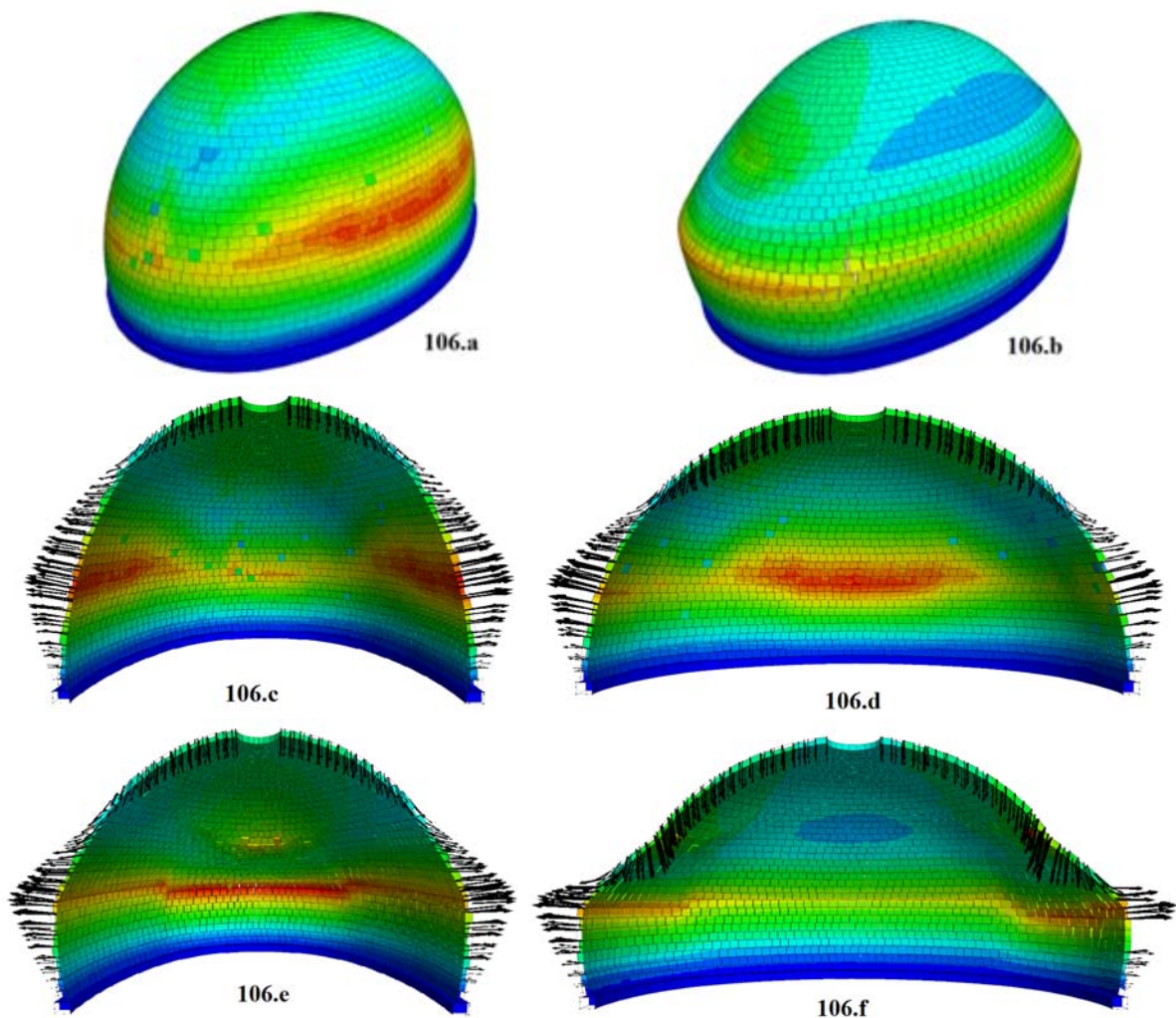
105.e



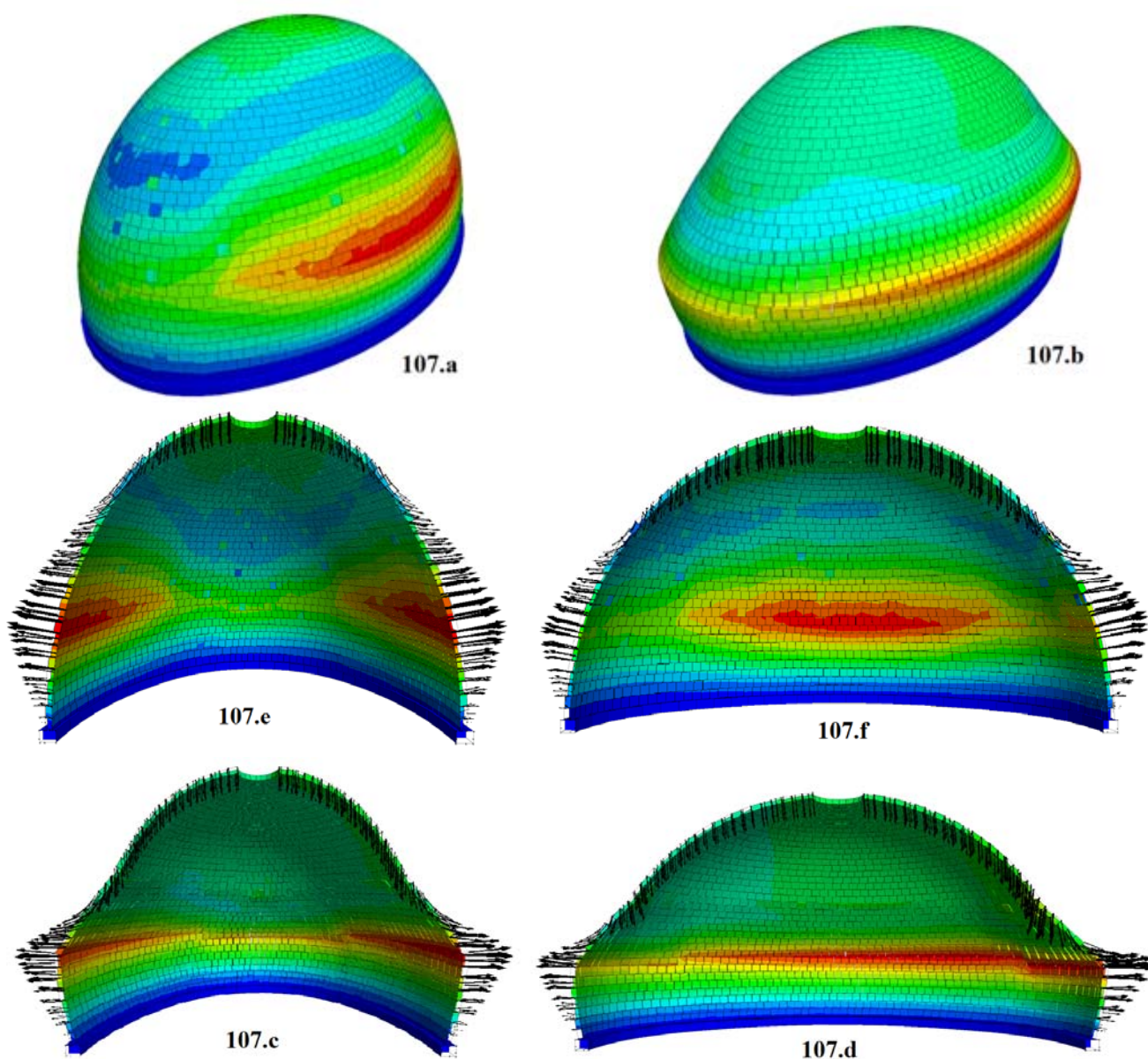
105.f

105.ábra Összeomlási mechanizmus; 1.típusú kialakítás; $\beta = 55^\circ$

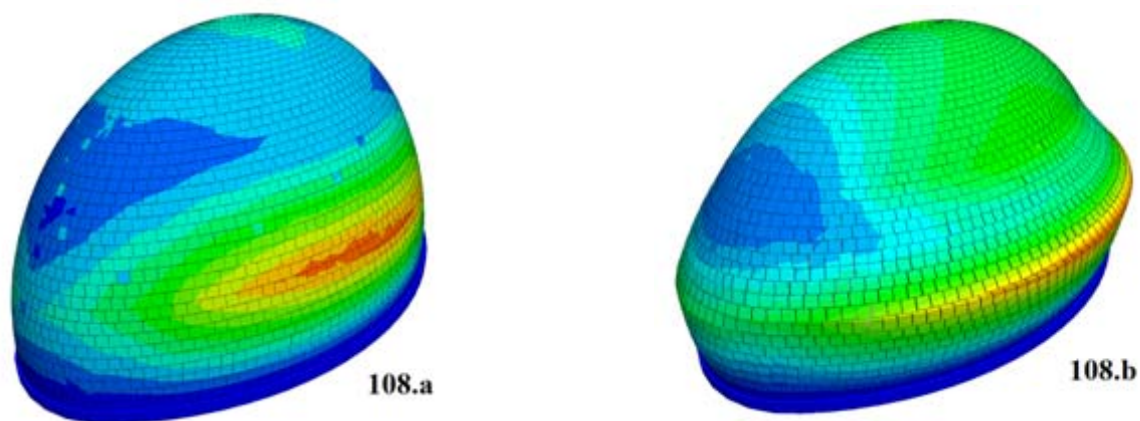
A második típusú kialakítások tekintetében elsőként a $\beta = 30^\circ - 36.87^\circ - 45^\circ$ -os eseteket mutatom be. Ezek összeomlásainak kialakulását mutatja a soron következő három ábra : **106-107-108. ábrák**. Azért került ez a három változat előre, mert a második típusú kialakítás esetén ezek az $e < 2.0$ elnyújtottsági mutatóval rendelkező kupolák hasonlóan viselkednek, mint az első típusú megforgatással előállított változatok. A rövidebbik tengellyel párhuzamos metszetekben csúcsíveket kapunk, a csúcsíves boltívekről pedig ismeretes (lásd (91)-t), hogy egyrészt stabilabbak, mint a hagyományos félkör alakú boltívek, valamint az összeomlási mechanizmusuk – a csuklók helyétől eltekintve – azonos. Ez azt jelenti, hogy hasonlóan az első típusú boltozatok esetében az összeomlási mechanizmus itt is a gömbkupoláéhoz hasonló a hossz tengelyt lezáró részekről távol eső, belső részekben, melyet ezen metszetek elmozdulási vektorábrái is alátámasztanak. Érdekes megfigyelni, hogy a csuklók kialakulása egy kialakítás esetén majdnem végig egy magasságban következik be, azaz majdnem egy síkban fut egy-egy csukló sor, ellentétben az első típusnál látott, az elnyújtottság mértékével egyre nagyobb szintkülönbségekkel rendelkező csukló sorok térgörbéivel. A végleges összeomlás hasonló a nagy elnyújtottságú első típusú kupolák mechanizmusához. A boltozat alsó, közbenső csukló sora által meghatározott alsó részek kifelé billennek, de a hossz tengelyek végénél ezt a kibillenést kevésbé tudja követni az eggyel magasabban fekvő közbenső rész, s így egy idő után beomlik a boltozat belseje felé. Ezen kialakítások esetén is megfigyelhető egy-egy építőelem individuális kicsúszása, lehullása. A repedéstágasság itt is a hosszabbik tengely végénél lévő részeknél lesz nagyobb mértékű.

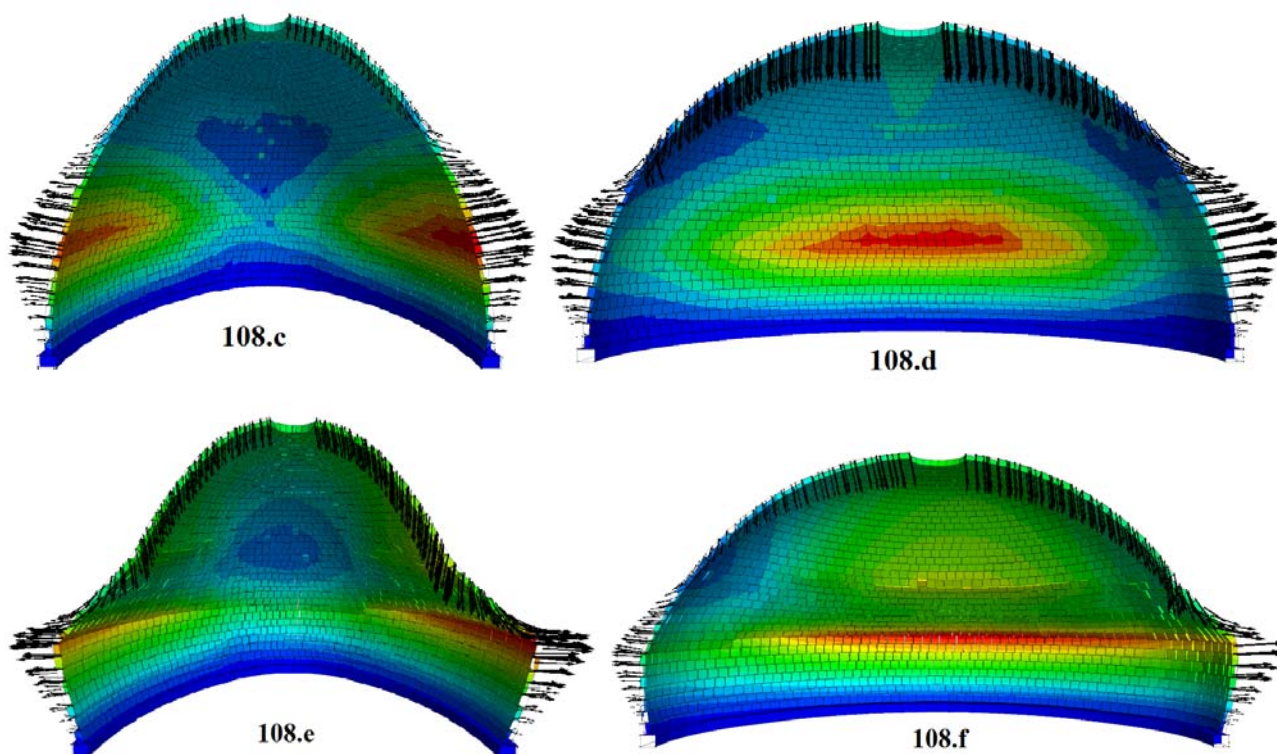


106. ábra Összeomlási mechanizmus; 2. típusú kialakítás; $\beta = 30^\circ$



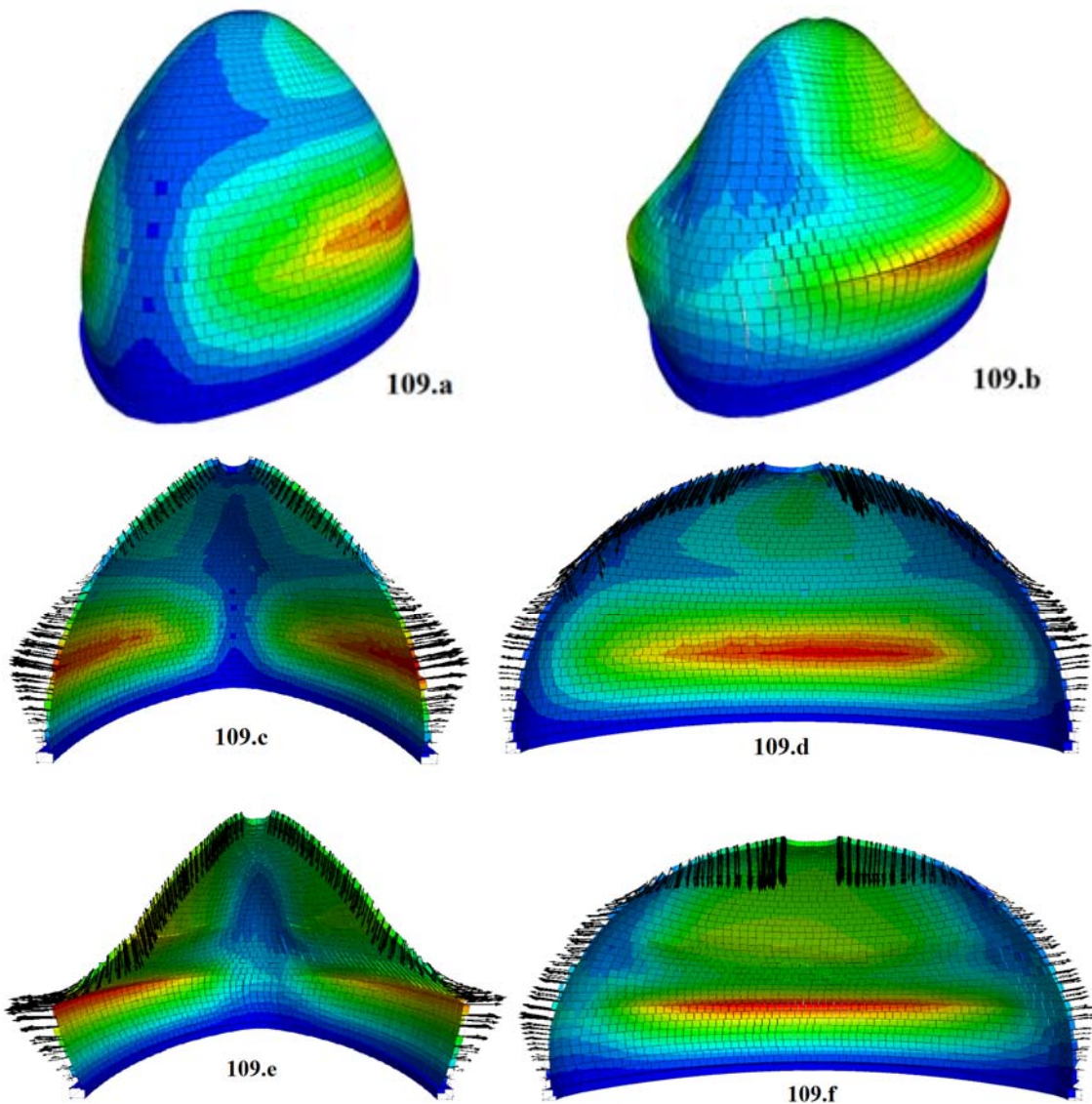
107.ábra Összeomlási mechanizmus; 2.típusú kialakítás; $\beta = 36.87^\circ$



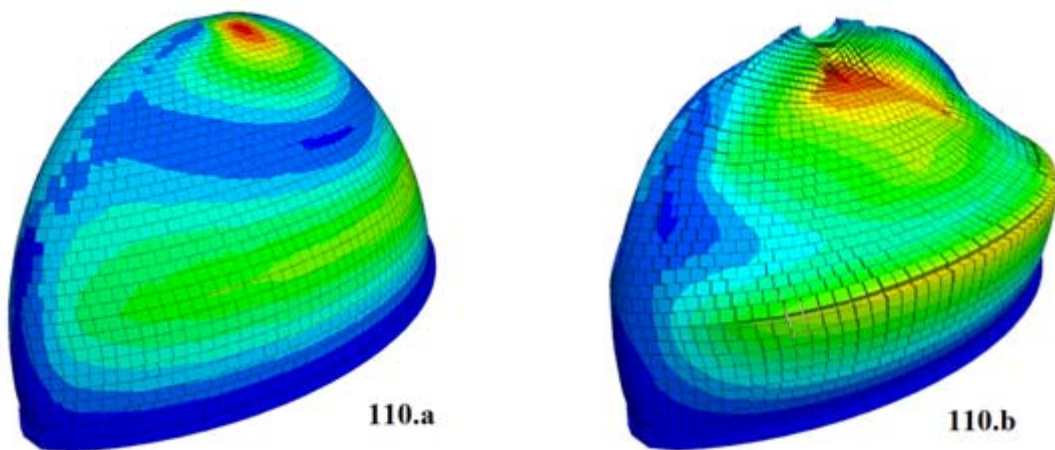


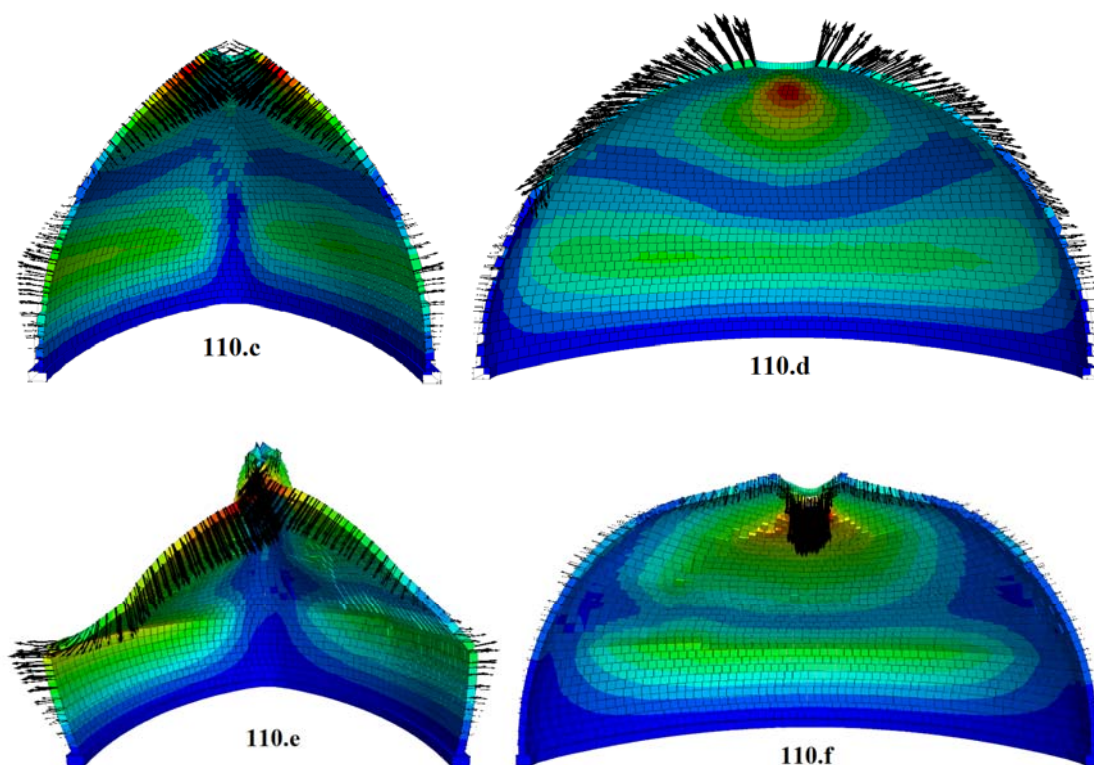
108.ábra Összeomlási mechanizmus; 2.típusú kialakítás; $\beta = 45^\circ$

Az $e > 2.0$ elnyújtottsági számmal rendelkező kupolák esetén, azaz a $\beta = 53.13^\circ$ és 55° -os változatoknál (109-110. ábra) egy érdekes dolog figyelhető meg. Az alaprajzi görbe a hossz tengelyek végénél egyre csúcsosabbá, hegyesebbé válik, így a megforgatás után a felületen ez a hossz tengely mentén, a hossz tengely fölött egy merevítő ívet eredményez. Ez a merevítő ív a boltozat hossz tengelyének végeihez vezeti le az erőket. Az egyre elnyújtottabb boltozatok esetében a rövidebbik tengellyel párhuzamos metszetekben egyre nagyobb görbületi sugarú, egyre kisebb görbületű csúcsívek keletkeznek. A térbeli membrán teherviselés annál hatékonyabb, minél jobban görbült a boltozat felülete. Az egyre kisebb görbuletek azt eredményezik, hogy a hajlítás is egyre inkább dominánssá válhat ezeken a közel sík részeken, így a nyomásvonalat könnyen kitérítetheti a keresztmetszetből ez az erőjáték. A merev ív és az ennek két oldalról nekitámaszkodó kevésbé görbült, hajlításnak is kitett részek közösen azt eredményezik, hogy egy-egy csukló sor már nem egy zárt görbe, hanem azok a merevítő ívnél, azaz a hossz tengely végeinél megszakadnak. Az összeomlási mechanizmus során a merev ív talpánál lévő részeket a többi rész kifelé tolja, erre ez a merevítő ív a boltívhez hasonló elmozdulásokkal reagál, de a többi rész mozgásához képest relatív mozdulatlanak tekinthető. Az ezen kívül eső részekben a magasság mentén két helyen, illetve a talpnál alakul ki csukló sor – az eddig megszokott módon –, a merevítő ív megtámasztó hatása révén azonban ezek a részek külön-külön a merevítő ív két oldalán omlanak be, az alsó részek itt is kifelé billennek. A repedések ilyen kialakítások esetén a merev és kevésbé merev részek találkozásánál, azaz végig a merevítő ív mentén alakulnak ki, illetve meridián irányban a már megszokott módon.



106.ábra Összeomlási mechanizmus; 2.típusú kialakítás; $\beta = 53.13^\circ$





106.ábra Összeomlási mechanizmus; 2.típusú kialakítás; $\beta = 55^\circ$

4.8. Összefoglalás

Jelen dolgozat ovális alaprajzzal rendelkező kupolák viselkedését tárgyalta önsúly teherre. A vizsgálataim között kiemelkedő szerepet kapott az összeomlás, stabilitásvesztés elkerüléséhez szükséges minimális falvastagságok meghatározása különböző kialakítások esetén. Egyszerű, gömbkupola esetére megmutattam, hogy a kinematikai módszerrel – ha csak feltételezések árán is – hogyan lehet levezetni analitikus/numerikus úton ezt a szükséges, minimális vastagságot. A gömbkupolára vonatkozó megoldást referenciaként használtam fel, a további, bonyolultabb geometriák vizsgálatára a 3DEC diszkrét elemes programban építettem numerikus modelleket mind merev elemekkel, mind deformálható elemekkel szimulálva a falazatot. A numerikus futtatások igen érdekes eredményekkel szolgáltak. A merev és a valódi, mért adatokkal kalibrált deformálható elemekkel történő számítások eredményei szerint a merev elemekkel történő számítás a biztonság kárára téved a gömbkupolára vonatkozó eredmény kivételével. Az a feltételezés tehát, hogy az építőelemek deformálhatósága elhanyagolható, ez esetben megbukott. Az is kiderült, hogy a gömbkupolánál relatív kisebb falvastagságokkal is épülhetnek ovális kupolák, melynek eredményeképpen egyes kialakítások az építőelem felhasználása terén gazdaságosabbak is lehetnek a gömbkupolánál.

Ezen kupolák támaszerő eloszlásának vizsgálata során ismét érdekes eredmény született. Minden egyes esetben ugrás fedezhető fel az eloszlásban. Ez az ugrás éppen ott van, ahol az alaprajzi görbét alkotó ívek illesztési pontjai találhatók, azaz a görbület megváltozásának környékén. A támaszerőket rugalmas alapon számítottam - hisz mint globális jellemző vehető figyelembe -, valamint merev támaszokat feltételeztem. Ez nem tükrözi a valóságot, hisz mindenképpen ki fognak alakulni egyenlőtlen süllyedések, illetve maga az alátámasztó szerkezet sem feltétlen végtelen merev, mégis a támaszerők nagyságrendjének megbecsülésére alkalmas ez az eljárás. Paraméteres vizsgálatokkal



grafikonokat állítottam elő, melyek a falvastagság és a jellemző alaprajzi rövidebbik tengely ismeretében megadják egy kitüntetett pont abszolút támaszerőit (függőleges és vízszintes). Egy másik grafikonon az alaprajzi görbén körbe haladva ábrázoltam, hogy ezen kitüntetett pontban lévő érték hogyan aránylik a többi pontban számítható értékekhez, azaz egy normált eloszlási ábrát készítettem. Így a két fajta grafikon segítségével a legkülönbözőbb kialakítások támaszerői meghatározhatók nagyságrendileg bármely talppontban.

Az utolsó részben láthattuk az egyes esetek összeomlási módjait, a repedések, megnyílások jellemző kialakulását. Igyekeztem a futtatások során tapasztalt jellegzetességeket - amennyire lehetett így ábrákon keresztül – minél részletesebben ismertetni.

A fenti vizsgálatokkal képet kaphattunk az általánosságban kevesebb figyelmet élvező ovális kupolák globális viselkedéséről, a minimálisan szükséges falvastagságokról, a gazdaságosságukról, a támaszerők eloszlásáról, az összeomlási módokról és a repedések kialakulásáról önsúly teher esetére. A vizsgálatok eredményei ilyen módon segítségünkre lehetnek egy egyedi, ovális alaprajzú kupolával kapcsolatos probléma megoldásában.

5. További célkitűzések

Már a dolgozat témájának kiválasztásakor rengeteg kérdéssel álltam szemben, a dolgozat témájául szolgáló vizsgálatok során pedig újabbak és újabbak merültek fel, melyeket érdemes lehet megvizsgálni. A minimálisan szükséges falvastagságok (esetleg a támaszerők eloszlása) kapcsán a következő vizsgálatokat lehetne még elvégezni :

- a megoldás függősége a deformálható elemek anyagjellemzőitől,
- a megoldás függősége a kapcsolati merevségektől,
- hogyan változik a megoldás, ha nem merev támaszokat feltételezünk,
- esetleg más, teljesen általános kialakításokat is megvizsgálni.

A támaszeloszlással és repedések kialakulásával kapcsolatban önsúly teher esetére a vizsgált kialakításokkal kapcsolatban elegendő adattal bírunk. Fontos lehet azonban más terhek vizsgálata is, még akkor is, ha ilyen szerkezetek esetén az önsúly teher a domináns teher. Egyéb terhek bevonása a vizsgálatokba a következő kérdésekhez vezet :

- milyen a különböző kialakítású kupolák teherbírása féloldalas teherre (pl. hóteher),
- pontszerű terhekre,
- egyéb foltterhekre,
- szeizmikus terhekre,
- egyenlőtlen támaszsüllyedésre.

Mindegyik esetben a teherbírás vizsgálatán kívül fontos a támaszerők eloszlásának és a repedéskép kialakulásának jellemzőinek megismerése.

A fent felsorolt célkitűzéseket, felmerült kérdéseket, illetve azok egy részét egy későbbi dolgozatom során mindenképpen szeretném teljes körűen megvizsgálni, hogy még jobban megismerhessük az ovális kupolák mechanikai viselkedését, teherbírását, hogy minél biztonságosabban tudjunk eljárni ezen szerkezetekkel végzett mérnöki munkánk során.

IRODALOM

- (1) HUERTA, Santiago (2007). "Oval domes: History, geometry and mechanics". *Nexus Network Journal* 9(2), 211-248.
- (2) <http://en.wikipedia.org/wiki/Oval>
- (3) LAWRENCE, J. Dennis (1972), *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover, pp. 155–157, ISBN 0-486-60288-5
- (4) SOKOLOV, D. D. (2001), "Lamé curve", *Springer Encyclopaedia of Mathematics*
- (5) <http://mathworld.wolfram.com/Oval.html>
- (6) http://en.wikipedia.org/wiki/Treasury_of_Atreus
- (7) RUBIÓ, Juan. 1914. Construccions de pedra en sec. Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña : 35-105.
- (8) BESEVAL, Roland. 1984. Technologie de la voûte dans l'Orient Ancien. 2 vols. Paris: Editions Recherche sur les Civilisations.
- (9) EL-NAGGAR, Salah. 1999. Les voûtes dans l'architecture de l'Égypte ancienne. Le Caire: Institut Français d'Archéologie Orientale.
- (10) CHOISY, Auguste. 1904. L'art de bâtir chez les égyptiens. Paris: E. Rouveyre.
- (11) BOYD, Thomas D. 1978. The arch and the vault in Greek architecture. *American Journal of Archaeology* 82: 83-100.
- (12) DORNISCH, Klaus. 1992. Die griechischen Bogentore. Zur Entstehung und Verbreitung des griechischen Keilsteingewölbes. Frankfurt am Main: Peter Lang.
- (13) WILSON JONES, Mark. 1993. Designing Amphitheatres. *Mitteilungen des deutschen archaologischen Instituts: Römische Abteilung* 100: 391-442.
- (14) GÖTZ, Wolfgang. 1968. Zentralbau und Zentralbautendenz in der gotischen Architektur. Berlin: Gebr. Mann Verlag.
- (15) http://en.wikipedia.org/wiki/The_Bridge_at_Narni
- (16) GÓMEZ-Moreno, Manuel. 1919. Iglesias Mozárabes. Arte español de los siglos IX al XI. Madrid: Centro de Estudios Históricos.
- (17) CHAPPUIS, R. 1976. Utilisation du tracé ovale dans l'architecture des églises romanes. *Bulletin Monumental* 134: 7-36.
- (18) VIOLLET-LE-DUC, Eugene. 1858. Construction. Pp. 2-208 in vol. 4 of *Dictionnaire raisonné de l'Architecture Française du XI au XVI siècle*. Paris: A. Morel.
- (19) BUCHER, François. 1968. Design in Gothic Architecture. A Preliminary Assessment. *Journal of the Society of Architectural Historians* 27: 49-71.
- (20) BUCHER, François. 1972. Medieval Architectural Design Methods, 800-1560. *Gesta* 11, 2: 37-51.

- (21) SIMONA, Michea. 2005. Ovals in Borromini's Geometry. Pp. 45-52 in Mathematics and Culture II. Visual Perfection: Mathematics and Creativity. M. Emmer, ed. Berlin: Springer.
- (22) RUIZ, Hernán el Jovan. ca. 1545. Libro de arquitectura. Ms. R.16, Biblioteca de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid.
- (23) MARTÍNEZ DE ARANDA, Ginés. (ca. 1590) Cerramientos y trazas de montea. Ms. Biblioteca de Ingenieros del Ejército de Madrid.
- (24) VANDELVIRA, Alonso de. 1580. Exposición y declaración sobre el tratado de cortes de fábricas que escribió Alonso de Valdeelvira por el excelente e insigne arquitecto y maestro de arquitectura don Bartolomé de Sombigo y Salcedo, maestro mayor de la Santa Iglesia de Toledo. Ms. R.10, Biblioteca de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid.
- (25) DE L'ORME, Philibert. 1561. Nouvelles inventions pour bien bastir et a petits fraiz . Paris: Morel.
- (26) DE L'ORME, Philibert. 1567. Le premier tome de l'Architecture. Paris: Morel.
- (27) PANOFSKY, Erwin. 1937. The First Two Projects of Michelangelo's Tomb of Julius II. Art Bulletin 19: 561-579.
- (28) PANOFSKY, Erwin. 1956. Galileo as a Critic of the Arts: Aesthetic Attitude and Scientific Thought. Isis 47: 3-15.
- (29) PELERIN, Jean. 1521. De Artificiali Perspectiva. Tulli.
- (30) SERLIO, Sabastiano. 1545. Il Primo libro d'Architettura di Sebastiano Serlio. . . Paris.
- (31) SERLIO, Sabastiano. 1547. Qvinto libro d'architettvra, nel quale se tratta de diuerse formede tempïi . . . Paris
- (32) http://en.wikipedia.org/wiki/Sant%27Andrea_al_Quirinale
- (33) SMYTH-PINNEY, Julia M. 1989. The Geometries of S. Andrea al Quirinale. Journal of the Society of Architectural Historians 48: 53-65.
- (34) http://en.wikipedia.org/wiki/San_Carlo_alle_Quattro_Fontane
- (35) PLO Y CAMIN, Antonio. 1767. El Arquitecto Práctico, Civil, Militar, y Agrimensor, dividido en tres libros. Madrid: Imprenta de Pantaleón Aznar.
- (36) http://it.wikipedia.org/wiki/Santuario_di_Vicoforte
- (37) <http://www.epitoanyag.net.hu/epitestortenelem/stilusok/klasszicizmus.php>
- (38) http://en.wikipedia.org/wiki/National_Centre_for_the_Performing_Arts_%28China%29
- (39) <http://mansueto.lib.uchicago.edu/dome.html>
- (40) LÓPEZ MANZANARES, Gema. 2005. La contribución de R. G. Boscovich al desarrollo de la teoría de cúpulas: el informe sobre la Biblioteca Cesarea de Viena. Pp. 655-665 in Actas del Cuarto Congreso Nacional de Historia de la Construcción (Cádiz, 27-29 January 2005). S. Huerta, ed. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- (41) CZEGLÉDI, Ottó, Épületszerkezetan 2, egyetemi jegyzet, BME

- (42) PECK, Tiborné (2003) Falazott boltívek hagyományos elmélete, Építés-Építészettudomány XXXI (1-2) 69-104, Akadémiai Kiadó
- (43) HUERTA, Santiago. 2001. Mechanics of masonry vaults : The equilibrium approach, Historical Constructions, 47-69
- (44) HEYMAN, Jacques. 1995. The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture. Cambridge: Cambridge University Press.
- (45) COULOMB, C. 1773. Essai sur une Application des Règles de Maximis et Minimis a Quelques Problèmes de Statique Relatifs a l'Architecture. Trans. and ed. J. Heyman. 1972, reprinted 1997. *Coulomb's memoir on statics: An essay in the history of civil engineering*. Cambridge. University Press.
- (46) KALISZKY, Sándor. Képlékenységtan : Elmélet és mérnöki alkalmazások, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975
- (47) <http://www.obvis.com>
- (48) <http://www.masonryarch.com>
- (49) HUGHES T.G., HEE S.C., SOMS E. 2002. Mechanism analysis of single span masonry arch bridges using a spreadsheet. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers; Structures and Buildings*, 152 (4) p. 341-350.
- (50) FREZIER, Amédée-François. 1737-39. La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture. Strasbourg/Paris: Charles-Antoine Jombert.
- (51) HUERTA, Santiago. 2004. Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometria y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- (52) RANKINE, W. J. M. 1858. A Manual of Applied Mechanics. London: Charles Griffin. (3rd ed. 1864.)
- (53) TAKAYOSHI, Aoki. CHIORINO, Mario Alberto. ROCATTI, Roberto. Structural characteristics of the elliptical masonry dome of the sanctuary of Vicoforte, Proceedings of the First International Congress on Construction History, Madrid, 20th-24th January 2003
- (54) DULÁCSKA, Endre (1994) Falazatok és boltozatok, Segédlet építészmérnöki hallgatók részére
- (55) MENYHÁRD, István. Héjszerkezetek számítása és szerkesztése, Műszaki Könyvkiadó, 1968.
- (56) CSONKA, Pál. Héjszerkezetek, Akadémiai Kiadó, 1981.
- (57) HEGEDŰS, István. Héjszerkezetek, BME, 1999.
- (58) http://en.wikipedia.org/wiki/First_fundamental_form
- (59) http://en.wikipedia.org/wiki/Second_fundamental_form
- (60) BOJTÁR, Imre. Mechanikai MSc, Egyetemi jegyzet, 2009.
- (61) http://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_mechanics
- (62) BOJTÁR, Imre. VEM matematikai alapjai , Egyetemi jegyzet, 2009.

- (63) STRIKWERDA, C. John. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, SIAM, Madison, Wisconsin, 2004
- (64) TIMOSHENKO, P. Stephen, WOINOWSKY-KRIEGER, S. Lemezek és héjak elmélete, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966
- (65) JING, Lanru, STEPHANSSON, Ove. Fundamentals of Discrete Element Methods for Rock Engineering : Theory and Applications, Elsevier, 2007
- (66) BOJTÁR, Imre. Nemlineáris végelemek módszere, Egyetemi jegyzet, 2009
- (67) ANSYS Element reference, Release 12.0 , April 2009
- (68) WANG, Erke. ANSYS contact, Penalty vs Lagrange method : How to make it converge, CAD-FEM GmbH. Germany
- (69) D'AYALA, F.D. TOMASONI, E. The structural behaviour of masonry vaults: Limit state analysis with finite friction, Structural Analysis of Historic Construction : Preserving Safety and Significance, 2008 Taylor & Francis Group, London, ISBN 978-0-415-46872-5
- (70) BAGI, Katalin. A diszkrét elemek módszere, Egyetemi jegyzet, 2007, BME, Budapest, ISBN 978-963-420-929-4
- (71) CUNDALL, P.A., 1971. A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. In Proceedings of the Symposium on Rock Fracture (ISRM), vol. 1, paper II-8. Nancy, France.
- (72) SHI, G.-H. and GOODMAN, R.E. 1988. Discontinuous deformation analysis—A new method for computing stress, strain and sliding of block systems. In Key Questions in Rock Mechanics, eds. P.A. Cundall, R. Sterling, and A. Starfield, Rotterdam: Balkema, 381–393.
- (73) LEMOS, V. José. V. (2007) 'Discrete Element Modeling of Masonry Structures', International Journal of Architectural Heritage, 1: 2, 190 — 213
- (74) BARBOSA, R.E. 1996. Discontinuous structural analysis. In Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering. Elsevier, Paper no. 830.
- (75) MUNJIZA, A., OWEN, D.R.J. and BICANIC, N. 1995. A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. Engineering Computations 12:145–174.
- (76) PETRINIC, N. 1996. Aspects of discrete element modelling involving facet-to-facet contact detection and interaction. PhD Thesis, University of Wales, UK.
- (77) HART R.D., CUNDALL, P.A. and LEMOS, J.V., 1988. Formulation of a three-dimensional distinct element model — part II: mechanical calculations. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 25(3): 117–125.
- (78) CUNDALL P.A. and HART, R.D. 1989. Numerical modeling of discontinua. In Proceedings of the First US Conference on Discrete Element Methods. CSM Press, Colorado.

- (79) KISHINO, Y. (1988): Disc model analysis of granular media. In: Satake, M. and J.T. Jenkins (eds): Micromechanics of Granular Materials, Elsevier, pp. 143-152
- (80) SERRANO, A.A. – RODRIGUEZ-ORTIZ, J.M. (1973): A contribution to the mechanics of heterogeneous granular media, Proc. Symp. Plasticity and Soil Mechanics, Cambridge, pp. 215-227
- (81) http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_ordinary_differential_equations
- (82) MELBOURNE, C., GILBERT, M., and WAGSTAFF, M. 1997. The collapse behaviour of multispans brickwork arch bridges. The Structural Engineer 75(17):297–305.
- (83) BICANIC, N., PONNIAH, D., and ROBINSON, J. 2001. Discontinuous deformation analysis of masonry bridges. In Computational Modelling of Masonry, Brickwork and Blockwork Structures, ed., J.W. Bull. Stirling, UK: Saxe-Coburg Publications, 177–196.
- (84) PAPASTAMATIOU, D. and PSYCHARIS, I. 1993. Seismic response of classical monuments – a numerical perspective developed at the Temple of Apollo Bassae, Greece. Terra Nova, 5:591–601.
- (85) PSYCHARIS, I.N., LEMOS, J.V., PAPASTAMATIOU, D.Y., ZAMBAS, C. and PAPANTONOPOULOS, C. 2003. Numerical study of the seismic behaviour of a part of the Parthenon Pronaos. Earthquake Engineering & Structural Dynamics 32:2063–2084.
- (86) LEMOS, J.V. 1998. Discrete element modelling of the seismic behaviour of stone masonry arches. In Computer Methods in Structural Masonry — 4, eds., G.N. Pande, J. Middleton, and B. Kralj. London: E & FN Spon, 220–227.
- (87) ALEXANDRIS, A., PROTOPAPA, E., and PSYCHARIS, I. 2004. Collapse mechanisms of masonry buildings derived by the distinct element method. In Proceedings of the 13th World Conference on Earthquake Engineering, paper no. 548. Vancouver.
- (88) OLIVEIRA, C.S., LEMOS, J.V., and SINCRANIAN, G.E. 2002. Modelling large displacements of structures damaged by earthquake motions. European Earthquake Engineering 3:56–71.
- (89) MUNJIZA, A. 2004. The combined finite-discrete element method. Chichester: John Wiley.
- (90) ROJEK, Jerzy. ONATE, Eugenio. 2007. Multiscale analysis using a coupled discrete/finite element model, Interaction and Multiscale Mechanics, Vol. 1, No. 1 (2007) 1-31
- (91) ROMANO, Alessandra, 2005. Modelling, Analysis and Testing of Masonry Structures, Doctoral Thesis, Università degli Studi di Napoli Federico II (2005)
- (92) LAU, W. Wanda, 2002. Equilibrium Analysis of Masonry Domes, Michigan State University (2002)
- (93) http://en.wikipedia.org/wiki/Membrane_analogy
- (94) KALISZKY, Sándor. KURUTZNÉ KOVÁCS, Márta. SZILÁGYI, György. Szilárdságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006
- (95) IVÁNYI, Miklós. Hídepítéstan : Acélszerkezetek, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998