



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Forgács Tamás
Építőmérnök hallgató (B. Sc.)

Rácsos tartók rúderőii identifikációinak pontosítása Monte-Carlo-módszerrel

TDK dolgozat

Konzulens:

Dr. Gáspár Zsolt egyetemi tanár



Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	1
Jelölésrendszer	2
Absztrakt	3
1. Bevezetés	4
2. A feladat kitűzése	5
3. A tartó megadása	6
4. Valóság szimulálása	8
5. A rúderők és az engedékenységek meghatározásához használt összefüggések	16
5.1 Nem ismert a kiindulási helyzet terhe	17
5.2 A kiindulási helyzet terhe ismert	18
5.3 Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek megoldási módjai	19
5.3.1 Legkisebb négyzetek módszere	19
5.3.2 Megoldás általánosított, Moore—Penrose-inverzszel	20
6. Az identifikációs eljárás pontosításának lehetőségei	21
7. Programleírások	22
7.1 Állapotjellemzőket számító iterációs eljárás	22
7.2 A valóság szimulálásához készült program	25
7.3 Monte-Carlo-szimulációhoz alkalmazott program	27
8. Példák	32
8.1 Statikailag túlhatározott szerkezet: 3D-s hinta	32
8.2 Statikailag határozatlan szerkezet: Y-alakú tartó	37
8.3 Identifikációs eljárások összehasonlítása	41
9. Összefoglalás	46
Irodalomjegyzék	48



Jelölésrendszer

Kisbetűs skalárok

μ	rudak száma
v	belső csomópont száma
v_0	külső csomópontok száma
σ	valószínűségi változó szórása
t	terhelési esetek száma
l_0	feszültségmentes rúd hossz
$l^{(i)}$	rúd hossz az i -edik terhelés során
s	rúdban ébredő erő
Dim	feladat dimenziója
t	kinematikai teher
Δt	kompatibilitási hiba

Nagybetűs skalárok

E	rugalmassági modulus
A	keresztmetszeti terület
F	rúd engedékenysége

Kisbetűs vektorok

$\underline{r}$	csomópont helyvektora
$\underline{e}$	rúdtengely irányú egységvektor
$\underline{q}$	teher
$\Delta \underline{q}$	tehernövekmény
$\Delta \underline{q}_r$	redukált tehervektor
$\Delta \underline{q}_h$	kiegyensúlyozatlan teher

Nagybetűs mátrixok

$\underline{\underline{F}}$	az engedékenységeket tartalmazó diagonálmátrix
$\underline{\underline{E}}$	egység mátrix
$\underline{\underline{G}}$	egyensúlyi mátrix
$\underline{\underline{J}}$	Jacobi-mátrix
$\underline{\underline{K}}$	érintő merevségi mátrix
$\underline{\underline{C}}$	kiegészítő merevségi mátrix

Rácsos tartók rúderői identifikációinak pontosítása Monte-Carlo-módszerrel

Absztrakt

Dolgozatom arra keresi a választ, hogyan lehet minél pontosabban meghatározni egy adott állapotban adott rácsos szerkezet rúderőit (és esetleg az engedékenységeit is) identifikációval. Ennél az identifikációs eljárásnál a tartóra ható terheket kell ismert mértékben megváltoztatni, és a szerkezet csomópontjainak koordinátáit kell megmérni mind az eredeti helyzetben mind a tehernövekmények hatására bekövetkező elmozdult állapotban. A feladat matematikai megfogalmazása egy (rendszerint túlhatározott) lineáris egyenletrendszerhez vezet, amelyik együtthatómátrixa gyakran rosszul kondicionált. Emiatt a keresett mennyiségeket csak pontatlanul számíthatjuk. A helyzetet tovább rontja, hogy a koordináták mérése is pontatlan.

A feladat megoldásához a Maple programrendszer felhasználásával programokat írtam. Az eljárás használhatóságát, a számítási eredmények hibáit szimulált mérések alapján mutatom be. Előre felveszem a meghatározandó adatokat, majd a kiindulási helyzetet és az előírt tehernövekmények hatására bekövetkező „valós” csomóponti elmozdulásokat harmadrendű elmélet alapján, nemlineáris iterációs eljárással számítom. E számított koordinátákból a „mért” adatokat kerekítéssel állítom elő.

Bemutatom, hogy az eredmények pontosságát növelni tudom, ha a Monte-Carlo-módszert használom. A „pontos” koordinátákat a mérési pontosságtól függő adott szórású normál eloszlású véletlen számmal megzavarom, és az így kapott értéket kerekítem. Így módon sok mérést szimulálok, mindegyikhez meghatározom a számítandó mennyiségeket, és ezek várható értéke pontosabb eredményt szolgáltat, mint az egy „mérés” alapján számított eredmények.

Az általam írt program tetszőleges topológiájú rácsos tartók esetén működik, csupán a bemenő adatait kell megváltoztatni. Az eljárást a dolgozatban több példával illusztrálom. A program könnyű kezelhetősége miatt oktatási célokra is használható.

Kulcsszavak: rácsos tartó, identifikáció, Monte-Carlo-módszer, harmadrendű elmélet.

My study looks for the answer, how can you determine more accurately member forces of a given truss in a given state with identification. By this identification method you must vary the loads of the truss in some degree and you must measure the coordinates of joints in aboriginal and in moved state. The mathematical composition of the task is a (often overconstrained) linear system, which coefficient matrix is often badly conditioned. That is why you can calculate the wanted result inaccuracy.

To solve the task I wrote programmes with Maple. I demonstrate the utility of the method and the miscalculations with simulated measurements. I give the determined items and the starting position in advance. I calculate the „real” displacements of the joints which are occurred by the given load increments with a third order theory nonlinear iteration method. I generate the „measured” coordinates from these data with rounding.

If I use Monte Carlo method I can increase the accuracy of the results. I disturb the „real” coordinates with a given standard deviation, normal distribution random number depend on the accuracy of the measurement. In this way I simulate many measurements, I determine the wanted results to all of them. The expected value of these results provides a more accurate solution.

The program created by myself works in case of arbitrary topology trusses, only you must vary the inputs. I illustrate the method with many examples. Because of the user friendly interface it is useable for educational purposes.

Keywords: trusses, identification, Monte Carlo method, third order theory



1. Bevezetés

A dolgozat a 2011. novemberi Tudományos Diákköri Konferenciára készült. Célja a rácsos szerkezetek rúderői identifikációjának pontosítása. Emellett készült egy olyan program is, amely tetszőleges geometriájú síkbeli / térbeli rácsos tartók állapotjellemzőit határozza meg adott terhek esetén harmadrendű elmélet alapján.

Gáspár a XI. Magyar Mechanikai Konferencián [1] előadást tartott arról a Turko [2] által felvetett problémáról, hogy miként lehet rúderőket identifikációval meghatározni rácsos tartók esetén. Előadásában levezette a módszerhez szükséges egyenleteket. Bemutatta a megoldáshoz szükséges ismert, ismeretlen, illetve mérendő mennyiségeket. Emellett egyszerű példákon keresztül illusztrálta az eljárást.

Az én feladatom, hogy a kidolgozott eljárás pontosságát Monte-Carlo-módszerrel, illetve egyéb eljárásokkal növeljem.

Dolgozatom a Feladat kitűzése című fejezettel kezdődik, melyben ismertetem a megoldandó problémát, az identifikáció pontatlanságának okait, illetve a céljaimat. A Tartó megadása című részben bemutatom a számítás során alkalmazott modellt, és azt, hogy az általam írt programnak milyen mennyiségeket kell megadni. A Valóság szimulálása című fejezet azt a módszert mutatja be, amellyel pontosan számíthatóak a tartó csomópontjainak koordinátái abban az esetben, ha a szerkezetre ismert nagyságú terheket helyezünk. Ezután bemutatom az identifikáció módszerének lineáris egyenletrendszeit, melyeket felhasználva a rúderők, illetve engedékenységek számíthatók. Ebben a részben lesz szó ezen túlhatározott egyenletrendszerek megoldási lehetőségeiről is. Ezután közlöm azokat a programokat melyekkel a szimulációkat végeztem. Egyszerű geometriájú tartókon szemléltetem a Monte-Carlo-módszerrel elért eredményeimet. Végül az eredmények értékelésével zárom a dolgozatot.



2. A feladat kitűzése

Dolgozatomban rácsos tartók rúderőit határozom meg identifikációs módszerrel. A szerkezet rúdjai csak húzásra, illetve nyomásra vannak igénybe véve. Nyomott rudak esetén stabilitási problémákkal nem foglalkozom, mivel a dolgozat elsődleges célja a rúderők ezen meghatározási módszerének pontosítása. A szerkezetre a kiindulási állapotban hathatnak terhek, melyek nagyságát és irányát nem biztos, hogy ismerem. Az is előfordulhat, hogy bár a szerkezetre nem hat külső teher, a rudakban mégis erő ébred, ekkor a rudak sajátfeszültséggel rendelkeznek.

A rúderőket olyan identifikációs módszerrel határozom meg, melyhez csak a tartó csomópontjainak koordinátáit kell mérni különböző, de ismert nagyságú és irányú tehernövekmények hatására elmozdult állapotokban. A módszer pontosítására több okból is szükség van.

- A megoldáshoz használt lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa gyakran rosszul kondicionált.
- A csomópontok koordinátáinak mérése pontatlan. Ez a pontatlanság két részből tevődik össze. Egyrészt a mérésre használt műszerek pontatlanságból fakadó hiba. A korszerű műszerekkel végzett gondos mérések hibája néhány tized milliméter. Ez azt jelenti, hogyha a koordináták az 1-10 méteres intervallumba esnek, akkor az ötödik értékes jegy már megbízhatatlan. Másrészt egy valós szerkezeten nem tudjuk az elméleti csomópont koordinátáit mérni, csak a szerkezet felületén jelölhetünk meg pontokat. A megjelölésben is bizonytalanság van, a valóságban a koordinátákat külpontosan fogjuk mérni.
- Az alkalmazott tehernövekmények nagysága és iránya, is nagymértékben befolyásolja a számítás végeredményét.

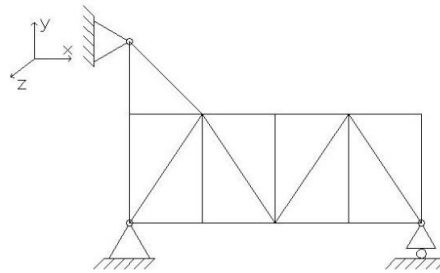
Ezen körülmények mellett a módszert csak nagyon speciális esetekben (pl. kis rugalmassági modulussal rendelkező anyagok esetén) lehetne a gyakorlatban alkalmazni. Célom, hogy a kapott eredményeket pontosítsam, így lehetővé téve a módszer alkalmazhatóságát az építőmérnöki gyakorlatban használt anyagok esetén is.



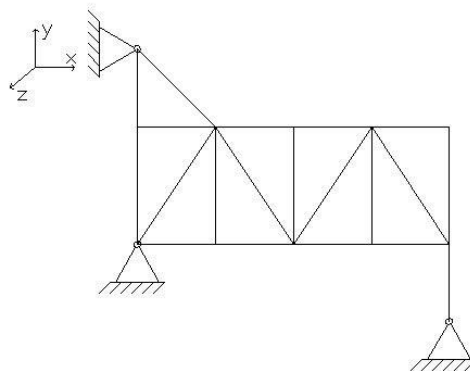
3. A tartó megadása

Ebben a részben bemutatom a rácsos szerkezet modelljét, illetve számba veszem azokat a mennyiségeket, amelyek az identifikációs eljárásához szükségesek. A tartó adatainak felvételét egy példán keresztül mutatom be.

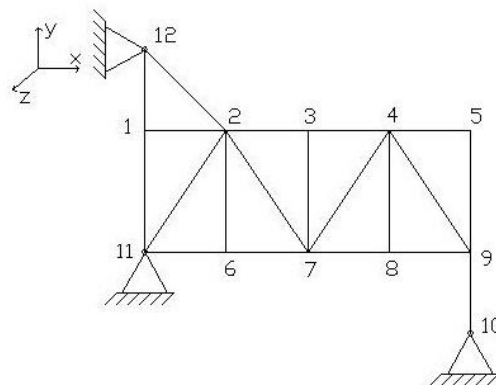
Először a rácsos tartó topológiáját kell vizsgálni, melyhez adott a rácsos tartó alakzatának a modellje.



Amennyiben a szerkezet görgős támasszal kapcsolódik a földhöz, azt helyettesíteni kell egy tetszőleges hosszúságú, nagyon merev rúddal, amely csuklós támasszal kapcsolódik a földhöz:



A csomópontoknak sorszámot kell adni. Fontos megjegyezni, hogy először a belső csomópontokat sorsámozzuk, majd a külső csomópontokkal folytatjuk a számozást.





Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

A csomópontok sorszámozásával megkapjuk azok darabszámát. Ismernünk kell, hogy ebből mennyi a belső csomópontok száma. Továbbá tudnunk kell, hány rúdból áll a szerkezet.

A programnak meg kell adni a „kapcsolódó csomópontok”-at, azaz azt, hogy melyik csomópontot melyikkel köt össze rúd. A sorszámaik alapján növekvő sorrendbe rakjuk a csomópontokat. Összegyűjtjük, hogy az i -edik csomópont-hoz mely csomópontok kapcsolódnak. Ezeket a csomópontokat is növekvő sorrendbe állítjuk sorszámuk alapján. A kapcsolódó csomópontok listáján egy rúd csak egyszer szerepelhet, azaz a kapcsolódó csomópontok táblázatának pontosan annyi sora van, ahány rúddal modelleztük a szerkezetet.

Kapcsolódó csomópontok	
Kezdőpont	Végpont
1	2
1	11
1	12
2	3
2	6
...	...
8	9
9	10

Ha az engedékenységeket ismert mennyiségekként kezeljük, akkor azokat is meg kell adni a számításhoz.

Koordináták megadása:

A rácsos szerkezetek a valóságban mindig háromdimenziósak. A program lehetőséged ad síkbeli, kétdimenziós feladatok vizsgálatára is, ekkor $\text{Dim} = 2$. A számításhoz szükséges csomóponti koordináták a gyakorlatban méréssel, vizsgálataim során pedig valószínűségi alapon kerülnek meghatározásra. Az általam Maple-ben megírt program jobbkezes koordináta-rendszert használ (eltérően az építőmérnöki gyakorlatban használt balkezes Descartes-féle koordináta-rendszertől), így ügyelni kell a koordináták előjelhelyes megadására.

A tehernövekmények nagyságát és irányát a csomópontokra kell redukálni.



4. A valóság szimulálása

Ebben a részben a rácsos szerkezet belső csomópontjainak koordinátáit (előírt tehernövekmények hatására elmozdult állapotban) számító eljárást mutatom be. Az itt meghatározott helyvektorok fogják képezni az identifikációs módszerhez szükséges kiindulási adatokat. E koordinátákat mérhetném a valóságban ideális eszközökkel. A szimuláció során alkalmazott eljárás végeredménye a rácsos tartó belső csomópontjainak koordinátái, a tehernövekmények hatására elmozdult állapotban. Dolgozatomban a valóság modellezését a lehető legpontosabb módszerrel kívánom megvalósítani. Ezért a tehernövekmények hatására bekövetkező állapotjellemző változásokat harmadrendű elmélet felhasználásával, iterációs eljárással számítom. Állapotjellemzők alatt a belső csomópontok helyvektorait, és a rúderőket értem. A fenti iterációt addig ismétlem, míg a csomópontok koordinátáinak pontossága jóval meghaladja a jelenlegi műszerekkel a mérnöki gyakorlatban elérhető pontosságot. Tehát az eljárás végén megkapom azokat a koordinátákat, melyeket az eredeti helyzetéből elmozdult szerkezeten az adott teher hatására ideális esetben mérhetnék.

Az iterációs eljárás bemutatása:

A számítás elméleti háttérét Gáspár Magasépítési Szerkezetek Mechanikája című egyetemi jegyzete [3] alapján ismertetem. A módszer harmadrendű elméletet használ a csomóponti elmozdulások számítására.

A kiindulási állapot:

A kiindulási állapotban a szerkezet stabilis helyzetben van. A csomópontokra terhek hathatnak, ezáltal a rudakban már a kezdőállapotban is erők ébredhetnek. Az is előfordulhat, hogy bár a szerkezet tehermentes, a rudakban erő ébred, ekkor a szerkezet sajátfeszültségekkel rendelkezik. A később tárgyalt identifikáció célja, hogy a kiindulási állapot rúderőit, és esetleg a rudak engedékenységeit meghatározza. Tehát amikor a valóságot szimulálom, ismert mennyiségként kell kezelnem a később identifikációval meghatározni kívánt kezdőállapotbeli rúderőket és engedékenységeket. Az alább ismertetett iterációs eljárással azt kívánom meghatározni, hogyha a rácsos tartóra a megadott tehernövekményt teszem, annak belső csomópontjai hova mozdulnak el, azaz a belső csomópontok helyvektorait az elmozdult állapotban.

Az ismert mennyiségek és jelöléseik:

- Rudak száma, μ darab
- Külső csomópontok száma v_0 darab, és azok helyvektorai $\underline{r}$
- A belső csomópontok száma v darab. A belső csomópontok helyvektorait a kezdőállapotban ($\underline{r}^{(0)}$) ismerem. Ezek a koordináták a valós szerkezet



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

csomópontjainak pontos, ideális körülmények között mért értékei a kezdőállapotban.

- Ismerem, mely csomópontot melyikkel kapcsol össze rúd.
- A feszültségmentes rúdhosszakat nem ismerem, de azokat számíthatom a kezdőállapotban feszültség alatt lévő rúdhosszakból a Hooke-törvény alapján:

$$\Delta \underline{l} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s} + \underline{t}, \quad (4.1)$$

ahol $\underline{t}$ a csomópontokra ható kinematikai terhek vektora, amit a példák során 0-nak feltételezek. Az (4.1) egyenletet átalakítva kapjuk a következő formulát a feszültségmentes rúdhosszakra:

$$\underline{l}_0 = \underline{l}^{(0)} - \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s}^{(0)}. \quad (4.2)$$

- A j-k csomópontokat összekötő rúd normálmerevsége számítható az alábbi képlettel:

$$E \cdot A = \frac{l_{0,jk}}{F_{jk}}. \quad (4.3)$$

- Ha ismerem a kiindulási állapotban a szerkezetre ható terheket ($\underline{q}^{(0)}$) a csomópontokra redukálva, akkor $\underline{s}^{(0)}$ -t nem vehetem fel ettől függetlenül. Ebben az esetben a statikai határozatlanság fokának megfelelő számú (alkalmas) rúdban ébredő erő vehető fel, a többit az egyensúlyi egyenletekből kell számítani.

Ha e terhek nem ismertek, akkor $\underline{s}^{(0)}$ tetszőlegesen felvehető, majd a kiindulási állapot terheit a kezdőállapotra felírt egyensúlyi egyenletből számíthatom:

$$\underline{q}^{(0)} = -\underline{\underline{G}}^{(0)} \cdot \underline{s}^{(0)}. \quad (4.4)$$

- Ismerem a terhelési esetek során alkalmazott tehernövekmények vektorát: $\Delta \underline{q}^{(i)}$.

A meghatározandó mennyiségek:

- A szerkezetben a tehernövekmények hatására megváltozott rúderők vektora $\underline{s}^{(i)}$.
- A tehernövekmények hatására elmozduló belső csomópontok helyvektorai $\underline{r}^{(i)}$.

Az állapotjellemzők meghatározásának lépései:

A könnyebb átláthatóság kedvéért a továbbiakban a terhelési esetekre vonatkozó felső indexet $^{(i)}$ elhagyom.



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

A még ismeretlen csomóponti koordináták függvényében felírható a rudak kezdőpontjából a rudak végpontjába mutató vektor:

$$\underline{r}_{jk} = \underline{r}_k - \underline{r}_j = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

A (4.6) vektor euklideszi normája ([4] 258. o.), megegyezik a j-k rúd adott állapotbeli hosszával. Fontos megjegyezni, hogy az alábbi módon kiszámolt rúdhossz nem egyezik meg a feszültségmentes rúdhosszal.

$$l_{jk} = |\underline{r}_{jk}| = \sqrt{\underline{r}_{jk}^T \cdot \underline{r}_{jk}} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}. \quad (4.7)$$

A rúd egységvektora egy olyan egységnyi hosszúságú vektor, melynek iránya megegyezik a rúdtengely irányával:

$$\underline{e}_{jk} = \frac{\underline{r}_{jk}}{l_{jk}}. \quad (4.8)$$

A szerkezet egyensúlyi egyenlete a következőképpen írható fel:

$$\underline{\underline{G}}(\underline{r}) \cdot \underline{s} + \underline{q} = 0. \quad (4.9)$$

Az (4.9) műveletet elvégezve megkapom az összes belső csomópont vetületi egyenleteit, olyan formában, ahogy azt a Statika című tárgyban megismertem. A fenti egyenletben a $\underline{\underline{G}}$ mátrixot egyensúlyi mátrixnak nevezzük, ezen egyensúlyi mátrix elemei (4.8)-ban definiált egységvektorok. Az egyensúlyi mátrix mérete: blokksorainak száma megegyezik a belső csomópontok számával, az oszlopok számát a rudak száma határozza meg. Az egyensúlyi mátrix a csomóponti koordináták függvénye.

A szerkezet egyensúlyi egyenlete nemlineáris egyenletrendszer mely csakis a csomóponti koordináták, és a rúderők függvénye. Röviden így jelöljük:

$$\underline{f}(\underline{r}, \underline{s}) = 0. \quad (4.10)$$

Fizikai egyenlet:

Egy rúdra felírva az alábbi fizikai egyenletet kapom:

$$\Delta l_{jk} = F_{jk} \cdot s_{jk} + t_{jk}, \quad (4.11)$$

ahol F_{jk} a j-k csomópontokat összekötő rúd engedékenysége, mely az alábbi módon számítható:

$$F_{jk} = \frac{l_{0jk}}{E_{jk} \cdot A_{jk}}. \quad (4.11a)$$



A geometriai egyenletet a fizikai egyenletbe helyettesítve:

$$l_{0jk} - l_{jk} + F_{jk} \cdot s_{jk} + t_{jk} = 0. \quad (4.12)$$

Az egész szerkezetre a következő formában tudom felírni a kompatibilitási egyenletet:

$$\underline{l}_0 - \underline{l} + \underline{F} \cdot \underline{s} + \underline{t} = 0. \quad (4.13)$$

A szerkezetre felírt kompatibilitási egyenlet ismét a csomópontok helyvektoraitól és a rúderóktól függő nemlineáris egyenletrendszer. Nemlineáris, mivel a rudak hosszát Pitagorasz-tétellel számítom, az elsőrendű, lineáris közelítés alkalmazása helyett. Röviden:

$$g(\underline{r}, \underline{s}) = 0. \quad (4.14)$$

Az (4.10) és (4.14) egyenletrendszert együtt is felírhatjuk a következő alakban:

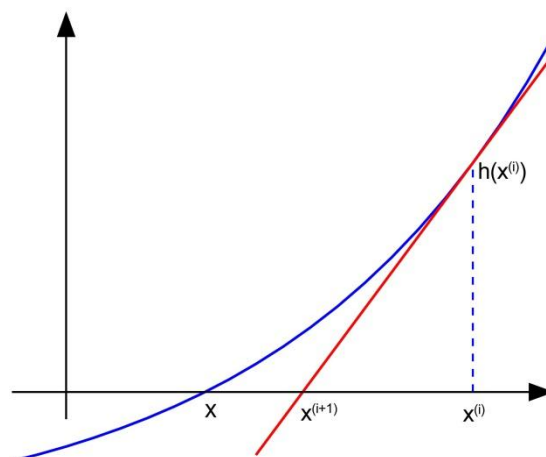
$$\underline{h}(\underline{x}) = 0, \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

A kompatibilitási és az egyensúlyi egyenlet összesen $\text{Dim} \cdot v + \mu$ darab ismeretlent tartalmaz. Ezt az egyenletrendszert Newton—Raphson-módszerrel oldom meg.

A nemlineáris egyenletrendszer megoldására használt eljárást a skalárfüggvényeken értelmezett Newton-módszerrel mutatom be. Ezt a módszert alkalmazta J. Raphson angol matematikus vektor-vektor függvényekre.

A Newton-módszer alapötlete:

Felveszem az ismeretlen mennyiség első közelítését, amely a tényleges gyökhöz elég közel található: $x^{(i)}$. (A következőkben az $^{(i)}$ felső index nem a terhelési esetre vonatkozik, hanem az iteráció i -edik lépésére.)



A Newton-módszer alapfogolata



Ezután geometriai megfontolásokkal szeretném kiszámítani $\underline{x}^{(i+1)}$ helyét. Felírhatóak a következő összefüggések:

$$\underline{h}'(\underline{x}^{(i)}) = \frac{\underline{h}(\underline{x}^{(i)})}{\underline{x}^{(i)} - \underline{x}^{(i+1)}}, \quad (4.16)$$

$$\underline{x}^{(i+1)} = \underline{x}^{(i)} - \frac{\underline{h}(\underline{x}^{(i)})}{\underline{h}'(\underline{x}^{(i)})}. \quad (4.17)$$

Így az egyenlet megoldásának jobb közelítéséhez jutottam. Fontos felhívni a figyelmet, hogyha az első közelítés nincs elég közel a valódi gyökhöz, akkor a módszer nem biztos, hogy a gyökhöz fog konvergálni.

A Newton—Raphson-módszer alkalmazása (4.15)-re:

$$\underline{\underline{J}}^{(i)}(\underline{x}^{(i+1)} - \underline{x}^{(i)}) + \underline{h}^{(i)} = 0, \quad (4.18)$$

amely képletben $\underline{\underline{J}}^{(i)}$ a $\underline{h}$ vektor-vektor függvény Jacobi-mátrixa ([4], 127. o.).

Bizonyítható ([3] 28. o.) az alábbi összefüggés:

$$\underline{\underline{J}} = \frac{d\underline{h}}{d\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{r}} & \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{s}} \\ \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{r}} & \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^T & \underline{\underline{F}} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

A fenti Jacobi-mátrixot behelyettesítem az (4.18) egyenletbe, figyelembe véve azt, hogy az $\underline{\underline{F}}$ mátrix az iteráció során állandó, viszont $\underline{\underline{G}}$ egyensúlyi mátrix és $\underline{\underline{C}}$ kiegészítő merevségi mátrix iterációs lépésről iterációs lépésre változik. Az $\underline{x}^{(i+1)} - \underline{x}^{(i)}$ kifejezés megadja az állapotváltozók egy iterációs lépésben történt változását. $\underline{h}^{(i)}$ jelenti az egyensúlyi egyenlet és a kompatibilitási egyenlet hibáját, amit a továbbiakban $\Delta \underline{q}^{(i)}$ -vel és $\Delta \underline{t}^{(i)}$ -vel jelölök, és előbbi kiegészítő tehernek, míg utóbbit kompatibilitási hibának nevezem.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}^{(i)} & \underline{\underline{G}}^{(i)} \\ \underline{\underline{G}}^{T(i)} & \underline{\underline{F}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{r}^{(i)} \\ \Delta \underline{s}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \underline{q}_h^{(i)} \\ \Delta \underline{t}^{(i)} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.20)$$

A fenti egyenletrendszer második egyenlete:

$$\underline{\underline{G}}^{T(i)} \cdot \Delta \underline{r}^{(i)} + \underline{\underline{F}} \cdot \Delta \underline{s}^{(i)} + \Delta \underline{t}^{(i)} = 0. \quad (4.21)$$

A (4.21) egyenletből kifejezhető a rúderők változása:



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\Delta s}^{(i)} &= -(\underline{\underline{G}}^{T(i)} \cdot \underline{\Delta r}^{(i)} + \underline{\Delta t}^{(i)}) \\ \underline{\Delta s}^{(i)} &= -\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{G}}^{T(i)} \cdot \underline{\Delta r}^{(i)} + \underline{\Delta t}^{(i)}).\end{aligned}\quad (4.22)$$

A rúderők változását behelyettesítem az (4.20) egyenletrendszer első egyenletébe:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{C}}^{(i)} \cdot \underline{\Delta r}^{(i)} + \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\Delta s}^{(i)} + \underline{\Delta q}_h^{(i)} &= 0 \\ \underline{\underline{C}}^{(i)} \cdot \underline{\Delta r}^{(i)} - \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} (\underline{\underline{G}}^{T(i)} \cdot \underline{\Delta r}^{(i)} + \underline{\Delta t}^{(i)}) + \underline{\Delta q}_h^{(i)} &= 0 \\ (\underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^{T(i)} - \underline{\underline{C}}^{(i)}) \cdot \underline{\Delta r}^{(i)} &= \underline{\Delta q}_h^{(i)} - \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\Delta t}^{(i)}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Az (4.23) egyenlet az alábbi formában is írható:

$$\underline{\underline{K}}^{(i)} \cdot \underline{\Delta r}^{(i)} = \underline{\Delta q}_r^{(i)}, \quad (4.24)$$

ahol

$$\underline{\underline{K}}^{(i)} = \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^{T(i)} - \underline{\underline{C}}^{(i)}, \quad (4.25)$$

az érintő merevségi mátrix, és

$$\underline{\Delta q}_r^{(i)} = \underline{\Delta q}_h^{(i)} - \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\Delta t}^{(i)} \quad (4.26)$$

a redukált tehervektor az i-edik iterációs lépésben.

Belátható, hogy egy rúd merevségi mátrixa az alábbi formulával adható meg:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{jk}^{(i)} &= \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^{T(i)} - \underline{\underline{C}}^{(i)} \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \underline{e}_{jk} \\ -\underline{e}_{jk} \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{e}_{jk}^T & -\underline{e}_{jk}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{e}_{jk}}{\partial \underline{r}_j} & \frac{\partial \underline{e}_{jk}}{\partial \underline{r}_k} \\ -\frac{\partial \underline{e}_{jk}}{\partial \underline{r}_j} & -\frac{\partial \underline{e}_{jk}}{\partial \underline{r}_k} \end{bmatrix} \cdot \underline{s}_{jk} \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \underline{K}_{jk}^{0(i)} & -\underline{K}_{jk}^{0(i)} \\ -\underline{K}_{jk}^{0(i)} & \underline{K}_{jk}^{0(i)} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (4.27)$$

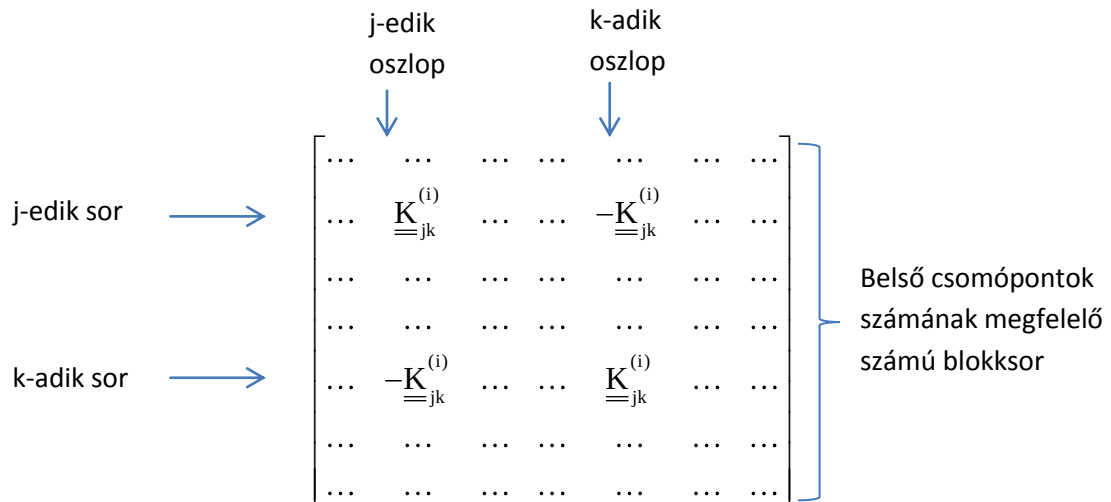
ahol

$$\underline{K}_{jk}^{0(i)} = \frac{\underline{E}_{jk} \cdot \underline{A}_{jk}}{l_{0jk}} \cdot \underline{e}_{jk}^{(i)} \cdot \underline{e}_{jk}^{T(i)} + \frac{\underline{E} - \underline{e}_{jk}^{(i)} \cdot \underline{e}_{jk}^{T(i)}}{l_{jk}^{(i)}} \cdot \underline{s}_{jk}^{(i)}. \quad (4.28)$$



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

A szerkezet merevségi mátrix egy kvadratikus mátrix, blokksorainak és blokkoszlopainak száma megegyezik a belső csomópontok számával. j -k rúd érintő merevségi mátrixát a következőképpen kell elhelyezni a mátrixban:



Adott $\underline{\underline{q}}$ teher és $\underline{\underline{t}}$ kinematikai teher esetén az állapotjellemzőket a következő iterációs lépésekkel lehet számítani:

1. Az iteráció első lépése: $i = 1$, felveszem a rúdelemek első közelítését $\underline{\underline{r}}^{(1)}$ -t, $\underline{\underline{s}}^{(1)}$ -t.
2. Az i -edik közelítéssel kiszámítom a kiegyensúlyozatlan terhet, és a kompatibilitási hiba nagyságát:

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\underline{q}}_h^{(i)} &= \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{s}}^{(i)} + \underline{\underline{q}} \\ \Delta \underline{\underline{t}}^{(i)} &= \underline{\underline{l}}_0 - \underline{\underline{l}}^{(i)} + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{s}}^{(i)} + \underline{\underline{t}}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

3. Ha a teherhibák normája az általam definiált hibahatárnál (ε_q ; ε_t) kisebb, vagyis

$$\begin{aligned}|\Delta \underline{\underline{q}}_h^{(i)}| &\leq \varepsilon_q \\ |\Delta \underline{\underline{t}}^{(i)}| &\leq \varepsilon_t,\end{aligned}\quad (4.30)$$

akkor a legutolsó közelítést elfogadom a rúdelemek és a csomópontokhoz tartozó helyvektorok értékének. Ezzel az eljárás befejeződik. Ha nem teljesül a (4.30) egyenlőtlenségek közül valamelyik, akkor folytatom az iterációt. Jelenleg a legnagyobb pontossággal a geodéziai műszerek rendelkeznek. Ezek a műszerek a tizedmilliméteres pontosságot képesek elérni. Ezt a pontosságot a valóság szimulálásakor több nagyságrenddel meghaladom.



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

4. Az i -edik közelítéssel meghatározom a rudak érintő merevségi mátrixának egyik $\underline{\underline{K}}_{jk}^{0(i)}$ főátlóblokkját, és ezekből összeállítom a szerkezet érintő merevségi mátrixát. Ezen kívül az i -edik értékekből meghatározom a szerkezet redukált terhét.
5. Ezután a $\underline{\underline{K}}^{(i)} \cdot \Delta \underline{\underline{r}}^{(i)} = \Delta \underline{\underline{q}}_r^{(i)}$ lineáris egyenletrendszerből egyértelműen meghatározhatók $\Delta \underline{\underline{r}}^{(i)}$ értékek. A rúderők változását az i -edik lépésében az $\Delta \underline{\underline{s}}^{(i)} = -\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{G}}^{T(i)} \cdot \Delta \underline{\underline{r}}^{(i)} + \Delta \underline{\underline{t}}^{(i)})$ egyenletrendszer jobb oldalán álló kifejezés adja.
6. Az állapotjellemzők jobb közelítése:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{r}}^{(i+1)} &= \underline{\underline{r}}^{(i)} + \Delta \underline{\underline{r}}^{(i)} \\ \underline{\underline{s}}^{(i+1)} &= \underline{\underline{s}}^{(i)} + \Delta \underline{\underline{s}}^{(i)}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Ezután $i = i + 1$ értékadással visszatérek az iteráció második lépéséhez.



5. A rúderők, illetve az engedékenységek meghatározásához használt összefüggések

Ebben a fejezetben szeretném ismertetni azokat a képleteket, amelyeket felhasználva számítani fogom a szerkezet rúderőit és a rudak engedékenységeit.

A rendelkezésemre álló egyenletek:

A szerkezetre minden terhelési esetben $\text{Dim} \cdot v$ darab független egyensúlyi egyenlet és μ darab kompatibilitási egyenlet írható fel (Hooke-törvény).

Egyensúlyi egyenletek:

$$\underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{s}^{(i)} + \underline{q}^{(i)} = 0, \quad (i = 0, 1 \dots t). \quad (5.1)$$

Kompatibilitási egyenletek:

$$\underline{l}^{(i)} - \underline{l}_0 = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s}^{(i)}, \quad (i = 0, 1 \dots t). \quad (5.2)$$

Ezen egyenletekből kiindulva lehet meghatározni az ismeretlen mennyiségeket. Az egyenleteket át kell alakítani úgy, hogy bennük ismeretlen mennyiségként csak a rúderők, engedékenységek, illetve azok a mennyiségek szerepeljenek, amelyeket a szerkezeten mérni tudunk.

Az egyensúlyi egyenleteket $t+1$ állapothoz lehet felírni. Ha az $1 \dots t$ terhelési esetek egyensúlyi egyenleteiből kivonjuk a 0. terhelési állapot (azaz a kiindulási helyzet) egyensúlyi egyenletét, akkor a szerkezetre ható terhek helyett az egyenletekben a tehernövekmények fognak szerepelni.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{s}^{(i)} + \underline{q}^{(i)} - \underline{\underline{G}}^{(0)} \cdot \underline{s}^{(0)} + \underline{q}^{(0)} &= 0 \\ \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{s}^{(i)} - \underline{\underline{G}}^{(0)} \cdot \underline{s}^{(0)} + \Delta \underline{q}^{(i)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A feszültségmentes rúdhosszak kifejezhetőek a kiindulási állapotra felírt kompatibilitási egyenletből:

$$\underline{l}_0 = \underline{l}^{(0)} - \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s}^{(0)}. \quad (5.4)$$

A kompatibilitási egyenletekbe az (5.4) egyenletet kell helyettesíteni:

$$\underline{l}^{(i)} - \underline{l}^{(0)} + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s}^{(0)} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s}^{(i)}. \quad (5.5)$$

A (5.5) egyenletből kifejezve a megváltozott $\underline{s}^{(i)}$ -t behelyettesítjük az (5.3) egyenletbe:

$$\underline{s}^{(i)} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot (\underline{l}^{(i)} - \underline{l}^{(0)} + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s}^{(0)}). \quad (5.6)$$

$$(\underline{\underline{G}}^{(i)} - \underline{\underline{G}}^{(0)}) \cdot \underline{s}^{(0)} + \underline{\underline{G}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot (\underline{l}^{(i)} - \underline{l}^{(0)} + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{s}^{(0)}) + \Delta \underline{q}^{(i)} = 0. \quad (5.7)$$



5.1. Nem ismert a kiindulási helyzet terhe

Az (5.7)-ben felírt egyenletrendszerrel a kiindulási állapotban ébredő rúderők számíthatók. $\underline{s}^{(0)}$ egyértelmű meghatározásához a felírható egyenletek számának el kell érnie az ismeretlenek számát. A felírható egyenletek számát növelni a terhelési esetek számának növelésével lehet. Ha az engedékenységek ismertek, a kiindulási helyzet terhe viszont nem, a szükséges terhelési esetek száma az alábbi módon írható fel:

$$t \geq \frac{\mu}{\text{Dim} \cdot v}, t \in \mathbb{Z}^+. \quad (5.8)$$

Amennyiben a keresett mennyiségek csak a kezdőállapotbeli rúderők, és az engedékenységeket ismertnek tekintem, a rúderők az alábbi egyenletrendszer megoldásából adódnak:

$$\begin{bmatrix} \underline{G}^{(1)} - \underline{G}^{(0)} \\ \vdots \\ \underline{G}^{(t)} - \underline{G}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \underline{s}^{(0)} + \begin{bmatrix} \Delta \underline{q}^{(1)} + \underline{G}^{(1)} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot (\underline{l}^{(1)} - \underline{l}^{(0)}) \\ \vdots \\ \Delta \underline{q}^{(t)} + \underline{G}^{(t)} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot (\underline{l}^{(t)} - \underline{l}^{(0)}) \end{bmatrix} = 0. \quad (5.9)$$

Ha az ismeretlenek közé soroljuk a rudak engedékenységét is, a szükséges terhelési esetek száma:

$$t \geq \frac{2\mu}{\text{Dim} \cdot v}, t \in \mathbb{Z}^+. \quad (5.10)$$

Ez esetben a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{bmatrix} \underline{G}^{(1)} - \underline{G}^{(0)} & \underline{G}^{(1)} \cdot \underline{L}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \underline{G}^{(t)} - \underline{G}^{(0)} & \underline{G}^{(t)} \cdot \underline{L}^{(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{s}^{(0)} \\ \underline{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \underline{q}^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta \underline{q}^{(t)} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

A (5.11) egyenletrendszerben az $\underline{L}^{(i)}$ diagonálmátrix felépítése:

$$\underline{L}^{(i)} = \begin{bmatrix} l_1^{(i)} - l_1^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & l_\mu^{(i)} - l_\mu^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Azaz a diagonálmátrix j-edik főátlóbeli eleme a j-edik rúd hosszváltozását jelenti a kezdőállapothoz viszonyítva.

Az $\underline{x}$ vektor az engedékenységek reciprokjait tartalmazza az alábbi módon:



$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{F_\mu} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Miután a fenti egyenletekkel kiszámítjuk a rúderőket, a kezdőállapot terhét az alábbi képlettel számíthatjuk:

$$\underline{\underline{q}}^{(0)} = -\underline{\underline{G}}^{(0)} \cdot \underline{\underline{s}}^{(0)}. \quad (5.14)$$

5.2. A kiindulási helyzet terhe ismert

A szerkezet statikai határozottsága befolyásolja a megoldás módszerét.

Amennyiben a *szerkezet statikailag határozott*, akkor a kiindulási helyzet rúderőit mindig lehet az alábbi módon számítani:

$$\underline{\underline{s}}^{(0)} = -\left(\underline{\underline{G}}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \underline{\underline{q}}^{(0)}. \quad (5.15)$$

Ha a szerkezet statikailag határozott és a rudak engedékenységeit is meg szeretnénk határozni, egy tehernövekményt kell alkalmazni. A tehernövekmény hatására a rudakban ébredő erő megváltozik:

$$\underline{\underline{s}}^{(1)} = -\left(\underline{\underline{G}}^{(1)}\right)^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{q}}^{(0)} + \Delta \underline{\underline{q}}^{(1)}\right). \quad (5.16)$$

Az engedékenység rudanként számítható az alábbi formulával:

$$F_i = \frac{l_i^{(1)} - l_i^{(0)}}{s_i^{(1)} - s_i^{(0)}}. \quad (5.17)$$

A szerkezet statikailag nem határozott

Ha a rudak engedékenysége és a kiindulási helyzet terhe ismert, a kezdőállapot rúderőit az alábbi módon számítható:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{(0)} \\ \underline{\underline{G}}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\underline{G}}^{(t)} \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{s}}^{(0)} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}^{(0)} \\ \underline{\underline{q}}^{(1)} + \underline{\underline{G}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{l}}^{(1)} - \underline{\underline{l}}^{(0)}\right) \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}^{(t)} + \underline{\underline{G}}^{(t)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{l}}^{(t)} - \underline{\underline{l}}^{(0)}\right) \end{bmatrix} = 0. \quad (5.18)$$



A terhelési esetek számát itt is úgy kell megválasztani, hogy a felírható egyenletek száma elérje az ismeretlenek számát:

$$t \geq \frac{2 \cdot \mu}{v \cdot \text{Dim}} - 1, \quad t \in \mathbb{Z}^+. \quad (5.19)$$

Ha a rudak engedékenysége ismeretlen, akkor az alábbi egyenletrendszer megoldása a feladat:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^{(0)} & 0 \\ \underline{\underline{G}}^{(1)} & \underline{\underline{G}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{L}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{G}}^{(t)} & \underline{\underline{G}}^{(t)} \cdot \underline{\underline{L}}^{(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{s}}^{(0)} \\ \underline{\underline{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}^{(0)} \\ \underline{\underline{q}}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}^{(t)} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.20)$$

ahol $\underline{\underline{L}}$ és $\underline{\underline{x}}$ jelentése teljesen azonos az (5.12) és (5.13)-ban leírtakkal. A rúderők és a rudak engedékenysége meghatározásához szükséges terhelési esetek száma:

$$t \geq \frac{\mu}{v \cdot \text{Dim}} - 1, \quad t \in \mathbb{Z}^+. \quad (5.21)$$

5.3. A fenti egyenletrendszerek megoldási módjai

Az identifikációs eljáráshoz használt összefüggések általában túlhatározott lineáris egyenletrendszerek. Ez azt jelenti, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$ lineáris egyenletrendszer $\underline{\underline{A}}$ együtthatómátrixa $m \times n$ -es, ahol $m \geq n$.

5.3.1. Legkisebb négyzetek módszere

Az ilyen típusú egyenletrendszer megoldható a legkisebb négyzetek módszerével ([4] 276.o.). A mérési és egyéb hibák miatt az egyenletrendszer nem elégíthető ki pontosan, így egy $\underline{\underline{r}} = (r_1, r_2, \dots, r_m)^T$ maradékvektort kapunk, ahol

$$\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{b}}, \quad \underline{\underline{r}} \neq \underline{\underline{0}}. \quad (5.22)$$

Ebben az esetben az $\underline{\underline{x}}$ vektor úgy határozható meg, hogy

$$\sum_{i=1}^m r_i^2 = \underline{\underline{r}}^T \cdot \underline{\underline{r}} = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{b}})^T \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{b}}) = \min, \quad (5.23)$$

azaz, a hibák négyzetösszege minimális legyen. Ez az elv Gausstól származik.



5.3.2. Megoldás általánosított, Moore—Penrose-inverzessel

Az $m \times n$ típusú valós $\underline{\underline{A}}$ mátrix általánosított vagy Moore—Penrose-inverzének ([5] 82.o.) az $n \times m$ típusú $\underline{\underline{A}}^+$ mátrixot nevezzük, ha kielégíti a következő tulajdonságokat:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^+ \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}, \quad \underline{\underline{A}}^+ \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}^+, \quad (5.24)$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^+ \text{ és } \underline{\underline{A}}^+ \cdot \underline{\underline{A}} \text{ szimmetrikus.} \quad (5.25)$$

Az általánosított inverz pontos numerikus értékekkel (racionális számokkal) való számításra is lehetőséget ad. Ez viszont nagymértékben megnöveli a számítás idejét. A 7. fejezet programleírásaiban a legkisebb négyzetek módszerét alkalmaztam.

Az egyenletrendszer megoldását nehezíti, hogy az együtthatómátrix általában rosszul kondicionált ([6] 632.o.). Egy $\underline{\underline{A}}$ mátrix kondicionáltságát $\|\underline{\underline{A}}^{-1}\| \cdot \|\underline{\underline{A}}\|$ szorzat jellemzi. Ha az együtthatómátrix gyengén meghatározott, akkor az azt jelenti, hogy az együtthatók kis megváltoztatása a megoldás nagymértékű megváltozását vonja maga után.

A lineáris egyenletrendszerek megoldásával a keresett mennyiségek (rúderők és engedékenységek) számíthatók.

Gyakorlati szempontból az 5.1 és 5.2-ben tárgyalt egyenletrendszerek kevésbé tűnnek használhatónak, mivel a kapott eredmények pontossága nagymértékben függ a számításokhoz használt éles jegyek számától. Ma az elérhető legnagyobb pontosságot az építőiparban geodéziai műszerek adják. Felsőrendű szintezéssel tizedmilliméteres pontosság érhető el, viszont csak magassági koordinátákat tudunk segítségével meghatározni. Korszerű tahiméterekkel viszonylag gyorsan meghatározhatóak térbeli pontok koordinátái milliméteres pontossággal. GPS technológiával a pontosnak számító RTK alapú koordinátamérés viszont csak 5-50 mm-es hibával határozza meg egy csomópont koordinátáit ([7] 4-9. o.). Ezen műszerek nagynak mondható pontossága azonban általában kevés ahhoz, hogy identifikációs eljárást használva megbízhatóan visszkapjuk a keresett mennyiségeket. Dolgozatomban módszereket keresek, melyek hozzájárulnak az identifikációval meghatározott rúderők hibáinak csökkentéséhez.



6. Az identifikációs eljárás pontosításának lehetőségei

A valóság szimulálása című fejezetben bemutattam, hogy a rácsos szerkezet valóságos viselkedését hogyan lehet nagy pontossággal modellezni, ha arra a megadott tehernövekményeket helyezem. Itt ismertetem, hogyan fogom a koordinátamérések eredményeit szimulálni valószínűségi alapokon. Az így kapott koordinátákból számított rúderőket hasonlítom össze a 8. fejezet példáiban az eredetileg „meghatározandó mennyiségként” felvett rúderőkkel.

Az elérhető pontosság vizsgálatánál a következőket fogom összehasonlítani:

- Megvizsgálom, hogy az identifikációs eljárással mekkora pontosság érhető el, ha a mérést pontosan végzem, de mérési eredményeket csak a megadott pontossággal olvasom le. Ezt úgy teszem, hogy a számítás során felhasznált összes koordinátát (azaz a belső és a külső csomópontok koordinátáit is) a megadott pontosságúra kerekítem. A kerekítéseket a programom az alábbi leképezéssel számítja:

$$x \rightarrow \frac{\text{round}(10^d \cdot x)}{10^d},$$

ahol d azt mutatja meg, hogy kerekítés után hány tizedes jegyet hagyunk meg a számból. Itt minden esetben csak egyszer „mérem” a csomópontok koordinátáit, majd ezen adatokból számítom ki $\underline{s}^{(0)}$ -t.

- Megvizsgálom azt is, hogy javul-e a pontosság, ha a mérésnél eggyel több tizedes jegyet, de azt pontatlanul olvasom le. A pontatlanságot a mérés, azaz a valószínűségi változó szórásával (σ) jellemzem. Ekkor az iterációs eljárással kapott eredményeket véletlenszerűen megzavarom, majd a megadott tizedes jegyre kerekítem. Itt is egyetlen mérésből származó, kerekített adatokat használom fel $\underline{s}^{(0)}$ számítására. Az általam írt program ezt a zavarást úgy valósítja meg, hogy az iterációs eljárással nyert pontos koordinátákhoz normál eloszlású és megadott szórású véletlen változót rendel, majd minden „mérés” során véletlen mintát vesz az eloszlásból.
- A mérési eredmények pontosságát megpróbálom a Monte-Carlo-módszer felhasználásával is javítani. Itt az iterációs eljárással számított koordinátákat megzavarom, megadott pontosságúra kerekítem. Ebben az esetben több mérést is szimulálok. Az egyes mérésekből számított rúderők számtani átlagát hasonlítom össze az iterációs eljárással kapott eredményekkel.

A 7. fejezetben leírt programokkal kapott eredményeket a 8. fejezetben egyszerű példáin szemléltetem. A példák során semmilyen adathoz nem rendelék hozzá mértékegységeket. A gyakorlatban koordinátaméréskor maximum tizedmilliméteres pontosság érhető el. Tehát ha a kerekítéseknél négy tizedes jegyet hagyok meg a helyvektorok koordinátáiból, akkor az azt jelenti, hogy a koordináták dimenziója a méter.



7. Programleírások

Ebben a fejezetben bemutatom azokat a programokat, amelyeket a számításokhoz felhasználtam, illetve oktatási célra készítettem. A programokat Maple 15 segítségével írtam. Az alábbi programok előnye, hogy nem specifikusan egy-egy példához íródtak, így ha más tartóra szeretnénk őket alkalmazni, csak a program legelején található felhasználók által megadott bemenő adatokat kell megváltoztatni.

7.1. Állapotjellemzőket számító iterációs eljárás

Az alábbi program azt az iterációs eljárást írja le, mellyel adott $\underline{q}$ és $\underline{t}$ terhek hatására a belső csomópontok koordinátái és a rúderők számíthatók. Az alábbi program akkor lehet hasznos, ha ismerjük a szerkezet anyagát, rudainak feszültségmentes hosszát, és a rá ható terheket. Ezekből az adatokból harmadrendű elmélettel számítja ki a belső csomópontok helyvektorát, és a terhek hatására megváltozott rúderőket.

A következő adatokat a felhasználónak kell megadnia:

A számítás során használt tizedes jegyek száma: (Mivel a nagyon nagy pontosság nem növelte szignifikáns mértékben a futtatási időt, ezért választottam ilyen nagy értékre a Digits-t.)

Digits := 100:

Adja meg a feladat dimenzióját (síkbeli=2; térbeli=3)

Dim := 2:

Adja meg az összes csomópont számát:

cs := 7:

Adja meg a belső csomópontok számát:

bcs := 1:

Adja meg a rudak számát:

rsz := 6:

Adja meg első közelítésben a belső csomópontok koordinátáit, illetve adja meg a külső csomópontok koordinátáit:

koor := Matrix(cs, 2, [[0, 0], [0, 1], [.5*sqrt(3), .5], [.5*sqrt(3), -.5], [0, -1], [-.5*sqrt(3), -.5], [-.5*sqrt(3), .5]]):

Adja meg azoknak a csomópontoknak a sorszámát melyeket rudak kapcsolnak össze:

kcs := Matrix(rsz, 2, [[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7]]):



Adja meg a feszültségmentes rúdhosszakat:

`l0 := Vector(rsz, [1, 1, 1, 1, 1, 1]):`

Adja meg a rudak normálmerevségét:

`EA := Vector(rsz, 1000):`

Adja meg a belső csomópontokra ható külső terheket:

`q := Vector(bcs*Dim, [1, 0]):`

Adja meg a kinematikai teherből származó megnyúlásokat:

`t := Vector(rsz, 0):`

Adja meg a rúderők első közelítését:

`s := Vector(rsz, [1, 2, 3, 1, 2, 3]):`

A további számításokat a program végzi, további adatbevitelre szükség nincs:

Engedékenységek számítása:

`for i to rsz do for j to rsz do F0[i][j] := 0 end do end do:`

`for i to rsz do F0[i][i] := l0[i]/EA[i] end do:`

`F := Matrix(rsz, rsz, (i, j) → F0[i][j]):`

`E := Matrix(Dim, Dim, 1, shape = diagonal):`

`hiba := 10000:`

`while evalf(hiba) > 10-Digits/2 do`

A rudak kezdőpontjából a végpontjukba mutató vektor meghatározása:

`for i to rsz do r[kcs[i][1]][kcs[i][2]] := koor[kcs[i][2]]%T-koor[kcs[i][1]]%T end do:`

A rudak hosszának a számítása: (ez nem a feszültségmentes rúdhossz)

`for i to rsz do l[kcs[i][1]][kcs[i][2]] := sqrt(r[kcs[i][1]][kcs[i][2]]%T.r[kcs[i][1]][kcs[i][2]]) end do:`

Rúdtengely irányú egységvektorok készítése:

`for i to rsz do e[kcs[i][1]][kcs[i][2]] := r[kcs[i][1]][kcs[i][2]]/l[kcs[i][1]][kcs[i][2]] end do:`

e[i][j] elemek helyrerakása, G egyensúlyi mátrix elkészítése:

`for i to rsz do for j to bcs do if kcs[i][1] = j then G0[j][i] := e[kcs[i][1]][kcs[i][2]] else G0[j][i] := Vector(Dim, 0) end if end do end do:`

`for i to rsz do for j to bcs do if kcs[i][2] = j then G1[j][i] := -e[kcs[i][1]][kcs[i][2]] else G1[j][i] := Vector(Dim, 0) end if end do end do:`

`for i to bcs do for j to rsz do for k to Dim do G2[Dim*(i-1)+k][j] := G0[i][j][k]; G3[Dim*(i-1)+k][j] := G1[i][j][k] end do end do end do:`

`G := Matrix(bcs*Dim, rsz, (i, j) → G2[i][j]+G3[i][j]):`



Az érintő merevségi mátrix létrehozása:

```

for i to rsz do K[kcs[i][1]][kcs[i][2]] := ((-1)*(EA[i]/l0[i]-s[i]/l[kcs[i][1]][kcs[i][2]]))
*e[kcs[i][1]][kcs[i][2]].e[kcs[i][1]][kcs[i][2]] %T -E*s[i]/l[kcs[i][1]][kcs[i][2]]; K[kcs[i][2]][kcs[i][1]]
:= K[kcs[i][1]][kcs[i][2]] end do;
for i to cs do for j to cs do if whattype(K[i][j]) ≠ Matrix then K[i][j] := Matrix(Dim, Dim, 0) end
if end do end do;
for j to cs*Dim do for i to cs*Dim do K100[i][j] := 0 end do end do;
for m from 0 to cs-1 do for k to Dim do for i to Dim do for j to cs do
K100[Dim*m+i][Dim*m+k] := K100[Dim*m+i][Dim*m+k]-K[m+1][j][i][k] end do end do end
do end do;
for j to bcs do for i to bcs do for k to Dim do K0001[Dim*(j-1)+k][i] := K[j][i][k] end do end
do end do;
for j to bcs*Dim do for i to bcs do for k to Dim do K0002[j][Dim*(i-1)+k] := K0001[j][i][k] end
do end do end do;
K0003 := Matrix(bcs*Dim, bcs*Dim, (i, j) → K0002[j][i]+K100[i][j]):

```

Kompatibilitási hiba számítása:

```

for i to rsz do Δt1[i] := l0[i]-l[kcs[i][1]][kcs[i][2]]+F[i][i]*s[i]+t[i] end do;
Δt := Vector(rsz, (j) → Δt1[j]):

```

Kiegyensúlyozatlan teher számítása:

Δqh := G.s+q:

```

if evalf(VectorNorm(Δqh)) > evalf(VectorNorm(Δt)) then hiba := VectorNorm(Δqh) else hiba
:= VectorNorm(Δt) end if:

```

Redukált teher számítása:

Δqr := Δqh-G.F⁻¹.Δt:

Belső csomópontok koordinátáinak jobb közelítése:

```

Δr := LinearSolve(K0003, Δqr):
for j to Dim do for i to bcs do koor1[i][j] := Δr[Dim*i+j-Dim] end do end do;
for i from bcs+1 to cs do for j to Dim do koor1[i][j] := 0 end do end do;
koor2 := Matrix(cs, Dim, (i, j) → koor1[i][j]):
koor := koor+koor2:

```

A rúderők jobb közelítése:

```

Δs := (-1)*F-1.(G%T.Δr+Δt):
s := s+Δs end do:

```



7.2. A valóság szimulálásához készült program

Ez a program ugyanazt az iterációs eljárást alkalmazza, mint a 7.1-ben ismertetett program, de célja eltérő. Itt ismert mennyiségként kezelem a szerkezet rudaiban ébredő erőt, és ismerem a csomópontok koordinátáit is a kiindulási állapotban. Az adatokból számítható a kezdőállapotban a tartó csomópontjaira ható terhek vektora. Ez a program a csomópontok új koordinátáit számítja a stabilis kezdőállapotból kiindulva a megadott tehernövekmények hatására.

A feszültségmentes rúd hosszakat nem ismerem, ezért azokat a program nem kéri bemenő adatként. A rudak normál merevsége helyett, a rudak engedékenységeit kell megadni.

A belső csomópontoknak, és a rúderőknek nem az első közelítését, hanem magát a kiindulási helyzet állapotjellemzőit kell megadni.

Meg kell adni a tehernövekményeket.

with(LinearAlgebra):

A következő adatokat a felhasználónak kell megadni:

A számítás során használt tizedes jegyek száma:

Digits := 100;

Adja meg a feladat dimenzióját (síkbeli=2; térbeli=3)

Dim := 2;

Adja meg az összes csomópont számát:

cs := 4;

Adja meg a belső csomópontok számát:

bcs := 1;

Adja meg a rudak számát:

rsz := 3;

Adja meg a terhelési esetek számát:

terh := 2;

for a from 1 to terh do

#Adja meg a kiindulási helyzetben a csomópontok koordinátáit:

koor[0]:=Matrix(cs,Dim,[[0,0],[1,0],[-1/(2),-(sqrt(3))/(2)],[-1/(2),(sqrt(3))/(2)]]):

koor[a]:=koor[0]:

#Adja meg azoknak a csomópontoknak a sorszámát melyeket rudak kapcsolnak össze:

kcs:=Matrix(rsz,2,[[1,2],[1,3],[1,4]]):



#A meghatározni kívánt kezdőállapotbeli rúderők:

$s0 := \text{Vector}(\text{rsz}, [20, 10, 30])$:

$s := s0$:

#A belső csomópontok elmozdulásait a következő tehernövekmény hatására kívánom számítani:

$\Delta q := \text{Matrix}(\text{terh}, \text{bcs} * \text{Dim}, [[45, 45], [20, -50], [0, -40]])$:

#Engedékenységek megadása:

for i from 1 to rsz do for j from 1 to rsz do $F0[i][j] := 0$ end do: end do:

$F0[1][1] := 0.001$; $F0[2][2] := 0.001$; $F0[3][3] := 0.001$:

$F := \text{Matrix}(\text{rsz}, \text{rsz}, (i, j) \rightarrow F0[i][j])$:

#KEZDŐÁLLAPOTBAN: Rudak kezdőpontjából a végpontjukba mutató vektorok meghatározása:

for i from 1 to rsz do $r[kcs[i][1]][kcs[i][2]] := \text{koor}[a][kcs[i][2]]^{(\%T)} - \text{koor}[a][kcs[i][1]]^{(\%T)}$ end do:

#KEZDŐÁLLAPOTBAN: Rudak hosszának kiszámítása: (ez itt nem a feszültségmentes rúdhossz!)

for i from 1 to rsz do

$l[kcs[i][1]][kcs[i][2]] := \text{sqrt}((r[kcs[i][1]][kcs[i][2]]^{(\%T)} \cdot (r[kcs[i][1]][kcs[i][2]]))$ **end do:**

$l[0] := \text{Vector}(\text{rsz}, (j) \rightarrow (l[kcs[j][1]][kcs[j][2]]))$:

#KEZDŐÁLLAPOTBAN: Egységvektorok elkészítése:

for i from 1 to rsz do $e[kcs[i][1]][kcs[i][2]] := (r[kcs[i][1]][kcs[i][2]]) / (l[kcs[i][1]][kcs[i][2]])$ end do:

#KEZDŐÁLLAPOTBAN: G egyensúlyi mátrix elkészítése, $e[i, j]$ elemek helyrerakása:

for i from 1 to rsz do for j from 1 to bcs do if $kcs[i][1] = j$ then $G0[j][i] := e[kcs[i][1]][kcs[i][2]]$; else $G0[j][i] := 0$ end if; end do; end do:

for i from 1 to rsz do for j from 1 to bcs do if $kcs[i][2] = j$ then $G1[j][i] := (-1) * e[kcs[i][1]][kcs[i][2]]$; else $G1[j][i] := 0$ end if; end do; end do:

for i from 1 to bcs do for j from 1 to rsz do for k from 1 to Dim do $G2[\text{Dim} * (i - 1) + k][j] := G0[i][j][k]$; $G3[\text{Dim} * (i - 1) + k][j] := G1[i][j][k]$ end do; end do; end do:

$G[0] := \text{Matrix}(\text{bcs} * \text{Dim}, \text{rsz}, (i, j) \rightarrow (G2[i][j] + G3[i][j]))$:

A meghatározandó rúderőkből, és a kezdőállapotbeli G mátrixból számítható a teher:

$q := -G[0] \cdot s$:

$E := \text{Matrix}(\text{Dim}, \text{Dim}, 1, \text{shape} = \text{diagonal})$:

A feszültségmentes rúdhosszak számítása:

for i from 1 to rsz do $l0[i] := l[kcs[i][1]][kcs[i][2]] - F[i][i] * s[i]$; $EA[i] := (l0[i]) / (F[i][i])$ end do:



$q:=q+(\Delta q[a])^{%T}$:

Az ezután következő részek teljes egészében megegyeznek a 7.1-ben leírt iterációval.

7.3. Monte-Carlo-szimulációhoz alkalmazott program

Ennek a programnak a futtatásához először szükség van a 7.2 alatti program futtatására.

Adja meg a mérések számát:

meresekszama:=100:

Adja meg a mérések szórását:

szoras:=0.000025:

Adja meg a mérések élességét:

d:=5:

with(Statistics):

Az elvi, pontos csomóponti koordinátákból a megadott szórással mérési eredményeket generálok a különböző terhelési állapotokban:

for meres from 1 to meresekszama do

for a from 0 to terh do

for j from 1 to Dim do for i from 1 to cs do

kooreloszlas[i][j]:=RandomVariable(Normal(koor[a][i][j],szoras)):

koordinataeloszlas[i][j]:=Sample(kooreloszlas[i][j],1):

koor100[i][j]:=(round(10^(d)*koordinataeloszlas[i][j][1]))/(10^(d)) **end do: end do:**

koor1000:=Matrix(cs,Dim, (i,j)->koor100[i][j]):

Rudak kezdőpontjából a végpontjukba mutató vektorok meghatározása:

for i from 1 to rsz do rterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]]:=koor1000[kcs[i][2]]^{%T}-

koor1000[kcs[i][1]]^{%T} **end do:**

Rudak hosszának kiszámítása: (ez itt nem a feszültségmentes rúd hossz!)

for i from 1 to rsz do

lterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]]:=sqrt((rterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]])^{%T}.(rterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]]))^{1/2} **end do:**

lterheles[a]:=Vector(rsz,(j)->(lterheles[kcs[j][1]][kcs[j][2]])):

Egységvektorok elkészítése:

for i from 1 to rsz do eterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]]:=

(rterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]])/(lterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]]) **end do:**



e[i,j] elemek helyrerakása, G egyensúlyi mátrix elkészítése:

```
for i from 1 to rsz do for j from 1 to bcs do if kcs[i][1]=j then G01[
j][i]:=eterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]] ; else G01[j][i]:=Vector(Dim,0) end if; end do; end do:
for i from 1 to rsz do for j from 1 to bcs do if kcs[i][2]=j then G11[ j][i]:=(-
1)*eterheles[kcs[i][1]][kcs[i][2]] ; else G11[j][i]:=Vector(Dim,0) end if; end do; end do:
for i from 1 to bcs do for j from 1 to rsz do for k from 1 to Dim do G21[Dim*( i-
1)+k][j]:=G01[i][j][k]; G31[Dim*( i-1)+k][j]:=G11[i][j][k] end do; end do;end do:
Gterheles[a]:=Matrix(bcs*Dim,rsz,(i,j)->(G21[i][j]+G31[i][j])) : end do:
```

A továbbiakban a program menete attól függ, ismert-e a kiindulási helyzet terhe, illetve a rudak engedékenységei.

7.3.1. A kiindulási állapotban ismeretlen a teher, de a rudak engedékenységei ismertek

A rúderők számítása a megzavart koordinátákból:

```
for a from 1 to terh do Gblokk10[a]:=(Gterheles[a]-Gterheles[0]): Blokk10[a]:=(-(Δq[a])%T-
(Gterheles[a]).F-1.(lterheles[a]-lterheles[0])): end do:
```

```
for a from 1 to terh do for k from 1 to bcs*Dim do Gblokk11[bcs*Dim*(a-
1)+k]:=Gblokk10[a][k] end do: end do:
```

```
for a from 1 to terh do for j from 1 to rsz do for k from 1 to bcs*Dim do
Blokk11[bcs*Dim*(a-1)+k]:=Blokk10[a][k] end do: end do: end do:
```

```
Gblokk12:=Matrix(terh*bcs*Dim,rsz,(i,j)->Gblokk11[i][j]):
```

```
Blokk12:=Vector(terh*bcs*Dim,(j)->Blokk11[j]):
```

```
sszamitott[meres]:= s0-LeastSquares(Gblokk12,Blokk12): end do:
```

```
sösszeg:=Vector(rsz,0):
```

```
for i from 1 to meresekszama do sösszeg:=sösszeg+sszamitott[i]: seredmény[i]:=(sösszeg)/(i)
end do:
```

A Monte-Carlo-módszerrel javított rúderők relatív hibája %-ban:

```
for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to rsz do
```

```
seredmény10[j][i]:=|(seredmény[i][j])/(s0[j])| *100 end do: end do:
```

```
elteres1:=Matrix(rsz,meresekszama, (i,j)->seredmény10[i][j]):
```

Az egy méréssel meghatározott rúderők relatív hibája %-ban:

```
for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to rsz do
```

```
sszamitott0[j][i]:=|(sszamitott[i][j])/(s0[j])| *100 end do: end do:
```

```
elteres0:=Matrix(rsz, meresekszama, (i,j)->sszamitott0[i][j])
```



7.3.2. A kiindulási állapot terhe és a rudak engedékenységei ismeretlenek

A rúderők számítása a megzavart koordinátákból:

for a from 1 to terh do Gblokk10[a]:=Gterheles[a]-Gterheles[0]:

Blokk10[a]:=-($\Delta q[a]$)^T: **end do:**

for a from 1 to terh do for k from 1 to bcs*Dim do for i from 1 to rsz do

Gblokk11[bcs*Dim*(a-1)+k][i]:=Gblokk10[a][k][i] **end do: end do: end do:**

for a from 1 to terh do

L0[a]:=Vector(rsz,(j)->Gterheles[a][j]-Gterheles[0][j]):

L[a]:=Matrix(rsz,rsz,L0[a],shape=diagonal):

lokk2[a]:=Gterheles[a]. L[a] **end do:**

for a from 1 to terh do for k from 1 to bcs*Dim do for i from 1 to rsz do

Gblokk11[bcs*Dim*(a-1)+k][i+rsz]:=lokk2[a][k][i] **end do: end do: end do:**

for a from 1 to terh do for j from 1 to rsz do for k from 1 to bcs*Dim do

Blokk11[bcs*Dim*(a-1)+k]:=Blokk10[a][k] **end do: end do: end do:**

Gblokk12:=Matrix(terh*bcs*Dim,2* rsz,(i,j)->Gblokk11[i][j]):

Blokk12:=Vector(terh*bcs*Dim,(j)->Blokk11[j]):

for i from 1 to rsz do peredmény[i]:=s0[i]; peredmény[rsz+i]:=(1)/(F0[i][i]) **end do:**

peredmény1:=Vector(2*rsz, (j)->peredmény[j]):

sszamitott[meres]:= LeastSquares(Gblokk12,Blokk12): **end do:**

sösszeg:=Vector(rsz*2,0):

for i from 1 to meresekszama do sösszeg:=sösszeg+sszamitott[i]; seredmény[i]:=(sösszeg)/(i)
end do:

A Monte-Carlo-módszerrel javított rúderők és engedékenységek relatív hibája %-ban:

for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to 2*rsz do

seredmény10[j][i]:=|(peredmény1[j]-seredmény[i][j])/(peredmény1[j])| *100 **end do: end do:**

elteres1:=Matrix(rsz*2,meresekszama, (i,j)->seredmény10[i][j]):

Az egy méréssel meghatározott rúderők és engedékenységek relatív hibája %-ban:

for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to 2*rsz do sszamitott0[j][i]:=|(peredmény1[j]-sszamitott[i][j])/(peredmény1[j])| *100 **end do: end do**

7.3.3. A kiindulási helyzet terhe és a rudak engedékenységei ismertek

A rúderők számítása a megzavart koordinátákból:

for a from 0 to terh do

Gblokk10[a+1]:=Gterheles[a]:



```

Blok10[a+1]:=-(q[a])-(Gterheles[a]).F^(-1).(\terheles[a]-\terheles[0]): end do:
for a from 1 to (terh+1) do for k from 1 to bcs*Dim do Gblokk11[bcs*Dim*(a-1)+k]:=Gblokk10[a][k] end do: end do:
for a from 1 to (terh+1) do for j from 1 to rsz do for k from 1 to bcs*Dim do
Blok11[bcs*Dim*(a-1)+k]:=Blok10[a][k] end do: end do: end do:
Gblokk12:=Matrix((terh+1)*bcs*Dim,rsz,(i,j)->Gblokk11[i][j]):
Blok12:=Vector((terh+1)*bcs*Dim,(j)->Blok11[j]):

sszmitott[meres]:= s0-LeastSquares(Gblokk12,Blok12): end do:
összeg:=Vector(rsz,0):
for i from 1 to meresekszama do összeg:=összeg+sszmitott[i]: seredmény[i]:=(összeg)/(i)
end do:

# A Monte-Carlo-módszerrel javított rúderők relatív hibája %-ban:
for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to rsz do
seredmény10[j][i]:=|(seredmény[i][j])/(s0[j])| *100 end do: end do:
elteres1:=Matrix(rsz,meresekszama, (i,j)->seredmény10[i][j]):

# Az egy méréssel meghatározott rúderők relatív hibája %-ban:
for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to rsz do
sszmitott0[j][i]:=|(sszmitott[i][j])/(s0[j])| *100 end do: end do:
elteres0:=Matrix(rsz, meresekszama, (i,j)->sszmitott0[i][j])

```

7.3.4. A kiindulási helyzet terhe ismert, a rudak engedékenységei ismeretlenek

```

# A rúderők számítása a megzavart koordinátákból:
for a from 0 to terh do Gblokk10[a+1]:=(Gterheles[a]); Blok10[a+1]:=-(q[a]) end do:
for a from 1 to (terh+1) do for k from 1 to bcs*Dim do for i from 1 to rsz do
Gblokk11[bcs*Dim*(a-1)+k][i]:=Gblokk10[a][k][i] end do: end do: end do:
for a from 0 to terh do L0[a]:=Vector(rsz,(j)->\terheles[a][j]-\terheles[0][j]);
L[a]:=Matrix(rsz,rsz,L0[a],shape=diagonal); lokk2[a+1]:=Gterheles[a]. L[a] end do:
for a from 1 to (terh+1) do for k from 1 to bcs*Dim do for i from 1 to rsz do
Gblokk11[bcs*Dim*(a-1)+k][i+rsz]:=lokk2[a][k][i] end do: end do: end do:
for a from 1 to (terh+1) do for j from 1 to rsz do for k from 1 to bcs*Dim do
Blok11[bcs*Dim*(a-1)+k]:=Blok10[a][k] end do: end do: end do:
Gblokk12:=Matrix((terh+1)*bcs*Dim,2* rsz,(i,j)->Gblokk11[i][j]):
Blok12:=Vector((terh+1)*bcs*Dim,(j)->Blok11[j]):

```



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

```
for i from 1 to rsz do peredmény[i]:=s0[i]; peredmény[rsz+i]:=(1)/(F0[i][i]) end do;  
peredmény1:=Vector(2*rsz, (j)->peredmény[j]):  
sszamitott[meres]:= LeastSquares(Gblokk12,Blokk12): end do;  
  
összeg:=Vector(rsz*2,0):  
for i from 1 to meresekszama do összeg:=összeg+sszamitott[i]; seredmény[i]:=(összeg)/(i)  
end do;  
  
# A Monte-Carlo-módszerrel javított rúderők és engedékenységek relatív hibája %-ban:  
for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to 2*rsz do  
seredmény10[j][i]:=|(peredmény1[j]-seredmény[i][j])|/(peredmény1[j]) *100 end do: end  
do;  
elteres1:=Matrix(rsz*2,meresekszama, (i,j)->seredmény10[i][j]):  
  
# Az egy méréssel meghatározott rúderők és engedékenységek relatív hibája %-ban:  
for i from 1 to meresekszama do for j from 1 to 2*rsz do sszamitott0[j][i]:=|(peredmény1[j]-  
sszamitott[i][j])|/(peredmény1[j]) *100 end do: end do
```

A 7.3 fejezetben leírt programmal kapott eredményeket ábrázoltam a 8. fejezet példáiban.

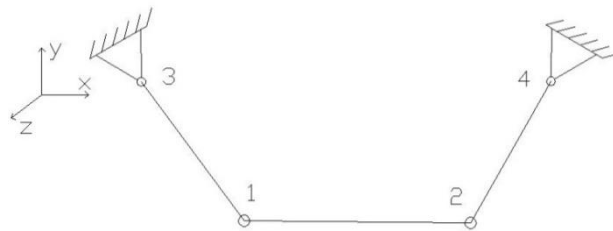


8. Példák

8.1. Statikailag túlhatározott szerkezet: 3D-s hinta

Az első példa egy statikailag túlhatározott térbeli szerkezet, amely kis erők hatására is képes nagy elmozdulásokat végezni. A tartót a rá ható terhek stabilizálják. A példában az ismeretlen mennyiségek a kezdőállapotbeli rúderők, a kiindulási állapotban a csomópontokra ható terhek és a feszültségmentes rúdhosszak. A rudak engedékenységet ismertnek tekintem.

A tartó modellje:



A csomópontok koordinátáit irracionális számoknak vettem fel, hogy a későbbi kerekítések biztosan megváltoztassák a koordináták értékét.

Csomópont	x_i	y_i	z_i
1	$\sqrt{26,2}$	$-\sqrt{16,6}$	$\sqrt{2}$
2	$\sqrt{104}$	$-\sqrt{17}$	$\sqrt{2,01}$
3	$\sqrt{1,2}$	$-\sqrt{1,24}$	$\sqrt{2,02}$
4	$\sqrt{198}$	$-\sqrt{1,26}$	$\sqrt{1,98}$

Kiindulási helyzetben a rúderők vektora legyen:

$$\underline{s}^{(0)T} = [4 \quad 5 \quad 5].$$

A fenti rúderők lesznek a meghatározandó mennyiségek az identifikáció során.

A rudak engedékenységei legyenek most ismert mennyiségek:

$$\underline{F} = \langle 0,0010 \quad 0,0012 \quad 0,0013 \rangle.$$

A rúderők meghatározásához (5.10) szerint elegendő egy tehernövekményt felvenni, mivel az ismeretlen mennyiségek száma három, míg egy tehernövekmény 6 új egyenlet felírását teszi lehetővé. Legyen ez a tehernövekmény:

$$\Delta \underline{q}^{(1)T} = [0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Az első terhelési esethez tartozó csomóponti helyvektorok számíthatók az iterációs eljárással számítva (7.2-es program):



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

$$\underline{r}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 4.810019818 \\ -2.471074240 \\ 4.485699457 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 9.635897861 \\ -2.603471741 \\ 2.889379031 \end{bmatrix}.$$

A tehernövekmények hatására a rudak minimális mértékben nyúltak meg (a legnagyobb fajlagos nyúlás a második rúdban következett be, értéke 2‰).

Ha a koordinátákat egyszer mérem, és a méréseket pontosan végzem (az iterációval kapott eredményeket 3 tizedes jegyre kerekítem), akkor az identifikációs eljárással számolt kezdőállapotbeli rúderők eltérése az előre felvett $\underline{s}^{(0)T}$ -től:

(7.3.1-es program, mérések száma: 1, $\sigma = 0$, $d=3$)

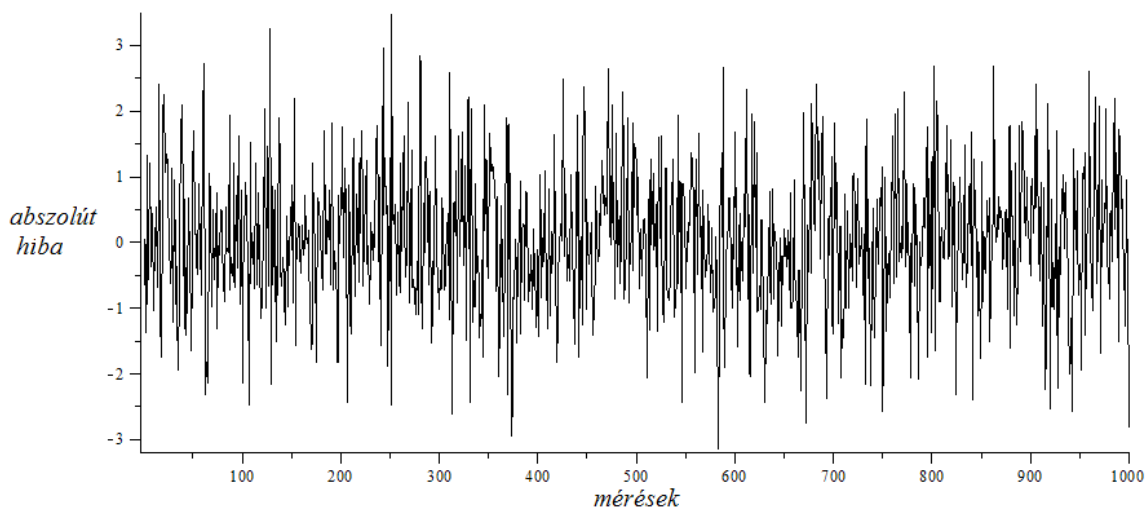
$$\underline{s}^{(0)T} - \underline{s}_{\text{számított}}^{(0)T} = [-0.5864135957 \quad 0.7682935701 \quad -1.257692544].$$

Az eredményekből látható, hogy a számítás eredményeül kapott rúderők között van olyan, amely több mint 20%-ban eltér a valós rúderőtől.

A rúderőket a következőkben egyetlen „mérésből” számítom. Történjen a koordinátaleolvasás most nagyobb, tizedmilliméteres élességgel, de pontatlanul. A grafikonok megmutatják, mennyit tér el az adott mérés során a rúderő a valós értékétől:

(7.3.1-es program, mérések száma: 1000, $\sigma = \pm 0,00025$, $d=4$)

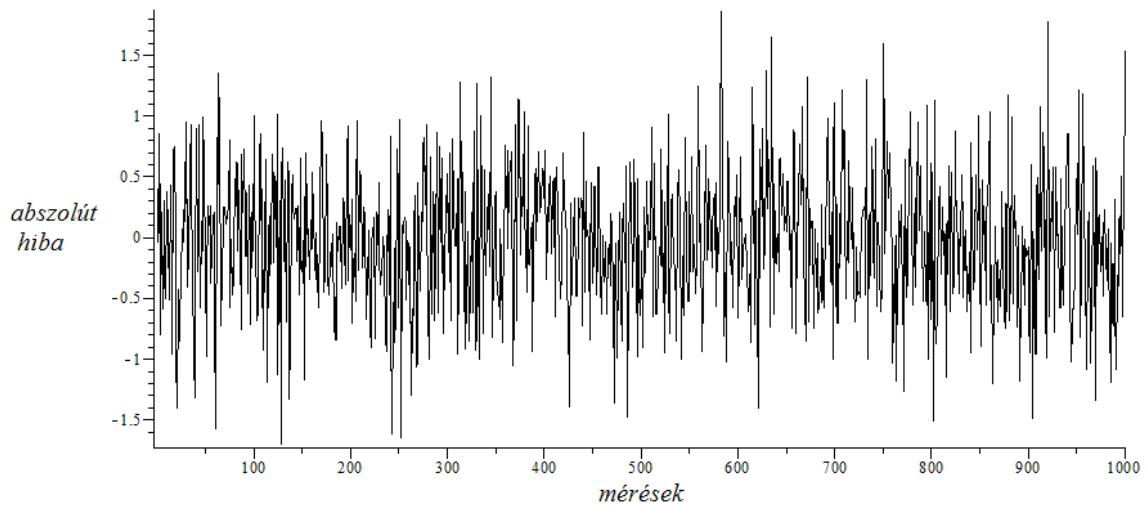
Az első rúdban ébredő erő eltérése a valóságtól az 1000 mérés folyamán:



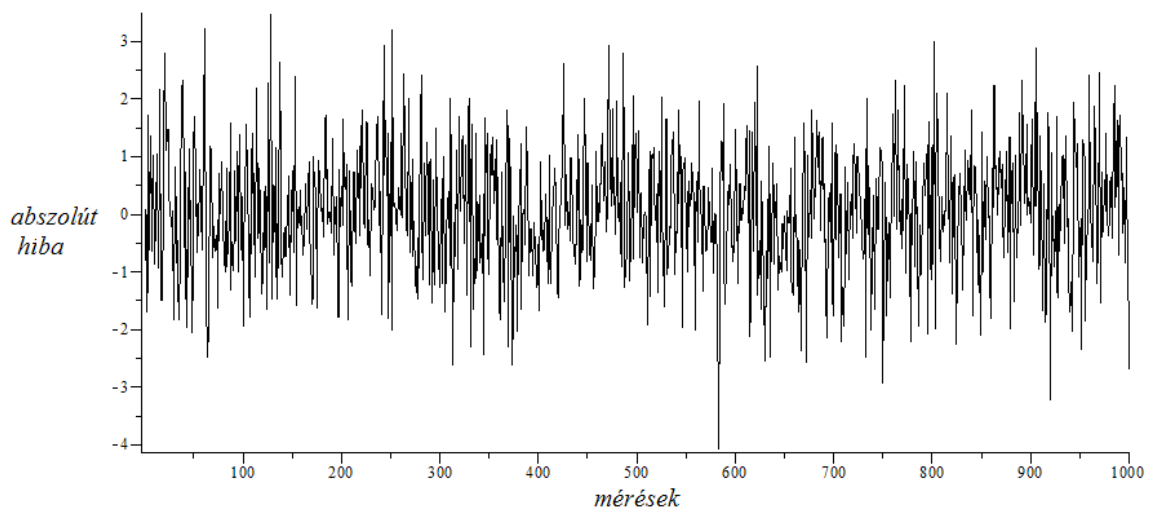
Az 1-2 rúdban számított erő eltérése a valóságtól



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék



Az 1-3 rúdban számított erő eltérése a valóságtól



A 2-4 rúdban számított erő eltérése a valóságtól

Az eredményekből látható, hogy hiába olvasunk le az elérhető pontosság után még eggyel több tizedes jegyet a mérés során, az nem jelenti a pontosság növekedését.

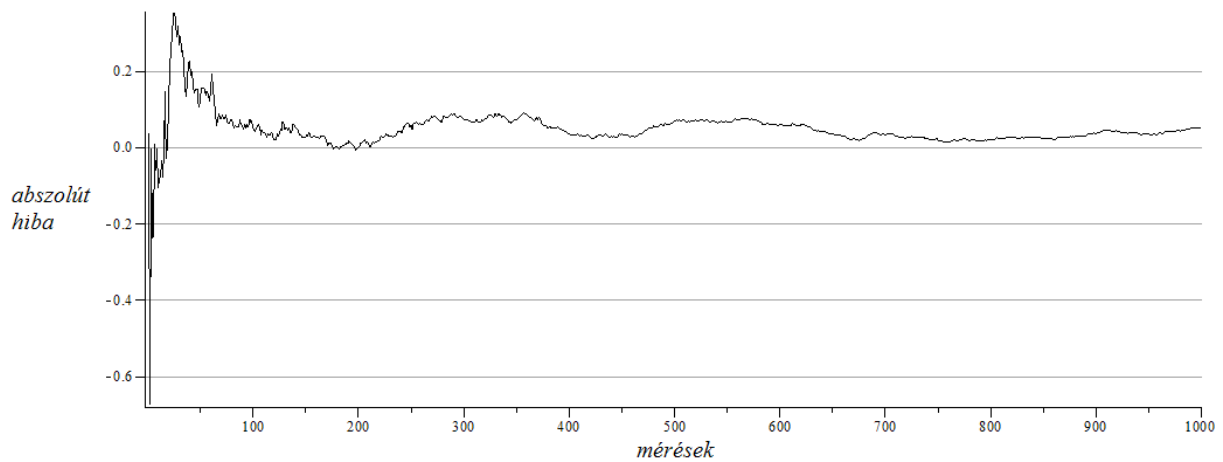
Most vizsgáljuk meg azt, hogy mi történik akkor, ha többször megmérjük a koordinátákat a terhelési esetek során, és az azokból számított rúderőket átlagoljuk.

Az alábbi grafikonok az adott rúderő eltérését ábrázolják annak függvényében, hogy hány mérésből számított rúderő számtani átlagát vettem. A grafikon jobb láthatósága kedvéért az ordináta beosztása nem egyezik meg az előző grafikonokéval.

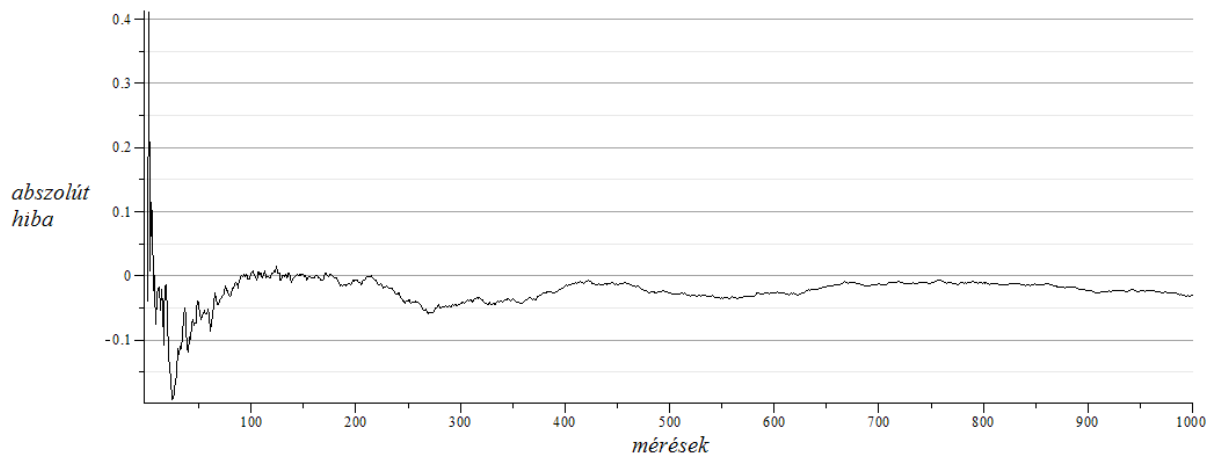
Az első rúdban számított erő eltérése a rúdban valóban ébredő erőtől:



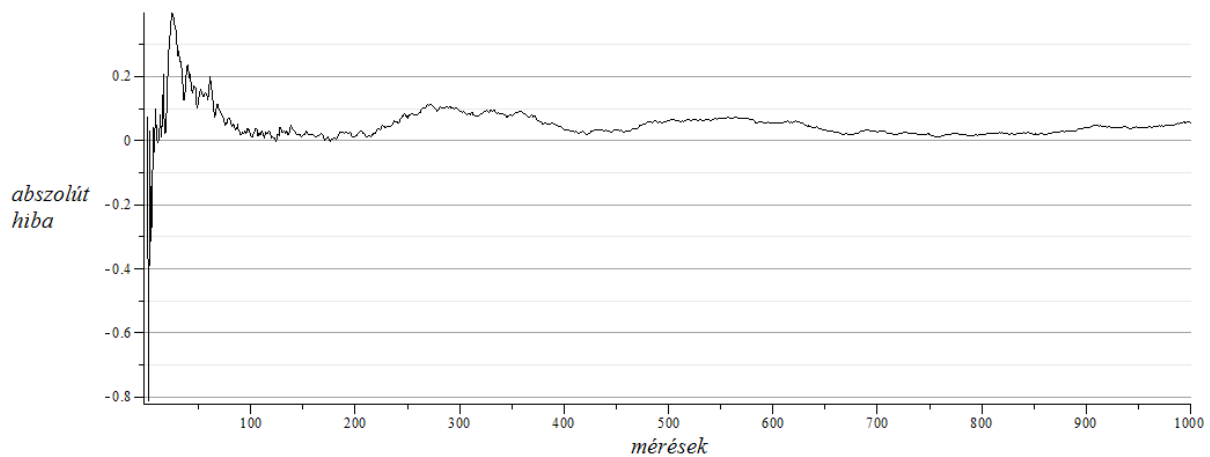
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék



Eltérések az 1-2 rúdban az átlagolt mérések számának függvényében



Eltérések az 1-3 rúdban az átlagolt mérések számának függvényében



Eltérések a 2-4 rúdban az átlagolt mérések számának függvényében

Egyértelműen látszik, hogyha nagyon sok mérést végzek, az ingadozások egyre kisebbek, a rúderők értéke konvergál egy, a valóságban felvett értékéhez nagyon közeli számhoz. A rúderők relatív hibája tíz mérés után már nem haladja meg egyik rúdnál sem a 4%-ot. 100 mérés után a legnagyobb relatív hiba 1% körüli. Természetesen a gyakorlatban



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

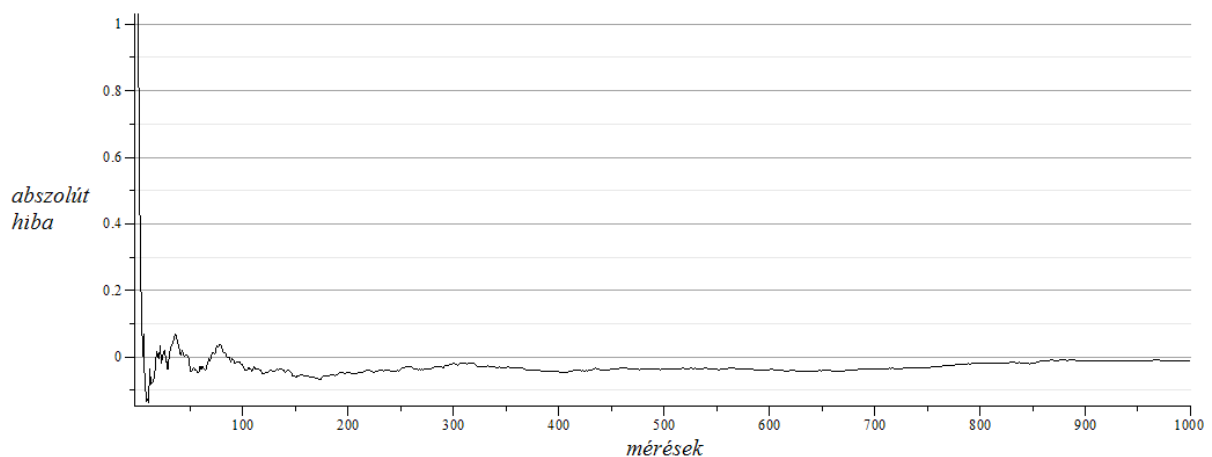
koordinátáknak nem kivitelezhető az 1000 mérés elvégzése, itt csak azért számítottam 1000 mérést, hogy az eltérések konvergenciája minél jobban látható legyen.

Növelhető-e a pontosság azzal, hogy a minimálisan szükségesnél több terhelési esetben mérjük a koordinátákat?

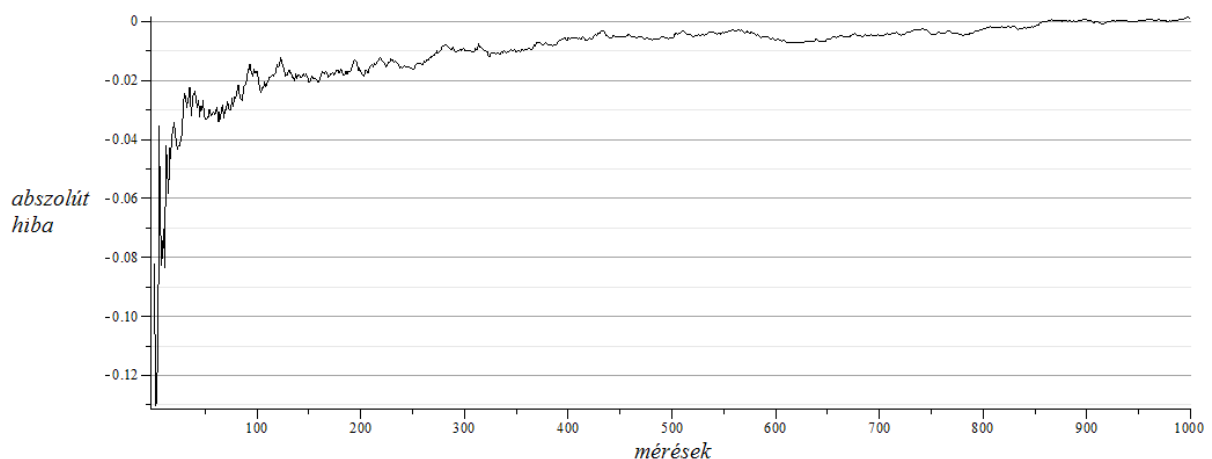
Most két terhelési esetet veszek fel:

$$\Delta \underline{q}^{(1)T} = [-5 \quad -2 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 10], \quad \Delta \underline{q}^{(2)T} = [0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

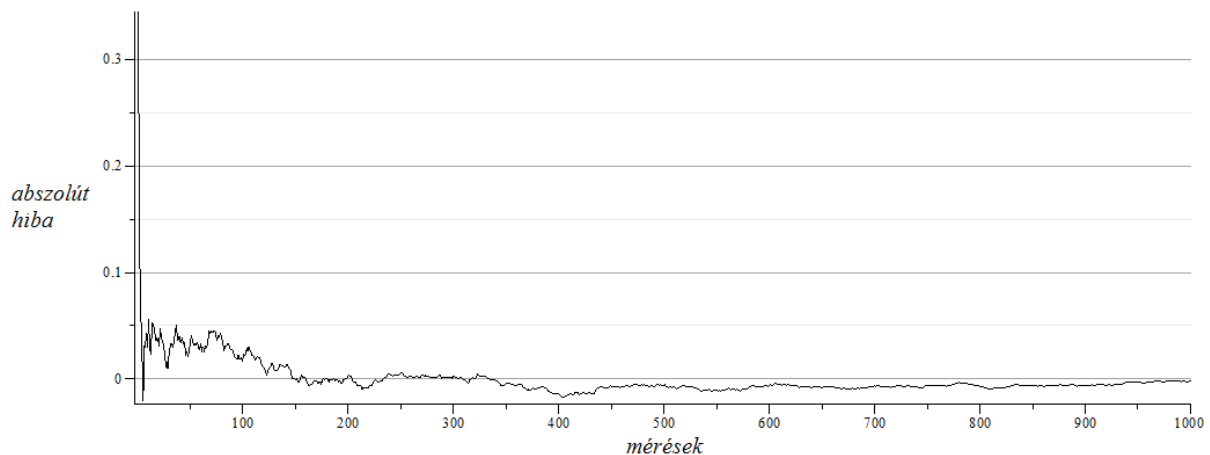
Az alábbi grafikonok az adott mérésszámból Monte-Carlo-módszerrel számított rúderők számtani átlagát ábrázolják:



Eltérések az 1-2 rúdban az átlagolt mérések számának függvényében 2 terhelési eset alkalmazásakor



Eltérések az 1-3 rúdban az átlagolt mérések számának függvényében 2 terhelési eset alkalmazásakor

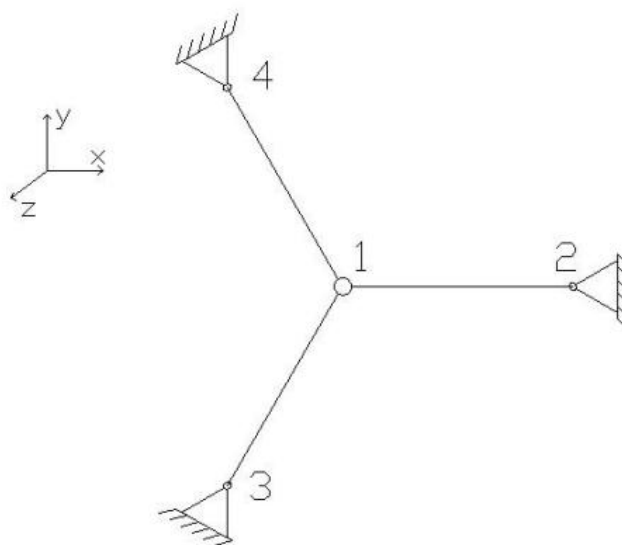


Eltérések a 2-4 rúdban az átlagolt mérések számának függvényében 2 terhelési eset alkalmazásakor

Mint látható, az abszolút hiba akár negyedére is csökkenhet. Terhelési esetenként 10 mérés után a legnagyobb eltérés a valós rúderőnek mindössze 2,5%-a. Megjegyzendő viszont, hogy a terhelési esetek számának növelésével lineárisan nő az elvégzendő mérések száma is. Az eredményekből látható, hogy statikailag túlhatározott szerkezetek esetén érdemesebb a szükségesnél több terhelési esetet felvenni, és terhelési esetenként kevesebb mérést végezni, mint a minimális terhelési esetszámmal sokszor megmérni a koordinátákat.

8.2. Statikailag határozatlan szerkezet: Y-alakú tartó

Az alábbi példa egy síkbeli szerkezet, mely statikailag egyszeresen határozatlan. A szerkezet rúdjai egymással 120° -os szöget zárnak be. A kiindulási helyzetben a rudak hossza egységnyi.



Az Y-alakú tartó modellje



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Csomópont	x_i	y_i
1	0	0
2	1	0
3	-0.5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

A számítások során a keresett, ismeretlen mennyiségek a kiindulási helyzetben a rúderők vektora. Minden rúd engedékenysége ismert: $F = 0.001$.

Fontos megjegyezni, hogy azokban az esetekben, mikor a rudak engedékenységeit és a kiindulási állapot terhet sem ismertjük, és egy belső csomóponthoz két olyan rúd kapcsolódik, melyeknek a másik vége fix csomóponthoz kapcsolódik, akkor az együtthatómátrix két rúdhhoz tartozó oszlopai lineárisan összefüggenek, ezért a rúderők nem határozhatók meg egyértelműen. Ennek bizonyítása megtalálható az [1]-es irodalomban.

A szerkezetre ható terheket most is ismeretlennek tekintem.

A meghatározandó rúderők:

$$\underline{s}^{(0)T} = [20 \quad 10 \quad 30].$$

Összesen 3 ismeretlen adatom van, ezért minimum két állapotban kell megmérni a szerkezet koordinátáit, így 4 egyenlet írható fel, amiből az ismeretlen mennyiségek számíthatók.

A számításhoz szükséges tehernövekmények:

$$\Delta \underline{q}^{(1)T} = [45 \quad 45], \quad \Delta \underline{q}^{(2)T} = [20 \quad -50].$$

A rúderők számításához az (5.9)-ben szereplő egyenleteket használtam fel.

Ha a koordinátákat csak 3 tizedes jegy pontosan olvasom le, a számított rúderők eltérése:

(7.3.1-es program, mérések száma: 1, $\sigma = 0$, $d=3$)

$$\underline{s}^{(0)T} - \underline{s}_{\text{számított}}^{(0)T} = [3.798 \quad -15.48 \quad 3.321].$$

Azaz a számított rúderők között van olyan, amelynek a relatív hibája 150% feletti.

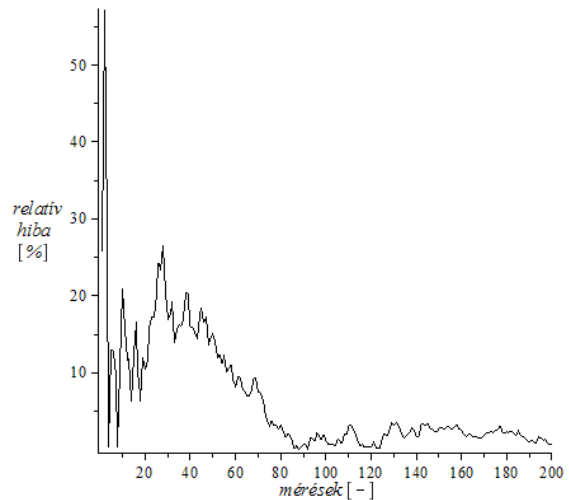
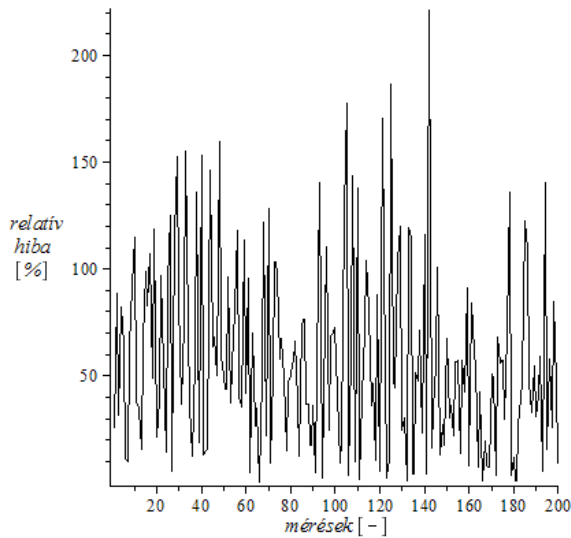
A számítás pontosságát itt sem növeli az, hogyha a mérés során eggyel több tizedes jegyet olvasunk le, de azt pontatlanul.

Vizsgáljuk meg most azt, hogy a méréseket pontatlanul, de 4 tizedes jegy élességgel végezzük, majd azokat a fent leírt Monte-Carlo-módszerrel javítjuk. A mérés pontatlansága $\sigma = \pm 0,00025$.

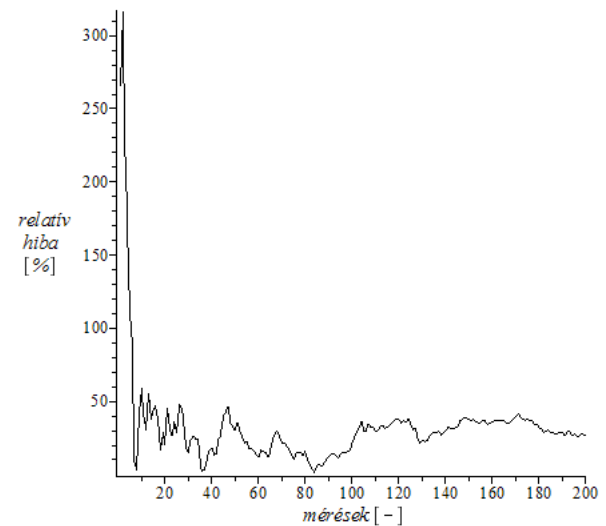
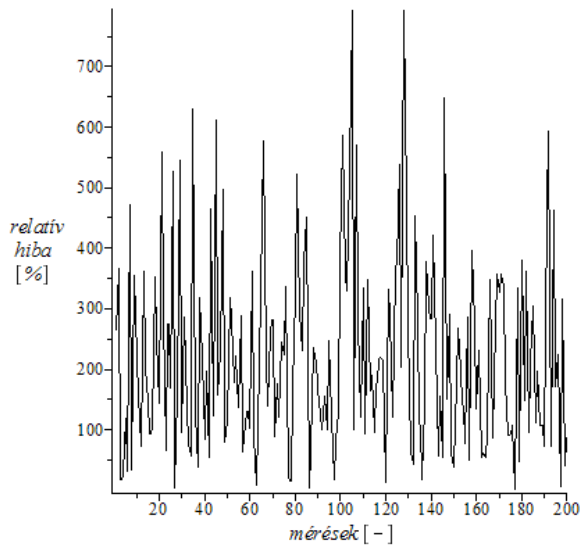


Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

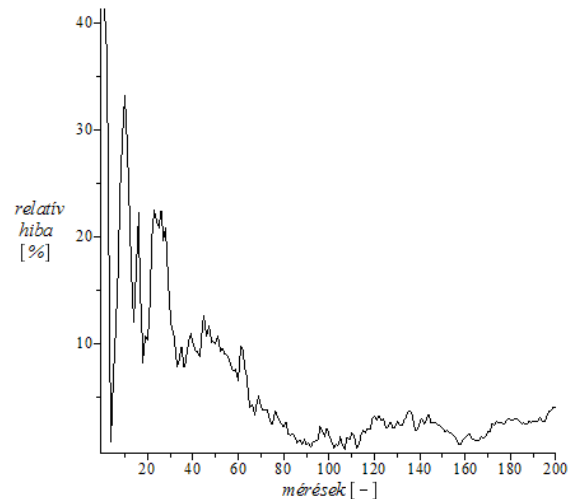
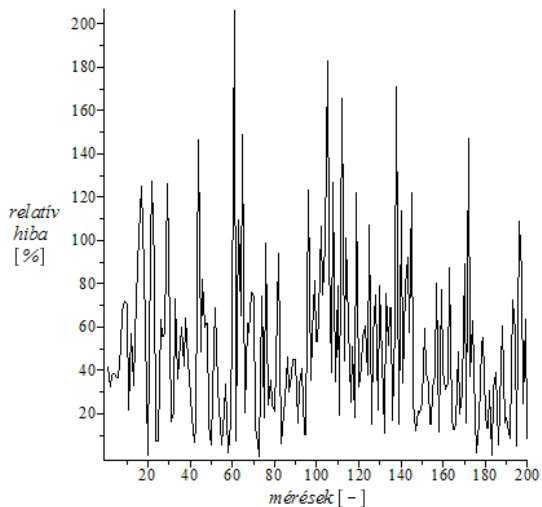
A kapott eredmények:



Az 1-2 rúdban ébredő erő relatív hibája Monte-Carlo-módszer használata előtt, és után



Az 1-3 rúdban ébredő erő relatív hibája Monte-Carlo-módszer használata előtt, és után



Az 1-4 rúdban ébredő erő relatív hibája Monte-Carlo-módszer használata előtt, és után



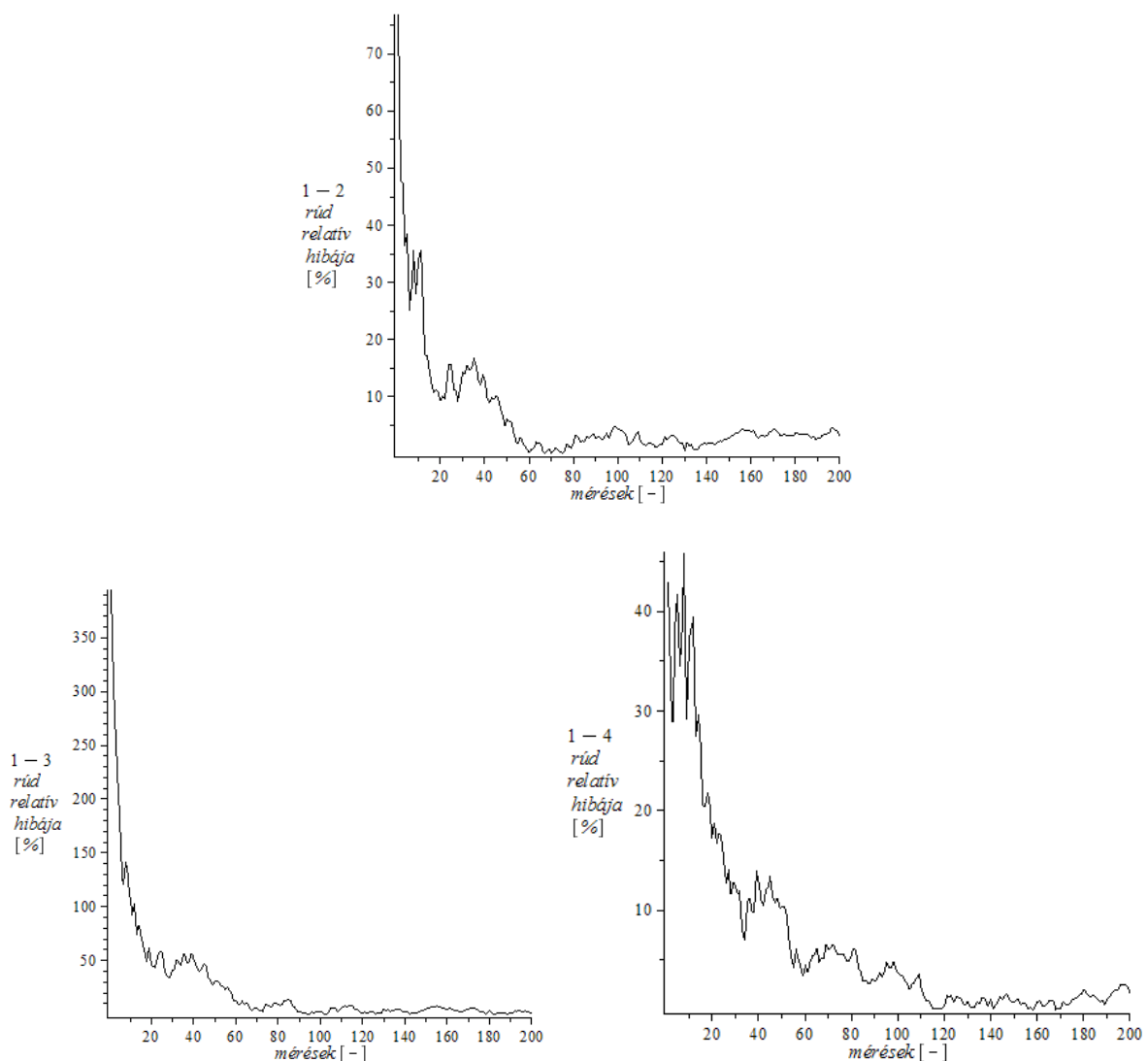
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

10 mérés elvégzése után, és a Monte-Carlo-módszer használatával a hibák nagysága felére csökkent, de az eredmények még mindig megbízhatatlanok. Most megpróbálom azt, hogy a minimálisan szükségesnél több terhelési esetet veszek fel, és ebből a túlhatározott egyenletrendszerből számítom a rúderőket.

A terhelési esetek száma legyen $t = 6$, a tehernövekmények vektora:

$$\Delta \underline{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} 45 \\ 45 \end{bmatrix}, \Delta \underline{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} 20 \\ -50 \end{bmatrix}, \Delta \underline{q}^{(3)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \underline{q}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \Delta \underline{q}^{(5)} = \begin{bmatrix} 20 \\ -60 \end{bmatrix}, \Delta \underline{q}^{(6)} = \begin{bmatrix} -15 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

A számított rúderők eltérése a valóságtól a mérések függvényében:



A rudakban ébredő erő relatív hibája, Monte-Carlo-módszer használata után 6 terhelési esetből számítva

Az eredményekből kitűnik, hogy ennél a statikailag határozatlan szerkezetnél a terhelési esetek számának növelésével az elérhető pontosság nem növelhető. Megfigyelhető, hogy 6 terhelési esetnél monotonabb módon javul az eredmény, míg a minimális 2 terhelési esetben a Monte-Carlo-szimulációval számított rúderők értéke jobban ingadozik.



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Tehát ha összesen ugyanannyi mérésre van idő, jobban megéri kevesebb terhelési esetben több mérést végrehajtani, mint több terhelési esetet alkalmazni, de a csomópontok koordinátáit kevesebbszer mérni. A tehernövekmények irányát gondosan meg kell választani, lehetőleg úgy, hogy az a rudak egységvektorainak a koordinátáit a lehető legnagyobb mértékben módosítsa.

Vizsgáltam azt is, hogy az identifikációhoz használt lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának elemei hogyan befolyásolják a számított rúderők pontosságát. Az (5.9) egyenletrendszer együtthatómátrixának blokkjaiban egyensúlyi mátrixok különbségei (azaz egységvektorok különbségei) szerepelnek. A feladatoknál egységesen vettem fel a szórás $\sigma = \pm 0.00025$ értékre (azért ezt az értéket vettem fel, mert ha a csomópontok koordinátáihoz méter dimenziót rendelek, akkor ezzel az értékkel jellemezhető a valóságban elérhető legnagyobb pontosság). A vizsgálatot az Y-alakú tartóra elvégezve a következő megállapításokat teszem:

- Az együtthatómátrixban szereplő értékek a 4. tizedes jegytől kezdve a felvett szórás miatt megbízhatatlanok.
- Ha megfelelő tehernövekményekkel és teherelrendezéssel sikerült elérnem azt, hogy az együtthatómátrix minden elemének első értékes jegye legalább a második tizedes jegyre essen, tehát két pontos tizedes jegy marad a számításban, akkor a rúderők relatív hibája 10% alatti. Ha az elmozdulások kisebbek, és az együtthatómátrix minden elemében legalább egyetlen pontos jegy marad, akkor a számítás pontossága egy nagyságrenddel csökken.
- Tovább vizsgálva az együtthatómátrix elemeinek első értékes jegye és a számított rúderőknek a pontossága közötti kapcsolatot közel lineáris összefüggést tapasztaltam. Azaz a rúderőket akkor tudtam 10%-nál kisebb relatív hibával meghatározni, ha az együtthatómátrix minden eleme legalább két pontos tizedes jegyet tartalmazott.

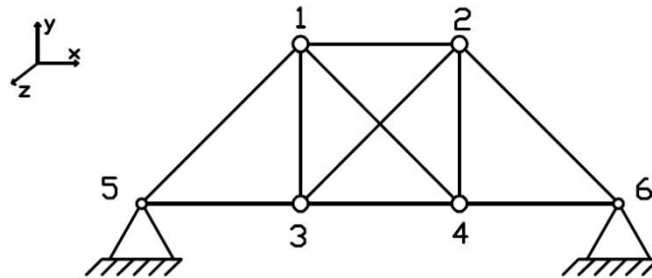
8.3. Identifikációs eljárások összehasonlítása

Harmadik példaként egy statikailag kétszeresen határozatlan rácsos tartón számítom a keresett mennyiségeket. Ezzel a példával a célom, hogy egyforma feltételek mellett (terhelési esetek száma azonos, azonos tehernövekmények, azonos mérési pontosság) a számított rúderőket (és engedékenységeket) összehasonlítsam az alábbi esetekben:

1. Ismeretlen a tartóra ható teher, ismertek a rudak engedékenységei.
2. Ismeretlen a tartóra ható teher, ismeretlenek a rudak engedékenységei.
3. Ismert a teher, ismertek a rudak engedékenységei.
4. Ismert a teher, ismeretlenek a rudak engedékenységei.



A rácsos tartó modellje:



A csomópontok koordinátái:

Csomópont sorszáma:	x_i	y_i
1	1	1
2	2	1
3	1	0
4	2	0
5	0	0
6	3	0

A meghatározandó rúderők vektora:

$$\underline{s}^{(0)T} = [-50 \quad 25 \quad 5\sqrt{15} \quad 35 \quad 5\sqrt{11} \quad 25 \quad 35 \quad 42.5 \quad 25 \quad -5\sqrt{14}].$$

Mindegyik rúd engedékenysége $F = 0.005$. Ezeket az engedékenységeket első és harmadik esetben ismert mennyiségként veszem, míg a második és negyedik esetben ismeretlenként.

Három terhelési esetet veszek fel, mely mindegyik számításhoz elegendő felírható egyenletet biztosít az ismeretlen mennyiségek meghatározásához.

$$\Delta \underline{q}^{(1)T} = [-10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad -10 \quad -10 \quad 10]$$

$$\Delta \underline{q}^{(2)T} = [10 \quad -10 \quad -10 \quad -10 \quad -10 \quad 10 \quad 10 \quad -10]$$

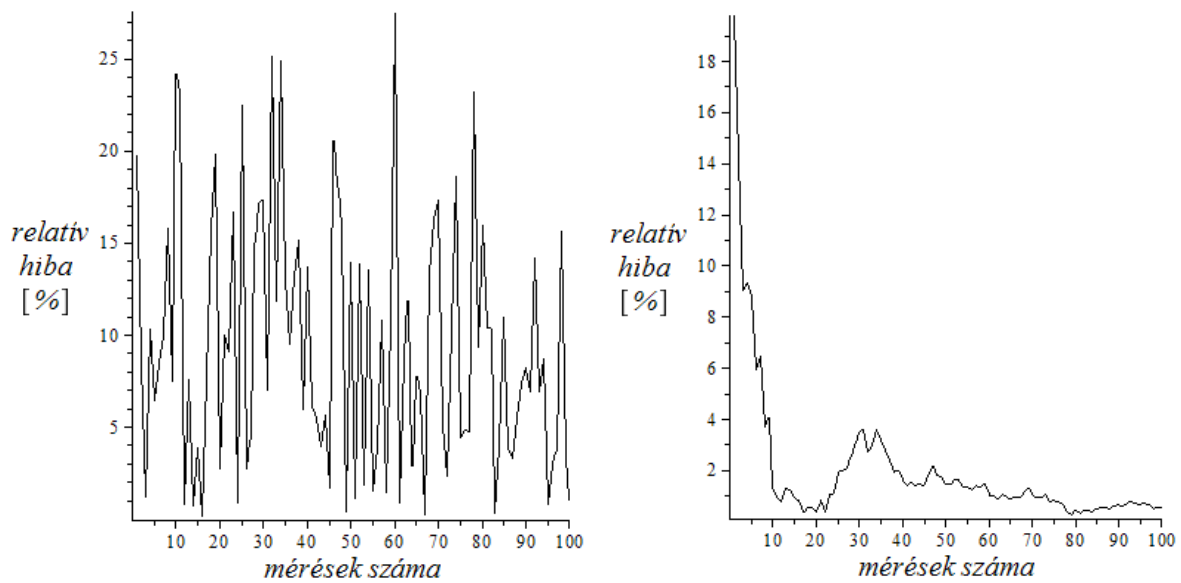
$$\Delta \underline{q}^{(3)T} = [5 \quad 10 \quad 5 \quad 10 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 10].$$

A „mérések” pontatlanságát, azaz a szórást most is $\sigma = \pm 0.00025$ értékre veszek fel.

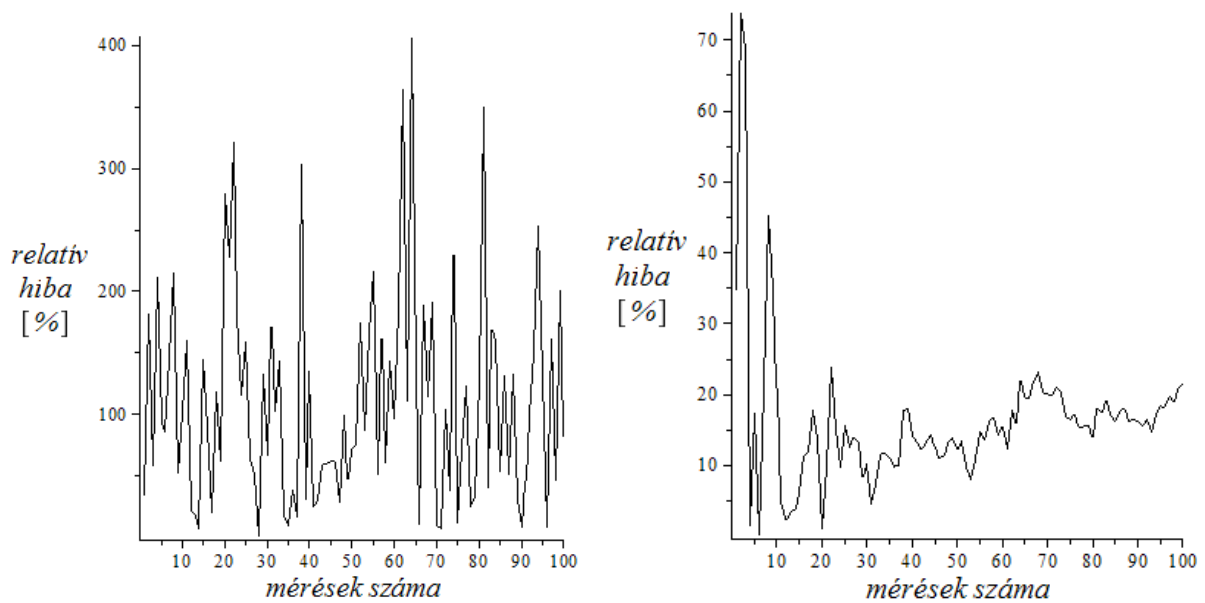
Az eredmények értékelésekor a Monte-Carlo-módszerrel javított eredményeket hasonlítom össze. A Monte-Carlo-módszerrel (kb. 10-20 mérés elvégzése után) minden esetben egy nagyságrendű pontosságnövekedést értem el ahhoz képest, hogy csak egyszer mérem a csomópontok koordinátáit. Ezt a pontosságnövekedést a 2-4 csomópontokat összekötő rúd esetében mutatom be:



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék



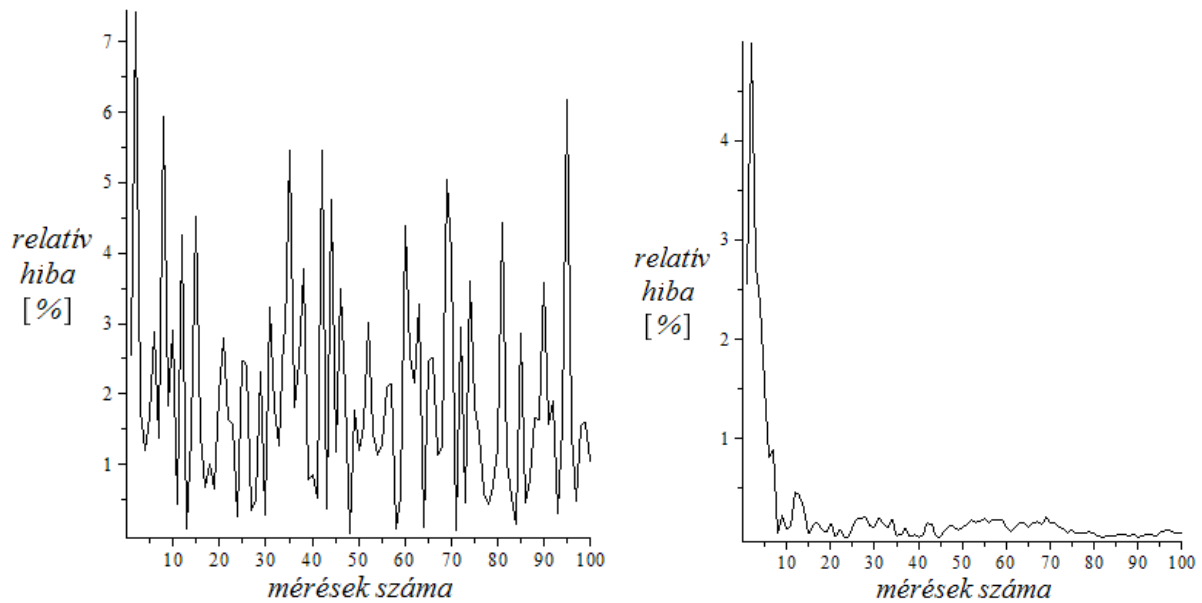
Relatív hibák nagysága 2-4 rúdban Monte-Carlo-módszer használata
előtt és után, ha ismeretlen $\underline{q}$ és ismert $\underline{F}$.



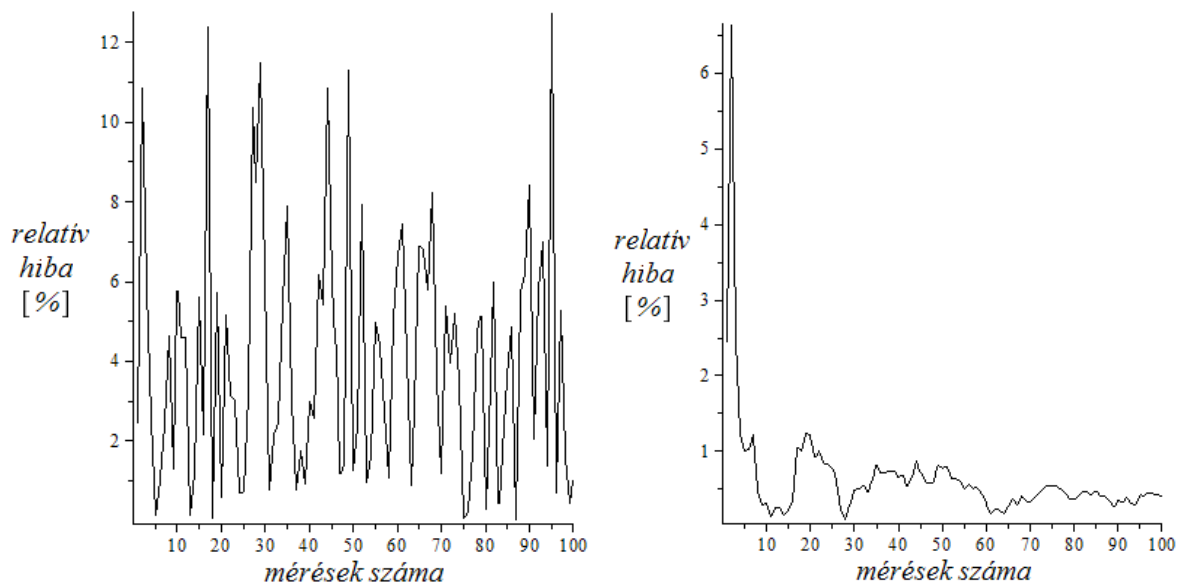
Relatív hibák nagysága 2-4 rúdban Monte-Carlo-módszer használata
előtt és után, ha ismeretlen $\underline{q}$ és $\underline{F}$.



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék



Relatív hibák nagysága 2-4 rúdban Monte-Carlo-módszer használata
előtt és után, ha ismert $\underline{q}$ és $\underline{F}$ is.



Relatív hibák nagysága 2-4 rúdban Monte-Carlo-módszer használata
előtt és után, ha ismert $\underline{q}$ és ismeretlen $\underline{F}$.

A rudak nagy száma végett az eredményeket táblázatos formában közlöm. A táblázat adatai azt jelentik, hogy mekkora lehet a keresett mennyiség legnagyobb relatív hibája %-ban terhelési esetenként és csomópontonként 20 mérés elvégzése után.



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Rúd	Rúderő relatív hibája (ismeretlen q és ismert F)	Rúderő relatív hibája (ismeretlen q és F)	Rúderő relatív hibája (ismert q és F)	Rúderő relatív hibája (ismert q és ismeretlen F)
1-2	2,0%	15%	0,1%	0,5%
1-3	0,8%	11%	0,3%	1,0%
1-4	4,0%	50%	0,5%	2,5%
1-5	1,6%	23%	0,05%	0,1%
2-3	10,0%	13%	0,5%	3,0%
2-4	4,0%	25%	0,3%	1,5%
2-6	1,5%	5%	0,06%	0,1%
3-4	1,4%	5%	0,4%	1,0%
3-5	1,0%	4%	0,4%	0,7%
4-6	1,2%	13%	0,5%	0,8%

A szimulációból egyértelműen látszik, hogy ennél a tartónál a legkevésbé pontosan akkor tudtam meghatározni a rúderőket, mikor a tartóra ható terheket és a rudak engedékenységeit is az ismeretlen mennyiségek közé soroltam. Második leggyengébb pontosságot akkor értem el, ha az engedékenységet ismertnek, de a kezdőállapot terhét ismeretlennek feltételeztem. Ezeknél az eredményeknél akár egy nagyságrenddel pontosabb eredményt tudtam elérni, ha a kiindulási állapot terhét ismertnek tekintettem. Ennek az oka, hogy míg (5.11) és (5.9) egyenletekben az egyensúlyi mátrixok különbségei, addig az (5.18) és (5.20) egyenletekben az egyensúlyi mátrixok szerepelnek. A számításra használható értékes jegyek száma egyensúlyi mátrixok különbsége esetén könnyen lecsökkenhet. A pontatlanabb eredményekhez ismeretlen engedékenységek és teher esetén az is hozzájárul, hogy az együttható mátrix kondíciószáma egy nagyságrenddel nagyobb, mint abban az esetben, ha $\underline{F}$ -et és $\underline{q}$ -t ismert mennyiségként kezelem.

Rúd	Engedékenység relatív hibája (ismeretlen q)	Engedékenység relatív hibája (ismert q)
1-2	4,5%	0,5%
1-3	1,5%	0,5%
1-4	13,0%	0,7%
1-5	1,2%	0,2%
2-3	8,0%	0,4%
2-4	3,0%	0,5%
2-6	2,5%	0,3%
3-4	4,0%	0,9%
3-5	5,0%	0,3%
4-6	2,0%	1,5%

Az engedékenységeket is pontosabban tudjuk számítani abban az esetben, ha a kezdőállapot terhét fel tudjuk venni az ismert mennyiségek közé.



9. Összefoglalás, következtetések

Dolgozatomban bemutattam a rácsos tartók rúderői identifikációjának pontosítására használható eljárásokat. Monte-Carlo-szimulációval az identifikáció pontosságát minimum egy nagyságrenddel minden esetben javítani tudtam, így új, pontosabb eredményeket tudok közölni.

A feladatok megoldásához nem „kereskedelmi” szoftvereket használtam fel, amelyekbe csak az adatokat kell behelyettesíteni. Három különböző programot is írtam Maple környezetben, amely egy mérnökök által jól ismert matematikai program. Az általam írt programok nem specifikusan egy-egy feladathoz készültek, így nagyon könnyen alkalmazhatók más rácsos szerkezetekre is. A programjaimat „felhasználóbarát” módon készítettem, így azok is könnyen igénybe vehetők, akik nem ismerik a számítás elméleti hátterét.

Többféle (statikailag túlhatározott, illetve statikailag határozatlan) szerkezeten és ismeretlenek többféle kombinációjával végeztem számításokat, amelyekből az alábbi következtetéseket vonom le:

- Általánosságban elmondható, hogy a módszer akkor működik hatékonyan, ha a szerkezet rúdjaik irányát jelentősen meg tudom változtatni a különböző terhelési esetek során, hiszen ezek a mennyiségek szerepelnek a megoldáshoz használt lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixaiban. Különösen fontos, hogy a tehernövekmények hatására a rudak egységvektora minél nagyobb mértékben megváltozzon, ha a kiindulási helyzet terhet ismeretlennek tekintjük, mivel ekkor a lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixában az egységvektorok különbsége szerepel.
- Ha a rúderőket az identifikáció e típusával szeretnénk pontosan meghatározni, mindenképpen érdemes többször mérni a csomópontok koordinátáit. Szimulációim alapján egy nagyságrendű pontosságnövekedés érhető el, ha az ismeretleneket csomópontonként és terhelési esetenként 10-20 mérés adataiból számítom, majd az eredményeket átlagolom.
- Statikailag túlhatározott szerkezeteknél könnyebb nagy elmozdulásokat elérni akár nagy normálmerevségű anyagok esetén is. Így a módszer e szerkezetek esetén pontosabb eredményt szolgáltat. Eredményeim azt mutatják, hogy a számított mennyiségek pontossága tovább javítható, ha a minimálisan szükségesnél több terhelési esetet veszek fel. (8.1 fejezet)
- Statikailag határozatlan szerkezeteknél sokkal nehezebb szignifikáns elmozdulásokat elérni, főleg ha a rudak nagy normálmerevségű anyagból (pl. fémekből) készültek. (8.2 fejezet)
- Az identifikáció során megoldandó lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának elemeiből lehet következtetni az elérhető pontosságra. Ezt az összefüggést a 8.2 fejezet végén vizsgáltam az Y-alakú tartó esetén.



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

A módszer gyakorlati alkalmazásának egyik fő korlátja a jelenlegi műszerek „pontatlansága”. Ha e műszerekkel egy-két tizedes jeggyel többet lehetne pontosan leolvasni, akkor a rúderőket és engedékenységeket esetleg valós, építőmérnöki szerkezeteken is meg lehetne határozni az identifikáció e módszerével.

A dolgozat megírását kifejezetten hasznosnak találtam szakmai fejlődésem szempontjából. Mindamellet, hogy elmélyítettem matematikai és szilárdságtani ismereteimet, megtanultam haladó szinten programozni Maple-ben.

Mindezek mellett a 7.1-es fejezetben leírt, állapotjellemzőket számító iterációs program egyszerű kezelhetősége, és gyors futási ideje miatt akár oktatási célokra is felhasználható lehet.

Végeredményképpen elmondhatom, hogy a rácsos tartók rúderői identifikációjának pontosítása Monte-Carlo-módszerrel lehetséges, az eredmények relatív hibája viszonylag kevés mérésszámból számítva egy nagyságrenddel csökken. Az általam írt programok tetszőleges topológiájú rácsos tartók esetén pontos eredményeket szolgáltatnak, könnyen használhatóak.

További vizsgálatokra érdemesnek tartom a következő kérdéseket:

- Tekinthesem-e ismertnek a tartóra ható terheket? Amennyiben igen, és a terheket mérni tudom, milyen pontossággal mérhetőek ezek a terhek? Mennyiben csökkenti a teher mérésének a bizonytalansága az identifikációval meghatározott mennyiségek pontosságát?
- Számításaim során a kinematikai jellegű terheket nem vettem figyelembe. Ha a tartóra a tehernövekmények helyett / mellett kinematikai terhek is hatnak, meghatározhatók-e a rúderők?



Irodalomjegyzék

- [1] **Gáspár Zs.:** Rácsos tartók rúderőinek meghatározása identifikációval. XI. Magyar Mechanikai Konferencia CD kiadványa, szerk.: Baksa A., Bertóti E., Szibrik S., Miskolc-Egyetemváros, 2011. augusztus 29-31.
- [2] **E. Turco:** An Insight into the identification of pre-stress in pin-jointed trusses. DADU. Università degli Studi di Sassari, Manuscript, 2010. november 15.
- [3] **Gáspár Zs.:** Magasépítési szerkezetek mechanikája (statikai rész).
https://www.me.bme.hu/sites/default/files/courses/magas_statika.pdf
hozzáférés dátuma: 2011. október 15.
- [4] **I. N. Bronstejn – K. A. Szemengyajev – G. Musiol – H. Mühlig:** Matematikai Kézikönyv, Typotex Kiadó, Budapest, 2009
- [5] **Popper Gy.:** Numerikus módszerek Mathematica használatával, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2003
- [6] **Rózsa P.:** Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Tankönyvkiadó, Budapest, 1974
- [7] **Krauter A.:** Óravázlatok a Geodézia II. tantárgyhoz
http://www.agt.bme.hu/tantargyak/bsc/bmeeoafat09/BMEEOAFAT09_ea_01-07.pdf hozzáférés dátuma: 2011. 10. 27.