

A létra és az n -prizma gráfok optimális murvázási száma

Papp László

Témavezető: Dr. Katona Gyula Y.
docens
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BME
2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Alapfogalmak	3
1.2. A kövezési számok fajtái	3
1.3. A murvázási számok	4
2. A létra optimális murvázási száma	6
2.1. Előkészületek	6
2.2. Szimmetriák kihasználása	11
2.3. Régi-új elérhetőség	11
2.4. Legalább négy kő található az R részgráfon	13
2.5. Pontosan három kő található az R részgráfon	18
2.6. Kis méretű elosztások	22
2.7. A létra optimális murvázási számára vonatkozó tétel	22
3. A k-optimális murvázási szám	25
3.1. A kör 2-optimális murvázási száma	25
4. Az n-prizma és a Möbius létra	27
4.1. Az n -prizma optimális murvázási száma	27
4.2. A Möbius létra optimális murvázási száma	31
5. Összefoglaló	32
5.1. Elért eredmények, felvetődő kérdések	32

1. Bevezetés

A gráfok kövezési kérdései egy kifejezetten fiatal témakör a gráfelméleten belül. 1989-ben Paul Lemke és Dan Kleitman [1] egy csoportelméleti zéró-összeg problémát vizsgáltak. Cikkükben definiáltak egy algebrai fogalmat. Ezt a fogalmat még ugyanebben az évben Fan Chung [2] fogalmazta át a gráfelmélet nyelvére. Így keletkezett a kövezési lépés¹ illetve a kövezési szám². Innentől kezdve a terület rohamos fejlődésnek indult a kombinatorikusoknak köszönhetően. Egyre több kérdés merült fel a kövezési művelettel kapcsolatban: optimális kövezési szám³, fedő kövezési szám⁴, optimális fedő kövezési szám, és a sort még sokáig lehetne folytatni.

Adott egy egyszerű irányítatlan gráfunk, aminek a csúcsaira köveket helyezünk. Egy csúcsra kerülhet több kő is, illetve az is lehetséges, hogy valamelyik csúcson egy kő sincs. Ez után a kövezési lépés a következő: Ha egy csúcson legalább két kő van, akkor arról két követ leveszünk és egyet felteszünk valamelyik szomszédos csúcsra. A kövezési feladat egy olyan játékként fogható fel, hogy megadnak nekünk egy gráfot és rajta köveket, nekünk pedig az a célunk, hogy kövezési lépésekkel előre meghatározott állapotokba jussunk el. Ezek a kívánt állapotok sokfélék lehetnek: valamelyik csúcsra kerüljön kő, valamelyik csúcsra k darab kő kerüljön, az összes csúcsra kerüljön kő, és még sok más lehetőség van.

A kövezési lépés definíciójából jól látható, hogy ezzel szállítási problémákat lehet modellezni. Gondoljunk arra, hogy a kövek üzemanyagot jelképeznek, és az üzemanyag szállításához valamennyi üzemanyagot el kell használnunk.

Az egyszerűbb gráfokra szép lassan meg is határozták a kövezési számaikat, azonban nagyobb és bonyolultabb gráfok esetén csak becslésekkel rendelkezünk. Számos nyitott probléma van. Ezek közül a leghíresebb Graham-sejtése, hogy bármely két gráf direkt szorzatának a kövezési száma nem nagyobb, mint a két gráf kövezési számának a szorzata.

A problémakör azért is érdekes mivel a kövezési számból képzett eldöntési probléma NP-nehéz és coNP-nehéz is egyszerre[4], míg az optimális kövezési szám eldöntési problémaként NP-teljes[4]. Így a témakör kutatása segíthet a híres $P \stackrel{?}{=} NP$ kérdés eldöntésében.

A murvázási lépést⁵ Christopher Belford és Sieben Nándor definiálták[3]. Ez lényegében az általánosítása a kövezésnek, egy új fajta megengedett lépés hozzávételével. A kövezési témakör fogalmai illetve kérdései könnyen átalakíthatóak a nekik megfelelő murvázási verzióra, elég csak kicserélni a definíciójukban a kövezési lépést murvázási lépésre.

A kövezési és murvázási számok közötti kapcsolat kifejezetten érdekes. Vannak olyan gráfok ahol a kettő megegyezik vagy nagyon közel van egymáshoz, míg más esetekben jelentős a különbség közöttük. Murvázási számok esetén például ismerünk ellenpéldát a Graham sejtésre.

Az optimális murvázási szám eldöntési verziója szintén NP-teljes. Így nem számíthatunk arra,

¹pebbling move

²pebbling number

³optimal pebbling number

⁴covering pebbling number

⁵rubbling move

hogy létezik hatékony algoritmus általános gráf esetén. Ezért mindenképpen érdemes olyan gráf osztályokat keresni amiknek az optimális murvázási számáról ki tudunk mondani valamilyen állítást vagy ennek számolására tudunk hatékony algoritmust adni.

Dolgozatomban elsősorban a létra, az n -prizma és a Möbius-létra gráfok optimális murvázási számával foglalkozok. Ezen gráfok optimális kövezési számát már korábban meghatározták[5], viszont az optimális murvázási számuk eddig ismeretlen volt. Ezen gráfok az út illetve a kör K_2 -vel vett direkt szorzataként állnak elő a Möbius-létra kivételével. Utóbbi esetben a gráfban lévő két alapkört felvágjuk és egymásba kötjük, így a Möbius-szallaghoz hasonló struktúrát kapva. Dolgozatom során mindhárom gráf osztály optimális murvázási számára formulát adok. A bizonyításhoz vezető út során kitérőt teszek a k -optimális murvázási számra, és a kör 2-optimális murvázási számát meg is határozom.

1.1. Alapfogalmak

Definíció: Legyen G egy egyszerű gráf, ekkor δ kövek elosztása⁶ G -n, ha δ egy $V(G) \rightarrow \mathbb{N}^+$ függvény. A függvény egy v csúcson felvett értékét $\delta(v)$ -vel jelöljük, és azt mondjuk, hogy v csúcson $\delta(v)$ darab kő van a δ elosztás szerint.

$|\delta| = \sum_{v \in G} \delta(v)$ az elosztás köveinek a száma. Ezt a számot nevezzük a δ elosztás méretének.

$\delta_H = \sum_{v \in H} \delta(v)$, ahol H részgráfja G -nek.

Definíció: Legyen G egyszerű gráf, v és u szomszédos csúcsok G -ben, és $\delta(v) \geq 2$. Ekkor a $(v \rightarrow u)$ egy kövezési lépés aminek a végrehajtásával a következő δ' elosztást kapjuk: $\delta'(v) = \delta(v) - 2$ és $\delta'(u) = \delta(u) + 1$ és $\delta'(w) = \delta(w)$ ha $w \neq u, v$.

Definíció:

- σ egy kövezési lépéssorozat ha $\sigma = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ lista ahol k_i -k kövezési lépések. σ végrehajtása során a listában szereplő kövezési lépéseket hajtjuk végre a listában elfoglalt pozíciójuk szerinti sorrendben.
- $\sigma' = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ részsorozata $\sigma = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ -nek ha $(l_1, l_2, \dots, l_m)$ részlistája $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ -nek. Jele: $\sigma' \subseteq \sigma$
- $\sigma\sigma' = (k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_m)$
- Kövezési lépések egy σ sorozata végrehajtható⁷, ha a sorozatban lévő i . kövezési lépés az előző $i - 1$ lépés végrehajtása után adódó elosztás esetén egy kövezési lépés minden i -re.
- A δ elosztásra a σ végrehajtható lépéssorozat alkalmazása után kapott elosztást δ_σ -val jelöljük.
- A v csúcs elérhető⁸ δ elosztás alatt, ha létezik olyan végrehajtható σ , hogy $\delta_\sigma(v) \geq 1$.
- A v csúcs k -elérhető δ elosztás alatt, ha létezik olyan végrehajtható σ , hogy $\delta_\sigma(v) \geq k$.
- Egy δ elosztás megoldható⁹ G -n, ha G minden csúcsa elérhető δ alól.

1.2. A kövezési számok fajtái

Definíció: Az alábbi kövezési számokat különböztetjük meg:

- $\pi(G)$ a G gráf kövezési száma a legkisebb olyan szám, amire igaz, hogy minden $\pi(G)$ méretű elosztás megoldható.

⁶distribution

⁷executable pebbling sequence

⁸reachable

⁹solvable

- $\pi_{opt}(G)$, a G gráf *optimális kövezési száma* a legkisebb olyan szám, amire létezik $\pi_{opt}(G)$ méretű megoldható elosztás G -n. Ezeket az elosztásokat *optimálisnak* nevezzük.
- $\pi_{cov}(G)$, a G gráf *fedő kövezési száma* a legkisebb olyan szám, hogy minden $\pi_{cov}(G)$ méretű elosztáshoz létezik egy végrehajtható kövezési lépéssorozat amivel el tudjuk érni, hogy minden csúcson legyen kő.

1.3. A murvázási számok

A *murvázási lépés* a kövezési lépés egy általánosítása. A kövezési lépéshez hasonlóan ha egy követ felteszünk egy csúcsra akkor összesen kettőt le kell venni annak szomszédjairól. A kövezési lépéssel ellentétben most nem követeljük meg, hogy ez a két kő azonos csúcson legyen.

Megjegyzés

Minden kövezési lépés egyben murvázási lépés is.

Definíció: Legyen v egy csúcs, x és y pedig v szomszédai. Tegyük fel, hogy x -en és y -on is van kő vagy ha x és y megegyezik, akkor legalább két kő van rajta. Ekkor azt a művelet, hogy egy-egy követ leveszünk x -ről és y -ről ha különbözőek, vagy kettőt ha azonosak és egyet felteszünk v -re *murvázási lépésnek* nevezzük, és $(x, y \rightarrow v)$ -vel jelöljük.

Egy $(x, y \rightarrow v)$ $x \neq y$ murvázási lépést *szigorú murvázási lépésnek* nevezünk.

A kövezési számok fajtáival analóg módon értelmezhetőek a *murvázási számok* fajtái is. Az eddig definiált fogalmaknak is létezik a murvázási megfelelőjük. A murvázásra vonatkozó fogalmat könnyen meg tudjuk kapni a kövezési esetben definiáltból, ha a definíciójában a kövezési lépést murvázási lépésre cseréljük. A murvázást ρ -val jelöljük és utána jönnek az esetleges opt , cov , $opt - cov$ indexek amik jelzik, hogy melyik számról is van szó.

Mivel jelen dolgozat gráfok optimális murvázási számával foglalkozik, ezért innentől kezdve ha egy fogalmat használunk akkor azalatt a murvázási esetben érvényes verziót értjük.

Definíció: G és H egyszerű gráfok *direkt szorzatán* a következő $G \square H$ gráfot értjük:

- $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$
- $([g_1, h_1], [g_2, h_2]) \in E(G \square H) \iff g_1 = g_2, (h_1, h_2) \in E(H) \text{ vagy } (g_1, g_2) \in E(G), h_1 = h_2$

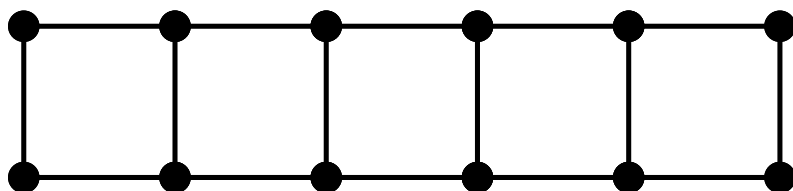
Definíció: A $P_n \square K_2$ gráfot *létrának*¹⁰, a $C_n \square K_2$ gráfot pedig *n-prizmának*¹¹ nevezzük.

Az n -prizma felfogható úgy is, hogy a létra két végét összekötjük úgy, hogy a létra két szárából egy-egy n hosszú kört hozunk létre. Ha az összekötés során a két szárt egymással összekötve egy $2n$ hosszú kört képzünk akkor a *Möbius létrát*¹² kapjuk.

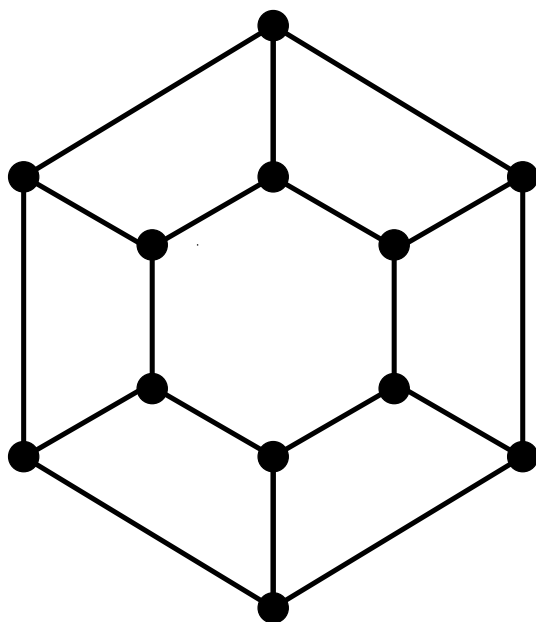
¹⁰ladder

¹¹n-prism

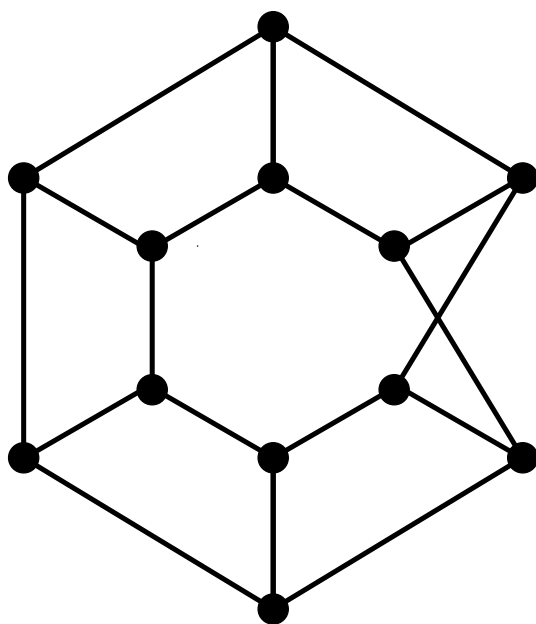
¹²Möbius ladder



1. ábra. Létra



2. ábra. n -prizma

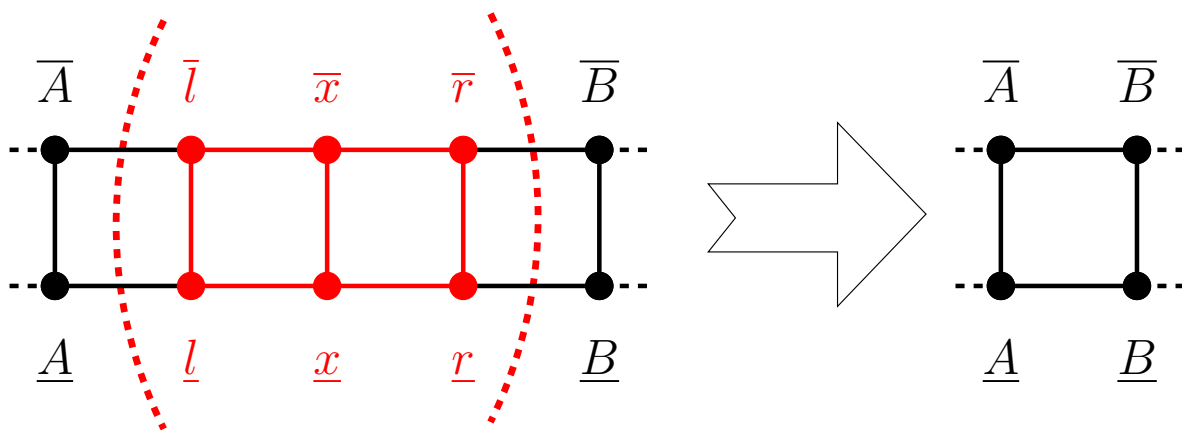


3. ábra. Möbius-létra

2. A létra optimális murvázási száma

2.1. Előkészületek

A bizonyítás során végtelen leszállást alkalmazunk. Vegyünk a gráfon egy δ optimális elosztást. Kiválasztunk egy $P_3 \square K_2$ részgráfot úgy, hogy azon maximális számú kő legyen a δ elosztásra nézve az ilyen részgráfok között. Ezt a részgráfot elhagyom, a keletkező két részt pedig összekötöm, ahogy a 4. ábrán látható. A fennmaradó gráf egy megoldható elosztását konstruálom úgy, hogy az eredeti elosztás köveit otthagynom a megmaradó csúcsokon, és az elhagyott $P_3 \square K_2$ köveit 2 kivételével ráteszem az új gráf elhagyott részgráffal szomszédos csúcsaira.



4. ábra. A belső rész elhagyásával redukáljuk a gráfot.

Ebből következik, hogy:

$$\rho_{opt}(P_n \square K_2) \geq \rho_{opt}(P_{n-3} \square K_2) + 2$$

Így a $\rho_{opt}(P_n \square K_2)$ -re alsó korlátot tudok adni a $\rho_{opt}(P_2)$, $\rho_{opt}(P_2 \square K_2)$ és $\rho_{opt}(P_3 \square K_2)$ értékek segítségével.

Definíció: A $P_n \square K_2$ gráfból $R = P_3 \square K_2$ elhagyását majd az esetlegesen keletkező két részgráf összekötését $P_n \square K_2$ *R-rel redukálásnak* hívjuk. Az így kapott gráfot pedig *redukáltnak* nevezzük.

Jelölés

A gráf csúcsaira való könnyebb hivatkozás végett a 4. ábrán látható módon nevezzük el őket, ahol a piros színű $P_3 \square K_2$ részgráffal redukálunk. Ezt a részgráfot inentől jelöljük *R*-rel.

A redukálás után megmaradó csúcsokra ugyan azon a néven hivatkozunk mint az eredeti gráfban.

Az ábrán függőlegesen látható K_2 részgráfokat a továbbiakban létrafokoknak hívjuk. A létrafok csúcsainak a jelölését úgy oldjuk meg, hogy a létrafok jelét kiegészítjük egy alul vagy felülvonással.

A 4. ábrán látható módon rögzítsük le a bal és a jobb irányokat. Az x csúcstól y balra helyezkedik el, ha az ábrán y -t tartalmazó létrafok balrább található, mint az x -et tartalmazó.

Definíció:

Az $P_n \square K_2$ gráf R -rel való redukáltjának δ^r elosztása a δ redukált elosztása ha teljesíti a következőket:

- $\delta^r(v) = \delta(v)$ ha v nem az A vagy B létrafok csúcsa.
- $\delta^r(w) \geq \delta(w)$ ha w az A vagy a B létrafok csúcsa.
- $\delta^r(\overline{A}) + \delta^r(\underline{A}) + \delta^r(\overline{B}) + \delta^r(\underline{B}) = \delta(\overline{A}) + \delta(\underline{A}) + \delta(\overline{B}) + \delta(\underline{B}) + \delta_R - 2$

Definíció: Egy x csúcs δ elosztásra vett *súlyösszegén*¹³ a következő nem negatív racionális számot értem:

$$w_\delta(x) = \sum_{v \in V(G)} \left(\frac{1}{2}\right)^{d(x,v)} \delta(v)$$

Ahol $d(x, v)$ az x és a v csúcs távolsága, azaz a kettőt összekötő legrövidebb élsorozat hossza.

x *jobboldali súlyösszegén* azt értjük, hogy ha az előző szummából elhagyjuk az x csúcstól balra lévő csúcsok járulékait. Ezt $Bw_\delta(x)$ -szel jelöljük.

Megjegyzés

A súlyösszeg fogalom értelmezhető minden gráfra, míg a jobboldali súlyösszegre ez egyáltalán nem igaz. Kör esetén például nem tudunk bal illetve jobb irányokat definiálni. A *baloldali súlyösszeget* értelemszerűen definiáljuk.

Definíció: $P_n \square K_2$ -ben legyen a kövek elosztása δ és a gráf egyik csúcsa v . A v csúcstól balra lévő csúcsokat hagyjuk el a rajtuk lévő kövekkel együtt. Így egy $P_l \square K_2$ gráfot kapunk rajta egy δ' elosztással. v *jobbról k -elérhető*, hogy ha v k -elérhető $P_l \square K_2$ gráfban a δ' elosztás esetén.

Jelölés

Ha v egy δ elosztás esetén jobbról k -elérhető, de az már nem igaz, hogy jobbról $k + 1$ -elérhető akkor azt mondjuk, hogy v -re jobbról legfeljebb k követ tudunk juttatni. Ezt $J_\delta(v) = k$ -val jelöljük. A baloldali elérhetőség esetén az analóg mennyiség jele $B_\delta(v)$.

2.1.1. Lemma. A $P_n \square K_2$ gráfok esetében egy elosztás alatt az x csúcsra a tőle nem jobbra lévő csúcsokról murvázási lépésekkel juttatható kövek maximális száma megegyezik a baloldali súlyösszegének alsó egészrészével. Képlettel kifejezve:

$$B_\delta(x) = \lfloor Bw_\delta(x) \rfloor$$

¹³weight argument

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás során végig x -től nem jobbra lévő csúcsokról beszélünk. Az x csúctól d távolságra lévő csúcsok van egy x -hez közelebbi közös szomszédjuk. Ekkor erről a két csúcsról murvázási lépésekkel mozgassunk annyi követ x -re amennyi csak lehetséges. Végezzük ezt el minden csúcsra az x -től vett távolságukra nézve csökkenő sorrendben. Az így kapott elosztásban x -től $d > 0$ távolságra lévő csúcsokon legfeljebb egy darab kő lehet összesen. Tehát a baloldali súlyösszegben az x -re el nem juttatható kövek járuléka legfeljebb:

$$\sum_{d=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^d < 1$$

Ezt levonva a baloldali súlyösszegekből megkapjuk az x -re juttatott kövek számát ami egész. Így az x -re eljuttatható kövek száma tényleg a baloldali súlyösszeg alsó egészrésze. $\square$

2.1.2. Következmény. A $P_n \square K_2$ gráf minden v kettő fokú csúcsára igaz a következő: Ha mohó módon próbálunk minél több követ juttatni v -re úgy, hogy amíg tehetjük addig murvázási lépéssel közelebb hozzuk v -hez a követek akkor a lehető legtöbb követ juttatjuk v -re. Tehát az ilyen mohó lépéssorozatok ugyanannyi követ juttatnak v -re.

BIZONYÍTÁS: A kettő fokú csúcsok a létra szélein helyezkednek el, így ezen csúcsok elérhetősége megegyezik a jobb vagy a baloldali elérhetőségükkel. $\square$

Az egyszerűbb írásmód miatt a továbbiakban, amikor murvázási lépéssorozatról beszélünk, tegyük fel, hogy végrehajtható. Amennyiben egy murvázási lépéssorozat mégsem lenne végrehajtható akkor azt külön kiemeljük.

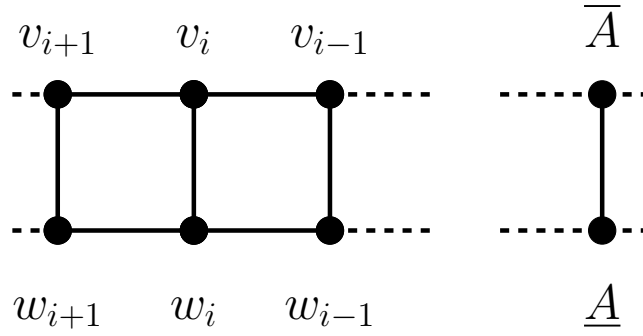
Definíció: Legyen δ egy kezdeti elosztás. Ekkor egy σ murvázási lépéssorozatot v csúcsra nézve A -maximálisnak nevezünk ha $\delta_\sigma(v) \geq 1$ és létezik σ' amire teljesülnek a következők:

- $\sigma' \subseteq \sigma$
- $\delta_{\sigma'}(\overline{A}) = J_\delta(\overline{A})$ vagy $\delta_{\sigma'}(\underline{A}) = J_\delta(\underline{A})$

2.1.3. Lemma. Ha a $P_n \square K_2$ egy δ elosztása megoldható. Akkor az A létrafok tetszőleges megválasztása esetén a tőle balra lévő csúcsokra nézve létezik A -maximális murvázási lépéssorozat.

Jelölés

Ha egy murvázási lépés jelölésében valamelyik csúcs helyett $*$ -ot írunk akkor a $*$ helyére bármilyen megengedett csúcsot beírhatunk. Például a $(v, * \rightarrow w)$ jelölheti bármely $(v, x \rightarrow w)$ murvázási lépést ahol x szomszédja w -nek, v -n és x -en találhat egy-egy kő, illetve ha $v = x$ akkor v -n legalább két kő van. Egy murvázási lépésen belül a $*$ többszöri használata nem feltétlenül jelenti ugyanazon



5. ábra. Elnevezések

csúcs használatát minden előfordulás esetén. Például $(*, * \rightarrow w)$ jelölhet $(v, u \rightarrow w)$ murvázási lépést ahol $v \neq u$.

Egy murvázási lépés érinti a v csúcsot, hogy ha $(v, * \rightarrow *)$ -gal vagy $(*, * \rightarrow v)$ -vel jelölhető.

BIZONYÍTÁS:

Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Az 5. ábrán látható elnevezéseket használjuk. Legyen δ a kezdeti elosztásunk, v_i pedig az A létrafokhoz legközelebb lévő csúcs amire nézve nem létezik A -maximális lépéssorozat. Mivel ez a legközelebbi ilyen tulajdonságú csúcs ezért v_{i-1} -re nézve van egy σ^+ és w_{i-1} -re egy σ^{++} A -maximális lépéssorozat.

Nyilvánvalóan $B_\delta(v_i) = 0$ és $B_\delta(w_i) \leq 1$, hiszen a nagyobb bal elérhetőség pont azt jelenti, hogy v_i elérhető a tőle jobbra lévő csúcsokat érintő lépések nélkül is, és egy csak baloldali lépéseket tartalmazó lépéssorozat kiegészíthető A -maximálissá.

Legyen σ v_{i-1} -et elérő, σ' pedig w_{i-1} -et elérő murvázási lépéssorozat. Belátjuk, hogy a σ vagy a σ' lépéssorozatot megválaszthatjuk úgy, hogy nem tartalmaz v_{i-1} -től balra lévő csúcsokat érintő murvázási lépéseket:

Legyen σ^* lépéssorozat olyan amivel elérjük v_{i-1} -et, tartalmaz v_{i-1} -től balra lévő csúcsokat érintő lépéseket, és ezen lépések bármelyikének elhagyása esetén v_{i-1} már nem elérhető. Ekkor σ^* tartalmazza a $(w_i, * \rightarrow *)$ murvázási lépést, mivel $B(v_i) = 0$ ezért csak w_i -n keresztül lehet követ szállítani v_{i-1} felé. $B(w_i) \leq 1$ -ből és a $(w_i, * \rightarrow *)$ murvázási lépés szükségességéből következik, hogy v_{i-1} és w_i közül csak pontosan az egyikre kerülhet kő minden σ^{**} lépéssorozat végrehajtása után aminek a részsorozata σ^* .

Tegyük fel, hogy a $\delta_{\sigma^{**}}$ elosztásból indulva követ juttatunk v_i -re. Ezt csak akkor tudjuk megtenni ha $B_{\delta_{\sigma^{**}}}(v_{i+1}) = 1$. Viszont ez azt jelenti, hogy v_{i+1} -et és w_i -t el tudjuk érni egy-egy v_i -től jobbra lévő csúcsokat nem érintő murvázási lépéseket tartalmazó lépéssorozattal, amik egymás után is végrehajthatóak. Tehát $B_\delta(v_i) \geq \frac{1}{2}(B_\delta(v_{i+1}) + B_\delta(w_i)) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, de $B_\delta(v_i) = 0$ ami ellentmondás. Ezt úgy oldjuk fel, hogy σ^{**} semmilyen bővítése sem tud követ juttatni v_i -re, tehát δ_{σ^*} elosztás alól nem érhető el v_i .

v_i elérhető δ alól és a v_i -re követ juttató σ^- lépéssorozatnak v_i -től jobbra lévő köveket is fel kell használnia a $B(v_i) = 0$ feltétel miatt. Ezért σ^- -nek tartalmaznia kell a $(v_{i-1}, * \rightarrow v_i)$ vagy a $(w_{i-1}, * \rightarrow w_i)$ murvázási lépést. Ha az előbbit tartalmazza, akkor ez azt jelenti, hogy σ^- egy rész-

sorozata v_{i-1} -re követ juttatott, de ez csak úgy lehetséges, hogy ha nem tartalmazott v_{i-1} -től balra lévő csúcsot érintő murvázási lépést. Ha az utóbbi, akkor a w_{i-1} eléréséhez is létezik egy ilyen (tőle balra lévő csúcsot érintő murvázási lépést nem tartalmazó murvázási lépéssorozat). Így igazoltuk, hogy σ vagy σ' létezik, ráadásul kiegészíthető egy v_i -re követ juttató lépéssorozattá egy σ^k lépéssorozattal. Vegyük az ilyen lépéssorozatok közül azokat, amelyekre a $J_{\delta\sigma}(v_{i-1}) + J_{\delta\sigma}(w_{i-1})$ illetve a $J_{\delta\sigma'}(v_{i-1}) + J_{\delta\sigma'}(w_{i-1})$ maximális.

σ és σ' a v_{i-1} , w_{i-1} által alkotott létrafokra végződő $P_l \square K_2$ gráf másodfokú csúcsaiba juttat követet. Így a 2.1.1. lemma következménye miatt A-maximális lépéssorozattal is tudunk v_{i-1} -re annyi követ juttatni mint σ -val, illetve w_{i-1} -re annyi követ juttatni mint σ' -vel. Ha $\delta_\sigma(w_{i-1}) = 0$ vagy $\delta_{\sigma'}(v_{i-1}) = 0$, akkor lecseréljük őket a megfelelő A-maximális lépéssorozatra és σ^k -val kiegészítve A-maximális v_i -t elérő lépéssorozatot kapunk, ami ellentmond annak, hogy v_i nem elérhető A-maximális lépéssorozattal.

Ha σ vagy σ' alkalmazása után v_{i-1} -re és w_{i-1} -re is kerül kő, akkor az csak úgy lehetséges, hogy mindkettőre pontosan egy kerül. Különben $J(v_i) = 1$ így a 2.1.1 lemma következménye miatt v_i elérhető lenne A-maximális lépéssorozattal.

A fennmaradó esetről a w_{i-1} -en lévő kő nélkül is elérjük v_i -t, így helyettesíthetünk egy v_{i-1} -re követ juttató A-maximálissal, hiszen: Ha $B_\delta(v_{i+1}) + B_\delta(w_i) \geq 1$, akkor w_{i-1} nélkül is elérjük v_i -t. Ha pedig $B_\delta(v_{i+1}) + B_\delta(w_i) = 0$, akkor δ alól nem elérhető w_{i+1} , mivel a $J_{\delta\sigma}(v_{i-1}) + J_{\delta\sigma}(w_{i-1})$ és a $J_{\delta\sigma'}(v_{i-1}) + J_{\delta\sigma'}(w_{i-1})$ összegek maximalitása miatt w_{i+1} és v_i csúcsok közül pontosan egyen lehet kő bármilyen lépéssorozat alkalmazása után, így mivel v_{i+1} nem volt balról elérhető, így nem is elérhető. Ez ellentmond a δ megoldhatóságának.

Mivel minden lehetséges esetben ellentmondásra jutottunk, ezért az indirekt feltevésünk hamis volt. $\square$

2.1.4. Következmény. A $P_n \square K_2$ R -rel való redukálása után az A létrafoktól balra lévő csúcsok elérhetőségéhez elegendő ha teljesül a következő két feltétel:

$$J_\delta(\overline{A}) \leq J_{\delta^r}(\overline{A})$$

$$J_\delta(\overline{A}) \leq J_{\delta^r}(\overline{A})$$

A szimmetria miatt a B létrafoktól jobbra lévőkre pedig:

$$B_\delta(\overline{B}) \leq B_{\delta^r}(\overline{B})$$

$$B_\delta(\overline{B}) \leq B_{\delta^r}(\overline{B})$$

Most már csak, az A és B létrafokok csúcsainak elérhetőségét kell vizsgálnunk.

2.2. Szimmetriák kihasználása

Az R részgráfnak több szimmetriája is van, ezért a kezelendő esetek számát lényegesen le tudjuk csökkenteni, ha a szimmetria osztályokból csak 1-1 reprezentást vizsgálunk.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük a következőket:

$$\delta(\bar{l}) + \delta(\underline{l}) \geq \delta(\bar{r}) + \delta(\underline{r})$$

$$\delta(\bar{l}) + \delta(\bar{x}) \geq \delta(\underline{l}) + \delta(\underline{x})$$

Egyenlőség esetén ha valamelyik oldalt nincs kő mentes csúcs, akkor az legyen a bal oldal. Ez nem tökéletes reprezentáns elem választás, mert marad még néhány osztály, amiből egynél több elemet választunk így ki. Mindenesetre így jelentősen csökkentjük az esetek számát. Így már tudjuk azt, hogy az R részgráfon belül a kövek jelentős része a $\delta(\bar{l})$ és a $\delta(\bar{x})$ csúcsokon van.

2.3. Régi-új elérhetőség

Ahhoz, hogy az új elosztás alól elérjük bármely A -tól és B -től különböző csúcsot, a 2.1.3 lemma következménye miatt elég ha az $\bar{A}$ és $\underline{A}$ csúcs jobboldali elérhetősége valamint az $\bar{B}$ és $\underline{B}$ csúcsok baloldali elérhetősége nem csökken. A 2.1.1. lemma miatt ezt a következő egyenlőtlenségekkel írhatjuk fel:

$$\lfloor Jw_{\delta^r}(\bar{A}) \rfloor - \lfloor Jw_{\delta}(\bar{A}) \rfloor \geq 0$$

$$\lfloor Jw_{\delta^r}(\underline{A}) \rfloor - \lfloor Jw_{\delta}(\underline{A}) \rfloor \geq 0$$

$$\lfloor Bw_{\delta^r}(\bar{B}) \rfloor - \lfloor Bw_{\delta}(\bar{B}) \rfloor \geq 0$$

$$\lfloor Bw_{\delta^r}(\underline{B}) \rfloor - \lfloor Bw_{\delta}(\underline{B}) \rfloor \geq 0$$

Nevezzük ezeket az egyenlőtlenségeket *eredetinek*.

Egészrész függvénnyel nem kényelmes számolnunk ezért ezek helyett vezessük be a *módosított egyenlőtlenségeket* amelyeket az egészrész függvények elhagyásával kapunk:

$$Jw_{\delta^r}(\bar{A}) - Jw_{\delta}(\bar{A}) \geq 0$$

$$Jw_{\delta^r}(\underline{A}) - Jw_{\delta}(\underline{A}) \geq 0$$

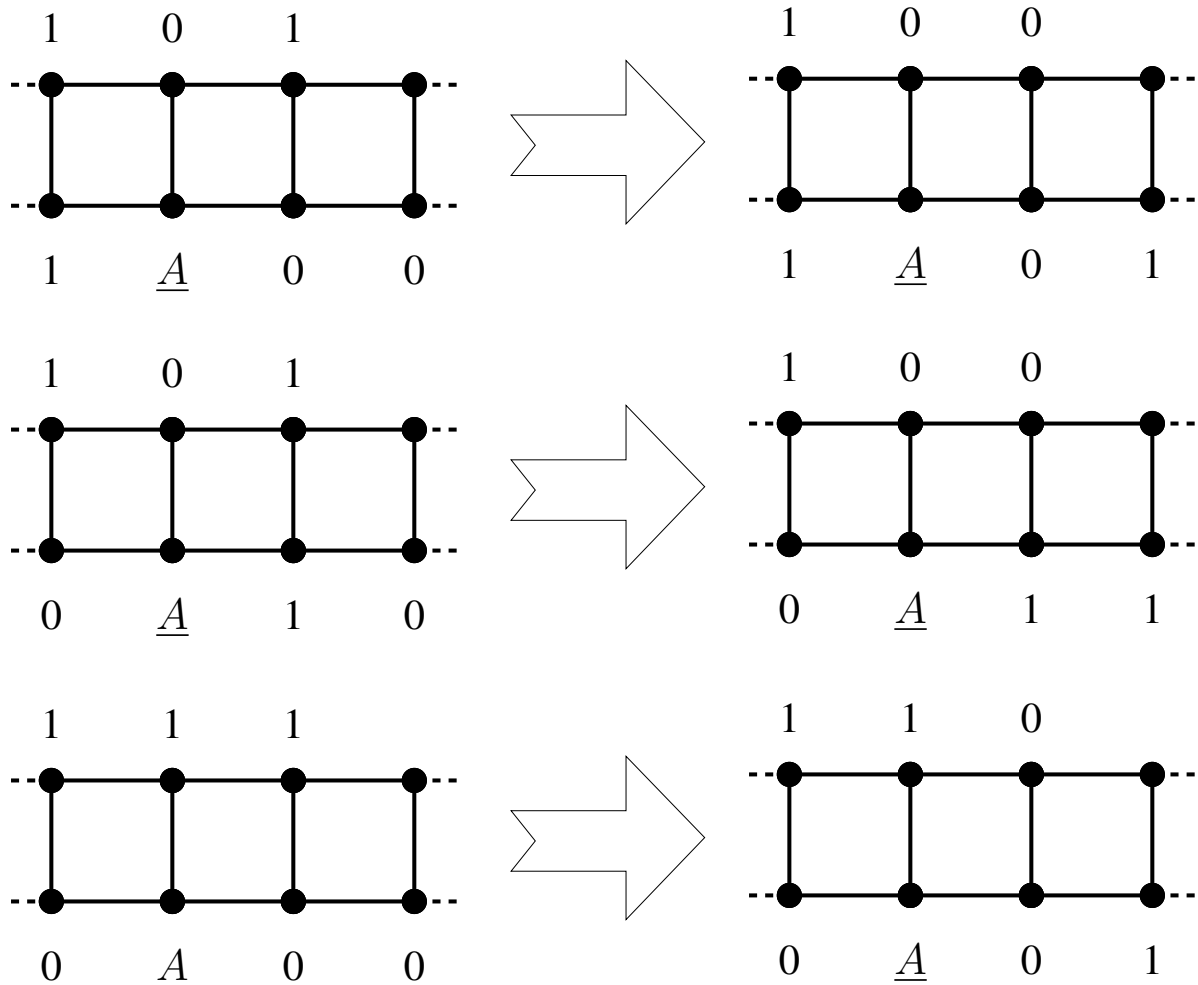
$$Bw_{\delta^r}(\bar{B}) - Bw_{\delta}(\bar{B}) \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\underline{B}) - Bw_{\delta}(\underline{B}) \geq 0$$

Nyilvánvaló, hogy ha a módosított egyenlőtlenségek teljesülnek akkor az eredetiek is, hiszen $a - b \geq 0 \Rightarrow \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor \geq 0$. Így számoljunk a módosított egyenlőtlenségekkel mindaddig, amíg azok teljesülnek. Már csak az A és B létrafokok csúcsainak elérhetőségéről kell mondanunk valamit.

2.3.1. Lemma. *Ha az R részgráfon legalább négy kő van akkor A és B létrafokok csúcsai a keletkező új elosztás alatt mindig elérhetőek, ha a módosított egyenlőtlenségek teljesülnek.*

BIZONYÍTÁS: $\underline{A}$ -ra bizonyítunk: Ha $\underline{A}$ balról vagy jobbról elérhető akkor kész vagyunk. δ és δ^r elosztás megegyezik az $\underline{A}$ -tól balra lévő csúcsokra. Legyen σ lépéssorozat ami teljesíti, hogy $\delta_\sigma(\underline{A}) = 1$. Ekkor ennek vegyük azt a σ_b maximális részsorozatát, ami csak olyan murvázási lépéseket tartalmaz, amik csak $\underline{A}$ -tól balra lévő csúcsokat érintenek. Legyen σ_j hasonlóan az a maximális részsorozata σ -nak ami csak olyan murvázási lépéseket tartalmaz, amik csak $\underline{A}$ -tól jobbra lévő csúcsokat érintenek. Ha $\delta_{\sigma_b}(w_1) = 1$ és $\delta_{\sigma_j}(\bar{l}) = 1$ akkor mivel az A -tól baloldalra lévő csúcsokon az új és régi elosztás megegyezik ezért $\delta_{\sigma_b}^r(w_1) = 1$ és mivel $Jw_{\delta^r}(A)$ nem kisebb $Jw_\delta(A)$ -nál, ezért $J_{\delta^r}(\underline{B}) = 1$ így $\underline{A}$ elérhető. A fennmaradó $\delta_{\sigma_b\sigma_j}$ elosztásokat a mellékelt 6. ábrán láthatóak. Ezekkel csak akkor lehet



6. ábra. Rossz esetek amik nem lehetségesek

probléma, hogy ha a mellettük lévő $\delta_{\sigma_b\sigma'_j}$ elosztás keletkezik valamilyen σ' -re amely ráadásul nem tartalmaz $(\underline{B}, * \rightarrow *)$ és $(\bar{B}, * \rightarrow *)$ murvázási lépéseket, hiszen ekkor $\underline{A}$ nem lenne elérhető. De ez nem lehetséges mivel összesen legalább két követ helyeztünk az A és B létrafokokra, és a $(\underline{B}, * \rightarrow *)$ és $(\bar{B}, * \rightarrow *)$ murvázási lépések kitiltása miatt $\delta_{\sigma_b\sigma'_j}$ elosztásnak is legalább ennyi követ kellene tartalmaznia ezen a két létrafokon, ami nem teljesül. Tehát ezen esetek nem állhatnak elő, így $\underline{A}$ elérhető.

□

2.3.2. Állítás. *Ha az eredeti δ elosztásunk megoldható, akkor a redukált gráfon értelmezett δ^r redukált elosztás megoldható, ha a következő két eset valamelyike fennáll:*

1. *A módosított egyenlőtlenségek fennállnak*
2. *Az eredeti egyenlőtlenségek fennállnak és az A illetve B létrafokra δ^r által helyezett kövekkel elérjük ezen két létrafok bármely csúcsát.*

Ez könnyen látszik, hiszen az eredeti illetve módosított egyenlőtlenségekből következik, hogy A illetve B létrafokok csúcsai kivételével minden csúcs elérhető. A fennmaradó négy csúcs elérhetőségét pedig biztosítják a módosított egyenlőtlenségek a 2.3.1 lemma miatt. Ha a módosított egyenlőtlenségek nem teljesülnek akkor úgy konstruáljuk δ^r -t, hogy A és B létrafok csúcsai elérhetőek legyenek.

Most pedig a $P_n \square K_2$ gráf minden megoldható δ elosztásához megadunk egy megoldható redukált elosztást. Az R -en lévő kövek számára és elhelyezkedésére nézve végzünk esetszétválasztást.

2.4. Legalább négy kő található az R részgráfon

Ebben az esetben használhatjuk az előző állítást. Amennyiben az eredeti egyenlőtlenségekkel dolgozunk akkor az A és B létrafokok csúcsai által feszített négyzetre átlósan helyezzük el a köveket.

Jelölés

Mivel a részgráf elhagyása után az A létrafok csúcsaihoz a B létrafok és attól jobbra lévő csúcsok közelebb kerülnek, ezért a súlyösszegek különbségeinek számolásakor ezek a csúcsok nem negatív járulékot adnak. Jelöljük ezt a járulékot Δ -val. Mivel az ezen csúcsokon található kövek számáról nincs túl sok információ, ezért ezekkel nem fogunk számolni. Ezt megtehetjük mivel $\Delta \geq 0$.

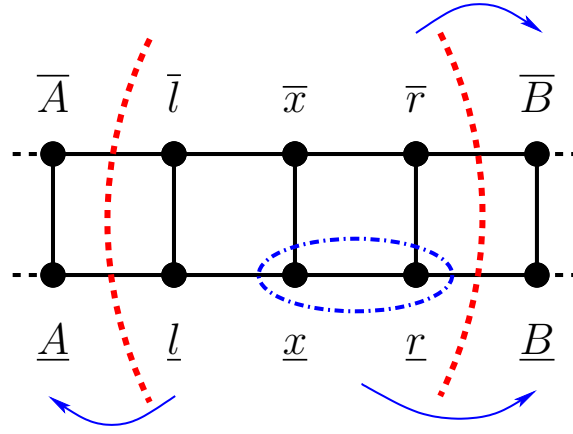
Sajnos ugyanez nem mondható el az eredeti egyenlőtlenségek esetén, amik alsó egészrészeket tartalmaznak. $\lfloor a \rfloor \geq \lfloor b \rfloor$ és $c \geq d$ -ből sajnos nem következik, hogy $\lfloor a + c \rfloor \geq \lfloor b + d \rfloor$. Ez még egy indok arra, hogy inkább a módosított egyenlőtlenségeket használjuk a későbbiek folyamán.

Amennyiben egy csúcson lévő kövek a redukálás során nem kerülnek távolabb az elérhetőség szempontjából éppen vizsgált csúcstól és nem is veszünk le belőlük, akkor ezek a kövek nem negatív járulékot adnak az összegünkben. Amennyiben a kívánt nem-negativitás ezen csúcsok járulékai nélkül is fennáll, akkor a számolás gyorsítása és a könnyebb áttekinthetőség érdekében ezen járulékokat nem számoljuk ki hanem csak egy „nem negatív” taggal jelöljük.

Tekintsük végig, hogy mely esetekben hogyan kell elhelyeznünk a levett köveket.

2.4.1. $\delta(\bar{l}) + \delta(\bar{x}) \geq 4$

Ekkor az $\delta(\bar{l})$ és $\delta(\bar{x})$ csúcsokon lévő köveket kettő kivételével tegyük az $\bar{A}$ csúcsra, a többit pedig a 7. ábra alapján. Ekkor a fennmaradó kövek az A és B létrafok csúcsaitól nem távolodtak. Számszerűsítve:



7. ábra. Kő elhelyezési módszer I.

$$\begin{aligned}
 Jw_{\delta^r}(\bar{A}) - Jw_{\delta}(\bar{A}) &= (\delta(\bar{A}) + \delta(\bar{l}) + \delta(\bar{x}) - 2 + \frac{1}{2}(\delta(\underline{A}) + \delta(\bar{r}) + \delta(\underline{l})) + \frac{1}{4}(\delta(\underline{x}) + \delta(\underline{r})) + \\
 &\quad \underbrace{+\frac{1}{2}\delta(\bar{B}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{B}) + \dots)}_{\Delta_1} - \\
 &\quad - (\delta(\bar{A}) + \frac{1}{2}(\delta(\underline{B}) + \delta(\bar{l})) + \frac{1}{4}(\delta(\underline{l}) + \delta(\bar{x})) + \frac{1}{8}(\delta(\underline{x}) + \delta(\bar{r})) + \frac{1}{16}\delta(\underline{r}) + \\
 &\quad \underbrace{+\frac{1}{16}\delta(\bar{B}) + \frac{1}{32}\delta(\underline{B}) + \dots)}_{\Delta_2} = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}\delta(\bar{l}) + \frac{3}{4}\delta(\bar{x}) - 2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{8}\delta(\bar{r}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{l}) + \frac{1}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{16}\delta(\underline{r})}_{\text{nem negatív}} + \underbrace{\Delta_1 - \Delta_2}_{\Delta} \geq 0
 \end{aligned}$$

A további egyenlőtlenségeknél eltekintünk a számolás részletezésétől.

$$Bw_{\delta^r}(\bar{B}) - Bw_{\delta}(\bar{B}) = \underbrace{\frac{3}{8}\delta(\bar{l}) + \frac{1}{4}\delta(\bar{x}) - 1}_{\geq 1} + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Jw_{\delta^r}(\underline{A}) - Jw_{\delta}(\underline{A}) = \underbrace{\frac{1}{4}\delta(\bar{l}) + \frac{3}{8}\delta(\bar{x}) - 1}_1 + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\underline{B}) - Bw_{\delta}(\underline{B}) = \underbrace{\frac{3}{16}\delta(\bar{l}) + \frac{1}{8}\delta(\bar{x}) - \frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

Tehát a megfelelő csúcsok megfelelő oldali súlyösszegei nem csökkentek, így δ^r megoldható.

2.4.2. $\delta(\bar{l}) + \delta(\bar{x}) = 3$

1. $\delta(\bar{l}) = 1, \delta(\bar{x}) = 2$ 1 kő kerül $\bar{A}$ -ra, a többi csúcsra a 7. ábra alapján.

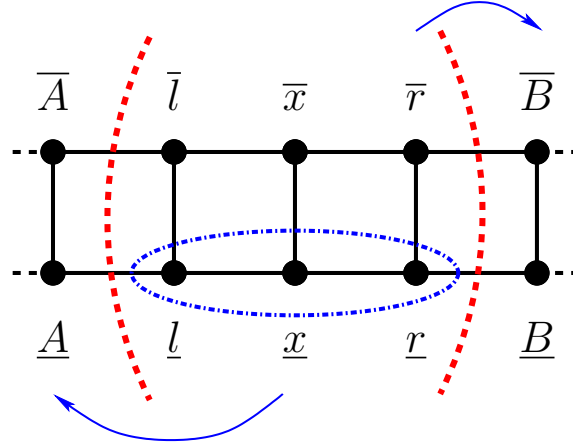
$$Jw_{\delta^r}(\bar{A}) - Jw_{\delta}(\bar{A}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 2 - 2 + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\overline{B}) - Bw_{\delta}(\overline{B}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot 2 - 1 + \frac{1}{2}\delta(\overline{x}) + \frac{3}{16}\delta(\overline{l}) + \frac{3}{8}\delta(\overline{x}) + \frac{1}{4}\delta(\overline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Jw_{\delta^r}(\underline{A}) - Jw_{\delta}(\underline{A}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2 - 1 + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\underline{B}) - Bw_{\delta}(\underline{B}) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \cdot 2 + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

2. $\delta(\overline{l}) = 2, \delta(\overline{x}) = 1$. Egy kő kerül $\overline{A}$ -ra, a többi csúcsra a 8. ábra alapján.



8. ábra. Kő elhelyezési módszer II.

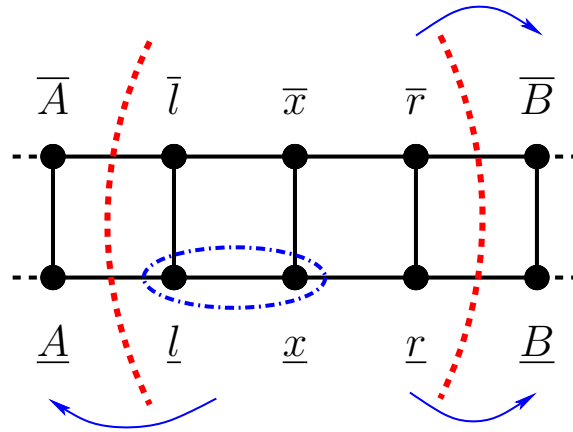
$$Jw_{\delta^r}(\overline{A}) - Jw_{\delta}(\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{8}\delta(\overline{r}) + \frac{1}{4}\delta(\overline{l}) + \frac{3}{8}\delta(\overline{x}) + \frac{7}{16}\delta(\overline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\overline{B}) - Bw_{\delta}(\overline{B}) = \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{4} - 1 + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Jw_{\delta^r}(\underline{A}) - Jw_{\delta}(\underline{A}) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{8} - 1 + \frac{3}{16}\delta(\overline{r}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{7}{8}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\underline{B}) - Bw_{\delta}(\underline{B}) = \frac{3}{16} \cdot 2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

3. $\delta(\overline{l}) = 0, \delta(\overline{x}) = 3$. Ekkor mivel legalább négy követünk van, $\underline{x}$ -en vagy $\underline{l}$ -en van kő. A háromból egy követ tegyünk $\overline{B}$ -re, a maradékot pedig a 9. ábra alapján.



9. ábra. Kő elhelyezési módszer III.

$$Jw_{\delta r}(\overline{A}) - Jw_{\delta}(\overline{A}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\delta(\overline{r}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{16}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

Ez azért igaz, mert $\underline{x}$ vagy $\underline{l}$ csúcson van kő.

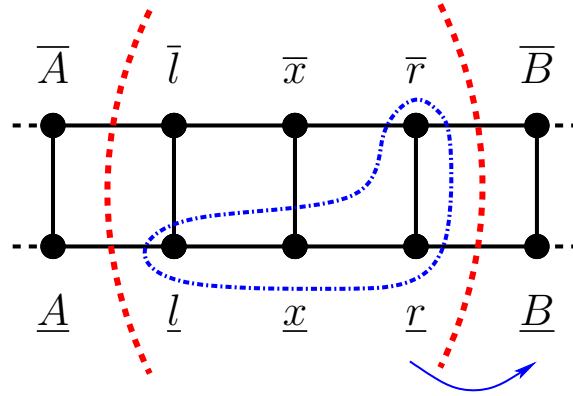
$$Bw_{\delta r}(\overline{B}) - Bw_{\delta}(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Jw_{\delta r}(\underline{A}) - Jw_{\delta}(\underline{A}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{4}\delta(\underline{x}) + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

Itt is lényeges, hogy $\underline{x}$ vagy $\underline{l}$ csúcson van kő.

$$Bw_{\delta r}(\underline{B}) - Bw_{\delta}(\underline{B}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

4. $\delta(\overline{l}) = 3, \delta(\overline{x}) = 0$. Ekkor először próbálkozzunk a következőképpen: 2 kő kerül $\overline{A}$ -ra, aztán a 10. ábrán látható pakolás végrehajtása után még 1 követ leveszünk $\underline{B}$ -ről.



10. ábra. Kő elhelyezési módszer IV.

$$Jw_{\delta r}(\overline{A}) - Jw_{\delta}(\overline{A}) = 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta r}(\overline{B}) - Bw_{\delta}(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \text{nem negatív} + \Delta \geq 0$$

$$Jw_{\delta r}(\underline{A}) - Jw_{\delta}(\underline{A}) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{16}\delta(\overline{r}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

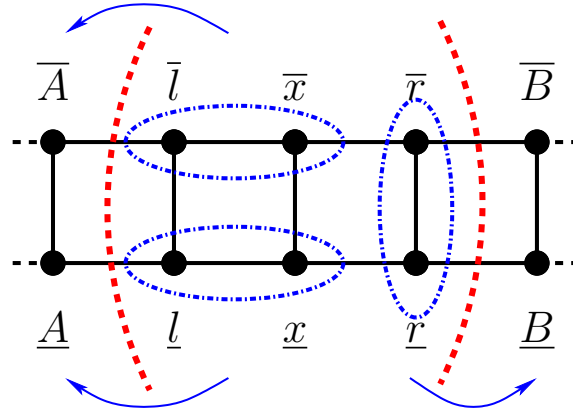
Kivéve ha $\delta(\overline{r}) + \delta(\underline{x}) + \delta(\underline{r}) = 0$.

$$Bw_{\delta r}(\underline{B}) - Bw_{\delta}(\underline{B}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} - 1 + \frac{3}{4}\delta(\overline{r}) + \frac{7}{8}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

Kivéve, ha $\delta(\underline{l}) + \delta(\underline{x}) + \delta(\overline{r}) = 0$ és $\delta(\underline{r}) = 1$.

A kivételeket kezelni kell. Sajnos ezekben az esetekben nem tudunk olyan módszert találni a kövek elhelyezésére, hogy a kitüntetett $\overline{A}$, $\underline{A}$, $\overline{B}$, $\underline{B}$ csúcsok megfelelő súlyösszege ne csökkenjen. Ezért a kiválasztott részgráf maximalitását kell kihasználnunk, illetve át kell térnünk az eredeti egyenlőtlenségekkel való számolásra. Kezdjük az elsővel:

$\delta(\overline{l}) = 3, \delta(\underline{l}) > 0$ és $\delta(\overline{r}) + \delta(\underline{x}) + \delta(\underline{r}) + \delta(\overline{x}) = 0$. Ekkor a maximalitás miatt megtehetjük, hogy az R részgráf helyett az A, l és x által feszített részgráfot hagyjuk el. Az is maximális



11. ábra. Kő elhelyezési módszer V.

lesz. Ekkor $\bar{x}' = 3 \underline{l}' > 0$ és és egyik másik csúcson sincs kő esetet kapjuk, amit korábban már vizsgáltunk.

$\delta(\bar{l}) = 3 \delta(\underline{r}) = 1$ és $\delta(\bar{x}) + \delta(\bar{r}) + \delta(\underline{l}) + \delta(\underline{x}) = 0$ Ekkor a maximalitás miatt bármelyik $P_3 \square K_2$ részgráfon legfeljebb 4 kő található. Könnyen látható, hogy így az $\bar{l}$ jobbról nem elérhető, így $J_\delta(\bar{A}) = 1$. Ha $\delta'(\bar{A}) = 1$ $\delta'(\underline{B}) = 1$ elosztást választjuk, akkor az eredeti egyenlőtlenségek teljesülnek, illetve az A és B létrafokok csúcsai elérhetőek.

2.4.3. $\delta(\bar{l}) + \delta(\bar{x}) = 2$

1. $\delta(\bar{l}) = 1, \delta(\bar{x}) = 1$. Ekkor a 2.2 alfejezetben foglaltak miatt $\delta(\underline{l}) + \delta(\underline{x}) > 0$.

A 11. ábrán látható módon helyezzük el a köveket, majd leveszünk egyet-egyet $\bar{A}$ és $\underline{A}$ csúcsokról.

$$Jw_{\delta^r}(\bar{A}) - Jw_\delta(\bar{A}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\delta(\bar{r}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{16}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\bar{B}) - Bw_\delta(\bar{B}) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16}\delta(\underline{l}) + \frac{1}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Jw_{\delta^r}(\underline{A}) - Jw_\delta(\underline{A}) = -\frac{7}{8} + \frac{7}{16}\delta(\bar{r}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\underline{B}) - Bw_\delta(\underline{B}) = -\frac{7}{16} + \frac{3}{4}\delta(\bar{r}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{l}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

2. $\delta(\bar{l}) = 0, \delta(\bar{x}) = 2$. Ekkor tegyük ugyanazt, mint az előző esetben. $\delta(\underline{l}) > 0$

$$Jw_{\delta^r}(\bar{A}) - Jw_\delta(\bar{A}) = \frac{1}{8}\delta(\bar{r}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{16}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\bar{B}) - Bw_\delta(\bar{B}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{16}\delta(\underline{l}) + \frac{1}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

Kivéve, ha $\delta(\underline{l}) = 1 \delta(\bar{r}) = 1$ és a többi csúcson nincs kő. $\delta(\bar{x}) + \delta(\bar{r}) = 3$ és az l és r létrafokon ugyanannyi kő van, így ez a tükörképe egy már vizsgált elosztásnak.

$$Jw_{\delta^r}(\underline{A}) - Jw_\delta(\underline{A}) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{16}\delta(\bar{r}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\underline{B}) - Bw_\delta(\underline{B}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta(\bar{r}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{l}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

3. $\delta(\bar{l}) = 2, \delta(\bar{x}) = 0$. A köveket a 7. ábra alapján mozgatjuk, majd az $\bar{A}$ és $\underline{B}$ csúcsokról levesszünk 1-1 követ.

$$Jw_{\delta^r}(\bar{A}) - Jw_{\delta}(\bar{A}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\delta(\bar{r}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{l}) + \frac{1}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{16}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Bw_{\delta^r}(\bar{B}) - Bw_{\delta}(\bar{B}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\delta(\bar{r}) + \frac{3}{16}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{x}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

$$Jw_{\delta^r}(\underline{A}) - Jw_{\delta}(\underline{A}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\delta(\bar{r}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{l}) + \frac{1}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

Kivéve, ha $\delta(\bar{r}) = 2$, R többi csúcsán pedig nincs kő.

$$Bw_{\delta^r}(\underline{B}) - Bw_{\delta}(\underline{B}) = -\frac{7}{8} + \frac{1}{4}\delta(\bar{r}) + \frac{3}{8}\delta(\underline{l}) + \frac{3}{4}\delta(\underline{x}) + \frac{1}{2}\delta(\underline{r}) + \Delta \geq 0$$

Ebben az esetben a következő kivételeket kaptuk:

- $\delta(\bar{l}) = 2, \delta(\bar{r}) = 2$ és a többi csúcson nincs kő.
- $\delta(\bar{l}) = 2, \delta(\underline{l}) = 2$ a többi csúcson nincs kő,
- $\delta(\bar{l}) = 2, \delta(\bar{r}) = 1, \delta(\underline{r}) = 1$ és a többi csúcson nincs kő.
- $\delta(\bar{l}) = 2, \delta(\bar{r}) = 1, \delta(\underline{l}) = 1$ és a többi csúcson nincs kő.

Vegyük sorra ezeket a kivételeket. Az első három esetre a megoldás a 12. ábrán látható.

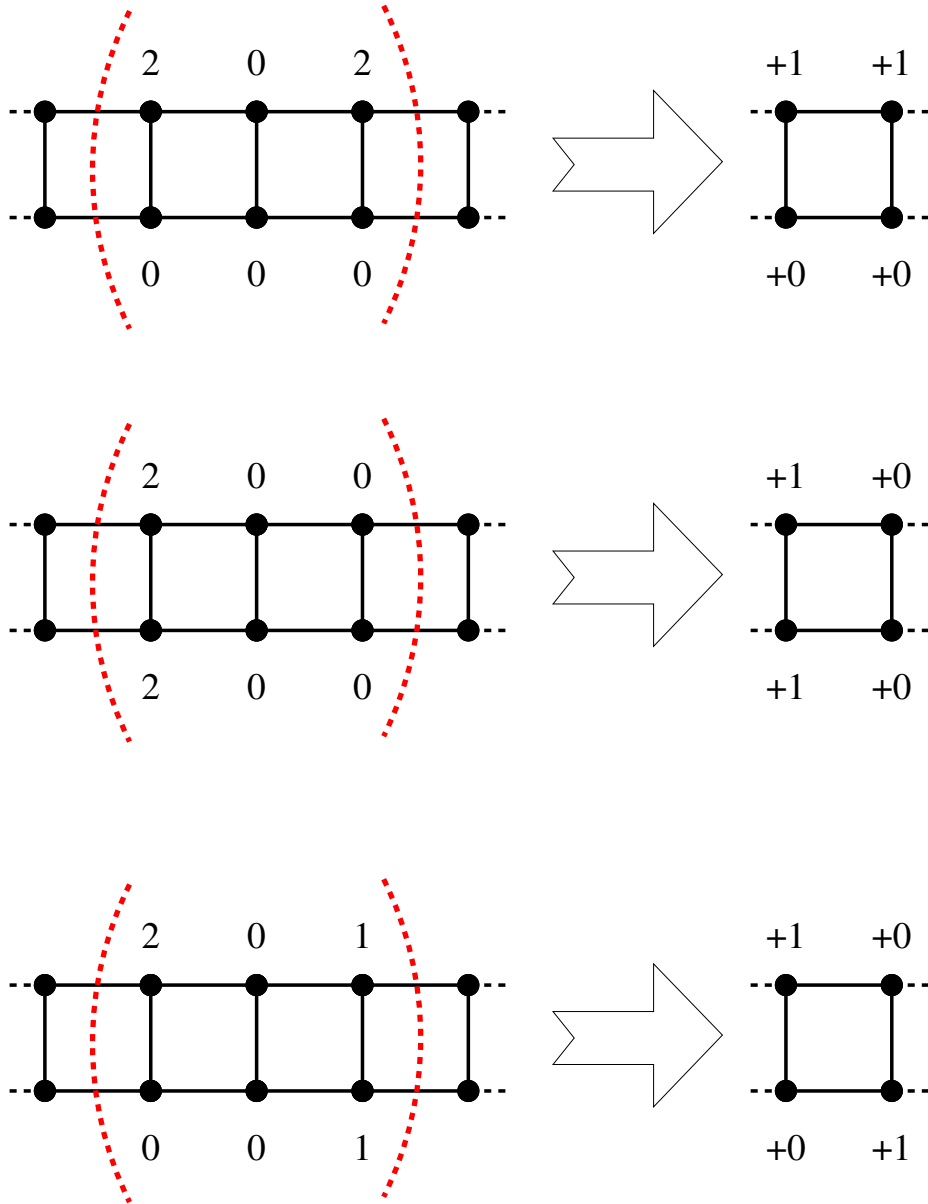
Az utolsó esetben sajnos nincsen a módosított egyenlőtlenségeket teljesítő elosztás. Ekkor a $\delta'(\bar{B}) = 1, \delta'(\underline{A}) = 1$ a következők miatt lesz jó elosztás: Először is feltehetjük, hogy az A létrafokon nincs kő, mivel ha van, akkor az A, l, x létrafokok által feszített részgráffal redukáljunk amire már találtunk megfelelő δ' elosztást. A maximalitás miatt a B létrafokon lévő csúcsok jobboldali elérhetősége legfeljebb három, így az $J_{\delta}(\bar{A}) = 1 \leq J_{\delta'}(\bar{A})$, a többi csúcsra pedig teljesülnek a módosított egyenlőtlenségek valamint az A és B létrafokok csúcsai is elérhetőek δ^r alól, így ez jó.

4. $\delta(\bar{l}) + \delta(\bar{x}) = 1$. Itt már csak egyetlen egy kezeletlen eset maradt: $\delta(\bar{l}) = 1, \delta(\bar{r}) = 1, \delta(\underline{l}) = 1, \delta(\underline{r}) = 1, \delta(\bar{x}) + \delta(\underline{x}) = 0$. Erre a megoldás az egyszerű $\delta(\bar{A}) = 1, \delta(\underline{B}) = 1$

Végignéztük az összes legalább 4 követ tartalmazó eset.

2.5. Pontosan három kő található az R részgráfon

2.5.1. Lemma. Legyen δ elosztásunk $G = P_n \square K_2$ -n olyan, hogy bármely $P_3 \square K_2$ részgráfon legfeljebb három kő található. Fixáljunk $R = P_3 \square K_2$ részgráfot a szokásos jelölésekkel. Ekkor egy σ R -től csak balra lévő csúcsokat érintő murvázási lépéssorozat végrehajtása után az A létrafokra legfeljebb 3 kő kerülhet.



12. ábra. Megoldások

BIZONYÍTÁS: Osszuk fel G -t részgráfokra úgy, hogy köztük legyen R , mindegyik részgráf $P_k \square K_2$ $k \leq 3$ és k csak a balszálon és a jobbszálon lévő részgráf esetén lehet kisebb háromnál. Legyenek ezek a részgráfok $V_1 \dots V_l$. Legyen σ_i olyan murvázási lépéssorozat ami csak $\cup_{j=1}^i V_j$ csúcsokat érintő murvázási lépéseket tartalmaz. Ekkor $\sigma_{i-1} \subseteq \sigma_i$. Nyilvánvalóan a V_1 jobboldali létrafokára σ_1 lépéssorozattal legfeljebb 3 követ tudunk juttatni. Alkalmazzunk indukciót: Tegyük fel, hogy V_{i-1} -nek jobb oldali létrafokára legfeljebb 3 követ tudunk csak juttatni. Legyen σ_i olyan, hogy őt alkalmazva maximális mennyiségű követ juttatunk a V_i jobboldali létrafokára. σ_i viszont felírható mint $\sigma_{i-1} \cdot \sigma'$ valamilyen σ_i -vel, ahol σ' minden lépése a V_i -re mozgat követ. σ' lépéssorozat egy olyan $W = P_4 \square K_2$ gráfon és δ' elosztáson végrehajtható, ahol a gráf bal szélső létrafokán legfeljebb 3 kő van, a maradékon pedig összesen szintén legfeljebb 3. Véges sok ilyen σ' lépéssorozat létezik így könnyen leellenőrizhető, hogy legfeljebb három követ tud $\sigma' W$ jobbszélső létrafokára juttatni. Így az eredeti gráfunkban V_i jobbszélső létrafokára is legfeljebb három kő kerülhet σ által.

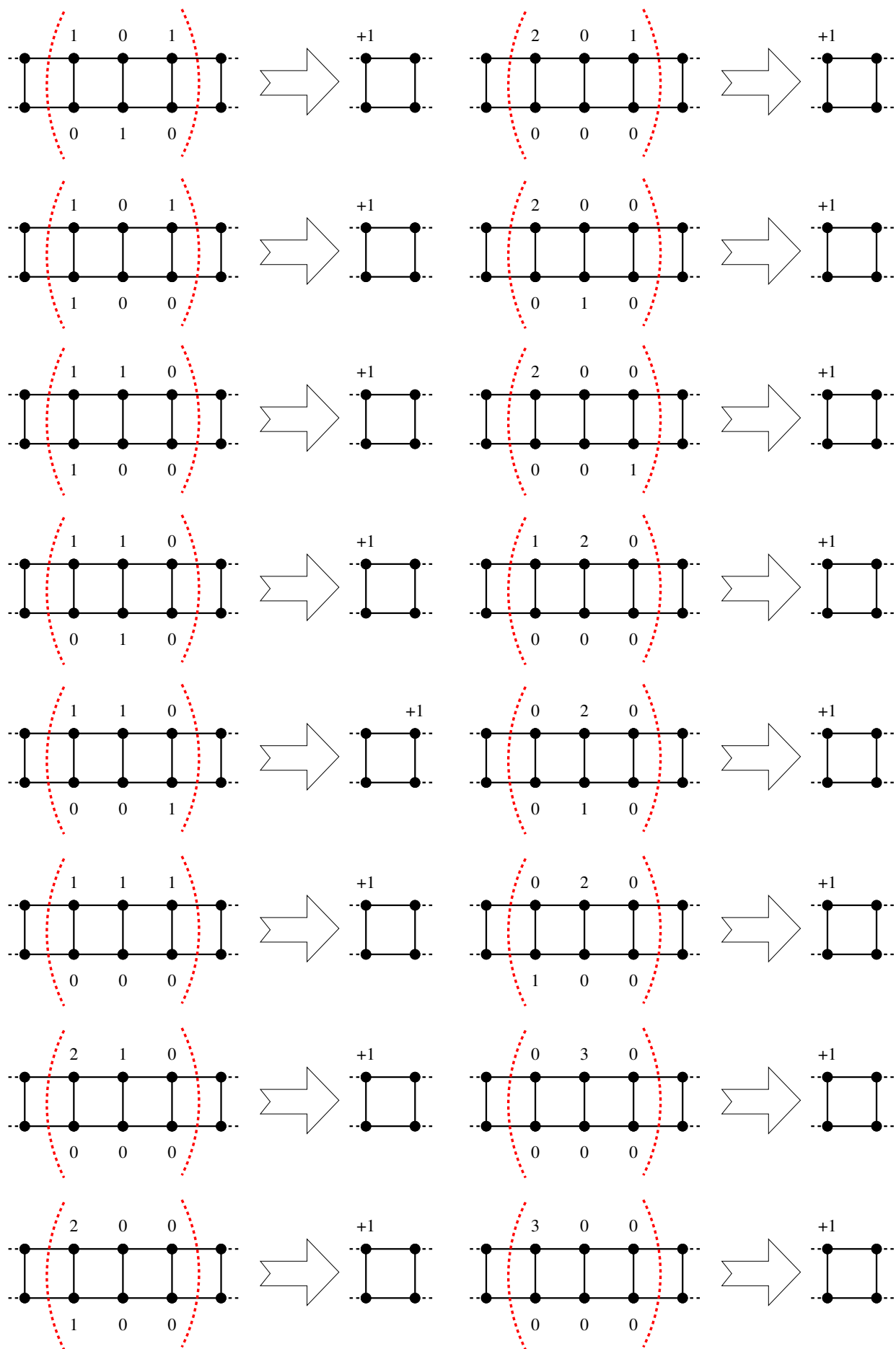
Mivel $R = V_{i+1}$ valamely i -re ezért V_i most belátott tulajdonságából következik az állítás. $\square$

A 3 kővel rendelkező esetekből összesen tizenhat darab van. Ezekben az esetekben a 13. ábrán látható módon helyezzük el a köveket. Az így keletkező δ' elosztások helyessége a részgráf maximalitásából következik. Elég azt igazolni, hogy az R részgráffal szomszédos csúcsoknak az elérhetősége nem csökken. Ez az előbbi lemmánk miatt véges sok eset leellenőrzését jelenti. A tizenhat lehetséges esetből lényegében elég tizennégyet ellenőrizni, mivel a 13 ábra alsó két esetét visszavezethetjük két másik esetre, a már korábban is használt eltolásos trükkal. Ezen ellenőrzések részletezésétől terjedelmük, illetve egyszerűségük miatt eltekintünk. A feladat egyszerűségét szemléltetendő egy esetet végigszámolunk:

Legyen $\delta(\bar{l}) = 1$, $\delta(\underline{x}) = 1$, $\delta(\bar{r}) = 1$. Ekkor az elhagyandó részgráfunk szimmetrikus. Ha A létrafokra balról lehet 3 követ juttatni akkor egy σ murvázási lépéssorozattal r létrafokra legfeljebb plusz egy követ tudunk juttatni és azt is csak az $\underline{l}$ csúcsra. Az A létrafokon el tudjuk érni az elhagyandó részgráf kövei nélkül az 1-1 kő elosztást. Ezért az összevonás után B létrafok csúcsainak bal elérhetősége nem csökken. Az A létrafok csúcsai pedig a 3-elérhetőség miatt triviálisan elérhetőek. Így az új elosztás mindenképpen megoldható lesz akárhova is tesszük az egy maradék kövünket. Ha A létrafokra balról legfeljebb 2 követ tudunk juttatni akkor nem tudunk az r létrafokra balról követ juttatni. Ekkor a B létrafok csúcsainak δ elosztás alatti elérhetősége miatt B létrafok valamelyik csúcsa jobbról elérhető, vagy a B létrafoktól jobbra lévő létrafokra tudunk két követ juttatni. A részgráf elhagyása és összevonás után az $\bar{A}$ csúcsra helyezzünk követ. Ekkor a B létrafok csúcsai a szomszédos létrafokon lévő köveknek köszönhetően elérhetőek. Az A létrafok csúcsai pedig triviálisan elérhető, hogy ha balelérhető az A létrafok. Ha nem akkor a tőle balra lévő létrafok kétszeresen balról elérhető. Így beláttuk, hogy ebben az esetben is redukálni tudjuk a gráfot.

Megjegyzés

Ha az R részgráf a gráf szélén található, azaz az elhagyása esetén nem esik szét a gráf, akkor a probléma triviális. Ekkor csak 2 csúcsra kell elosztanunk a köveket és a fennmaradó csúcsokhoz mindenképpen közelebb kerülnek a mozgatott kövek.



13. ábra. 3 kő esetén lévő teendők

2.6. Kis méretű elosztások

Megvizsgáltuk azon eseteket, amikor található olyan $P_3 \square K_2$ részgráf, amin legalább három kő van. Ezekben az esetekben konstruáltunk egy redukált elosztást a redukált gráfra. Most tekintsük azon elosztásokat amiknek egyik $P_3 \square K_2$ részgrádján sincs kettőnél több kő.

2.6.1. Lemma. *Ha $P_n \square K_2$ gráf egy δ elosztása olyan, hogy $\delta_{P_3 \square K_2} \leq 2$ bármely $P_3 \square K_2$ részgráfra és van egy olyan $R = P_n \square K_2$ részgráf, hogy $\delta_R < 2$ akkor δ nem megoldható elosztás.*

2.6.2. Állítás. *Ha minden $P_3 \square K_2$ részgráfon legfeljebb kettő kő van akkor egy csúcsra csak akkor tudunk kettő követ juttatni, ha ott már a kezdeti elosztás szerint is két kő volt.*

Ez az állítás a 2.5.1 lemma bizonyításához hasonlóan indukcióval könnyen igazolható. A bizonyítás azon múlik, hogy egy kővel rendelkező csúcsra akkor tudunk csak még egy követ juttatni, ha két szomszédján van egy-egy kő vagy ha egy tőle legfeljebb kettő távolságra lévő csúcs 2-elérhető.

BIZONYÍTÁS(2.6.1 Lemma):

- Ha nincs kő R -en, akkor mivel A és B létrafokon legfeljebb kettő-kettő kő van, ezért az x létrafok valamelyik csúcsa nem elérhető.
- Amennyiben az egyetlen kő az x létrafokon van, akkor az A és B létrafokon csak egy-egy kő lehet, különben lenne kettőnél több követ tartalmazó $P_3 \square K_2$ részgráf. Az állításunk miatt A és B létrafokon bármilyen murvázási lépéssorozat végrehajtása után legfeljebb egy-egy kő található. Így x létrafok kővel nem rendelkező csúcsa nem elérhető.
- Ha az l létrafokon van az egyetlen kő, akkor az A létrafokon továbbra is csak egy kő van és nem is lehet rá balról követ juttatni. B létrafokon legfeljebb két kő van így x létrafok valamelyik csúcsa ismét nem elérhető. Az, hogy melyik csúcs nem elérhető a B -n lévő kövek elhelyezkedésétől függ.

Beláttuk tehát, hogy az ilyen tulajdonságú δ elosztás esetén van nem elérhető csúcs, így δ nem megoldható. $\square$

2.7. A létra optimális murvázási számára vonatkozó tétel

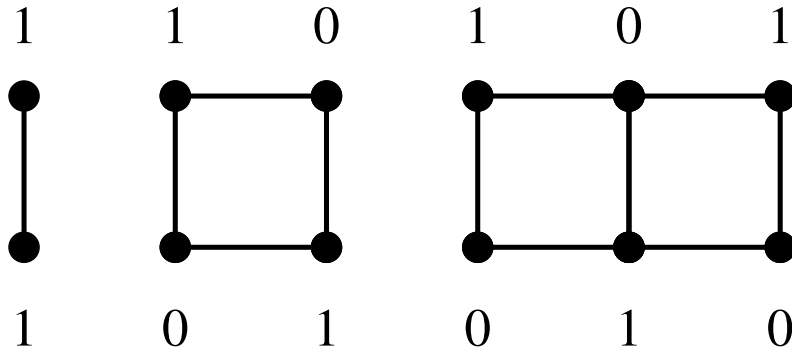
2.7.1. Állítás.

$$\rho_{opt}(P_2) = 2$$

$$\rho_{opt}(P_2 \square K_2) = 2$$

$$\rho_{opt}(P_3 \square K_2) = 3$$

Ezen gráfok optimális murvázási számainak tudatában és a korábban igazolt lemmák segítségével már kimondhatjuk, illetve könnyen bizonyíthatjuk a létra optimális murvázási számára vonatkozó tételt:



14. ábra. P_2 , $P_2 \square K_2$, $P_3 \square K_2$ egy-egy optimális elosztása.

2.7.2. Tétel. Ha $n = 3k + r$ ahol $0 \leq r < 3$, akkor:

$$\rho_{opt}(P_n \square K_2) = \begin{cases} 2 + 2k & \text{ha } r = 1 \\ 2 + 2k & \text{ha } r = 2 \\ 1 + 2k & \text{ha } r = 0 \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS:

Felső korlát: A 15. ábrán látható módon helyezzük el a köveket.

Alsó korlát: Indirekt tegyük fel, hogy kevesebb kő elég. Legyen E a minimális méretű ellenpélda és δ egy optimális elosztása. Ekkor a következő esetek lehetségesek:

- Van olyan $P_3 \square K_2$ részgráfja E -nek, amin legalább 3 kő található. Ekkor redukáljuk a gráfot ezzel a $P_3 \square K_2$ -vel és a korábban ismertetett módszerekkel készítünk egy redukált megoldható elosztást a redukált gráfon. A redukált gráf optimális murvázási száma ezért legalább kettővel kisebb mint $\rho_{opt}(E)$. Így viszont a redukált gráfra sem igaz a képlet, ezért ez is ellenpélda. De ez nem lehetséges, mivel a redukált gráfunk mérete kisebb, mint E mérete és E minimális ellenpélda volt.
- Egyik $P_3 \square K_2$ részgráfon sincs 2-nél több kő és ezek között van egy R részgráf amin csak 1 kő található. Ekkor a 2.6.1 lemma miatt δ elosztás nem megoldható, ami ellent mond a feltevésünknek.
- Minden $P_3 \square K_2$ részgráfon legfeljebb 2 kő található. Ekkor a létrafokokon lévő kövek száma az alábbi mintázat valamelyikét követheti csak:

2 0 0 2 0 0 2 0 0 2 0 0 2

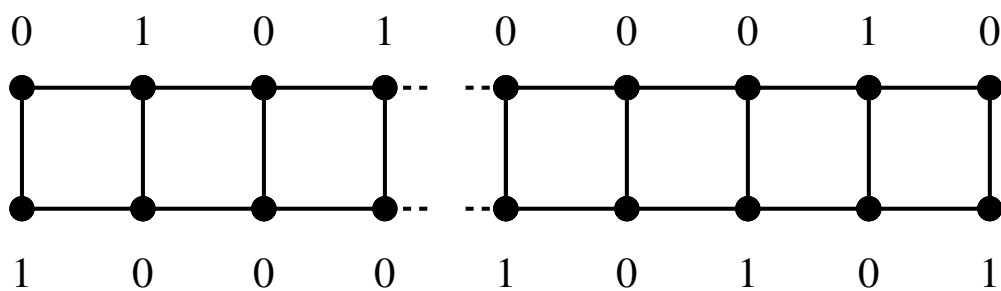
vagy

1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1

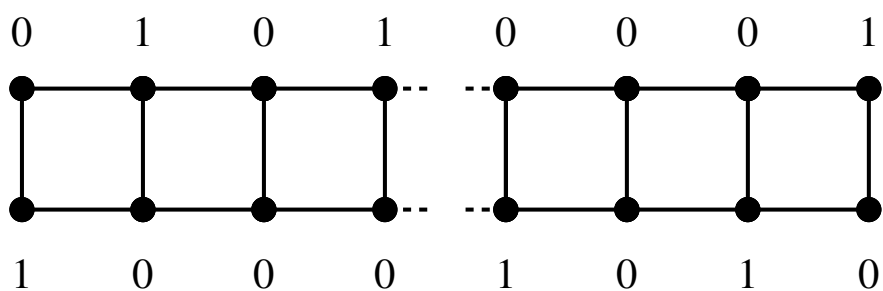
Kettő 1-essel vagy egy 2-essel kell kezdődnie a sorozatnak és két 1-esre vagy egy 2-esre kell végződnie ahhoz, hogy megoldható legyen az elosztás. Ezek viszont nem lehetnek ellenpéldák hiszen pont annyi követ tartalmaznak, mint amit a tételünk állít.

A lehetőségeket végignézve arra jutottunk, hogy az indirekt feltevésünk hamis volt. $\square$

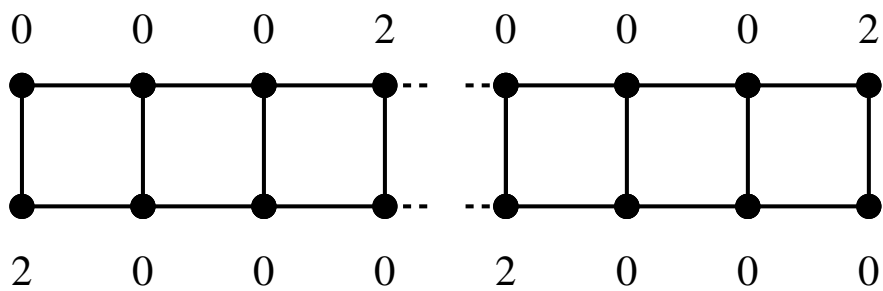
$3k$



$3k+2$



$3k+1$



15. ábra. Optimális kő elhelyezés

3. A k -optimális murvázási szám

A k -optimális murvázási szám, az optimális murvázási szám általánosítása. Ekkor azt a legkisebb számot keressük, amihez létezik akkora méretű elosztás, hogy az alól bármely csúcs k -elérhető. A k -optimális murvázási számot ρ_{k-opt} -tal jelöljük.

Ezen dolgozatban most a 2-optimális murvázási számmal foglalkozunk. A kör 2-optimális murvázási számát határozzuk meg. Erre az n -prizma optimális murvázási számára vonatkozó formula igazolásakor szükség lesz.

3.1. A kör 2-optimális murvázási száma

3.1.1. Tétel.

$$\rho_{2-opt}(C_n) = n$$

Definíció: 2-simító lépésnek nevezzük a következőt: Ha v másod fokú csúcs, u és w a szomszédai és $\delta(w) \geq 3$ akkor w -ről 2 követ leveszünk és 1-et 1-et ráteszünk a szomszédaira.

3.1.2. Állítás. Ha egy megoldható elosztásra alkalmazunk egy 2-simító lépést akkor az így kapott elosztás továbbra is megoldható.

Definíció: v csúcs w -nek barátja egy elosztásra nézve ha létezik közöttük olyan út, hogy az út minden csúcsán van kő.

BIZONYÍTÁS(3.1.1 Tétel):

Felső korlát: Minden csúcsra tegyünk egy követ.

Alsó korlát: Indirekt tegyük fel, hogy n -nél kevesebb kő elég. Vegyünk egy $n - 1$ méretű 2-megoldható elosztást. Ha vannak olyan csúcsok amiken legalább 3 kő van akkor alkalmazzunk ezekre a csúcsokra 2-simító lépéseket. Mivel n -nél kevesebb kövünk van ezért csak véges sokszor tehetjük ezt meg és egy olyan elosztást kapunk ahol minden csúcson legfeljebb 2 kő van.

Az így kapott elosztás esetén jelöljük a 2 kővel rendelkező csúcsok számát x -szel, az 1 kővel rendelkezők számát y -nal, az üres csúcsok számát pedig z -vel. Ekkor az alábbi két egyenletet írhatjuk fel:

$$x + y + z = n$$

$$2x + y = n - 1$$

Amiből következik:

$$z = x + 1$$

A kör 2-megoldható elosztásai rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

1. Egymás mellett nem lehet 3 üres csúcs.
2. Ha egymás mellett 2 üres csúcs van, akkor mindkettőnek kell, hogy legyen 2-2 darab 2 kővel rendelkező barátja, melyek ráadásul nem azonosak.
3. Ha egy üres csúcsnak nincs üres szomszédja, akkor legalább 2 darab 2 kővel rendelkező barát csúcsa van.
4. Egy 2 kővel rendelkező csúcs legfeljebb 2 darab üres csúccsal barát.

Ezekből a tulajdonságokból következik, hogy $z \leq x$, ami ellentmond a korábbi egyenletünknek így az indirekt feltevés hamis volt. $\square$

4. Az n-prizma és a Möbius létra

4.1. Az n-prizma optimális murvázási száma

4.1.1. Állítás ($k \geq 2$).

$$\rho_{opt}(C_{3k-1} \square K_2) \leq \rho_{opt}(P_{3k-2} \square K_2) \leq 2k$$

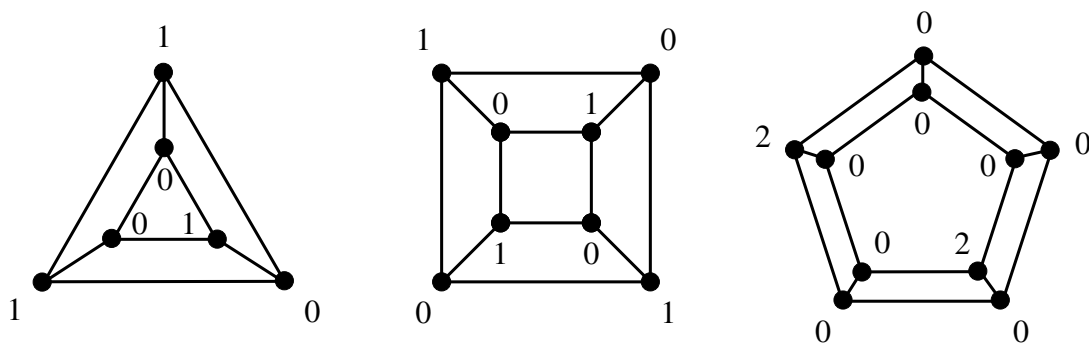
$$\rho_{opt}(C_{3k} \square K_2) \leq \rho_{opt}(P_{3k-1} \square K_2) \leq 2k$$

$$\rho_{opt}(C_{3k+1} \square K_2) \leq \rho_{opt}(P_{3k} \square K_2) \leq 2k + 1$$

A 15. ábrán látható elosztásokat alkalmazzuk $P_{n-1} \square K_2$ illetve $P_{n-2} \square K_2$ részgráfokra és a fennmaradó csúcsokra nem teszünk követ. A gráfokhoz az alábbi módon párosítjuk az elosztásokat:

- $n \equiv 0 \pmod 6$ esetén használjuk a $3k + 2$ esetben lévő.
- $n \equiv 3 \pmod 6$ esetén használjuk a $3k + 1$ esetben lévő.
- $n \equiv 1 \pmod 3$ esetén használjuk a $3k$ esetben lévő.
- $n \equiv 2 \pmod 3$ esetén használjuk a $3k + 1$ esetben lévő.

$k \geq 2$ esetén ezek az elosztások rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy ha kiválasztjuk a balszélső és a jobbszélső létrafokok egy-egy csúcsát, akkor ezek a csúcsok egyszerre elérhetőek. $k=1$ esetén viszont ez nem teljesül, így ezekben az esetekben a 16. ábrán látható optimális elosztásokkal rendelkezünk.



16. ábra. Az n-prizma optimális elosztásai $n \leq 5$ esetén

4.1.2. Lemma. $C_n \square K_2$ optimális elosztása esetén létezik olyan létrafok amire csak 1 követ tudunk juttatni.

BIZONYÍTÁS: $C_n \square K_2$ -t omlasszuk össze egy C_n gráffá a következőképpen: Minden létrafokból egy csúcs keletkezik és két csúcs között pontosan akkor van él ha a nekik megfelelő létrafokok szomszédosak. Egy létrafokon lévő köveket helyezzük a belőle készített csúcsra. Így a $C_n \square K_2$ elosztásából kapunk C_n -re egy elosztást. Könnyen látható, hogy a létrafok 2-elérhetőségének szükséges feltétele

a neki megfelelő csúcs C_n -ben való 2-elérhetősége. Viszont a 4.1.1 állítás szerint n -nél kevesebb kővel rendelkezik az n -prizma optimális elosztása, így a neki megfelelő C_n -en értelmezett elosztás nem lehet 2-optimális a 3.1.1 tétel szerint. Tehát van nem 2-elérhető csúcs C_n -ben és a neki megfelelő létrafok rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. $\square$

4.1.3. Tétel.

$$\rho_{opt}(C_{3k-1} \square K_2) = \rho_{opt}(P_{3k-2} \square K_2) = 2k$$

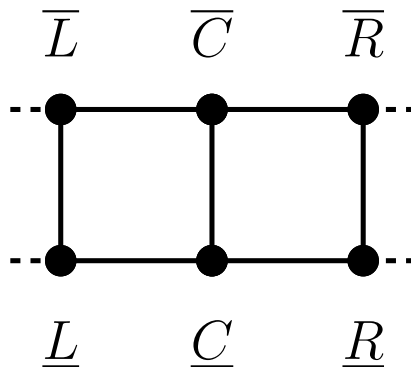
$$\rho_{opt}(C_{3k} \square K_2) = \rho_{opt}(P_{3k-1} \square K_2) = 2k$$

$$\rho_{opt}(C_{3k+1} \square K_2) = \rho_{opt}(P_{3k} \square K_2) = 2k + 1$$

Kivéve:

$$\rho_{opt}(C_3 \square K_2) = 3$$

$$\rho_{opt}(C_4 \square K_2) = 4$$



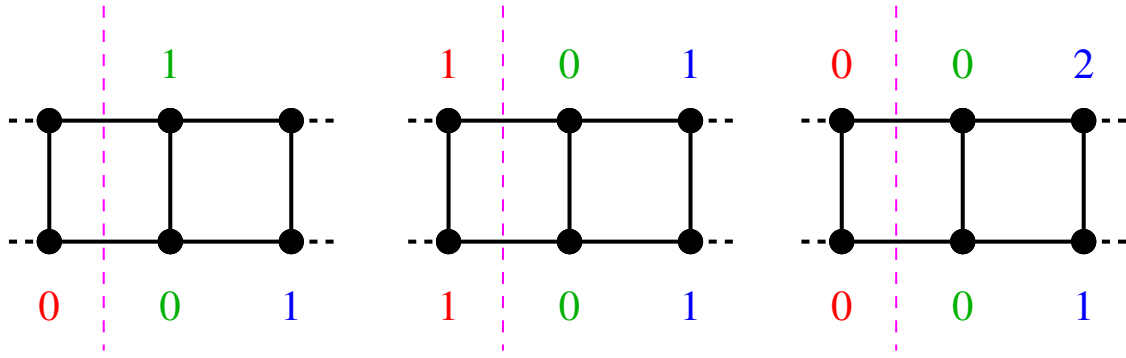
17. ábra. Elnevezések

BIZONYÍTÁS: A felső korlátot láttuk korábban, most tekintsük az alsót:

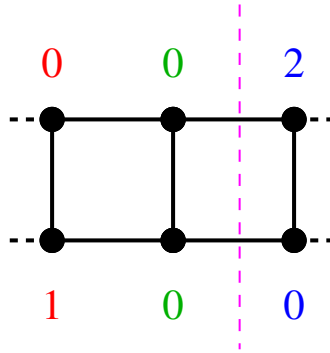
A 4.1.2 lemmában vett létrafok környezetét vizsgáljuk. Nevezzük ezt inentől kezdve C létrafoknak és a csúcsokra a 17. ábrán látható jelölésekkel hivatkozunk. Mivel csak egy kő juttatható rá, ezért egy végrehajtható murvázási lépéssorozat sem tartalmazhat $(c, c \rightarrow *)$ murvázási lépést, ahol a c a C létrafok csúcsa. Így a felvágás után legfeljebb C csúcsainak és azok szomszédainak elérhetősége romolhat el. Vágjuk fel a $C_n \square K_2$ gráfunkat egy $P_n \square K_2$ -re:

- **Alsó korlát I.** A 18. ábrán látható a kövek elhelyezkedése három lehetséges esetben. Ekkor az L és C létrafokok között vágjuk ketté a gráfot. A következőket mondhatjuk ekkor:

1. A C és R létrafok elérhető továbbra is.
2. Az L létrafok nem elérhető.
3. az összes többi létrafok elérhető.



18. ábra. A zöld szám a csúcson lévő kövek mennyiségét, a piros balról- a kék pedig jobbról elérhetőség nagyságát mutatja.



19. ábra. A jelölések megegyeznek az előző ábra jelöléseivel.

Tehát ha ezen 3 eset valamelyikét tartalmazza a gráfunk akkor ezek alapján a következő egyenlőtlenség igaz: $\rho_{opt}(C_n \square K_2) \geq \rho_{opt}(P_{n-1} \square K_2)$

• **Alsó korlát II.** A 19. ábrán látható esetben a szétvágás után a következőket mondhatjuk:

1. Az R létrafok elérhető továbbra is.
2. Az L és C létrafok nem elérhető.
3. az összes többi létrafok elérhető.

Ezek alapján, ha ezt az esetet tartalmazza a gráfunk akkor a következőt mondhatjuk:

$$\rho_{opt}(C_n \square K_2) \geq \rho_{opt}(P_{n-2} \square K_2)$$

Mivel egy megoldható elosztás a C létrafok környezetében a 18 és a 19 ábrákon látható módon nézhet csak ki szimmetriáktól eltekintve, ezért csak ez a két alsó korlátunk van. Az eseteket összevonva a II. alsó korlát az ami minden gráfra érvényes. Ezt felhasználva: ($n = 3k + r$, $0 \leq r < 3$)

• $r = 0$ Ekkor a II. egyenlőtlenségből:

$$\rho_{opt}(C_n \square K_2) \geq \rho_{opt}(P_{n-2} \square K_2) = 2(k-1) + 2 = 2k$$

• $r = 1$ Ekkor $\rho_{opt}(C_n \square K_2) \neq \rho_{opt}(P_{n-2} \square K_2)$ mivel ha egyenlő lenne, akkor a 19. ábrán látható eset megtalálható a gráfunkban és szétvágás után az $\bar{C}$ csúcsra 1 követ helyezve $P_n \square K_2$ -nek

egy megoldható elosztását kapnánk amiből következne, hogy:

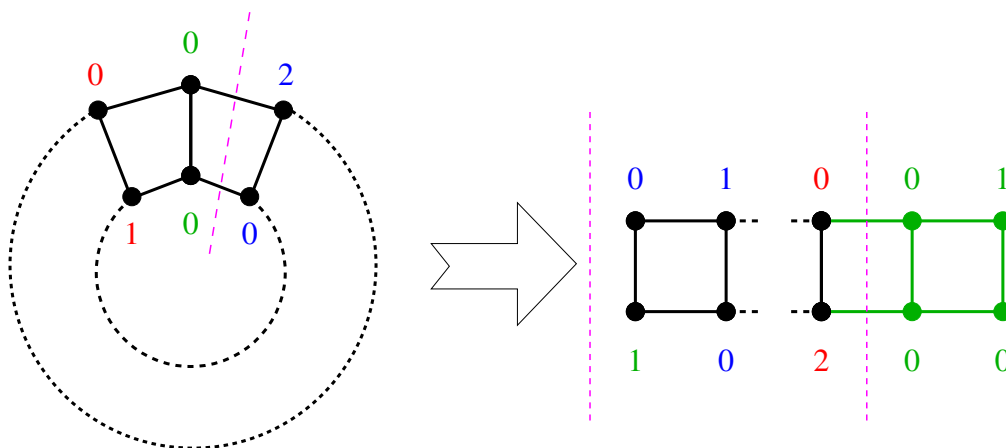
$$2k+2 = \rho_{opt}(P_n \square K_2) \leq \rho_{opt}(C_n \square K_2) + 1 = \rho_{opt}(P_{n-2} \square K_2) + 1 = 2(k-1) + 2 + 1 = 2k+1$$

Ami ellentmondás. Így az I. egyenlőtlenségből: $\rho_{opt}(C_n \square K_2) \geq \rho_{opt}(P_{n-1} \square K_2) = 2k+1$

- $r = 2$ A II. egyenlőtlenség most is akkor éles ha a 19. ábrán látható esetet tartalmazza a gráfunk. Ekkor egészítsük ki a szétvágott gráfot és tegyünk 2 plusz követ rá a 20. ábra alapján. Így egy megoldható elosztását kapjuk $P_{n+2} \square K_2$ -nek. Ez alapján pedig feltételezve a II. egyenlőtlenség élességét:

$$2k+4 = 2(k+1) + 2 = \rho_{opt}(P_{n+2} \square K_2) \leq \rho_{opt}(C_n \square K_2) + 2 = \rho_{opt}(P_{n-2} \square K_2) + 2 = 2k+3$$

Ami ellentmondás. Így mivel a II. egyenlőtlenség most sem lehet éles, ezért az I. adódik alsó korlátnak.



20. ábra. Így egészítjük ki a felvágott gráfot.

Az $n = 3$ illetve $n = 4$ esetben nem tudjuk elérni az alsó korlátot, de erre a két esetre kézzel ki tudjuk számolni az optimális murvázási számot. Az optimális elosztások ezekben az esetekben a 16. ábrán láthatóak. $n \geq 6$ esetén az alsó és felső korlát megegyezik, amiből következik a tétel állítása.

□

4.2. A Möbius létra optimális murvázási száma

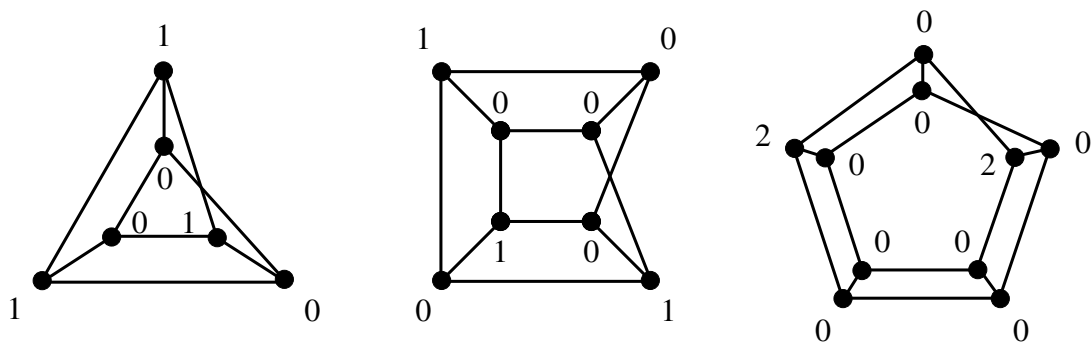
4.2.1. Tétel. Az n hosszú Möbius létra optimális murvázási száma megegyezik az n -prizma optimális murvázási számával, kivéve ha $n = 4$.

BIZONYÍTÁS: Hasonlóan konstruálunk elosztásokat felső korlátnak mint az n -prizmánál. Vesszük a $P_{n-1} \square K_2$ vagy $P_{n-2} \square K_2$ gráfok egy optimális elosztását és a fennmaradó csúcsokra nem helyezünk követ:

- $n \equiv 0 \pmod 6$ esetén használjuk a $3k + 1$ esetben lévő.
- $n \equiv 3 \pmod 6$ esetén használjuk a $3k + 2$ esetben lévő.
- $n \equiv 1 \pmod 3$ esetén használjuk a $3k$ esetben lévő.
- $n \equiv 2 \pmod 3$ esetén használjuk a $3k + 1$ esetben lévő.

Az alsó korlát a bizonyításával együtt megegyezik az n -prizma alsó korlátjával. A felvágás során nagyrészt az n -prizma lokális tulajdonságait használtuk fel, lokálisan pedig az n -prizma és a Möbius létra is egy egyszerű létra. A felvágáshoz szükséges egyetlen globális tulajdonság az volt, hogy minden optimális elosztás esetén van olyan létrafok, amire csak egy követ tudunk juttatni. Ez a Möbius létra esetén is igaz, mivel a 4.1.2 lemma bizonyítása egy az egyben elmondható Möbius létrára is. Felvágás után pedig triviálisan megegyezik a két bizonyítás.

Az egyetlen különbség az n -prizmához képest, hogy $n = 4$ esetén elég három kő, így elérjük az alsó korlátot. Az ezt elérő optimális elosztás a többi 6-nál kisebb méretű esettel együtt a 21 ábrán látható. $\square$



21. ábra. A Möbius létra egy-egy optimális elosztása $n < 6$ esetén.

5. Összefoglaló

5.1. Elért eredmények, felvetődő kérdések

Dolgozatomban a létrák és abból származtatott gráfok optimális murvázási számára adtam konkrét formulákat. Felvetődik a kérdés, hogy lehet-e hasonlóan egyszerű formulákat megadni abban az esetben, hogy ha P_n -et más viszonylag egyszerű struktúrájú gráfokkal direkt szorozzuk, például P_k -val vagy K_k -val. Ekkor a 2.1.1 lemma állítása nem igaz, így a $P_n \square P_k$ illetve a $P_n \square K_k$ gráfok murvázási számának meghatározásához új eszközökre van szükségünk. A P_n -ről C_n -re való áttérésnél a kör k -optimális murvázási száma valószínűleg továbbra is segítségünkre lesz. Ezen gráfok optimális kövezési száma sem ismert.

Jelen dolgozatban a 2-optimális kövezési számokra csak érintőlegesen tértem ki. Egyedül a kör esetén határoztam meg ezt a mennyiséget, mivel csak erre volt szükségem az általam kitűzött célok eléréséhez. Érdekes lehet megpróbálni ezen mennyiséget meghatározni a dolgozatomban vizsgált többi gráfra. A kör k -optimális murvázási számának meghatározása pedig azért is lehet hasznos mivel mint korábban említettem, lehet, hogy fel tudjuk használni a $P_n \square H$ -ről $C_n \square H$ -ra való áttérésre $H \neq K_2$ esetén is.

Hivatkozások

- [1] Paul Lemke, Dan Kleitman, *An addition theorem on the integers modulo n* J. Number Theory 31:335–345, 1989.
- [2] Fan Chung, *Pebbling in hypercubes* SIAM J. Disc. Math. 2:467–472, 1989.
- [3] Christopher Belford, Nándor Sieben, *Rubbling and optimal rubbling of graphs* Discrete Mathematics 309::3436–3446, 2009.
- [4] Milans, Kevin; Clark, Bryan, *The complexity of graph pebbling*. SIAM J. Discrete Math. 20 no. 3:769–798, 2006.
- [5] David P. Bunde, Erin W. Chambers, Daniel Cranston, Kevin Milans, Douglas B. West, *Pebbling and optimal pebbling in graphs* J. Graph Theory 57 no. 3:215–238