

# Félcsoportok mátrixreprezentációinak dimenziói

TDK dolgozat

Zubor Márton

**Konzulens:** Dr. Nagy Attila  
egyetemi docens  
Algebra Tanszék,  
BME Matematika Intézet



**BME**  
**2011**

## Bevezető

A félcsoportelméletben fontos kutatási irány a véges félcsoportok reprezentációja mátrixokkal, speciálisan valamely  $\mathbb{F}$  test feletti mátrixokkal. Dolgozatomban ilyen reprezentációkat fogok vizsgálni egy érdekes és új szempont szerint. Pontosabban megvizsgáltam, hogy a reprezentált félcsoport  $n$  pozitív egész elemszámától illetve  $\mathbb{F}$ -től függően a reprezentációban szereplő mátrixok által generált részalgebra  $n - k$  dimenziója mekkora lehet. Sikerült leírni a kapcsolatot az olyan pozitív egész  $n$  és nem negatív egész  $k$  között, amelyre a reprezentált  $n$  elemű félcsoport által generált részalgebra dimenziója  $n - k$ . Ezt a kapcsolatot megvizsgáltam olyan esetekben is, amikor speciális reprezentációkat vettünk figyelembe. Alapvetően kétféle reprezentációt vizsgáltam alaposabban. Az egyik a null-félcsoport reprezentációjáról szól. Ez azért érdekes, mert az esetek többségében ennél a konstrukciónál a vizsgált paraméterek között a kapcsolat megegyezik az általános esetben kapott eredményekkel. A másik részletesebben vizsgált eset amikor a reprezentáció diagonális mátrixokat használ. Az általam vizsgált téma időszerű és újszerű, e témával kapcsolatos legelső eredmények problémafelvetéssel együtt a publikáció előtt álló [1] cikkben találhatóak. A dolgozat a bevezetőn kívül öt fejezetet tartalmaz. Az első fejezet a dolgozatban felhasznált legalapvetőbb fogalmakat illetve ismert eredményeket foglalja össze. A második fejezet az általános problémafelvetésünk vizsgálatával foglalkozik, megoldást adva azon  $n$  pozitív egészek és  $k$  nem negatív egészek kapcsolatáról, melyekre teljesül, hogy van olyan  $n$  elemű  $S$  félcsoport és annak egy  $\gamma$  reprezentációja, hogy  $\gamma(S)$  által generált részalgebra dimenziója  $n - k$ . Ebben a fejezetben tehát  $\gamma$  és  $S$  tetszőleges lehet, semmilyen speciális feltételt nem követelünk vele szemben. A harmadik fejezetben a vizsgálatunk tárgyát képező (korábban ismertetett) problémát vizsgáljuk, de azon feltétel mellett, hogy a reprezentálható  $S$  félcsoport eleme legyen a null-félcsoportok osztályának. A negyedik fejezetben a probléma specialitása abban jelentkezik, hogy olyan  $\gamma$  reprezentációkat feltételezünk, hogy  $\gamma(S)$  elemei diagonális mátrixok legyenek. Az ötödik fejezetben egyéb eredményeket közlünk. A dolgozat főleg az [1]-ben megjelölt problémákra ad választ, de ezen túlmenően addendum az [1] eredményeihez.

## 1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben a dolgozatban felhasználásra kerülő jelöléseket, alapfogalmakat, illetve ismert eredményeket részletezünk.

A dolgozatban a 0 és 1 egyrészt a szóban forgó test nullelemét és egységelemét, más helyeken viszont a 0 és 1 egész számokat jelöli. Ez a kettős szerep nem fog

félreértést okozni, mert mindig világos lesz, hogy éppen melyik szerepben vannak.

Mindenhol, ahol mátrixokból alkotott halmazról, mint félcsoportról beszélünk, műveletnek a hagyományos értelemben vett mátrixszorzást értjük.

Használjuk a következő jelöléseket:

$\mathbb{F}_{n \times n}$ : az  $\mathbb{F}$  test feletti teljes  $n \times n$ -es mátrix algebra;

$\mathbb{F}_n$ : az  $n$  elemű véges test;

$I_n$ : az  $n \times n$ -es egységmátrix az adott test felett;

$S^0$ : az  $S$  félcsoportból egy null-elem hozzá vételével kapott félcsoport.

**1. Definíció.** [2] Legyen az  $S$  halmazon értelmezve egy kétváltozós  $\circ$  művelet ami asszociatív (azaz minden  $a, b, c \in S$ -re  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ). Ekkor  $(S, \circ)$ -et félcsoportnak nevezzük. (Az  $a \circ b$  helyett csak  $ab$ -t fogunk írni.)

**2. Definíció.** [2] Legyen  $S$  egy olyan nullelemes félcsoport, hogy minden  $a, b \in S$ -re  $ab = \hat{0}$  (ahol  $\hat{0}$  az  $S$  nulleleme). Ekkor  $S$ -et null-félcsoportnak nevezzük.

**3. Definíció.** [2] Egy  $S$  nullelemes félcsoportot nil félcsoportnak nevezünk, ha minden  $a$ -re létezik egy  $n$  pozitív egész, hogy  $a^n = \hat{0}$  (ahol  $\hat{0}$  az  $S$  nulleleme).

**4. Definíció.** [6] Egy félcsoportot kötegnek nevezünk ha minden eleme idempotens ( $a$  idempotens ha  $a^2 = a$ ).

**5. Definíció.** [6] A kommutatív köteget félhálónak nevezzük.

**6. Definíció.** [4] Legyen  $\alpha$  egy ekvivalenciareláció egy  $S$  félcsoporton. Ha  $(a, b) \in \alpha$ -ból és  $(c, d) \in \alpha$ -ból következik, hogy  $(ac, bd) \in \alpha$  akkor  $\alpha$ -t kongruenciarelációnak nevezzük.

**7. Definíció.** [4] Legyen adott egy  $S$  félcsoport és rajta egy  $\alpha$  kongruenciareláció. Ha az  $S/\alpha$  egy félháló, akkor azt mondjuk, hogy  $\alpha$  az  $S$  félháló kongruenciája vagy félháló felbontása.

**8. Definíció.** [2] Egy félcsoport egy elemét periodikusnak nevezünk ha az általa generált félcsoport véges. Egy félcsoportot periodikusnak nevezünk, ha minden eleme periodikus. Speciálisan a véges félcsoportok is periodikusak.

**1. Tétel.** Ha egy félcsoport csoportok félhálója, akkor annak bármely periodikus részfélcsoportja is csoportok félhálója.

**1. Megjegyzés.** Az 1.Tétel bizonyítása azon múlik, hogy minden elem periodikus, így a hatványai közt szerepel egy idempotens elem. A félháló felbontás osztályaiban csak egy-egy idempotens elem van, a csoport egységeleme. Így ha tekintjük a félhálófelbontás megszorítását a periodikus részfélcsoportra, akkor egy alkalmas félhálófelbontást kapunk.

**9. Definíció.** [4] Egy  $S$  félcsoport  $a$  elemét teljesen regulárisnak nevezzük, ha van olyan  $x \in S$ , hogy  $axa = a$  és  $ax = xa$ .

**10. Definíció.** [4] Egy félcsoportot teljesen regulárisnak nevezünk ha minden eleme teljesen reguláris.

**2. Tétel.** [4] Egy félcsoport akkor és csak akkor teljesen reguláris ha csoportok uniója, ami ekvivalens azzal, hogy diszjunkt csoportok uniója.

**11. Definíció.** [2] Akkor mondjuk, hogy az  $S$  félcsoport az  $S_i$  részfélcsoportok erős  $I$  félhálójára, ha  $S$  az  $S_i$  részfélcsoportok  $I$  félhálójára, és minden  $i \geq j$   $i, j \in I$  indexpárhoz megadható  $S_i$ -nek  $S_j$ -be olyan  $\varphi_{i,j}$  homomorfizmusa, hogy az alábbiak teljesülnek:

1.  $\varphi_{i,i}$  az  $S_i$  identikus leképezése;
2. minden  $i \geq j \geq k$   $i, j, k \in I$ -re  $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$  ahol  $\circ$  a homomorfizmusok kompozícióját jelöli;
3. minden  $a \in S_i$ ,  $b \in S_j$ -re  $ab = (a)\varphi_{i,ij}(b)\varphi_{j,ij}$ .

**12. Definíció.** [5] Egy reguláris félcsoportot Clifford félcsoportnak hívunk, ha  $S$  minden  $e$  idempotens elemére és bármely  $x \in S$ -re teljesül, hogy  $ex = xe$ .

**3. Tétel.** [5] Tetszőleges félcsoport esetén az alábbi három feltétel ekvivalens:

1.  $S$  részcsoportok félhálójára;
2.  $S$  részcsoportok erős félhálójára;
3.  $S$  Clifford félcsoport.

**2. Megjegyzés.** A 3.Tétel bizonyításában  $1. \Rightarrow 2.$ -höz elég a 11.Definícióban szereplő  $\varphi_{i,j}$  homomorfizmust megadni. Az  $S_j$  egységelemével való jobb szorzás homomorfizmus, és kielégíti a  $\varphi_{i,j}$ -re vonatkozó feltételeket.

**4. Tétel.** [Mantel] Egy  $n$  pontú egyszerű háromszögmentes  $G$  gráfnak legfeljebb  $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$  éle lehet. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $G$  a  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ -szel izomorf.

**13. Definíció.** [4] Valamely  $S$  félcsoportnak egy  $\mathbb{F}$  test feletti  $n$ -fokú reprezentációján  $S$ -nek az  $\mathbb{F}_{n \times n}$  algebra multiplikatív félcsoportjába való  $\gamma$  homomorfizmusát értjük. A  $\gamma$  reprezentációt *hűnek* nevezzük, ha *injektív*.

*Dolgozatom célja a következő definícióban megadott szempont szerinti vizsgálata a félcsoport reprezentációknak.*

**14. Definíció.** [1] Azt mondjuk, hogy egy nemnegatív egész  $k$  reprezentálható  $\mathbb{F}$  test felett egy pozitív egész  $n$  számmal, ha  $k \leq n$  és létezik egy  $n$ -elemű  $S$  félcsoport, és  $S$ -nek egy olyan  $\gamma$   $n$ -fokú hű reprezentációja  $\mathbb{F}$  felett, hogy  $\gamma(S)$  által az  $\mathbb{F}_{n \times n}$ -ben generált részalgebra dimenziója  $n - k$ .

**3. Megjegyzés.** A 14. Definíció jól definiált, ehhez csak azt kell meggondolnunk, hogy  $n$  darab mátrix által generált részalgebra dimenziója miért legfeljebb  $n - 0 = n$ . Ebben az esetben ez azért teljesül, mert a mátrixok félcsoportot alkotnak, s így az általuk generált részalgebra -mint vektortér- megegyezik az általuk generált vektortérrel.

**4. Megjegyzés.** A 14. Definícióval ekvivalens, hogy egy  $k$  nem-negatív egész reprezentálható  $n$ -nel egy  $\mathbb{F}$  test felett, ha  $\mathbb{F}_{n \times n}$  multiplikatív félcsoportjának van olyan  $n$  elemű részfélcsoportja, amely által generált részalgebra dimenziója  $n - k$ . Ugyanis, ha adott egy  $S$  félcsoport és egy  $\gamma$ , amelyek egy  $k$ -nak  $n$ -nel való reprezentációjához szükséges, mivel  $\gamma$  injektív, ezért  $S$  izomorf  $\gamma(S)$ -sel. Így  $\gamma(S)$  és az identikus leképezés is elég ahhoz, hogy lássuk  $k$  reprezentálható-e  $n$ -nel.

## 2. Általános eset

Ebben a fejezetben semmilyen megkötést nem teszünk a  $\gamma$  reprezentációra. A 14. Definícióban ismertetett reprezentálhatóság feltételét sikerült pontosan meghatározni. Az  $|\mathbb{F}|$  véges illetve végtelen eseteket először külön kezeltem. A konstrukciók ugyanazon alapötletet használták. Végül sikerült felírnom az eredményt egy olyan formában, melyből kiderül, nincs lényegi különbség a véges, illetve végtelen eset között.

A fejezet első lemmája (5.Lemma) miatt elég minden  $k$  nem negatív egészhez megtalálni azt a legkisebb  $n$  pozitív egészet, mellyel reprezentálható egy adott test felett, ahhoz, hogy  $k$  pozitív egészekkel történő reprezentálhatóságát leírjuk. Ezen lemma speciális reprezentációk esetén is megkönnyítheti a vizsgálatokat, feltéve, hogy igaz az adott reprezentációk osztályán belül, mint ahogy később látni fogjuk néhány esetben.

**5. Lemma.** *Ha egy  $k$  nem negatív egész szám reprezentálható egy  $\mathbb{F}$  test felett valamely  $n$  pozitív egészszel, akkor  $k$  reprezentálható  $\mathbb{F}$  felett minden  $\hat{n} > n$  egészszel is.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $k$  reprezentálható  $n$ -nel az  $\mathbb{F}$  test felett. Elég belátni, hogy ekkor  $k$  reprezentálható  $n + 1$ -gyel az  $\mathbb{F}$  test felett. A feltételből következően  $\mathbb{F}_{n \times n}$  multiplikatív félcsoportjának van egy  $n$  elemű részfélcsoportja  $S_0$ , hogy az  $S_0$  elemei (amelyek mátrixok) között a maximálisan lineárisan függetlenek száma  $n - k$ . Most konstruálunk az  $\mathbb{F}_{(n+1) \times (n+1)}$ -ben egy olyan részfélcsoportot, mely által generált részalgebra dimenziója  $n - k + 1$ . Ehhez felhasználjuk az  $S$  elemeit is. Képezzünk az  $S$  elemei segítségével olyan  $(n + 1) \times (n + 1)$ -es mátrixokat, hogy azokhoz mint  $n \times n$ -es mátrixokhoz  $n + 1$ -edik sorként és oszlopként csupa 0-át írunk. Az így keletkezett  $n$  mátrixhoz vegyük hozzá még  $I_{n+1}$ -et az  $n + 1$ -ed rendű egységmátrixot. Az így definiált mátrixok  $S_1$  halmazáról könnyen megmutatható, hogy részfélcsoportja  $\mathbb{F}_{(n+1) \times (n+1)}$  multiplikatív félcsoportjának. Világos, hogy az  $S_1 - \{I_{n+1}\}$  elemei között maximálisan  $n - k$  lineárisan független mátrix van. Az is nyilvánvaló, hogy  $I_{n+1}$  lineárisan független  $S_1$  összes többi elemétől. Ezért az  $S_1$  által generált részalgebra  $\mathbb{F}_{(n+1) \times (n+1)}$ -ben  $n - k + 1$  dimenziós. Tehát  $k$  reprezentálható  $n + 1$ -gyel is az  $\mathbb{F}$  felett.  $\square$

**6. Lemma.** *[1] A 0 reprezentálható minden pozitív egész  $n$ -nel bármely  $\mathbb{F}$  test felett.*

*Bizonyítás.* Először azt mutatjuk meg, hogy a 0 reprezentálható az 1-gyel. Ehhez tekintsük az  $1 \times 1$ -es egységmátrixot  $\mathbb{F}$  felett. Az 5.Lemma miatt készen vagyunk.  $\square$

**5. Megjegyzés.** *Így a 6.Lemma bizonyításában lényegében ugyanazt a konstrukciót kapjuk, mint ami az eredeti bizonyításban szerepel lásd [1]. Illetve azt is mondhatjuk, hogy minden monoid  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -független és minden  $n$  pozitív egészhez létezik olyan monoid, amely  $n$  elemű, és ebből következik az állítás. Az  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -függetlenség fogalmát később az Egyéb reprezentációk című fejezetben ismertetem.*

**7. Lemma.** *Az 1 reprezentálható minden pozitív egész  $n$ -nel bármely  $\mathbb{F}$  test felett.*

*Bizonyítás.* Az 1 reprezentálható az 1-gyel, ehhez tekintsük az  $1 \times 1$ -es nullmátrixot  $\mathbb{F}$  felett. Ismét miatt készen vagyunk az 5.Lemma.  $\square$

**8. Tétel.** *Ha  $\mathbb{F}$  végtelen számosságú test, akkor  $\mathbb{F}$  felett  $k$  nemnegatív egész pontosan akkor reprezentálható  $n$  pozitív egészszel, ha  $k = 1$  vagy  $n > k$ .*

*Bizonyítás.* A 6.Lemma és a 7.Lemma miatt a  $k = 0$  és  $k = 1$  eset kész. Nézzük a  $k \geq 2$  esetet. Először lássuk be, hogy ha  $n > k$  akkor  $k$  reprezentálható  $n$ -nel az  $\mathbb{F}$  felett. Az 5.Lemma miatt elég belátni, hogy  $k$  reprezentálható  $k + 1$ -gyel. Legyen  $S$  a  $k + 1$  elemű null félcsoport, a nulleleme legyen  $\hat{0}$ . Legyen  $f : S \rightarrow \mathbb{F}$  injektív leképezés, hogy  $f(\hat{0}) = 0$ . Ilyen  $f$  létezik, mivel  $\mathbb{F}$  elemszáma végtelen. Ekkor az  $S$  reprezentációja legyen a következő,  $a \in S$ -hez rendelje hozzá azt a mátrixot melynek az első sor utolsó elem  $f(a)$ , az összes többi eleme pedig 0. Világos, hogy ez egy hű reprezentációja  $S$ -nek, és az is látszik, hogy az általa generált részalgebra dimenziója 1. Már csak annyit kell észrevenni, hogy  $k \geq 2$  nem reprezentálható  $k$ -val  $\mathbb{F}$  felett. Ez pedig azért nem lehet, mert ekkor lenne  $\mathbb{F}_{n \times n}$ -nek egy legalább 2 elemű nulla-dimenziós részalgebrája, ami viszont nem igaz.  $\square$

**9. Lemma.** [1] *Ha egy  $k$  nemnegatív egész reprezentálható  $n$  pozitív egészszel egy  $\mathbb{F}$  véges test felett akkor  $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$ .*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $\mathbb{F}$  egy véges test és  $k$  nem-negatív egész reprezentálható  $n$  pozitív egészszel felette. Ekkor van egy  $n$  elemű  $S$  félcsoport és egy  $\gamma$   $n$ -fokú hű reprezentációja  $S$ -nek  $\mathbb{F}$  felett úgy, hogy a  $\gamma(S)$  által generált  $\mathbb{F}_{n \times n}$ -beli  $\mathcal{A}$  részalgebra dimenziója  $n - k$ . Ekkor

$$n = |S| \leq |\mathcal{A}| = |\mathbb{F}|^{n-k}.$$

Ezért

$$\log_{|\mathbb{F}|} n \leq n - k,$$

azaz

$$k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n.$$

$\square$

**10. Tétel.** *Legyen  $\mathbb{F}$  egy véges test. Valamely  $k$  nemnegatív egész reprezentálható egy pozitív  $n$  egészszel az  $\mathbb{F}$  felett pontosan akkor ha  $k = 0$  vagy  $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$ .*

*Bizonyítás.* A 9.Lemma miatt elég belátni, hogy a tételben szereplő reprezentációk léteznek. A  $k = 0$  eset a 6.Lemma miatt teljesül.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy  $k$  nemnegatív egész és  $n$  pozitív egész, hogy  $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$ . Tekintsük a következő konstrukciót, melyhez ismét az  $n$  elemű null-félcsoportot használjuk, mint a végtelen esetben is. Először a  $k \neq 0$  esetet nézzük. Válasszunk ki  $n$  darab különböző vektort az  $\mathbb{F}$  test feletti  $n - k$  dimenziós vektortérből úgy, hogy az egyik a nullvektor legyen, illetve a vektortér egyik bázisának elemeit is tartalmazza. Legyenek ezek  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ez  $k \neq 0$  esetén megtehető, mivel ennek

a vektortérnek  $|\mathbb{F}|^{n-k}$  eleme van, ami a  $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$  feltétel miatt legalább  $n$ . Illetve legfeljebb  $n$  vektort választottunk ki, ugyanis a bázisvektorokhoz a nullvektort hozzávéve összesen  $n - k + 1$  darab vektort kapunk, ahol  $k \geq 1$ . Az  $\mathbb{F}_{n \times n}$ -ből pedig válasszuk ki azokat, melyeknek az utolsó oszlopának első  $n - k$  eleméből alkotott vektor megegyezik valamely  $v_i$   $i = 1, \dots, n$  vektorral, és a többi eleme nulla. Ezen  $n$  különböző mátrix közt ott van a null-mátrix. Mivel a vektorok legfeljebb  $n - 1$  hosszúak voltak, minden mátrix utolsó sorának összes eleme nulla. Emellett, mivel mindegyik mátrixnak a nem nulla elemei mind az utolsó oszlopában vannak, így bármely kettő szorzata a nullmátrix. Így tehát megkaptuk az  $n$  elemű null-félcsoport egy hű mátrixreprezentációját  $\mathbb{F}$  felett. A reprezentációban szereplő mátrixok által generált részalgebra dimenziója a  $v_1, \dots, v_n$  vektorok választása miatt  $n - k$ . Tehát  $k$ -t sikerült reprezentálni  $n$ -nel  $\mathbb{F}$  felett.  $\square$

**6. Megjegyzés.** Az  $|\mathbb{F}|$  véges illetve végtelen esetben lényegében ugyanaz a konstrukció szerepel, csak a " $\log_{\infty}(n)$ " nincs értelmezve.

A 8.Tétel és a 10.Tétel alapján megfogalmazom a választ a [1].cikkben megfogalmazott Problem 4.-ban feltett kérdésre, így összefoglalva a választ az általános kérdésre.

**11. Tétel.** Adott egy  $n$  pozitív egész és egy  $\mathbb{F}$  test. Ekkor egy  $k$  nemnegatív egész akkor és csak akkor reprezentálható  $n$ -nel az  $\mathbb{F}$  felett, ha  $k \leq n - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|-} \lceil \log_h(n) \rceil$ .

*Bizonyítás.* Jelölje  $k_0(n, \mathbb{F})$  azt a legnagyobb nemnegatív egészt, mely reprezentálható  $n$  pozitív egészszel  $\mathbb{F}$  test felett. A 10.Tétel és a 8.Tétel alapján  $k_0(n, \mathbb{F})$  olyan tulajdonságú, hogy egy  $k$  nemnegatív egész akkor és csak akkor reprezentálható  $n$ -nel  $\mathbb{F}$  felett, ha  $k \leq k_0(n, \mathbb{F})$ , és az értékei a következők:

$$k_0(1, \mathbb{F}) = 1;$$

$$\text{ha } n \geq 2 \text{ és } |\mathbb{F}| = \infty \text{ akkor } k_0(n, \mathbb{F}) = n - 1;$$

$$\text{ha } n \geq 2 \text{ és } \mathbb{F} \text{ véges test akkor } k_0(n, \mathbb{F}) = n - \lceil \log_{|\mathbb{F}|} n \rceil.$$

Vegyük észre, hogy

$$k_0(1, \mathbb{F}) = 1 - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|-} \lceil \log_h(1) \rceil = 1 - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|-} \lceil 0 \rceil = 1.$$

Ha  $n \geq 2$ , akkor minden  $h \geq n$  esetén  $0 < \log_h(n) \leq 1$ ,  $n \geq 2$  és  $|\mathbb{F}| = \infty$  akkor

$$k_0(n, \mathbb{F}) = n - \lim_{h \rightarrow \infty} \lceil \log_h(n) \rceil = n - 1.$$

A  $\lceil \log_h(n) \rceil$  adott  $n$  pozitív egész esetén -mint  $h$  függvénye- a  $h > 1$  egész pontokban balról folytonos. Mivel  $\mathbb{F}$  test,  $|\mathbb{F}| \geq 2$ . Ha  $\mathbb{F}$  egy véges test, akkor

$$k_0(n, \mathbb{F}) = n - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|^-} \lceil \log_h(n) \rceil = n - \lceil \log_{|\mathbb{F}|} n \rceil.$$

□

### 3. A null-félcsoport reprezentációi

Általános esetben a konstrukciókban nagyrészt a null-félcsoport reprezentációit használjuk. Így felmerül a kérdés, hogy vajon minden  $k$  nemnegatív egész, mely reprezentálható egy  $\mathbb{F}$  test felett egy  $n$  pozitív egészszel, reprezentálható-e úgy is, hogy a reprezentációban szereplő  $S$  félcsoport a null-félcsoport. Ezért megvizsgáltam, mely esetekben lehetséges egy ilyen reprezentáció.

**15. Definíció.** Ha egy  $k$  nem-negatív egész reprezentálható egy  $\mathbb{F}$  test felett egy  $n$  pozitív egészszel úgy, hogy a reprezentációban szereplő  $S$  félcsoport a null-félcsoport, akkor azt mondjuk, hogy  $k$  null-representálható  $n$ -nel  $\mathbb{F}$  felett.

**12. Tétel.** Ha egy  $0 < k$  egész reprezentálható  $n$ -nel egy  $\mathbb{F}$  test felett, akkor null-representálható is.

*Bizonyítás.* Az  $|\mathbb{F}|$  véges esetben a 10.Tétel bizonyításából látszik, ugyanazt kell csinálni  $|\mathbb{F}| = \infty$  esetben is, csak az  $n, k$  egészekre vonatkozó feltételt kell kicserélni értelemszerűen. □

Ami viszont érdekesebb kérdés, hogy a  $0$  mely testek felett, mely pozitív egészekkel null-representálható. Egy olyan konstrukció vizsgálata következik, melyben a mátrixok minden eleme  $0$  vagy  $1$ . A  $0$  karakterisztikájú testek felett ez azt jelenti, hogy a mátrixszorzás közben nem adhatok össze két  $1$ -est mert ekkor az eredményül kapott mátrixnak lenne egy olyan eleme, ami nem  $0$ , se nem  $1$ . Viszont ha az előbbi feltételnek megfelelő konstrukciót találunk, akkor az minden test felett ugyanúgy fog működni.

**13. Lemma.** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es nemnegatív elemű mátrix, továbbá  $A^2 = \underline{0}_{n \times n}$ . Ekkor  $A$ -nak legfeljebb  $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$  nem nulla eleme lehet, és ez a korlát éles.

*Bizonyítás.* Ha az  $A^2$  mátrixszorzás közben két nem nulla elemet összeszorozunk, akkor a nemnegativitás miatt  $A^2$ -nek lesz pozitív eleme. Ebből következően ha  $\hat{A}$  egy nemnegatív elemű  $n \times n$ -es mátrix, hogy  $\hat{A}^2 = \underline{0}_{n \times n}$ , akkor az  $A$  is amit úgy

kapunk, hogy  $\hat{A}$  összes nemnulla elemét 1-re cseréljük. Elég az állítást belátni olyan mátrixokra melyek minden eleme 0 vagy 1. Tekintsük azt a  $G(V, E)$  irányított gráfot melynek  $A$  a szomszédossági mátrixa  $|V| = n$ . Mivel  $A$  minden eleme 0 vagy 1,  $G$ -ben nincs többszörös él. Továbbá  $G$ -ben nem lehet kettő hosszú irányított séta, mert  $A^2 = 0$ . Így  $G$ -ben nincs hurokél és ha  $(a, b) \in E(G) \Rightarrow (b, a) \notin E(G)$  tehát ha az élek irányítását elfelejtjük akkor egy egyszerű gráfot kapunk. Ez a gráf háromszögmentes, mivel egy háromszög élei nem irányíthatóak úgy, hogy ne legyen kettő hosszú séta benne. Tehát ennek a gráfnak aminek ugyanennyi éle van mint ahány 1-es eleme  $A$ -nak legfeljebb  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  éle van a 4.Tétel miatt.

Konstrukció  $A$ -ra, mely fölveszi ezt a maximumot: Tekintsük a 4.Tételben is szereplő páros gráfot mely színosztályai  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  illetve  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  méretűek. Ha az éleket az egyik színosztályból irányítjuk a másikba akkor nem lesz kettő hosszú séta, tehát ennek a gráfnak a szomszédossági mátrixa jó lesz.  $\square$

*Jelölés: A 13.Lemma bizonyításában szereplő  $n \times n$ -es mátrixok közül válasszuk azt melynek csúcshalmaza  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  és a  $\{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$  az egyik és  $\{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \dots, n\}$  a másik színosztály és az élek az előbbiből vannak irányítva az utóbbiba, ezt jelöljük ezután  $A_n$ -nel. Pl.  $n = 4$ -re és  $5$ -re:*

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**14. Tétel.** *Ha  $n \geq 5$  vagy  $n = 1$  akkor 0 null-reprezentálható  $n$ -nel bármely test felett.*

*Bizonyítás.* Ha  $n = 1$  akkor az egységmátrix jó reprezentáció lesz.

Következzen a konstrukció  $n \geq 5$ -re. Vegyük észre, ha  $B$  és  $C$  olyan mátrixok melyeket megkaphatunk úgy, hogy  $A_n$  tetszőleges számú nem-nulla elemét kinullázzuk akkor  $BC = 0_{n \times n}$ . Legyen  $H_n$  azon mátrixok halmaza melyek megkaphatóak úgy, hogy  $A_n$  pozitív elemeit egy kivétellel kinullázzuk. A  $H_n$  elemei nyilván lineárisan függetlenek. Válasszunk ki tetszőleges  $n - 1$  különböző elemet  $H_{n-1}$ -ből; ez akkor tehető meg ha  $n - 1 \leq |H_{n-1}| = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , azaz  $n \geq 5$ . Ezek a nullmátrixszal együtt egy  $n - 1$  fokú reprezentációját adják az  $n$ -elemű null-félcsoportnak. Az általuk generált részalgebra dimenziója nyilván  $n - 1$ . Ezeket a mátrixokat blokkdiagonálisan egészítsük ki  $n \times n$ -es mátrixokká úgy, hogy a hozzávett  $1 \times 1$ -es blokk

egyetlen eleme az 1. Így az  $n$ -elemű null-félcsoport egy reprezentációját kapjuk  $n \times n$ -es mátrixokkal. Ezen mátrixok nyilván lineárisan függetlenek. Tehát  $n \geq 5$  esetben is megkaptuk a 0 egy null-representációját tetszőleges test felett.  $\square$

*A szemléltetés kedvéért az alábbiakban közöljük a 14. Tételben szereplő konstrukció mátrixai  $n = 5$ -re:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**7. Megjegyzés.** A 13. Lemmából következik, hogy az előző konstrukcióhoz hasonlóval nem valósítható meg a 0-nak 2, 3, 4-gyel való nullrepresentációja. Kérdés, hogy mely testek felett lehet null-representálni a 0-t 2, 3, 4 egyikével.

**15. Tétel.** A 0 nem null-representálható 2-vel az  $\mathbb{F}_2$  felett.

*Bizonyítás.* A reprezentációban nem szerepelhet a  $\underline{0}_{2 \times 2}$ , mert akkor nem a 0-nak, hanem az 1-nek egy reprezentációját kapjuk. A kételemű null-félcsoportot a nem-nulleleme generálja. Ezért elég belátni, hogy a 16 közül egy mátrix sem generál olyan kételemű null-félcsoportot, melyben nem szerepel a  $\underline{0}_{2 \times 2}$ .

A következő mátrixok négyzete a  $\underline{0}_{2 \times 2}$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A következő hét mátrix idempotens:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A következő öt mátrix generátumában pedig szerepel az  $I_{2 \times 2}$ , de egy legalább két-elemű null-félcsoportban nincs egységelem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát nincs olyan mátrix, ami megfelelő generátorelem lenne egy ilyen reprezentáció félcsoportjának.  $\square$

**1. Következmény.** *Nem igaz, hogy ha egy  $k$  nemnegatív egész reprezentálható valamely  $n$  pozitív egészszel egy  $\mathbb{F}$  test felett, akkor null-reprezentálható is.*

*A következő tétel segíthet a 0-nak  $n = 2, 3, 4$ -gyel való null-reprezentálhatóságának eldöntésében, mivel a null-félcsoport nil-félcsoport.*

**16. Tétel.** *Ha adott egy nil-félcsoport egy nemtriviális, test feletti mátrix reprezentációja, akkor a reprezentációban szereplő mátrixok determinánsa 0.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy nil-félcsoport és  $\gamma$  egy nem-triviális reprezentációja  $S$ -nek valamely  $\mathbb{F}$  test feletti mátrixokkal. Az  $S$  nullelemének  $\gamma$  szerinti képe legyen  $\hat{0}$ . Ekkor  $\det(\hat{0}) = \det(\hat{0}^2) = \det(\hat{0})^2$ , tehát  $\det(\hat{0})$  vagy 0 vagy 1. Indirekt tegyük fel, hogy  $\det(\hat{0}) = 1$ . Mivel  $\gamma$  nemtriviális, ezért létezik  $A \in \gamma(S)$ , hogy  $A \neq \hat{0}$ . Mivel  $S$  nil-félcsoport,  $\gamma$  pedig egy homomorfizmus, ezért létezik  $i \geq 2$  egész, hogy  $A^i = \hat{0}$ , de  $A^{i-1} \neq \hat{0}$ . Mivel

$$\det(A^{i-1})^2 = \det(A^{2i-2}) = \det(\hat{0}) = 1,$$

ezért  $A^{i-1}$  determinánsa nem 0. Ez azt jelenti, hogy  $A$  invertálható. Ugyanakkor

$$\hat{0} = (A^{i-1})^{-1} A^{i-1} \hat{0} = (A^{i-1})^{-1} \hat{0} = (A^{i-1})^{-1} (A^{i-1})^2 = A^{i-1},$$

ami ellentmond  $A^{i-1} \neq \hat{0}$ -nak. Tehát  $\det(\hat{0}) = 0$ . A nil-félcsoport szerkezetéből adódóan, ha adott egy  $B \in \gamma(S)$ , akkor létezik  $n$  pozitív egész, hogy  $\det(B^n) = 0$ . Mivel

$$(\det B)^n = \det(B^n) = \det(\hat{0}) = 0,$$

ezért  $\det(B) = 0$ . Tehát az állítás igaz.  $\square$

## 4. Diagonális mátrixok

*Diagonális mátrixok szorzata is diagonális. Innen jön az ötlet, hogy vizsgáljuk meg a diagonális mátrixokból alkotható félcsoportokat. A fejezet első felében konstrukciókat adok meg. Majd ezek alapján parciális műveleteket definiálok reprezentációk között, hogy azok segítségével viszonylag jó konstrukciókat adjak meg egy konkrét test  $\mathbb{F}_5$  felett az  $0, 1, \dots, 20$  számok reprezentációjára. Utána pedig egy teljesen más, sokkal általánosabb megközelítése következik a témának, mely ugyan nem vezetett még konkrét reprezentációhoz de hasznos lehet a további vizsgálatok szempontjából.*

**16. Definíció.** *Ha  $k$  nemnegatív egész reprezentálható egy  $n$  pozitív egészszel valamely  $\mathbb{F}$  test felett úgy, hogy a reprezentációban szereplő mátrixok diagonálisak, akkor azt mondjuk, hogy  $k$  diagonálisan reprezentálható  $n$ -nel az  $\mathbb{F}$  test felett.*

**17. Definíció.** *Legyen  $k$  nem negatív egész mely reprezentálható valamely  $n$  pozitív egészszel valamely  $\mathbb{F}$  test felett. Ha  $k$ -nak van olyan reprezentációja  $n$ -nel az  $\mathbb{F}$  felett, amiben  $[nem]$  szerepel a nullmátrix, akkor azt mondjuk  $k$ -nak  $n$   $[nem-]$ nullelemes reprezentációja az  $\mathbb{F}$  felett.*

**8. Megjegyzés.** *Egy adott  $k$ -nak valamely  $\mathbb{F}$  test felett  $n$  lehet egyszerre nullelemes és nem nullelemes reprezentációja is.*

**18. Definíció.** *Ha egy félcsoport test feletti mátrixokkal való reprezentációjára teljesül, hogy létezik egy  $j$  pozitív egész, hogy a reprezentációban szereplő összes mátrix  $j$ -edik sora és  $j$ -edik oszlopa csupa 0 kivéve a  $j$ -edik sor  $j$ -edik elemét, ami vagy minden mátrixban 1 vagy minden mátrixban 0, akkor azt mondjuk, a reprezentációnak van egy szabad koordinátája a  $j, j$  helyen.*

*Vizsgáljuk meg, hogy az 5.Lemma mely esetekben teljesül az előzőek közül.*

**17. Lemma.** *Ha egy  $\mathbb{F}$  test felett egy  $k$ -nak az  $n_0$  egy nullelemes  $[nem-nullelemes]$  reprezentációja, akkor bármely  $n > n_0$  is ilyen reprezentáció. Ha  $k$ -nak  $n_0$  diagonális reprezentációja akkor  $n > n_0$  is az. Mindkét esetben  $n > n_0$ -lal való reprezentációnak van szabad koordinátája.*

*Bizonyítás.* Az 5.Lemma konstrukciója megfelelő. Ha a kezdeti  $n_0$ -lal való reprezentáció nem-nullelemes és van szabad koordinátája, akkor a szabad koordinátát helyén minden mátrixban 1-re átírva egy szabad koordinátát kapunk. Ha nullelemes a reprezentáció, és van szabad koordinátája, akkor módosítani kell a konstrukción, hogy megőrződjön a szabad koordináta. Ebben az esetben minden mátrixhoz blokkdiagonálisan egy 1-est csatolok, és az új mátrix a nullmátrix lesz. Ezt az 5.Lemmához hasonlóan végiggondolva megkapjuk az állítást.  $\square$

**Állítás** *Ha egy  $\mathbb{F}$  test felett  $k$ -nak  $n$  egy nem-nullelemes reprezentációja, akkor  $k+1$ -nek  $n+1$  egy nullelemes reprezentációja  $\mathbb{F}$  felett.*

*Bizonyítás.* Minden korábbi mátrixhoz hozzáveszünk egy csupa nulla sort és oszlopot, ez legyen az utolsó sor és oszlop. Emellett az így kapott  $n$  darab  $(n+1) \times (n+1)$  mátrixhoz hozzáveszem a nullmátrixot, amiből adódik az állítás.  $\square$

**Állítás** *Ha egy  $\mathbb{F}$  test felett  $n$  a  $k$  olyan nullelemes reprezentációja, hogy van szabad koordinátája, akkor ugyanezen test felett  $k-1$ -nek  $n$  egy nem-nullelemes reprezentációja úgy, hogy van szabad koordinátája.*

*Bizonyítás.* Mivel a reprezentáció nullelemes, a szabad koordináta értéke 0, ha ezt minden mátrixban 1-re változtatom a reprezentáció nyilván jó marad, csak a félcsoport nulleleme nem lesz már lineárisan független a többi mátrixtól.  $\square$

**18. Lemma.** *Ha  $S$  az  $\mathbb{F}$  test multiplikatív struktúrájának egy részfélcsoportja, akkor  $|S| - 1$  reprezentálható  $|S|$ -sel az  $\mathbb{F}$  felett. Ha  $S$  nullelemes, akkor a reprezentáció nullelemes reprezentáció, ha nem, akkor nem-nullelemes reprezentáció. Ez egy diagonális reprezentáció, melynek van szabad koordinátája.*

*Bizonyítás.* Legyen  $n := |S|$ . Tekintsük azokat az  $n \times n$ -es  $\mathbb{F}$  feletti mátrixokat, melyek első sorának első elemei rendre az  $S$  elemei, a többi eleme pedig 0. Ezen mátrixok nyilván félcsoportot alkotnak, és egy 1-dimenziós algebrát generálnak.  $\square$

**9. Megjegyzés.** *Most olyan konstrukciók következnek, melyek egy vagy két szám reprezentálhatóságából egy újabb szám reprezentálhatóságára következtetnek. Ebben a fejezetben ezen konstrukciókra az is teljesül, hogy ha az adott reprezentációk diagonálisak, akkor az eredményül kapott is az lesz.*

**19. Tétel.** *Ha  $k_1$  és  $k_2$  nemnegatív egészek, és az  $\mathbb{F}$  test felett reprezentálhatók  $n_1 \neq 1$ -gyel illetve  $n_2 \neq 1$ -gyel. Akkor ugyanezen test felett  $n_1 n_2 - n_1 - n_2 + k_1 + k_2$  reprezentálható  $n_1 n_2$ -vel.*

*Bizonyítás.* A feltételek miatt ekkor létezik  $S_i$  mátrixfélcsoport, melynek elemszáma  $n_i$  és az általa generált részalgebra dimenziója  $n_i - k_i$  ahol  $i = 1, 2$ . Ehhez  $S_1 \times S_2$ -t fogjuk reprezentálni  $(n_1 n_2) \times (n_1 n_2)$  méretű mátrixokkal. Minden  $S_1 \times S_2$ -ben szereplő elemhez ami két mátrixokból álló rendezett pár, rendeljük hozzá azt az blokkdiagonális mátrixot melynek első blokkja a rendezett pár első eleme ami  $n_1 \times n_1$  méretű, a második blokkja a pár második eleme ami egy  $n_2 \times n_2$  méretű mátrix a harmadik és egyben utolsó blokkja pedig a  $(n_1 n_2 - n_1 - n_2) \times (n_1 n_2 - n_1 -$

$n_2$ ) méretű nullmátrix. Ez megtehető, mivel  $n_1, n_2 \neq 1$ -ből következően  $n_1 n_2 \geq n_1 + n_2$ . Ez a hozzárendelés nyilván egy injektív homomorfizmus  $S_1 \times S_2$ -ből az  $\mathbb{F}$  feletti  $(n_1 n_2) \times (n_1 n_2)$ -es mátrixok multiplikatív félcsoportjába. Ezen mátrixok által generált részalgebra nyilván izomorf az  $S_1$  illetve  $S_2$  által generált részalgebrák direkt szorzatával. Így a dimenziója ezen reprezentáció generátumának megegyezik az  $S_1$  és  $S_2$  által generált részalgebrák dimenzióinak összegével. Tehát  $n_1 n_2 - ((n_1 - k_1) + (n_2 - k_2))$  reprezentálható  $n_1 n_2$ -vel.  $\square$

**10. Megjegyzés.** A 19. Tételben ha  $k_1$  és  $k_2$  egy nullelemes reprezentációjából indulunk ki, akkor a kapott reprezentációja  $n_1 n_2 - n_1 - n_2 + k_1 + k_2$ -nek is nullelemes, ha legalább az egyik reprezentáció nem-nullelemes, akkor a kapott reprezentáció is nem-nullelemes. Az  $n_1 = n_2 = 2$  esetet kivéve a kapott reprezentációnak lesz egy szabad koordinátája, illetve ha kezdetben az egyik reprezentációnak volt, abból is következik, hogy lesz szabad koordináta.

**20. Tétel.** Legyen  $k_1$  és  $k_2$  nemnegatív egészek és az  $\mathbb{F}$  test felett  $k_1$  reprezentálható  $n_1$ -el és  $k_2$  nem-nullelemesen reprezentálható  $n_2$ -vel. Akkor ugyanezen test felett  $k_1 + k_2$  vagy  $k_1 + k_2 + 1$  reprezentálható  $n_1 + n_2$ -vel.

*Bizonyítás.* Tegyük fel  $n_1 n_2, k_1, k_2$  számok és  $\mathbb{F}$  test a tétel feltételeinek megfelelőek. Ekkor létezik  $S_i$  mátrixfélcsoport melynek elemszáma  $n_i$  és az általa generált részalgebra dimenziója  $n_i - k_i$  ahol  $i = 1, 2$  és  $S_2$ -ben nem szerepel a nullmátrix, és  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Most az  $S_1$ -nek az  $S_2^0$ -val való egyik ideálbővítése fog a reprezentációban szerepelni ezt jelölje  $S$ . Ekkor  $S = S_1 \cup S_2$  mint halmazok. Legyen  $\gamma$  egy  $S$ -ből az  $\mathbb{F}_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ -be menő leképezés. Úgy, hogy  $\gamma$  az  $A \in S_1$ -hez olyan blokkdiagonális mátrixot rendel, melyek első blokkja megegyezik  $A$ -val, a másik blokkja pedig egy  $n_2 \times n_2$ -es nullmátrix. Illetve  $\gamma$  a  $B \in S_2$ -höz pedig azt a blokkdiagonális mátrixot rendeli, melynek első blokkja egy  $n_1 \times n_1$ -es egységmátrix, a másik blokkja pedig  $B$ . A  $\gamma$  injektív, mert  $S_2$ -ban nem szerepel a nullmátrix és ekkor  $\gamma(S_1)$  és  $\gamma(S_2)$  diszjunktak. Lássuk be, hogy  $\gamma$  homomorfizmus. Bármely  $a, b \in S_1$ -re és  $c, d \in S_2$ -re:  $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$ ,  $\gamma(c)\gamma(d) = \gamma(cd)$  és  $\gamma(a)\gamma(c) = \gamma(a)$ . Már csak  $\gamma(S)$  által generált részalgebra dimenzióját kell megvizsgálni. A  $\gamma(S_1)$  és  $\gamma(S_2)$  által generált alterek metszete vagy üres vagy az  $E$  mátrix által generált 1 dimenziós részalgebra, ahol  $E$  az  $n_1 \times n_1$ -es egységmátrixból és az  $n_2 \times n_2$ -es nullmátrixból képzett blokkdiagonális mátrix. Mivel  $S$  zárt a szorzásra, az  $S$  generátumában szereplő mátrixok megkaphatók az  $S$  elemeinek lineáris kombinációjaként. Ezért az  $S$  által generált részalgebra -mint vektortér megegyezik- az  $S$  által generált vektortérrel. Így az  $S$  által generált részalgebra dimenziója  $n_1 + n_2 - k_1 - k_2 - 1$  vagy  $n_1 + n_2 - k_1 - k_2$

attól függően, hogy  $\gamma(S_1)$  és  $\gamma(S_2)$  generátumában egyszerre szerepel  $E$  vagy sem.  $\square$

**11. Megjegyzés.** Ha a 20. Tételben  $k_2$  reprezentációjának van szabad koordinátája, akkor  $k_1 + k_2$ -nek  $n_1 + n_2$  egy reprezentációja, ha  $k_1$  reprezentációja [nem-]nullelemes, akkor  $k_1 + k_2$  is [nem-]nullelemes lesz. Ugyanis a szabad koordinátát átírva 1-re (ha nem 1) a  $\gamma(S_2)$  generátumában nem szerepelhet  $E$ , mert az olyan lineáris kombinációknál, ahol a szabad koordináta helyén 0 van, akkor az első blokk összes eleme is 0 lesz. Továbbá, ha az egész  $\gamma(S)$ -ben a szabad koordináta helyére 1-et írunk, akkor  $k_1 + k_2$ -nek  $n_1 + n_2$ -vel egy olyan nem-nullelemes reprezentációját kapjuk, melynek van szabad koordinátája.

**21. Tétel.** Ha  $k_1$ -nek van egy nullelemes-representációja  $n_1$ -gyel az  $\mathbb{F}$  test felett, és  $k_2$ -nek egy nem-nullelemes reprezentációja  $n_2$ -vel, akkor  $k_1 + k_2$  nullelemesen reprezentálható  $\mathbb{F}$  felett  $n_1 + n_2$ -vel.

*Bizonyítás.* Legyen  $S_1$  egy olyan mátrixfélcsoport, mellyel  $k_1$ -et lehet nullelemesen reprezentálni,  $n_1$  és  $S_2$  olyan, mellyel  $k_2$ -t lehet nem-nullelemesen reprezentálni  $n_2$ -vel. Az  $S_i$  elemeihez rendeljük hozzá rendezett párokat úgy, hogy  $a \in S_i$ -hez az  $(a, i - 1)$  párt rendeljük. Ezen rendezett párok halmazát jelölje  $S'_i$ . Az  $S'_i$ -n értelmezzünk egy művelet koordinátáinként: első koordinátában legyen a mátrixszorzás, a másodikban pedig, mint két szám szorzata. Így  $S_i$  izomorf  $S'_i$ -vel, és  $S'_1$  és  $S'_2$  diszjunktak. Legyen  $S := S'_1 \cup S'_2$  és  $|S| = n_1 + n_2$ . Legyen  $\gamma$  a következő leképezés  $S$ -ből  $\mathbb{F}_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ -be: ha  $a \in S$  második eleme 0, akkor  $\gamma(a)$  az a két blokkból álló blokkdiagonális mátrix, melynek első blokkja az  $a$  első eleme, második pedig az  $n_2 \times n_2$ -es nullmátrix; ha  $b \in S$  második eleme 1, akkor  $\gamma(b)$  az a két blokkból álló blokkdiagonális mátrix, melynek első blokkja az  $n_1 \times n_1$ -es nullmátrix, második blokkja pedig a  $b$  első eleme. Mivel  $S_1$ -nek eleme a nullmátrix,  $S_2$ -nek pedig nem, ezért  $\gamma$  injektív és  $|\gamma(S)| = |S| = n_1 + n_2$ , továbbá  $\gamma(S)$ -nek eleme a nullmátrix. Ekkor  $\gamma(S)$  a mátrixszorzásra zárt. Nyilván bármely  $a, b \in S'_1$  és  $c, d \in S'_2$ -re  $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$ ,  $\gamma(c)\gamma(d) = \gamma(cd)$  és  $\gamma(a)\gamma(c) = \underline{0}_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ . Az  $S_i$  által generált részalgebra - mint vektortér- izomorf a  $\gamma(S'_i)$  által generálttal, tehát ezek dimenziója megegyezik. A  $\gamma(S'_1)$  által generált részalgebra metszete a  $\gamma(S'_2)$  által generálttal a nullmátrix. Ebből következően  $\gamma(S)$  által generált részalgebra dimenziója az  $S_1$  és  $S_2$  által generált részalgebrák dimenzióinak összege azaz  $(n_1 - k_1) + (n_2 - k_2)$ . Tehát  $\gamma(S)$  a  $k_1 + k_2$ -nek  $n_1 + n_2$ -vel való nullelemes reprezentációja.  $\square$

**12. Megjegyzés.** Ha a 21. Tételben  $k_1$  vagy  $k_2$  reprezentációjának van szabad koordinátája, akkor ha a reprezentációban a szabad koordinátának megfelelő helyen az

összes mátrix ezen elemét átírjuk a szabad koordinátával megegyezőre, akkor  $k_1 + k_2$  nem-nullelemes reprezentációját kapjuk, melynek van szabad koordinátája.

**22. Tétel.** Ha  $k_1$  és  $k_2$  nemnegatív egészeknek  $n_1$  és  $n_2$  nullelemes reprezentációja  $\mathbb{F}$  felett úgy, hogy van egy  $1 \leq n_1$  egész, hogy a  $k_1$  reprezentációjának van szabad koordinátája, akkor  $k_1 + k_2 - 1$  nullelemes-reprezentálható  $n_1 + n_2 - 1$ -el.

*Bizonyítás.* Legyen az  $S_1$  és az  $S_2$  a feltételeknek megfelelő mátrixfélcsoportok. Tekintsük a 21. Tétel bizonyításában szereplő  $S'_i$  és  $\gamma$  konstrukcióját. Ebben az esetben  $\gamma$  nem injektív, a nullmátrixnak két ősképe van, de a többi mátrixnak egy. A szabad koordináta helye legyen  $j$ ,  $j$  ekkor az értéke 0, mivel nullelemes a reprezentáció. Töröljük  $\gamma(S)$  minden elemének  $j$ -edik sorát és  $j$ -edik oszlopát. Így, mivel ezekben minden elem 0 volt, az új  $(n_1 + n_2 - 1) \times (n_1 + n_2 - 1)$ -es mátrixaink félcsoportja izomorf  $\gamma(S)$ -el mint félcsoport és az általuk generált részalgebrák is mint algebrák. Így egy  $n_1 + n_2 - 1$  elemű mátrixfélcsoportot kaptunk melyek mérete  $(n_1 + n_2 - 1) \times (n_1 + n_2 - 1)$ . Ugyanúgy mint a 21. Tétel bizonyításánál a  $\gamma(S)$  generátumának dimenziója itt is  $(n_1 - k_1) + (n_2 - k_2)$ . Tehát  $k_1 + k_2 - 1$  nullelemes reprezentálható  $n_1 + n_2 - 1$ -el.  $\square$

**13. Megjegyzés.** Ha a 22. Tételben azt is feltesszük, hogy  $k_2$  reprezentációjának is van szabad koordinátája, akkor a  $k_1 + k_2$  reprezentációjának is van.

**23. Tétel.** Egy  $k$  nemnegatív egésznek  $n$  egy nullelemes reprezentációja  $F$  test felett. Továbbá  $S_1, S_2, \dots, S_h$  az  $\mathbb{F}$  multiplikatív struktúrájának véges részfélcsoportjai amik nem feltétlenül különbözöek, ahol  $h$  pozitív egész. Elemszámaik pedig rendre  $k_1, k_2, \dots, k_h \neq 1$ . Ekkor a következők teljesülnek:

1. Ha  $S_1, S_2, \dots, S_h$  mindegyike nullelemes akkor  $k - h - 1 + \prod_{i=1}^h k_i$ -nek az  $n - 1 + \prod_{i=1}^h k_i$  egy nullelemes reprezentációja.
2. Ha  $S_1, S_2, \dots, S_h$  legalább egyike nem nullelemes akkor  $k + h - \prod_{i=1}^h k_i$ -nak az  $n + \prod_{i=1}^h k_i$  egy nullelemes reprezentációja.

*Bizonyítás.* A 21. Tétel miatt a (2) esetben elég belátni, hogy  $-h + \prod_{i=1}^h k_i$ -nak van egy nem-nullelemes-reprezentációja  $\prod_{i=1}^h k_i$ -vel. Az (1) esetben pedig a 22. Tétel miatt elég belátni, hogy  $-h - 1 + \prod_{i=1}^h k_i$ -nak van egy nullelemes reprezentációja  $(\prod_{i=1}^h k_i) - 1$ -el melynek van szabad koordinátája. Mindkét esetben tekintsük a 18. Lemma által biztosított reprezentációkat az  $S_i$   $i = 1, \dots, h$  félcsoportokhoz, majd ezekre a reprezentációkra egymás után alkalmazzuk a 19. Tételt. Így a  $\prod_{i=1}^h k_i$ -nak egy reprezentációját kapjuk

$$\left(\prod_{i=1}^h k_i\right) - \left(\sum_{i=1}^h n_i\right) + \left(\sum_{i=1}^h (n_i - 1)\right) = \left(\prod_{i=1}^h k_i\right) - h$$

-val. A (2) esetben ez egy nem-nullelemes reprezentáció, tehát készen vagyunk. Az (1) esetben ez egy nullelemes reprezentáció, de a 18.Lemma konstrukciójából adódóan -mivel  $|S_i| \neq 1$  minden  $i \in \{1, \dots, h\}$ -ra- a reprezentációnak van szabad koordinátája. Tehát ebben az esetben is igaz az állítás.  $\square$

**14. Megjegyzés.** *Legyen  $\mathbb{F}$  egy  $p$  prímkarakterisztikájú test. A véges Abel-csoportok alaptétele miatt ha  $d$  a  $p-1$  osztója, akkor van  $d$  elemű részcsoportja  $\mathbb{F}$  multiplikatív struktúrájának és  $d+1$  elemű részfélcsoportja, mely egy nullelemes csoport.*

*A fejezet korábbi eredményeinek szemléltetésére vezessük be a következő jelölést: adott egy  $F$  test, mely legyen most fix. Ha ezen test felett  $k$  reprezentálható [nem-nullelemesen  $n$ -nel, akkor jelöljük ezt a következő módon  $[(n, d)]$   $(n, d)_0$  módon, ahol  $d = n - k$ . Ha adott két reprezentáció az előbbiek szerint akkor a 19.Tétel rájuk való alkalmazását jelöljük egymás mellé írással, a fejezetben szereplő egyéb konstrukciókat pedig, melyek ideálbővítést használnak, jelöljük  $+$ -szal. Az eredményül kapott reprezentációt  $=$  után írjuk. Így parciális műveleteket definiáltam a reprezentációk között. Feltételezem, hogy minden kiindulási reprezentációimnak  $(n, d)$  van szabad koordinátája és  $n \neq 1$ . Most ezek alapján felírom azon műveleti szabályokat, melyek olyan műveletről szólnak mely megőrzi a szabad koordinátákat.*

$$(n_1, d_1)(n_2, d_2) = (n_1 n_2, d_1 + d_2)$$

$$(n_1, d_1)_0(n_2, d_2) = (n_1 n_2, d_1 + d_2)$$

$$(n_1, d_1)_0(n_2, d_2)_0 = (n_1 n_2, d_1 + d_2)_0$$

$$(n_1, d_1)_0 + (n_2, d_2) = (n_1 + n_2, d_1 + d_2) = (n_1 + n_2, d_1 + d_2)_0$$

$$(n_1, d_1) + (n_2, d_2) = (n_1 + n_2, d_1 + d_2)$$

$$(n_1, d_1)_0 + (n_2, d_2)_0 = (n_1 + n_2 - 1, d_1 + d_2)_0$$

*Ezek alapján kiszámoltam, melyek a legkisebb  $n$  pozitív egészek, melyekkel diagonális-reprezentálhatóak a  $k = 0, \dots, 20$  számok a  $\mathbb{F}_5$  test fölött, ezen konstrukció alapján. Az  $5-1$  osztói:  $1, 2, 4$ . Így  $\mathbb{F}_5$  részfélcsoportjaiból a 18.Lemma által kapott reprezentációk:  $(2, 1), (2, 1)_0, (3, 1)_0, (4, 1), (5, 1)_0$ . A számolást úgy végeztem, hogy minden  $n$ -re megkerestem azt a legkisebb  $d$ -t és  $d_0$ -t amelyre  $(n, d)$  és  $(n, d_0)_0$ . Így már tudtam következtetni arra, mely  $n$ -ekkel nem lehet reprezentálni egy  $k$ -t. Összehasonlításként 9.Lemma által biztosított korlátot is odaírtam, azaz minden  $k$  esetén a legkisebb  $n$ -et, amire  $k \leq n - \log_5 n$ . Jelölések:*

$k$ : reprezentálni kívánt nem negatív egész,  
 $n_1$ : legkisebb pozitív egész mellyel ez egy nem-nullelemes reprezentáció,  
 $n_0$ : legkisebb pozitív egész melyre ez egy nullelemes reprezentáció,  
 $N_1$ :  $k$  egy reprezentációja  $n_1$ -gyel,  
 $N_0$ :  $k$  egy reprezentációja  $n_0$ -lal,  
 $n$ :  $\min n_1, n_0$ ,  
 $\log$ : a 9.Lemma által biztosított korlát.

| $k$ | $n_1$ | $n_0$ | $N_1$                                              | $N_2$                                                         | $n$ | $\log$ |
|-----|-------|-------|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----|--------|
| 0   | 1     | 1     | (1, 1)                                             | (1, 1) <sub>0</sub>                                           | 1   | 1      |
| 1   | 2     | 2     | (2, 1)                                             | (2, 1) <sub>0</sub>                                           | 2   | 1      |
| 2   | 4     | 3     | (2, 1) + (2, 1)                                    | (3, 1) <sub>0</sub>                                           | 3   | 3      |
| 3   | 4     | 5     | (2, 1)(3, 1) <sub>0</sub>                          | (5, 1) <sub>0</sub>                                           | 4   | 4      |
| 4   | 6     | 5     | (2, 1)(3, 1) <sub>0</sub>                          | (5, 1) <sub>0</sub>                                           | 5   | 5      |
| 5   | 7     | 7     | (3, 1) <sub>0</sub> + (4, 1)                       | (3, 1) <sub>0</sub> + (4, 1)                                  | 7   | 7      |
| 6   | 8     | 9     | (2, 1)(4, 1)                                       | (5, 1) <sub>0</sub> + (5, 1) <sub>0</sub>                     | 8   | 8      |
| 7   | 9     | 9     | (4, 1) + (5, 1) <sub>0</sub>                       | (4, 1) + (5, 1) <sub>0</sub>                                  | 9   | 9      |
| 8   | 10    | 10    | (2, 1)(5, 1) <sub>0</sub>                          | (2, 1) <sub>0</sub> (5, 1) <sub>0</sub>                       | 10  | 10     |
| 9   | 12    | 12    | (2, 1)(2, 1)(3, 1) <sub>0</sub>                    | (2, 1) <sub>0</sub> (2, 1) <sub>0</sub> (3, 1) <sub>0</sub>   | 12  | 11     |
| 10  | 12    | 13    | (3, 1) <sub>0</sub> (4, 1)                         | (4, 1) + (4, 1) + (5, 1) <sub>0</sub>                         | 12  | 12     |
| 11  | 14    | 14    | (4, 1) + (5, 1) <sub>0</sub> + (5, 1) <sub>0</sub> | (4, 1) + (5, 1) <sub>0</sub> + (5, 1) <sub>0</sub>            | 14  | 13     |
| 12  | 15    | 15    | (2, 1)(5, 1) <sub>0</sub> + (5, 1) <sub>0</sub>    | (2, 1)(5, 1) <sub>0</sub> + (5, 1) <sub>0</sub>               | 15  | 14     |
| 13  | 16    | 15    | (3, 1) <sub>0</sub> (4, 1) + (4, 1)                | (3, 1) <sub>0</sub> (5, 1) <sub>0</sub>                       | 15  | 15     |
| 14  | 16    | 17    | (4, 1)(4, 1)                                       | (3, 1) <sub>0</sub> (5, 1) <sub>0</sub> + (2, 1) <sub>0</sub> | 16  | 16     |
| 15  | 18    | 18    | (2, 1)(3, 1) <sub>0</sub> (3, 1) <sub>0</sub>      | (2, 1)(3, 1) <sub>0</sub> (3, 1) <sub>0</sub>                 | 18  | 17     |
| 16  | 19    | 19    | (3, 1) <sub>0</sub> (5, 1) <sub>0</sub> + (4, 1)   | (3, 1) <sub>0</sub> (5, 1) <sub>0</sub> + (4, 1)              | 19  | 18     |
| 17  | 20    | 20    | (2, 1)(2, 1)(5, 1) <sub>0</sub>                    | (2, 1) <sub>0</sub> (2, 1) <sub>0</sub> (5, 1) <sub>0</sub>   | 20  | 19     |
| 18  | 20    | 21    | (4, 1)(5, 1) <sub>0</sub>                          | (3, 1) <sub>0</sub> + (4, 1)(3, 1) <sub>0</sub>               | 20  | 20     |
| 19  | 22    | 22    | (4, 1)(5, 1) <sub>0</sub> + (2, 1) <sub>0</sub>    | (4, 1)(5, 1) <sub>0</sub> + (2, 1) <sub>0</sub>               | 22  | 21     |
| 20  | 23    | 23    | (4, 1)(5, 1) <sub>0</sub> + (3, 1) <sub>0</sub>    | (4, 1)(5, 1) <sub>0</sub> + (3, 1) <sub>0</sub>               | 23  | 22     |

A táblázat utolsó két oszlopából látható, hogy ezen kis számok esetén elég jó konstrukciókat kapunk, ha nem is mindenhol tudjuk, hogy ez a legjobb de legfeljebb 1 az eltérés. Bár ez nem jelenti azt, hogy más testek esetén esetén vagy jóval nagyobb számokra is igaz lenne ez. Annyit viszont tudunk, hogy véges testek esetén a 19.Tétel és a 18.Lemma miatt van tetszőleges egésznél nagyobb  $k$  nemnegatív egész, hogy a konstrukció által biztosított  $n$  pozitív egész eléri a 9.Lemmából következő korlátot.

*Ugyanis egy  $d$  dimenziós vektortér beágyazható egy  $n \times n$ -es nulla mátrix ( $n \geq d$ ) főátlójába, ez pont annak felel meg, mintha a vektortér elemei közt értelmeznénk a koordinátánkénti szorzást műveletként.*

*A fejezet eddigi részében látott konstrukciókról nem tudjuk még mennyire járnak közel a fejezet elején kimondatlanul kitűzött célunkhoz, hogy határozzuk meg minden  $k$  nem-negatív egészhez és  $\mathbb{F}$  testhez az összes pozitív egész  $n$ -et, mellyel  $k$  diagonálisan reprezentálható az  $\mathbb{F}$  felett. Sajnos egy konkrét test esetén is nehezen átlátható az általuk biztosított feltétel  $k$  reprezentálhatóságára. Ezért a fejezet hátralévő részében kicsit általánosabb szemszögből közelítem meg a problémát. Ennek kapcsán kitérek az egyik érdekesebb eredmény természetesen adódó következményeire, elhelyezve azt általános félcsoportelméleti eredményekhez képest. Céлом arra irányult, hogy leírjam a diagonális mátrixokkal reprezentálható félcsoportokat, hogy később ezek ismeretében tudjam megválaszolni egy nem negatív egész diagonális reprezentálhatóságára vonatkozó kérdést. Jelölje  $D(\mathbb{F})_n$  az  $\mathbb{F}$  test feletti  $n \times n$ -es diagonális mátrixok félcsoportját.*

**24. Tétel.**  $D(\mathbb{F})_n$  Abel-csoportok félhálója.

*Bizonyítás.* Legyen  $\alpha = \{(A, B); A, B \in D(\mathbb{F})_n, A_{i,j} = 0 \Leftrightarrow B_{i,j} = 0\}$ . Ekkor  $\alpha$  nyilván ekvivalenciareláció. Mivel  $\mathbb{F}$  test, ezért nullosztómentes, továbbá  $0 * a = a * 0 = 0 \forall a \in \mathbb{F}$ . Ezekből következően  $\alpha$  kongruenciareláció is. Ekkor  $D(\mathbb{F})_n$  minden  $\alpha$  szerinti osztályában pontosan egy olyan mátrix van, melynek minden eleme 0 vagy 1. Mivel test, ezért  $\mathbb{F}$ -ben csak a 0 és 1 az idempotens elemek. Világos, hogy ha  $B$  a  $D(\mathbb{F})_n$  egy idempotens eleme, akkor  $B$  minden eleme a fődiagonálisban is idempotens. Mivel  $D(\mathbb{F})_n$  minden  $\alpha$  osztályában pontosan egy az előbb említett felépítésű idempotens elem van, belátható, hogy  $D(\mathbb{F})_n/\alpha$  izomorf a  $2^n$  elemű Boole-algebrával mint félhálóval, ha minden osztályból, mint reprezentáns elemet kiválasztom az előbb említett idempotens elemeket. Továbbá ezen idempotens elemek az adott  $\alpha$  osztályban egységelemek. Legyen  $C \in D(\mathbb{F})$ ,  $C'$  pedig legyen az a mátrix, melyet úgy kapunk  $C$ -ből, hogy annak minden nem nulla elemének vesszük az  $\mathbb{F}$  testen belüli inverzét. Ekkor  $C$  és  $C'$  egy  $\alpha$  osztályba esnek és szorzatuk ezen osztály egységeleme lesz. Így azt kaptuk, hogy minden  $\alpha$  osztály egy csoport. Tehát  $D(\mathbb{F})$  csoportok félhálója. Továbbá  $D(\mathbb{F})$  kommutatív, ebből következik az állítás.  $\square$

**25. Tétel.** Legyen  $D(\mathbb{F})_n$  az  $\mathbb{F}$  test feletti  $n \times n$ -es diagonális mátrixok félcsoportja. Ekkor  $D(\mathbb{F})_n$  minden periodikus részfélcsoportja, -speciálisan a végesek is- Abel-csoportok félhálója.

*Bizonyítás.* A 24.Tételből és az 1.Tételből következik az állítás.  $\square$

**2. Következmény.** A 24.Tétel további következményei:

1. A 2.Tételből következően  $D(\mathbb{F})_n$  teljesen reguláris.
2. A 3.Tételből következően  $D(\mathbb{F})_n$  Abel-csoportok erős félhálójára és  $D(\mathbb{F})_n$  Clifford félcsoport.

Egy, az előzőekhez hasonló következmény az alábbi is:

**19. Definíció.** [3] Adott egy  $S$  félcsoport és egy  $A \subseteq S$  halmaz. Ekkor az  $A$  szeparátorán az  $SepA$  halmazt értjük, mely  $S$  azon  $x$  elemeit tartalmazza, melyekre a következők teljesülnek:  $xA \subseteq A$ ,  $Ax \subseteq A$ ,  $x(S-A) \subseteq (S-A)$  és  $(S-A)x \subseteq (S-A)$ . Ekkor  $SepA$  részfélcsoportha  $S$ -nek.

**26. Tétel.** [3] Legyen  $S$  egy félcsoport,  $G$  pedig az  $S$  részcsoportja. Ha  $A \subseteq S$ , hogy  $SepA \cap G \neq \emptyset$ , akkor  $SepA \cap G$  egy csoport.

**3. Következmény.** A 24.Tétel és a 26.Tétel következménye, hogy  $D(\mathbb{F})_n$  minden olyan részfélcsoportha, mely valamely  $A \subseteq D(\mathbb{F})_n$  halmaz szeparátora, csoportok félhálójára.

**Állítás** Ha adott egy  $\mathbb{F}$  és  $S$  a  $D(\mathbb{F})$  egy véges részfélcsoportha, akkor  $S$  elemeinek a nem 0 elemei az  $\mathbb{F}$  test periodikus elemei.  $\square$

A diagonális reprezentációk esete még nincs készen. Az eddigi eredmények folytatásának egy lehetséges módja megadni  $D(\mathbb{F})_n$   $n$  elemű részfélcsoporthainak felépítését az  $\mathbb{F}$  véges multiplikatív részfélcsoporthaiból, s közben megfigyelni az általuk generált rész-algebra dimenziójának változását. A 25.Tétel által biztosított szemlélet mutatja hogy a korábbi konstrukciók azon alapulnak, hogy  $D(\mathbb{F})_n$  két egymáshoz képest speciális elhelyezkedésű részfélcsoportha együtt milyen részfélcsoporthot (reprezentációt) generál. Ezeket az elhelyezkedéseket pontosan leírva és minden esetben megvizsgálva az általuk generált részfélcsoporthot, megoldást kaphatunk a felvetett problémára.

## 5. Egyéb reprezentációk

A [1] cikk a reguláris reprezentációt, mint speciális mátrixreprezentációt vizsgálja. A következő, már jól ismert szempont szerint, hogy egy  $k$  nem negatív egész mely pozitív egész  $n$ -ekkel reprezentálható úgy, hogy a reprezentációban szereplő  $S$  félcsoport bal [jobb] redukció és  $\gamma$  hű reprezentáció a jobb [bal] reguláris reprezentáció. Ezen belül is főként a 0 reprezentációival foglalkozik.

**20. Definíció.** Egy  $S$  félcsoportra az mondjuk, hogy bal [jobb] redukzív, ha minden  $a, b \in S$ -re teljesül, hogy ha minden  $x \in S$ -re  $xa = xb$  [ $ax = bx$ ], akkor  $a = b$ .

**21. Definíció.** Legyen  $S$  egy  $n$  elemű félcsoport, rögzítsük az elemeinek egy sorrendjét. Minden  $s \in S$ -re tekintsük a következő  $n \times n$ -es mátrixot melynek az elemei  $S$  elemeivel vannak indexelve:

$$R^{(s)} = (r_{x,y}^{(s)})$$

ahol

$$r_{x,y}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } xs=y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor  $\mathcal{R}_{S,\mathbb{F}} : s \mapsto R^{(s)}$ -et jobb reguláris reprezentációnak hívjuk. A bal reguláris reprezentáció a jobb reguláris duálisa (ezért elég az egyik, jelen esetben a jobb reguláris reprezentációt vizsgálni).

**15. Megjegyzés.** [1] Egy  $S$  félcsoport jobb [bal] reguláris reprezentációja akkor és csak akkor hű ha  $S$  bal [jobb] redukzív.

**22. Definíció.** Legyen  $\gamma$  egy  $S$  véges félcsoport  $n := |S|$ -fokú reprezentációja egy  $\mathbb{F}$  test felett. Azt mondjuk, hogy  $S$   $\gamma$ -független  $\mathbb{F}$  felett, ha  $\gamma$  hű és  $\gamma(S)$  lineárisan független  $\mathbb{F}_{n \times n}$ -ben.

**27. Tétel.** [1] Legyen  $n \leq 3$  pozitív egész. Ha  $k$  nemnegatív egész reprezentálható  $n$ -nel  $\mathbb{F}$  test felett úgy, hogy a szóban forgó reprezentáció az  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ , akkor  $k = 0$ . Ezt úgy is mondhatnánk, hogy egy legfeljebb háromelemű félcsoport minden jobb reguláris reprezentációja  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -független.

A [1] cikk mutat egy ötelemű félcsoportot, melynek  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  reprezentációja nem  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -független. Továbbá feltesz egy kérdést, hogy a 27. Tétel igaz-e négy elemű félcsoportokra is.

Az 5.Lemma teljesül a jobb reguláris reprezentációk osztályán belül is.

**28. Tétel.** Ha  $k$ -nak az  $n$  egy  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  reprezentációja, akkor  $n+1$  is  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  reprezentációja  $k$ -nak.

*Bizonyítás.* Legyen  $S$  egy  $n$  elemű bal redukzív félcsoport úgy, hogy az  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  reprezentációja által generált részalgebra  $n - k$  dimenziós. Vizsgáljuk meg az  $n + 1$  elemű  $S^0$  félcsoportot. Az  $S^0$  félcsoport bal redukzív és az  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$  reprezentációja által generált részalgebra  $n + 1 - k$  dimenziós. Jelölje  $\hat{0}$  az  $S^0$  nullelemét. Tekintsük ezután  $S^0$ -nak azt a rendezését melyet úgy kapunk  $S$  rendezéséből, hogy  $\hat{0}$   $S$  minden eleménél

nagyobb. Ahhoz, hogy  $S^0$  bal redukzív, elég belátni, hogy  $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$  hű reprezentációja  $S^0$ -nak. Bármely két  $S$ -beli elem  $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$  általi képe különböző. Ekkor  $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}(\hat{0})$  az az  $(n+1) \times (n+1)$ -es mátrix, melynek utolsó oszlopának minden eleme 1, a mátrix többi eleme pedig 0. Az  $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}(S)$  elemei mind olyan mátrixok, melyek utolsó oszlopainak minden eleme 0, kivéve az utolsót, ami 1. Ebből az is látszik, hogy  $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$  az  $S^0$  hű reprezentációja és  $\hat{0}$  képe lineárisan független  $S$  képétől. Továbbá  $S$  elemeinek  $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$  szerinti képei pontosan akkor lineárisan összefüggőek, ha az  $\mathcal{R}_{S, \mathbb{F}}$  szerint azok. Tehát  $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^0)$  által generált részalgebra dimenziója  $n + 1 - k$ .  $\square$

**4. Következmény.** *A 28.Lemma és a [1] cikkben szereplő ötelemű konstrukció nem meglepő következménye, hogy a 27.Tétel állítása nem teljesül ötnél több elemű félcsoportok esetén sem.*

*A témában további vizsgálatokra ad lehetőséget ha a reprezentációkat egy bizonyos félcsoportosztályra szorítjuk meg és abban az esetben vizsgáljuk a nem negatív egészek reprezentálhatóságát. A következő konstrukció azért készült, mert szerettem volna reprezentálni az  $n$  elemű ciklikus félcsoportot ezt sajnos csak  $(n + 1) \times (n + 1)$ -es mátrixokkal tudtam.*

**29. Tétel.** *Legyen  $S$  egy az  $a$  elem által generált ciklikus félcsoport ami nem csoport. Ekkor 1 reprezentálható bármely  $|S| + 1$ -el úgy hogy a reprezentáció  $S^0$ -át használja, ahol  $S^0$  azt a félcsoportot jelöli ahol  $S$ -et egy nullelemmel bővítjük.*

*Bizonyítás.* A nullelem képe a nullmátrix, ha a többi mátrix hű reprezentációja  $S$ -nek és lineárisan függetlenek akkor készen vagyunk. Az  $S$  minden esetben felfogható egy  $a$  elem által generált szabadfélcsoportnak amelyen egy a következő alakú definiáló egyenlőség teljesül  $a^i = a^{n+1}$  valamely  $0 < i \leq n$  ahol  $n = |S|$ , mivel  $S$  nem csoport  $0 < i$ . Ekkor  $S$  reprezentálásához elég egy olyan  $A$  mátrixot találni amely kielégíti az  $A^i = A^{n+1}$  egyenlőséget és  $A^i \neq A^n$  is teljesül. Az  $A$  mátrix egy  $(n+1-i) \times (n+1-i)$ -es és egy  $i \times i$ -es blokkból áll. Az első blokk legyen az  $(1, 2, 3, \dots, n-i-1, n-i)$  permutációnak megfelelő permutációmátrix, ez egy  $n-i$ -ed rendű permutáció. A másik blokk pedig az a mátrix melynek a nem-nulla elemei a főátló felett helyezkednek el és ezek 1-esek. Ekkor a második blokk  $i$ -edik hatványa a nullmátrix, az első blokk pedig periodikus, és a periódusa  $n+1-i$ , tehát teljesül a definiáló egyenlőség. Így  $A$  hatványai egy hű reprezentációját adják  $S$ -nek. Az  $A$  hatványainak lineáris függetlenségét kell még belátni. A második blokk  $j < i$  hatványai úgy néznek ki, hogy a főátló fölötti  $j$ -edik átlóban vannak csak 1-esek, ezért  $A$  első  $i-1$  hatványai lineárisan függetlenek egymástól és a többi hatványtól. Az  $A^i, A^{i+1}, \dots, A^{n-i}$  elemekben pedig az első blokk az  $n-i$  elemű ciklikus csoport reguláris reprezentációjával egyezik meg, tehát ezek lineárisan függetlenek.  $\square$

## Összefoglalás

*Dolgozatomban a 14. Definícióban megadott fogalmat vizsgáltam. Először általános esetben, sikerült megadni a pontos feltételét egy  $k$  nemnegatív egész szám pozitív egészszel való reprezentálhatóságának valamely  $\mathbb{F}$  test felett. Ezt tekintem dolgozatom legfőbb eredményének. Viszont ezzel még nem zárul le a téma vizsgálata, ugyanis tehetünk megszorításokat a vizsgált reprezentációkra, s így e témában még bőven van lehetőség újabb és újabb vizsgálatokra. Ha például a reprezentált félcsoportosztályra teszünk megszorítást, azt tehetjük olyan céllal, hogy többet tudjunk meg ezen félcsoportosztályról. A dolgozatomban két ilyen megszorítást vizsgáltam, az egyik a null-reprezentálhatóság a másik pedig a diagonálisan reprezentálhatóság. A null-reprezentálhatóságot majdnem teljesen sikerült leírni. A 0-ának 2, 3, 4-gyel való null-reprezentálhatósága viszont nyitott kérdés maradt, leszámítva a 2-vel az  $\mathbb{F}_2$  test feletti null-reprezentálhatóságot (15. Tétel). Ebben az esetben bár elemi esetvizsgálatot végeztem; -ez sajnos nem vezet közelebb a kérdés tetszőleges test feletti megoldásához- a meglepő eredmény miatt mégis leírtam. Meglepő, mert itt a többi megoldott esettel ellentétesen nem esik egybe a reprezentálhatóság és null-reprezentálhatóság feltétele. A diagonális reprezentálhatóság esetén viszont még nem teljesen kidolgozott, itt megadtam néhány konstrukciót és felvázoltam a további vizsgálatok egy lehetséges menetét. Meglepő, hogy itt csak a diagonális mátrixok multiplikatív struktúráját vizsgálva -pedig azt hihetnénk ezt ismerjük- egy nem triviális kérdést kapunk (diagonális reprezentálhatóság). Meg kell említenem még az 5. Lemmát, ugyanis érdemes minden ilyesfajta vizsgálatot azzal kezdeni, hogy az említett lemma teljesül-e az adott reprezentációk osztályán belül. Beláttam, hogy az általam vizsgált esetekben igen és [1] cikkben vizsgált jobb-reguláris reprezentációk között is igaz. Az előbb felsorolt eredmények részben a [1] cikkben szereplő kérdésekre adnak választ, részben pedig hozzátesznek annak eredményeihez.*

## Hivatkozások

- [1] A. Nagy, Representable nonnegative integers over a field.
- [2] ———, Special Classes of Semigroups, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht /Boston/London, 2001.
- [3] ———, On the separator of subset of semigroups, *Semigroup Forum* **83** (2011), 289–303.

- [4] *A.H. Clifford and G.B. Preston, The algebraic theory of semigroups, vol. I,II, American Mathematical Society, Providence/Rhode Island, I(1961),II(1967).*
- [5] *J.M. Howie, An introduction of semigroup theory, Academic Press, London/New York/San Francisco, 1976.*
- [6] *M. Petrich, Lectures in semigroups, Akademie-Verlag, Berlin, 1977.*