

Félcsoportok mátrixreprezentációinak dimenziói

TDK dolgozat

Zubor Márton

BME TTK Matematikus Msc I. évf.

Konzulens: Dr. Nagy Attila
egyetemi docens
Algebra Tanszék,
BME Matematika Intézet



BME

2011

Bevezető

A félcsoportelméletben fontos kutatási irány a véges félcsoportok reprezentációja mátrixokkal, speciálisan valamely $\mathbb{F}$ test feletti mátrixokkal. Dolgozatomban ilyen reprezentációkat fogok vizsgálni egy érdekes és új szempont szerint. Pontosabban megvizsgáltam, hogy a reprezentált félcsoport n pozitív egész elemszámától illetve $\mathbb{F}$ -től függően a reprezentációban szereplő mátrixok által generált részalgebra $n - k$ dimenziója mekkora lehet. Sikerült leírni a kapcsolatot az olyan pozitív egész n és nem negatív egész k között, amelyre a reprezentált n elemű félcsoport által generált részalgebra dimenziója $n - k$. Ezt a kapcsolatot megvizsgáltam olyan esetekben is, amikor speciális reprezentációkat vettünk figyelembe. Alapvetően kétféle reprezentációt vizsgáltam alaposabban. Az egyik a null-félcsoport reprezentációjáról szól. Ez azért érdekes, mert az esetek többségében ennél a konstrukciónál a vizsgált paraméterek között a kapcsolat megegyezik az általános esetben kapott eredményekkel. A másik részletesebben vizsgált eset amikor a reprezentáció diagonális mátrixokat használ. Az általam vizsgált téma időszerű és újszerű, e témával kapcsolatos legelső eredmények problémafelvetéssel együtt a publikáció előtt álló [1] cikkben találhatóak. A dolgozat a bevezetőn kívül öt fejezetet tartalmaz. Az első fejezet a dolgozatban felhasznált legalapvetőbb fogalmakat illetve ismert eredményeket foglalja össze. A második fejezet az általános problémafelvetésünk vizsgálatával foglalkozik, megoldást adva azon n pozitív egészek és k nem negatív egészek kapcsolatáról, melyekre teljesül, hogy van olyan n elemű S félcsoport és annak egy γ reprezentációja, hogy $\gamma(S)$ által generált részalgebra dimenziója $n - k$. Ebben a fejezetben tehát γ és S tetszőleges lehet, semmilyen speciális feltételt nem követelünk vele szemben. A harmadik fejezetben a vizsgálatunk tárgyát képező (korábban ismertetett) problémát vizsgáljuk, de azon feltétel mellett, hogy a reprezentálható S félcsoport eleme legyen a null-félcsoportok osztályának. A negyedik fejezetben a probléma specialitása abban jelentkezik, hogy olyan γ reprezentációkat feltételezünk, hogy $\gamma(S)$ elemei diagonális mátrixok legyenek. Az ötödik fejezetben egyéb eredményeket közlünk. A dolgozat főleg az [1]-ben megjelölt problémákra ad választ, de ezen túlmenően addendum az [1] eredményeihez.

1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben a dolgozatban felhasználásra kerülő jelöléseket, alapfogalmakat, illetve ismert eredményeket részletezünk.

A dolgozatban a 0 és 1 egyrészt a szóban forgó test nullelemét és egységelemét, más helyeken viszont a 0 és 1 egész számokat jelöli. Ez a kettős szerep nem fog

félreértést okozni, mert mindig világos lesz, hogy éppen melyik szerepben vannak.

Mindenhol, ahol mátrixokból alkotott halmazról, mint félcsoportról beszélünk, műveletnek a hagyományos értelemben vett mátrixszorzást értjük.

Használjuk a következő jelöléseket:

$\mathbb{F}_{n \times n}$: az $\mathbb{F}$ test feletti teljes $n \times n$ -es mátrix algebra;

$\mathbb{F}_n$: az n elemű véges test;

I_n : az $n \times n$ -es egységmátrix az adott test felett;

S^0 : az S félcsoportból egy null-elem hozzá vételével kapott félcsoport.

1. Definíció. [2] Legyen az S halmazon értelmezve egy kétváltozós $\circ$ művelet ami asszociatív (azaz minden $a, b, c \in S$ -re $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$). Ekkor $(S, \circ)$ -et félcsoportnak nevezzük. (Az $a \circ b$ helyett csak ab -t fogunk írni.)

2. Definíció. [2] Legyen S egy olyan nullelemes félcsoport, hogy minden $a, b \in S$ -re $ab = \hat{0}$ (ahol $\hat{0}$ az S nulleleme). Ekkor S -et null-félcsoportnak nevezzük.

3. Definíció. [2] Egy S nullelemes félcsoportot nil félcsoportnak nevezünk, ha minden a -re létezik egy n pozitív egész, hogy $a^n = \hat{0}$ (ahol $\hat{0}$ az S nulleleme).

4. Definíció. [6] Egy félcsoportot kötegnek nevezünk ha minden eleme idempotens (a idempotens ha $a^2 = a$).

5. Definíció. [6] A kommutatív köteget félhálónak nevezzük.

6. Definíció. [4] Legyen α egy ekvivalenciareláció egy S félcsoporton. Ha $(a, b) \in \alpha$ -ból és $(c, d) \in \alpha$ -ból következik, hogy $(ac, bd) \in \alpha$ akkor α -t kongruenciarelációnak nevezzük.

7. Definíció. [4] Legyen adott egy S félcsoport és rajta egy α kongruenciareláció. Ha az S/α egy félháló, akkor azt mondjuk, hogy α az S félháló kongruenciája vagy félháló felbontása.

8. Definíció. [2] Egy félcsoport egy elemét periodikusnak nevezünk ha az általa generált félcsoport véges. Egy félcsoportot periodikusnak nevezünk, ha minden eleme periodikus. Speciálisan a véges félcsoportok is periodikusak.

1. Tétel. Ha egy félcsoport csoportok félhálója, akkor annak bármely periodikus részfélcsoportja is csoportok félhálója.

1. Megjegyzés. Az 1.Tétel bizonyítása azon múlik, hogy minden elem periodikus, így a hatványai közt szerepel egy idempotens elem. A félháló felbontás osztályaiban csak egy-egy idempotens elem van, a csoport egységeleme. Így ha tekintjük a félhálófelbontás megszorítását a periodikus részfélcsoportra, akkor egy alkalmas félhálófelbontást kapunk.

9. Definíció. [4] Egy S félcsoport a elemét teljesen regulárisnak nevezzük, ha van olyan $x \in S$, hogy $axa = a$ és $ax = xa$.

10. Definíció. [4] Egy félcsoportot teljesen regulárisnak nevezünk ha minden eleme teljesen reguláris.

2. Tétel. [4] Egy félcsoport akkor és csak akkor teljesen reguláris ha csoportok uniója, ami ekvivalens azzal, hogy diszjunkt csoportok uniója.

11. Definíció. [2] Akkor mondjuk, hogy az S félcsoport az S_i részfélcsoportok erős I félhálójára, ha S az S_i részfélcsoportok I félhálójára, és minden $i \geq j$ $i, j \in I$ indexpárhoz megadható S_i -nek S_j -be olyan $\varphi_{i,j}$ homomorfizmusa, hogy az alábbiak teljesülnek:

1. $\varphi_{i,i}$ az S_i identikus leképezése;
2. minden $i \geq j \geq k$ $i, j, k \in I$ -re $\varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$ ahol $\circ$ a homomorfizmusok kompozícióját jelöli;
3. minden $a \in S_i$, $b \in S_j$ -re $ab = (a)\varphi_{i,ij}(b)\varphi_{j,ij}$.

12. Definíció. [5] Egy reguláris félcsoportot Clifford félcsoportnak hívunk, ha S minden e idempotens elemére és bármely $x \in S$ -re teljesül, hogy $ex = xe$.

3. Tétel. [5] Tetszőleges félcsoport esetén az alábbi három feltétel ekvivalens:

1. S részcsoportok félhálójára;
2. S részcsoportok erős félhálójára;
3. S Clifford félcsoport.

2. Megjegyzés. A 3.Tétel bizonyításában $1. \Rightarrow 2.$ -höz elég a 11.Definícióban szereplő $\varphi_{i,j}$ homomorfizmust megadni. Az S_j egységelemével való jobb szorzás homomorfizmus, és kielégíti a $\varphi_{i,j}$ -re vonatkozó feltételeket.

4. Tétel. [Mantel] Egy n pontú egyszerű háromszögmentes G gráfnak legfeljebb $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ éle lehet. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G a $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ -szel izomorf.

13. Definíció. [4] Valamely S félcsoportnak egy $\mathbb{F}$ test feletti n -fokú reprezentációján S -nek az $\mathbb{F}_{n \times n}$ algebra multiplikatív félcsoportjába való γ homomorfizmusát értjük. A γ reprezentációt *hűnek* nevezzük, ha *injektív*.

Dolgozatom célja a következő definícióban megadott szempont szerinti vizsgálata a félcsoport reprezentációknak.

14. Definíció. [1] Azt mondjuk, hogy egy nemnegatív egész k reprezentálható $\mathbb{F}$ test felett egy pozitív egész n számmal, ha $k \leq n$ és létezik egy n -elemű S félcsoport, és S -nek egy olyan γ n -fokú hű reprezentációja $\mathbb{F}$ felett, hogy $\gamma(S)$ által az $\mathbb{F}_{n \times n}$ -ben generált részalgebra dimenziója $n - k$.

3. Megjegyzés. A 14. Definíció jól definiált, ehhez csak azt kell meggondolnunk, hogy n darab mátrix által generált részalgebra dimenziója miért legfeljebb $n - 0 = n$. Ebben az esetben ez azért teljesül, mert a mátrixok félcsoportot alkotnak, s így az általuk generált részalgebra -mint vektortér- megegyezik az általuk generált vektortérrel.

4. Megjegyzés. A 14. Definícióval ekvivalens, hogy egy k nem-negatív egész reprezentálható n -nel egy $\mathbb{F}$ test felett, ha $\mathbb{F}_{n \times n}$ multiplikatív félcsoportjának van olyan n elemű részfélcsoportja, amely által generált részalgebra dimenziója $n - k$. Ugyanis, ha adott egy S félcsoport és egy γ , amelyek egy k -nak n -nel való reprezentációjához szükséges, mivel γ injektív, ezért S izomorf $\gamma(S)$ -sel. Így $\gamma(S)$ és az identikus leképezés is elég ahhoz, hogy lássuk k reprezentálható-e n -nel.

2. Általános eset

Ebben a fejezetben semmilyen megkötést nem teszünk a γ reprezentációra. A 14. Definícióban ismertetett reprezentálhatóság feltételét sikerült pontosan meghatározni. Az $|\mathbb{F}|$ véges illetve végtelen eseteket először külön kezeltem. A konstrukciók ugyanazon alapötletet használták. Végül sikerült felírnom az eredményt egy olyan formában, melyből kiderül, nincs lényegi különbség a véges, illetve végtelen eset között.

A fejezet első lemmája (5.Lemma) miatt elég minden k nem negatív egészhez megtalálni azt a legkisebb n pozitív egészet, mellyel reprezentálható egy adott test felett, ahhoz, hogy k pozitív egészekkel történő reprezentálhatóságát leírjuk. Ezen lemma speciális reprezentációk esetén is megkönnyítheti a vizsgálatokat, feltéve, hogy igaz az adott reprezentációk osztályán belül, mint ahogy később látni fogjuk néhány esetben.

5. Lemma. *Ha egy k nem negatív egész szám reprezentálható egy $\mathbb{F}$ test felett valamely n pozitív egészszel, akkor k reprezentálható $\mathbb{F}$ felett minden $\hat{n} > n$ egészszel is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy k reprezentálható n -nel az $\mathbb{F}$ test felett. Elég belátni, hogy ekkor k reprezentálható $n + 1$ -gyel az $\mathbb{F}$ test felett. A feltételből következően $\mathbb{F}_{n \times n}$ multiplikatív félcsoportjának van egy n elemű részfélcsoportja S_0 , hogy az S_0 elemei (amelyek mátrixok) között a maximálisan lineárisan függetlenek száma $n - k$. Most konstruálunk az $\mathbb{F}_{(n+1) \times (n+1)}$ -ben egy olyan részfélcsoportot, mely által generált részalgebra dimenziója $n - k + 1$. Ehhez felhasználjuk az S elemeit is. Képezzünk az S elemei segítségével olyan $(n + 1) \times (n + 1)$ -es mátrixokat, hogy azokhoz mint $n \times n$ -es mátrixokhoz $n + 1$ -edik sorként és oszlopként csupa 0-át írunk. Az így keletkezett n mátrixhoz vegyük hozzá még I_{n+1} -et az $n + 1$ -ed rendű egységmátrixot. Az így definiált mátrixok S_1 halmazáról könnyen megmutatható, hogy részfélcsoportja $\mathbb{F}_{(n+1) \times (n+1)}$ multiplikatív félcsoportjának. Világos, hogy az $S_1 - \{I_{n+1}\}$ elemei között maximálisan $n - k$ lineárisan független mátrix van. Az is nyilvánvaló, hogy I_{n+1} lineárisan független S_1 összes többi elemétől. Ezért az S_1 által generált részalgebra $\mathbb{F}_{(n+1) \times (n+1)}$ -ben $n - k + 1$ dimenziós. Tehát k reprezentálható $n + 1$ -gyel is az $\mathbb{F}$ felett. $\square$

6. Lemma. *[1] A 0 reprezentálható minden pozitív egész n -nel bármely $\mathbb{F}$ test felett.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy a 0 reprezentálható az 1-gyel. Ehhez tekintsük az 1×1 -es egységmátrixot $\mathbb{F}$ felett. Az 5.Lemma miatt készen vagyunk. $\square$

5. Megjegyzés. *Így a 6.Lemma bizonyításában lényegében ugyanazt a konstrukciót kapjuk, mint ami az eredeti bizonyításban szerepel lásd [1]. Illetve azt is mondhatjuk, hogy minden monoid $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -független és minden n pozitív egészhez létezik olyan monoid, amely n elemű, és ebből következik az állítás. Az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -függetlenség fogalmát később az Egyéb reprezentációk című fejezetben ismertetem.*

7. Lemma. *Az 1 reprezentálható minden pozitív egész n -nel bármely $\mathbb{F}$ test felett.*

Bizonyítás. Az 1 reprezentálható az 1-gyel, ehhez tekintsük az 1×1 -es nullmátrixot $\mathbb{F}$ felett. Ismét miatt készen vagyunk az 5.Lemma. $\square$

8. Tétel. *Ha $\mathbb{F}$ végtelen számosságú test, akkor $\mathbb{F}$ felett k nemnegatív egész pontosan akkor reprezentálható n pozitív egészszel, ha $k = 1$ vagy $n > k$.*

Bizonyítás. A 6.Lemma és a 7.Lemma miatt a $k = 0$ és $k = 1$ eset kész. Nézzük a $k \geq 2$ esetet. Először lássuk be, hogy ha $n > k$ akkor k reprezentálható n -nel az $\mathbb{F}$ felett. Az 5.Lemma miatt elég belátni, hogy k reprezentálható $k + 1$ -gyel. Legyen S a $k + 1$ elemű null félcsoport, a nulleleme legyen $\hat{0}$. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{F}$ injektív leképezés, hogy $f(\hat{0}) = 0$. Ilyen f létezik, mivel $\mathbb{F}$ elemszáma végtelen. Ekkor az S reprezentációja legyen a következő, $a \in S$ -hez rendelje hozzá azt a mátrixot melynek az első sor utolsó elem $f(a)$, az összes többi eleme pedig 0. Világos, hogy ez egy hű reprezentációja S -nek, és az is látszik, hogy az általa generált részalgebra dimenziója 1. Már csak annyit kell észrevenni, hogy $k \geq 2$ nem reprezentálható k -val $\mathbb{F}$ felett. Ez pedig azért nem lehet, mert ekkor lenne $\mathbb{F}_{n \times n}$ -nek egy legalább 2 elemű nulla-dimenziós részalgebrája, ami viszont nem igaz. $\square$

9. Lemma. [1] Ha egy k nemnegatív egész reprezentálható n pozitív egészszel egy $\mathbb{F}$ véges test felett akkor $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbb{F}$ egy véges test és k nem-negatív egész reprezentálható n pozitív egészszel felette. Ekkor van egy n elemű S félcsoport és egy γ n -fokú hű reprezentációja S -nek $\mathbb{F}$ felett úgy, hogy a $\gamma(S)$ által generált $\mathbb{F}_{n \times n}$ -beli $\mathcal{A}$ részalgebra dimenziója $n - k$. Ekkor

$$n = |S| \leq |\mathcal{A}| = |\mathbb{F}|^{n-k}.$$

Ezért

$$\log_{|\mathbb{F}|} n \leq n - k,$$

azaz

$$k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n.$$

$\square$

10. Tétel. Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. Valamely k nemnegatív egész reprezentálható egy pozitív n egészszel az $\mathbb{F}$ felett pontosan akkor ha $k = 0$ vagy $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$.

Bizonyítás. A 9.Lemma miatt elég belátni, hogy a tételben szereplő reprezentációk léteznek. A $k = 0$ eset a 6.Lemma miatt teljesül.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy k nemnegatív egész és n pozitív egész, hogy $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$. Tekintsük a következő konstrukciót, melyhez ismét az n elemű null-félcsoportot használjuk, mint a végtelen esetben is. Először a $k \neq 0$ esetet nézzük. Válasszunk ki n darab különböző vektort az $\mathbb{F}$ test feletti $n - k$ dimenziós vektortérből úgy, hogy az egyik a nullvektor legyen, illetve a vektortér egyik bázisának elemeit is tartalmazza. Legyenek ezek $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ez $k \neq 0$ esetén megtehető, mivel ennek

a vektortérnek $|\mathbb{F}|^{n-k}$ eleme van, ami a $k \leq n - \log_{|\mathbb{F}|} n$ feltétel miatt legalább n . Illetve legfeljebb n vektort választottunk ki, ugyanis a bázisvektorokhoz a nullvektort hozzávéve összesen $n - k + 1$ darab vektort kapunk, ahol $k \geq 1$. Az $\mathbb{F}_{n \times n}$ -ből pedig válasszuk ki azokat, melyeknek az utolsó oszlopának első $n - k$ eleméből alkotott vektor megegyezik valamely v_i $i = 1, \dots, n$ vektorral, és a többi eleme nulla. Ezen n különböző mátrix közt ott van a null-mátrix. Mivel a vektorok legfeljebb $n - 1$ hosszúak voltak, minden mátrix utolsó sorának összes eleme nulla. Emellett, mivel mindegyik mátrixnak a nem nulla elemei mind az utolsó oszlopában vannak, így bármely kettő szorzata a nullmátrix. Így tehát megkaptuk az n elemű null-félcsoport egy hű mátrixreprezentációját $\mathbb{F}$ felett. A reprezentációban szereplő mátrixok által generált részalgebra dimenziója a $v_1, \dots, v_n$ vektorok választása miatt $n - k$. Tehát k -t sikerült reprezentálni n -nel $\mathbb{F}$ felett. $\square$

6. Megjegyzés. Az $|\mathbb{F}|$ véges illetve végtelen esetben lényegében ugyanaz a konstrukció szerepel, csak a " $\log_\infty(n)$ " nincs értelmezve.

A 8.Tétel és a 10.Tétel alapján megfogalmazom a választ a [1].cikkben megfogalmazott Problem 4.-ban feltett kérdésre, így összefoglalva a választ az általános kérdésre.

11. Tétel. Adott egy n pozitív egész és egy $\mathbb{F}$ test. Ekkor egy k nemnegatív egész akkor és csak akkor reprezentálható n -nel az $\mathbb{F}$ felett, ha $k \leq n - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|-} \lceil \log_h(n) \rceil$.

Bizonyítás. Jelölje $k_0(n, \mathbb{F})$ azt a legnagyobb nemnegatív egészt, mely reprezentálható n pozitív egészszel $\mathbb{F}$ test felett. A 10.Tétel és a 8.Tétel alapján $k_0(n, \mathbb{F})$ olyan tulajdonságú, hogy egy k nemnegatív egész akkor és csak akkor reprezentálható n -nel $\mathbb{F}$ felett, ha $k \leq k_0(n, \mathbb{F})$, és az értékei a következők:

$$k_0(1, \mathbb{F}) = 1;$$

$$\text{ha } n \geq 2 \text{ és } |\mathbb{F}| = \infty \text{ akkor } k_0(n, \mathbb{F}) = n - 1;$$

$$\text{ha } n \geq 2 \text{ és } \mathbb{F} \text{ véges test akkor } k_0(n, \mathbb{F}) = n - \lceil \log_{|\mathbb{F}|} n \rceil.$$

Vegyük észre, hogy

$$k_0(1, \mathbb{F}) = 1 - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|-} \lceil \log_h(1) \rceil = 1 - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|-} \lceil 0 \rceil = 1.$$

Ha $n \geq 2$, akkor minden $h \geq n$ esetén $0 < \log_h(n) \leq 1$, $n \geq 2$ és $|\mathbb{F}| = \infty$ akkor

$$k_0(n, \mathbb{F}) = n - \lim_{h \rightarrow \infty} \lceil \log_h(n) \rceil = n - 1.$$

A $\lceil \log_h(n) \rceil$ adott n pozitív egész esetén -mint h függvénye- a $h > 1$ egész pontokban balról folytonos. Mivel $\mathbb{F}$ test, $|\mathbb{F}| \geq 2$. Ha $\mathbb{F}$ egy véges test, akkor

$$k_0(n, \mathbb{F}) = n - \lim_{h \rightarrow |\mathbb{F}|^-} \lceil \log_h(n) \rceil = n - \lceil \log_{|\mathbb{F}|} n \rceil.$$

□

3. A null-félcsoport reprezentációi

Általános esetben a konstrukciókban nagyrészt a null-félcsoport reprezentációit használjuk. Így felmerül a kérdés, hogy vajon minden k nemnegatív egész, mely reprezentálható egy $\mathbb{F}$ test felett egy n pozitív egészszel, reprezentálható-e úgy is, hogy a reprezentációban szereplő S félcsoport a null-félcsoport. Ezért megvizsgáltam, mely esetekben lehetséges egy ilyen reprezentáció.

15. Definíció. Ha egy k nem-negatív egész reprezentálható egy $\mathbb{F}$ test felett egy n pozitív egészszel úgy, hogy a reprezentációban szereplő S félcsoport a null-félcsoport, akkor azt mondjuk, hogy k null-representálható n -nel $\mathbb{F}$ felett.

12. Tétel. Ha egy $0 < k$ egész reprezentálható n -nel egy $\mathbb{F}$ test felett, akkor null-representálható is.

Bizonyítás. Az $|\mathbb{F}|$ véges esetben a 10.Tétel bizonyításából látszik, ugyanazt kell csinálni $|\mathbb{F}| = \infty$ esetben is, csak az n, k egészekre vonatkozó feltételt kell kicserélni értelemszerűen. □

Ami viszont érdekesebb kérdés, hogy a 0 mely testek felett, mely pozitív egészekkel null-representálható. Egy olyan konstrukció vizsgálata következik, melyben a mátrixok minden eleme 0 vagy 1 . A 0 karakterisztikájú testek felett ez azt jelenti, hogy a mátrixszorzás közben nem adhatok össze két 1 -est mert ekkor az eredményül kapott mátrixnak lenne egy olyan eleme, ami nem 0 , se nem 1 . Viszont ha az előbbi feltételnek megfelelő konstrukciót találunk, akkor az minden test felett ugyanúgy fog működni.

13. Lemma. Legyen A egy $n \times n$ -es nemnegatív elemű mátrix, továbbá $A^2 = \underline{0}_{n \times n}$. Ekkor A -nak legfeljebb $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ nem nulla eleme lehet, és ez a korlát éles.

Bizonyítás. Ha az A^2 mátrixszorzás közben két nem nulla elemet összeszorozunk, akkor a nemnegativitás miatt A^2 -nek lesz pozitív eleme. Ebből következően ha $\hat{A}$ egy nemnegatív elemű $n \times n$ -es mátrix, hogy $\hat{A}^2 = \underline{0}_{n \times n}$, akkor az A is amit úgy

kapunk, hogy $\hat{A}$ összes nemnulla elemét 1-re cseréljük. Elég az állítást belátni olyan mátrixokra melyek minden eleme 0 vagy 1. Tekintsük azt a $G(V, E)$ irányított gráfot melynek A a szomszédossági mátrixa $|V| = n$. Mivel A minden eleme 0 vagy 1, G -ben nincs többszörös él. Továbbá G -ben nem lehet kettő hosszú irányított séta, mert $A^2 = 0$. Így G -ben nincs hurokél és ha $(a, b) \in E(G) \Rightarrow (b, a) \notin E(G)$ tehát ha az élek irányítását elfelejtjük akkor egy egyszerű gráfot kapunk. Ez a gráf háromszögmentes, mivel egy háromszög élei nem irányíthatóak úgy, hogy ne legyen kettő hosszú séta benne. Tehát ennek a gráfnak aminek ugyanennyi éle van mint ahány 1-es eleme A -nak legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ éle van a 4.Tétel miatt.

Konstrukció A -ra, mely fölveszi ezt a maximumot: Tekintsük a 4.Tételben is szereplő páros gráfot mely színosztályai $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ illetve $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ méretűek. Ha az éleket az egyik színosztályból irányítjuk a másikba akkor nem lesz kettő hosszú séta, tehát ennek a gráfnak a szomszédossági mátrixa jó lesz. $\square$

Jelölés: A 13.Lemma bizonyításában szereplő $n \times n$ -es mátrixok közül válasszuk azt melynek csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ és a $\{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ az egyik és $\{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \dots, n\}$ a másik színosztály és az élek az előbbiből vannak irányítva az utóbbiba, ezt jelöljük ezután A_n -nel. Pl. $n = 4$ -re és 5 -re:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Tétel. Ha $n \geq 5$ vagy $n = 1$ akkor 0 null-reprezentálható n -nel bármely test felett.

Bizonyítás. Ha $n = 1$ akkor az egységmátrix jó reprezentáció lesz.

Következzen a konstrukció $n \geq 5$ -re. Vegyük észre, ha B és C olyan mátrixok melyeket megkaphatunk úgy, hogy A_n tetszőleges számú nem-nulla elemét kinullázzuk akkor $BC = 0_{n \times n}$. Legyen H_n azon mátrixok halmaza melyek megkaphatóak úgy, hogy A_n pozitív elemeit egy kivétellel kinullázzuk. A H_n elemei nyilván lineárisan függetlenek. Válasszunk ki tetszőleges $n - 1$ különböző elemet H_{n-1} -ből; ez akkor tehető meg ha $n - 1 \leq |H_{n-1}| = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, azaz $n \geq 5$. Ezek a nullmátrixszal együtt egy $n - 1$ fokú reprezentációját adják az n -elemű null-félcsoportnak. Az általuk generált részalgebra dimenziója nyilván $n - 1$. Ezeket a mátrixokat blokkdiagonálisan egészítsük ki $n \times n$ -es mátrixokká úgy, hogy a hozzávett 1×1 -es blokk egyetlen eleme az 1. Így az n -elemű null-félcsoport egy reprezentációját kapjuk $n \times n$ -es mátrixokkal.

Ezen mátrixok nyilván lineárisan függetlenek. Tehát $n \geq 5$ esetben is megkaptuk a 0 egy null-representációját tetszőleges test felett. $\square$

A szemléltetés kedvéért az alábbiakban közöljük a 14. Tételben szereplő konstrukció mátrixai $n = 5$ -re:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Megjegyzés. A 13. Lemmából következik, hogy az előző konstrukcióhoz hasonlóval nem valósítható meg a 0-nak 2, 3, 4-gyel való nullrepresentációja. Kérdés, hogy mely testek felett lehet null-representálni a 0-t 2, 3, 4 egyikével.

15. Tétel. A 0 nem null-representálható 2-vel az $\mathbb{F}_2$ felett.

Bizonyítás. A representációban nem szerepelhet a $\underline{0}_{2 \times 2}$, mert akkor nem a 0-nak, hanem az 1-nek egy representációját kapjuk. A kételemű null-félcsoportot a nem-nulleleme generálja. Ezért elég belátni, hogy a 16 közül egy mátrix sem generál olyan kételemű null-félcsoportot, melyben nem szerepel a $\underline{0}_{2 \times 2}$.

A következő mátrixok négyzete a $\underline{0}_{2 \times 2}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A következő hét mátrix idempotens:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A következő öt mátrix generátumában pedig szerepel az $\underline{I}_{2 \times 2}$, de egy legalább kételemű null-félcsoportban nincs egységelem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát nincs olyan mátrix, ami megfelelő generátorelem lenne egy ilyen reprezentáció félcsoportjának. $\square$

1. Következmény. *Nem igaz, hogy ha egy k nemnegatív egész reprezentálható valamely n pozitív egészszel egy $\mathbb{F}$ test felett, akkor null-representálható is.*

A következő tétel segíthet a 0-nak $n = 2, 3, 4$ -gyel való null-representálhatóságának eldöntésében, mivel a null-félcsoport nil-félcsoport.

16. Tétel. *Ha adott egy nil-félcsoport egy nemtriviális, test feletti mátrix reprezentációja, akkor a reprezentációban szereplő mátrixok determinánsa 0.*

Bizonyítás. Legyen S egy nil-félcsoport és γ egy nem-triviális reprezentációja S -nek valamely $\mathbb{F}$ test feletti mátrixokkal. Az S nullelemének γ szerinti képe legyen $\hat{0}$. Ekkor $\det(\hat{0}) = \det(\hat{0}^2) = \det(\hat{0})^2$, tehát $\det(\hat{0})$ vagy 0 vagy 1. Indirekt tegyük fel, hogy $\det(\hat{0}) = 1$. Mivel γ nemtriviális, ezért létezik $A \in \gamma(S)$, hogy $A \neq \hat{0}$. Mivel S nil-félcsoport, γ pedig egy homomorfizmus, ezért létezik $i \geq 2$ egész, hogy $A^i = \hat{0}$, de $A^{i-1} \neq \hat{0}$. Mivel

$$\det(A^{i-1})^2 = \det(A^{2i-2}) = \det(\hat{0}) = 1,$$

ezért A^{i-1} determinánsa nem 0. Ez azt jelenti, hogy A invertálható. Ugyanakkor

$$\hat{0} = (A^{i-1})^{-1} A^{i-1} \hat{0} = (A^{i-1})^{-1} \hat{0} = (A^{i-1})^{-1} (A^{i-1})^2 = A^{i-1},$$

ami ellentmond $A^{i-1} \neq \hat{0}$ -nak. Tehát $\det(\hat{0}) = 0$. A nil-félcsoport szerkezetéből adódóan, ha adott egy $B \in \gamma(S)$, akkor létezik n pozitív egész, hogy $\det(B^n) = 0$. Mivel

$$(\det B)^n = \det(B^n) = \det(\hat{0}) = 0,$$

ezért $\det(B) = 0$. Tehát az állítás igaz. $\square$

4. Diagonális mátrixok

Diagonális mátrixok szorzata is diagonális. Innen jön az ötlet, hogy vizsgáljuk meg a diagonális mátrixokból alkotható félcsoportokat. A fejezet első felében konstrukciókat

adok meg. Majd ezek alapján parciális műveleteket definiálok reprezentációk között, hogy azok segítségével viszonylag jó konstrukciókat adjak meg egy konkrét test $\mathbb{F}_5$ felett az $0, 1, \dots, 20$ számok reprezentációjára. Utána pedig egy teljesen más, sokkal általánosabb megközelítése következik a témának, mely ugyan nem vezetett még konkrét reprezentációhoz de hasznos lehet a további vizsgálatok szempontjából.

16. Definíció. Ha k nemnegatív egész reprezentálható egy n pozitív egészszel valamely $\mathbb{F}$ test felett úgy, hogy a reprezentációban szereplő mátrixok diagonálisak, akkor azt mondjuk, hogy k diagonálisan reprezentálható n -nel az $\mathbb{F}$ test felett.

17. Definíció. Legyen k nem negatív egész mely reprezentálható valamely n pozitív egészszel valamely $\mathbb{F}$ test felett. Ha k -nak van olyan reprezentációja n -nel az $\mathbb{F}$ felett, amiben $[nem]$ szerepel a nullmátrix, akkor azt mondjuk k -nak n $[nem]$ -nullelemes reprezentációja az $\mathbb{F}$ felett.

8. Megjegyzés. Egy adott k -nak valamely $\mathbb{F}$ test felett n lehet egyszerre nullelemes és nem nullelemes reprezentációja is.

18. Definíció. Ha egy félcsoport test feletti mátrixokkal való reprezentációjára teljesül, hogy létezik egy j pozitív egész, hogy a reprezentációban szereplő összes mátrix j -edik sora és j -edik oszlopa csupa 0 kivéve a j -edik sor j -edik elemét, ami vagy minden mátrixban 1 vagy minden mátrixban 0, akkor azt mondjuk, a reprezentációnak van egy szabad koordinátája a j, j helyen.

Vizsgáljuk meg, hogy az 5.Lemma mely esetekben teljesül az előzőek közül.

17. Lemma. Ha egy $\mathbb{F}$ test felett egy k -nak az n_0 egy nullelemes $[nem]$ -nullelemes reprezentációja, akkor bármely $n > n_0$ is ilyen reprezentáció. Ha k -nak n_0 diagonális reprezentációja akkor $n > n_0$ is az. Mindkét esetben $n > n_0$ -al való reprezentációnak van szabad koordinátája.

Bizonyítás. Az 5.Lemma konstrukciója megfelelő. Ha a kezdeti n_0 -al való reprezentáció nem-nullelemes és van szabad koordinátája, akkor a szabad koordinátát helyén minden mátrixban 1-re átírva egy szabad koordinátát kapunk. Ha nullelemes a reprezentáció, és van szabad koordinátája, akkor módosítani kell a konstrukción, hogy megőrződjön a szabad koordináta. Ebben az esetben minden mátrixhoz blokkdiagonálisan egy 1-est csatolok, és az új mátrix a nullmátrix lesz. Ezt az 5.Lemmához hasonlóan végiggondolva megkapjuk az állítást. $\square$

Állítás Ha egy $\mathbb{F}$ test felett k -nak n egy nem-nullelemes reprezentációja, akkor $k+1$ -nek $n+1$ egy nullelemes reprezentációja $\mathbb{F}$ felett.

Bizonyítás. Minden korábbi mátrixhoz hozzáveszünk egy csupa nulla sort és oszlopot, ez legyen az utolsó sor és oszlop. Emellett az így kapott n darab $(n+1) \times (n+1)$ mátrixhoz hozzáveszem a nullmátrixot, amiből adódik az állítás. $\square$

Állítás *Ha egy $\mathbb{F}$ test felett n a k olyan nullelemes reprezentációja, hogy van szabad koordinátája, akkor ugyanezen test felett $k-1$ -nek n egy nem-nullelemes reprezentációja úgy, hogy van szabad koordinátája.*

Bizonyítás. Mivel a reprezentáció nullelemes, a szabad koordináta értéke 0, ha ezt minden mátrixban 1-re változtatom a reprezentáció nyilván jó marad, csak a félcsoport nulleleme nem lesz már lineárisan független a többi mátrixtól. $\square$

18. Lemma. *Ha S az $\mathbb{F}$ test multiplikatív struktúrájának egy részfélcsoportja, akkor $|S|-1$ reprezentálható $|S|$ -sel az $\mathbb{F}$ felett. Ha S nullelemes, akkor a reprezentáció nullelemes reprezentáció, ha nem, akkor nem-nullelemes reprezentáció. Ez egy diagonális reprezentáció, melynek van szabad koordinátája.*

Bizonyítás. Legyen $n := |S|$. Tekintsük azokat az $n \times n$ -es $\mathbb{F}$ feletti mátrixokat, melyek első sorának első elemei rendre az S elemei, a többi eleme pedig 0. Ezen mátrixok nyilván félcsoportot alkotnak, és egy 1-dimenziós algebrát generálnak. $\square$

9. Megjegyzés. *Most olyan konstrukciók következnek, melyek egy vagy két szám reprezentálhatóságából egy újabb szám reprezentálhatóságára következtetnek. Ebben a fejezetben ezen konstrukciókra az is teljesül, hogy ha az adott reprezentációk diagonálisak, akkor az eredményül kapott is az lesz.*

19. Tétel. *Ha k_1 és k_2 nemnegatív egészek, és az $\mathbb{F}$ test felett reprezentálhatók $n_1 \neq 1$ -gyel illetve $n_2 \neq 1$ -gyel. Akkor ugyanezen test felett $n_1 n_2 - n_1 - n_2 + k_1 + k_2$ reprezentálható $n_1 n_2$ -vel.*

Bizonyítás. A feltételek miatt ekkor létezik S_i mátrixfélcsoport, melynek elemszáma n_i és az általa generált részalgebra dimenziója $n_i - k_i$ ahol $i = 1, 2$. Ehhez $S_1 \times S_2$ -t fogjuk reprezentálni $(n_1 n_2) \times (n_1 n_2)$ méretű mátrixokkal. Minden $S_1 \times S_2$ -ben szereplő elemhez ami két mátrixokból álló rendezett pár, rendeljük hozzá azt az blokkdiagonális mátrixot melynek első blokkja a rendezett pár első eleme ami $n_1 \times n_1$ méretű, a második blokkja a pár második eleme ami egy $n_2 \times n_2$ méretű mátrix a harmadik és egyben utolsó blokkja pedig a $(n_1 n_2 - n_1 - n_2) \times (n_1 n_2 - n_1 - n_2)$ méretű nullmátrix. Ez megtehető, mivel $n_1, n_2 \neq 1$ -ből következően $n_1 n_2 \geq n_1 + n_2$. Ez a hozzárendelés nyilván egy injektív homomorfizmus $S_1 \times S_2$ -ből az $\mathbb{F}$ feletti $(n_1 n_2) \times (n_1 n_2)$ -es mátrixok multiplikatív félcsoportjába. Ezen mátrixok

által generált részalgebra nyilván izomorf az S_1 illetve S_2 által generált részalgebrák direkt szorzatával. Így a dimenziója ezen reprezentáció generátumának megegyezik az S_1 és S_2 által generált részalgebrák dimenzióinak összegével. Tehát $n_1n_2 - ((n_1 - k_1) + (n_2 - k_2))$ reprezentálható n_1n_2 -vel. $\square$

10. Megjegyzés. A 19. Tételben ha k_1 és k_2 egy nullelemes reprezentációjából indulunk ki, akkor a kapott reprezentációja $n_1n_2 - n_1 - n_2 + k_1 + k_2$ -nek is nullelemes, ha legalább az egyik reprezentáció nem-nullelemes, akkor a kapott reprezentáció is nem-nullelemes. Az $n_1 = n_2 = 2$ esetet kivéve a kapott reprezentációnak lesz egy szabad koordinátája, illetve ha kezdetben az egyik reprezentációnak volt, abból is következik, hogy lesz szabad koordináta.

20. Tétel. Legyen k_1 és k_2 nemnegatív egészek és az $\mathbb{F}$ test felett k_1 reprezentálható n_1 -el és k_2 nem-nullelemesen reprezentálható n_2 -vel. Akkor ugyanezen test felett $k_1 + k_2$ vagy $k_1 + k_2 + 1$ reprezentálható $n_1 + n_2$ -vel.

Bizonyítás. Tegyük fel n_1n_2, k_1, k_2 számok és $\mathbb{F}$ test a tétel feltételeinek megfelelőek. Ekkor létezik S_i mátrixfélcsoport melynek elemszáma n_i és az általa generált részalgebra dimenziója $n_i - k_i$ ahol $i = 1, 2$ és S_2 -ben nem szerepel a nullmátrix, és $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Most az S_1 -nek az S_2^0 -val való egyik ideálbővítése fog a reprezentációban szerepelni ezt jelölje S . Ekkor $S = S_1 \cup S_2$ mint halmazok. Legyen γ egy S -ből az $\mathbb{F}_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ -be menő leképezés. Úgy, hogy γ az $A \in S_1$ -hez olyan blokkdiagonális mátrixot rendel, melyek első blokkja megegyezik A -val, a másik blokkja pedig egy $n_2 \times n_2$ -es nullmátrix. Illetve γ a $B \in S_2$ -höz pedig azt a blokkdiagonális mátrixot rendeli, melynek első blokkja egy $n_1 \times n_1$ -es egységmátrix, a másik blokkja pedig B . A γ injektív, mert S_2 -ban nem szerepel a nullmátrix és ekkor $\gamma(S_1)$ és $\gamma(S_2)$ diszjunktak. Lássuk be, hogy γ homomorfizmus. Bármely $a, b \in S_1$ -re és $c, d \in S_2$ -re: $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$, $\gamma(c)\gamma(d) = \gamma(cd)$ és $\gamma(a)\gamma(c) = \gamma(a)$. Már csak $\gamma(S)$ által generált részalgebra dimenzióját kell megvizsgálni. A $\gamma(S_1)$ és $\gamma(S_2)$ által generált alterek metszete vagy üres vagy az E mátrix által generált 1 dimenziós részalgebra, ahol E az $n_1 \times n_1$ -es egységmátrixból és az $n_2 \times n_2$ -es nullmátrixból képzett blokkdiagonális mátrix. Mivel S zárt a szorzásra, az S generátumában szereplő mátrixok megkaphatók az S elemeinek lineáris kombinációjaként. Ezért az S által generált részalgebra -mint vektortér megegyezik- az S által generált vektortérrel. Így az S által generált részalgebra dimenziója $n_1 + n_2 - k_1 - k_2 - 1$ vagy $n_1 + n_2 - k_1 - k_2$ attól függően, hogy $\gamma(S_1)$ és $\gamma(S_2)$ generátumában egyszerre szerepel E vagy sem. $\square$

11. Megjegyzés. Ha a 20. Tételben k_2 reprezentációjának van szabad koordinátája, akkor $k_1 + k_2$ -nek $n_1 + n_2$ egy reprezentációja, ha k_1 reprezentációja [nem-]nullelemes, akkor $k_1 + k_2$ is [nem-]nullelemes lesz. Ugyanis a szabad koordinátát átírva 1-re (ha nem 1) a $\gamma(S_2)$ generátumában nem szerepelhet E , mert az olyan lineáris kombinációknál, ahol a szabad koordináta helyén 0 van, akkor az első blokk összes eleme is 0 lesz. Továbbá, ha az egész $\gamma(S)$ -ben a szabad koordináta helyére 1-et írunk, akkor $k_1 + k_2$ -nek $n_1 + n_2$ -vel egy olyan nem-nullelemes reprezentációját kapjuk, melynek van szabad koordinátája.

21. Tétel. Ha k_1 -nek van egy nullelemes-reprezentációja n_1 -gyel az $\mathbb{F}$ test felett, és k_2 -nek egy nem-nullelemes reprezentációja n_2 -vel, akkor $k_1 + k_2$ nullelemesen reprezentálható $\mathbb{F}$ felett $n_1 + n_2$ -vel.

Bizonyítás. Legyen S_1 egy olyan mátrixfélcsoport, mellyel k_1 -et lehet nullelemesen reprezentálni, n_1 és S_2 olyan, mellyel k_2 -t lehet nem-nullelemesen reprezentálni n_2 -vel. Az S_i elemeihez rendeljük hozzá rendezett párokat úgy, hogy $a \in S_i$ -hez az $(a, i - 1)$ párt rendeljük. Ezen rendezett párok halmazát jelölje S'_i . Az S'_i -n értelmezzünk egy művelet koordinátáinként: első koordinátában legyen a mátrixszorzás, a másodikban pedig, mint két szám szorzata. Így S_i izomorf S'_i -vel, és S'_1 és S'_2 diszjunktak. Legyen $S := S'_1 \cup S'_2$ és $|S| = n_1 + n_2$. Legyen γ a következő leképezés S -ből $\mathbb{F}_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ -be: ha $a \in S$ második eleme 0, akkor $\gamma(a)$ az a két blokkból álló blokkdiagonális mátrix, melynek első blokkja az a első eleme, második pedig az $n_2 \times n_2$ -es nullmátrix; ha $b \in S$ második eleme 1, akkor $\gamma(b)$ az a két blokkból álló blokkdiagonális mátrix, melynek első blokkja az $n_1 \times n_1$ -es nullmátrix, második blokkja pedig a b első eleme. Mivel S_1 -nek eleme a nullmátrix, S_2 -nek pedig nem, ezért γ injektív és $|\gamma(S)| = |S| = n_1 + n_2$, továbbá $\gamma(S)$ -nek eleme a nullmátrix. Ekkor $\gamma(S)$ a mátrixszorzásra zárt. Nyilván bármely $a, b \in S'_1$ és $c, d \in S'_2$ -re $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$, $\gamma(c)\gamma(d) = \gamma(cd)$ és $\gamma(a)\gamma(c) = 0_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$. Az S_i által generált részalgebra -mint vektortér- izomorf a $\gamma(S'_i)$ által generálttal, tehát ezek dimenziója megegyezik. A $\gamma(S'_1)$ által generált részalgebra metszete a $\gamma(S'_2)$ által generálttal a nullmátrix. Ebből következően $\gamma(S)$ által generált részalgebra dimenziója az S_1 és S_2 által generált részalgebrák dimenzióinak összege azaz $(n_1 - k_1) + (n_2 - k_2)$. Tehát $\gamma(S)$ a $k_1 + k_2$ -nek $n_1 + n_2$ -vel való nullelemes reprezentációja. $\square$

12. Megjegyzés. Ha a 21. Tételben k_1 vagy k_2 reprezentációjának van szabad koordinátája, akkor ha a reprezentációban a szabad koordinátának megfelelő helyen az összes mátrix ezen elemét átírjuk a szabad koordinátával megegyezőre, akkor $k_1 + k_2$ nem-nullelemes reprezentációját kapjuk, melynek van szabad koordinátája.

22. Tétel. *Ha k_1 és k_2 nemnegatív egészeknek n_1 és n_2 nullelemes reprezentációja $\mathbb{F}$ felett úgy, hogy van egy $1 \leq n_1$ egész, hogy a k_1 reprezentációjának van szabad koordinátája, akkor $k_1 + k_2 - 1$ nullelemes-reprezentálható $n_1 + n_2 - 1$ -el.*

Bizonyítás. Legyen az S_1 és az S_2 a feltételeknek megfelelő mátrixfélcsoportok. Tekintsük a 21.Tétel bizonyításában szereplő S'_i és γ konstrukcióját. Ebben az esetben γ nem injektív, a nullmátrixnak két ősképe van, de a többi mátrixnak egy. A szabad koordináta helye legyen j, j ekkor az értéke 0, mivel nullelemes a reprezentáció. Töröljük $\gamma(S)$ minden elemének j -edik sorát és j -edik oszlopát. Így, mivel ezekben minden elem 0 volt, az új $(n_1 + n_2 - 1) \times (n_1 + n_2 - 1)$ -es mátrixaink félcsoportja izomorf $\gamma(S)$ -el mint félcsoport és az általuk generált részalgebrák is mint algebrák. Így egy $n_1 + n_2 - 1$ elemű mátrixfélcsoportot kaptunk melyek mérete $(n_1 + n_2 - 1) \times (n_1 + n_2 - 1)$. Ugyanúgy mint a 21.Tétel bizonyításánál a $\gamma(S)$ generátumának dimenziója itt is $(n_1 - k_1) + (n_2 - k_2)$. Tehát $k_1 + k_2 - 1$ nullelemes reprezentálható $n_1 + n_2 - 1$ -el. $\square$

13. Megjegyzés. *Ha a 22.Tételben azt is feltesszük, hogy k_2 reprezentációjának is van szabad koordinátája, akkor a $k_1 + k_2$ reprezentációjának is van.*

23. Tétel. *Egy k nemnegatív egésznek n egy nullelemes reprezentációja F test felett. Továbbá $S_1, S_2, \dots, S_h$ az $\mathbb{F}$ multiplikatív struktúrájának véges részfélcsoportjai amik nem feltétlenül különbözöek, ahol h pozitív egész. Elemszámaik pedig rendre $k_1, k_2, \dots, k_h \neq 1$. Ekkor a következők teljesülnek:*

1. *Ha $S_1, S_2, \dots, S_h$ mindegyike nullelemes akkor $k - h - 1 + \prod_{i=1}^h k_i$ -nek az $n - 1 + \prod_{i=1}^h k_i$ egy nullelemes reprezentációja.*
2. *Ha $S_1, S_2, \dots, S_h$ legalább egyike nem nullelemes akkor $k + h - \prod_{i=1}^h k_i$ -nak az $n + \prod_{i=1}^h k_i$ egy nullelemes reprezentációja.*

Bizonyítás. A 21.Tétel miatt a (2) esetben elég belátni, hogy $-h + \prod_{i=1}^h k_i$ -nak van egy nem-nullelemes-reprezentációja $\prod_{i=1}^h k_i$ -vel. Az (1) esetben pedig a 22.Tétel miatt elég belátni, hogy $-h - 1 + \prod_{i=1}^h k_i$ -nak van egy nullelemes reprezentációja $(\prod_{i=1}^h k_i) - 1$ -el melynek van szabad koordinátája. Mindkét esetben tekintsük a 18.Lemma által biztosított reprezentációkat az S_i $i = 1, \dots, h$ félcsoportokhoz, majd ezekre a reprezentációkra egymás után alkalmazzuk a 19.Tételt. Így a $\prod_{i=1}^h k_i$ -nak egy reprezentációját kapjuk

$$\left(\prod_{i=1}^h k_i\right) - \left(\sum_{i=1}^h n_i\right) + \left(\sum_{i=1}^h (n_i - 1)\right) = \left(\prod_{i=1}^h k_i\right) - h$$

-val. A (2) esetben ez egy nem-nullelemes reprezentáció, tehát készen vagyunk. Az (1) esetben ez egy nullelemes reprezentáció, de a 18.Lemma konstrukciójából adódóan -mivel $|S_i| \neq 1$ minden $i \in \{1, \dots, h\}$ -ra- a reprezentációnak van szabad koordinátája. Tehát ebben az esetben is igaz az állítás. $\square$

14. Megjegyzés. Legyen $\mathbb{F}$ egy p prímkarakterisztikájú test. A véges Abel-csoportok alaptétele miatt ha d a $p-1$ osztója, akkor van d elemű részcsoportja $\mathbb{F}$ multiplikatív struktúrájának és $d+1$ elemű részfélcsoportja, mely egy nullelemes csoport.

A fejezet korábbi eredményeinek szemléltetésére vezessük be a következő jelölést: adott egy F test, mely legyen most fix. Ha ezen test felett k reprezentálható [nem-nullelemesen n -nel, akkor jelöljük ezt a következő módon $[(n, d)]$ $(n, d)_0$ módon, ahol $d = n - k$. Ha adott két reprezentáció az előbbiek szerint akkor a 19.Tétel rájuk való alkalmazását jelöljük egymás mellé írással, a fejezetben szereplő egyéb konstrukciókat pedig, melyek ideálbővítést használnak, jelöljük $+$ -szal. Az eredményül kapott reprezentációt $=$ után írjuk. Így parciális műveleteket definiáltam a reprezentációk között. Feltételezem, hogy minden kiindulási reprezentációimnak (n, d) van szabad koordinátája és $n \neq 1$. Most ezek alapján felírom azon műveleti szabályokat, melyek olyan műveletről szólnak mely megőrzi a szabad koordinátákat.

$$(n_1, d_1)(n_2, d_2) = (n_1 n_2, d_1 + d_2)$$

$$(n_1, d_1)_0(n_2, d_2) = (n_1 n_2, d_1 + d_2)$$

$$(n_1, d_1)_0(n_2, d_2)_0 = (n_1 n_2, d_1 + d_2)_0$$

$$(n_1, d_1)_0 + (n_2, d_2) = (n_1 + n_2, d_1 + d_2) = (n_1 + n_2, d_1 + d_2)_0$$

$$(n_1, d_1) + (n_2, d_2) = (n_1 + n_2, d_1 + d_2)$$

$$(n_1, d_1)_0 + (n_2, d_2)_0 = (n_1 + n_2 - 1, d_1 + d_2)_0$$

Ezek alapján kiszámoltam, melyek a legkisebb n pozitív egészek, melyekkel diagonális-reprezentálhatóak a $k = 0, \dots, 20$ számok a $\mathbb{F}_5$ test fölött, ezen konstrukció alapján. Az $5-1$ osztói: $1, 2, 4$. Így $\mathbb{F}_5$ részfélcsoportjaiból a 18.Lemma által kapott reprezentációk: $(2, 1), (2, 1)_0, (3, 1)_0, (4, 1), (5, 1)_0$. A számolást úgy végeztem, hogy minden n -re megkerestem azt a legkisebb d -t és d_0 -t amelyre (n, d) és $(n, d_0)_0$. Így már tudtam következtetni arra, mely n -ekkel nem lehet reprezentálni egy k -t. Összehasonlításaként 9.Lemma által biztosított korlátot is odaírtam, azaz minden k esetén a legkisebb n -et, amire $k \leq n - \log_5 n$. Jelölések:

k : reprezentálni kívánt nem negatív egész,
 n_1 : legkisebb pozitív egész mellyel ez egy nem-nullelemes reprezentáció,
 n_0 : legkisebb pozitív egész melyre ez egy nullelemes reprezentáció,
 N_1 : k egy reprezentációja n_1 -gyel,
 N_0 : k egy reprezentációja n_0 -lal,
 n : $\min n_1, n_0$,
 $\log$: a 9.Lemma által biztosított korlát.

k	n_1	n_0	N_1	N_2	n	$\log$
0	1	1	(1, 1)	(1, 1) ₀	1	1
1	2	2	(2, 1)	(2, 1) ₀	2	1
2	4	3	(2, 1) + (2, 1)	(3, 1) ₀	3	3
3	4	5	(2, 1)(3, 1) ₀	(5, 1) ₀	4	4
4	6	5	(2, 1)(3, 1) ₀	(5, 1) ₀	5	5
5	7	7	(3, 1) ₀ + (4, 1)	(3, 1) ₀ + (4, 1)	7	7
6	8	9	(2, 1)(4, 1)	(5, 1) ₀ + (5, 1) ₀	8	8
7	9	9	(4, 1) + (5, 1) ₀	(4, 1) + (5, 1) ₀	9	9
8	10	10	(2, 1)(5, 1) ₀	(2, 1) ₀ (5, 1) ₀	10	10
9	12	12	(2, 1)(2, 1)(3, 1) ₀	(2, 1) ₀ (2, 1) ₀ (3, 1) ₀	12	11
10	12	13	(3, 1) ₀ (4, 1)	(4, 1) + (4, 1) + (5, 1) ₀	12	12
11	14	14	(4, 1) + (5, 1) ₀ + (5, 1) ₀	(4, 1) + (5, 1) ₀ + (5, 1) ₀	14	13
12	15	15	(2, 1)(5, 1) ₀ + (5, 1) ₀	(2, 1)(5, 1) ₀ + (5, 1) ₀	15	14
13	16	15	(3, 1) ₀ (4, 1) + (4, 1)	(3, 1) ₀ (5, 1) ₀	15	15
14	16	17	(4, 1)(4, 1)	(3, 1) ₀ (5, 1) ₀ + (2, 1) ₀	16	16
15	18	18	(2, 1)(3, 1) ₀ (3, 1) ₀	(2, 1)(3, 1) ₀ (3, 1) ₀	18	17
16	19	19	(3, 1) ₀ (5, 1) ₀ + (4, 1)	(3, 1) ₀ (5, 1) ₀ + (4, 1)	19	18
17	20	20	(2, 1)(2, 1)(5, 1) ₀	(2, 1) ₀ (2, 1) ₀ (5, 1) ₀	20	19
18	20	21	(4, 1)(5, 1) ₀	(3, 1) ₀ + (4, 1)(3, 1) ₀	20	20
19	22	22	(4, 1)(5, 1) ₀ + (2, 1) ₀	(4, 1)(5, 1) ₀ + (2, 1) ₀	22	21
20	23	23	(4, 1)(5, 1) ₀ + (3, 1) ₀	(4, 1)(5, 1) ₀ + (3, 1) ₀	23	22

A táblázat utolsó két oszlopából látható, hogy ezen kis számok esetén elég jó konstrukciókat kapunk, ha nem is mindenhol tudjuk, hogy ez a legjobb de legfeljebb 1 az eltérés. Bár ez nem jelenti azt, hogy más testek esetén esetén vagy jóval nagyobb számokra is igaz lenne ez. Annyit viszont tudunk, hogy véges testek esetén a 19.Tétel és a 18.Lemma miatt van tetszőleges egésznél nagyobb k nemnegatív egész, hogy a konstrukció által biztosított n pozitív egész eléri a 9.Lemmából következő korlátot.

Ugyanis egy d dimenziós vektortér beágyazható egy $n \times n$ -es nulla mátrix ($n \geq d$) főátlójába, ez pont annak felel meg, mintha a vektortér elemei közt értelmeznénk a koordinátánkénti szorzást műveletként.

A fejezet eddigi részében látott konstrukciókról nem tudjuk még mennyire járnak közel a fejezet elején kimondatlanul kitűzött célunkhoz, hogy határozzuk meg minden k nem-negatív egészhez és $\mathbb{F}$ testhez az összes pozitív egész n -et, mellyel k diagonálisan reprezentálható az $\mathbb{F}$ felett. Sajnos egy konkrét test esetén is nehezen átlátható az általuk biztosított feltétel k reprezentálhatóságára. Ezért a fejezet hátralévő részében kicsit általánosabb szemszögből közelítem meg a problémát. Ennek kapcsán kitérek az egyik érdekesebb eredmény természetesen adódó következményeire, elhelyezve azt általános félcsoportelméleti eredményekhez képest. Céлом arra irányult, hogy leírjam a diagonális mátrixokkal reprezentálható félcsoportokat, hogy később ezek ismeretében tudjam megválaszolni egy nem negatív egész diagonális reprezentálhatóságára vonatkozó kérdést. Jelölje $D(\mathbb{F})_n$ az $\mathbb{F}$ test feletti $n \times n$ -es diagonális mátrixok félcsoportját.

24. Tétel. $D(\mathbb{F})_n$ Abel-csoportok félhálója.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \{(A, B); A, B \in D(\mathbb{F})_n, A_{i,j} = 0 \Leftrightarrow B_{i,j} = 0\}$. Ekkor α nyilván ekvivalenciareláció. Mivel $\mathbb{F}$ test, ezért nullosztómentes, továbbá $0 * a = a * 0 = 0 \forall a \in \mathbb{F}$. Ezekből következően α kongruenciareláció is. Ekkor $D(\mathbb{F})_n$ minden α szerinti osztályában pontosan egy olyan mátrix van, melynek minden eleme 0 vagy 1. Mivel test, ezért $\mathbb{F}$ -ben csak a 0 és 1 az idempotens elemek. Világos, hogy ha B a $D(\mathbb{F})_n$ egy idempotens eleme, akkor B minden eleme a fődiagonálisban is idempotens. Mivel $D(\mathbb{F})_n$ minden α osztályában pontosan egy az előbb említett felépítésű idempotens elem van, belátható, hogy $D(\mathbb{F})_n/\alpha$ izomorf a 2^n elemű Boole-algebrával mint félhálóval, ha minden osztályból, mint reprezentáns elemet kiválasztom az előbb említett idempotens elemeket. Továbbá ezen idempotens elemek az adott α osztályban egységelemek. Legyen $C \in D(\mathbb{F})$, C' pedig legyen az a mátrix, melyet úgy kapunk C -ből, hogy annak minden nem nulla elemének vesszük az $\mathbb{F}$ testen belüli inverzét. Ekkor C és C' egy α osztályba esnek és szorzatuk ezen osztály egységeleme lesz. Így azt kaptuk, hogy minden α osztály egy csoport. Tehát $D(\mathbb{F})$ csoportok félhálója. Továbbá $D(\mathbb{F})$ kommutatív, ebből következik az állítás. $\square$

25. Tétel. Legyen $D(\mathbb{F})_n$ az $\mathbb{F}$ test feletti $n \times n$ -es diagonális mátrixok félcsoportja. Ekkor $D(\mathbb{F})_n$ minden periodikus részfélcsoportja, -speciálisan a végesek is- Abel-csoportok félhálója.

Bizonyítás. A 24.Tételből és az 1.Tételből következik az állítás. $\square$

2. Következmény. A 24.Tétel további következményei:

1. A 2.Tételből következően $D(\mathbb{F})_n$ teljesen reguláris.
2. A 3.Tételből következően $D(\mathbb{F})_n$ Abel-csoportok erős félhálójája és $D(\mathbb{F})_n$ Clifford félcsoport.

Egy, az előzőekhez hasonló következmény az alábbi is:

19. Definíció. [3] Adott egy S félcsoport és egy $A \subseteq S$ halmaz. Ekkor az A szeparátorán az $SepA$ halmazt értjük, mely S azon x elemeit tartalmazza, melyekre a következők teljesülnek: $xA \subseteq A$, $Ax \subseteq A$, $x(S-A) \subseteq (S-A)$ és $(S-A)x \subseteq (S-A)$. Ekkor $SepA$ részfélcsoportja S -nek.

26. Tétel. [3] Legyen S egy félcsoport, G pedig az S részcsoportja. Ha $A \subseteq S$, hogy $SepA \cap G \neq \emptyset$, akkor $SepA \cap G$ egy csoport.

3. Következmény. A 24.Tétel és a 26.Tétel következménye, hogy $D(\mathbb{F})_n$ minden olyan részfélcsoportja, mely valamely $A \subseteq D(\mathbb{F})_n$ halmaz szeparátora, csoportok félhálójája.

Állítás Ha adott egy $\mathbb{F}$ és S a $D(\mathbb{F})$ egy véges részfélcsoportja, akkor S elemeinek a nem 0 elemei az $\mathbb{F}$ test periodikus elemei. $\square$

A diagonális reprezentációk esete még nincs készen. Az eddigi eredmények folytatásának egy lehetséges módja megadni $D(\mathbb{F})_n$ n elemű részfélcsoportjainak felépítését az $\mathbb{F}$ véges multiplikatív részfélcsoportjaiból, s közben megfigyelni az általuk generált rész-algebra dimenziójának változását. A 25.Tétel által biztosított szemlélet mutatja hogy a korábbi konstrukciók azon alapulnak, hogy $D(\mathbb{F})_n$ két egymáshoz képest speciális elhelyezkedésű részfélcsoportja együtt milyen részfélcsoportot (reprezentációt) generál. Ezeket az elhelyezkedéseket pontosan leírva és minden esetben megvizsgálva az általuk generált részfélcsoportot, megoldást kaphatunk a felvetett problémára.

5. Egyéb reprezentációk

A [1] cikk a reguláris reprezentációt, mint speciális mátrixreprezentációt vizsgálja. A következő, már jól ismert szempont szerint, hogy egy k nem negatív egész mely pozitív egész n -ekkel reprezentálható úgy, hogy a reprezentációban szereplő S félcsoport bal [jobb] redukzív és γ hű reprezentáció a jobb [bal] reguláris reprezentáció. Ezen belül is főként a 0 reprezentációival foglalkozik.

20. Definíció. Egy S félcsoportra az mondjuk, hogy bal [jobb] redukzív, ha minden $a, b \in S$ -re teljesül, hogy ha minden $x \in S$ -re $xa = xb$ [$ax = bx$], akkor $a = b$.

21. Definíció. Legyen S egy n elemű félcsoport, rögzítsük az elemeinek egy sorrendjét. Minden $s \in S$ -re tekintsük a következő $n \times n$ -es mátrixot melynek az elemei S elemeivel vannak indexelve:

$$R^{(s)} = (r_{x,y}^{(s)})$$

ahol

$$r_{x,y}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } xs=y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{R}_{S,\mathbb{F}} : s \mapsto R^{(s)}$ -et jobb reguláris reprezentációnak hívjuk. A bal reguláris reprezentáció a jobb reguláris duálisa (ezért elég az egyik, jelen esetben a jobb reguláris reprezentációt vizsgálni).

15. Megjegyzés. [1] Egy S félcsoport jobb [bal] reguláris reprezentációja akkor és csak akkor hű ha S bal [jobb] redukzív.

22. Definíció. Legyen γ egy S véges félcsoport $n := |S|$ -fokú reprezentációja egy $\mathbb{F}$ test felett. Azt mondjuk, hogy S γ -független $\mathbb{F}$ felett, ha γ hű és $\gamma(S)$ lineárisan független $\mathbb{F}_{n \times n}$ -ben.

27. Tétel. [1] Legyen $n \leq 3$ pozitív egész. Ha k nemnegatív egész reprezentálható n -nel $\mathbb{F}$ test felett úgy, hogy a szóban forgó reprezentáció az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$, akkor $k = 0$. Ezt úgy is mondhatnánk, hogy egy legfeljebb háromelemű félcsoport minden jobb reguláris reprezentációja $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -független.

A [1] cikk mutat egy ötelemű félcsoportot, melynek $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ reprezentációja nem $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ -független. Továbbá feltesz egy kérdést, hogy a 27. Tétel igaz-e négy elemű félcsoportokra is.

Az 5.Lemma teljesül a jobb reguláris reprezentációk osztályán belül is.

28. Tétel. Ha k -nak az n egy $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ reprezentációja, akkor $n+1$ is $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ reprezentációja k -nak.

Bizonyítás. Legyen S egy n elemű bal redukzív félcsoport úgy, hogy az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ reprezentációja által generált részalgebra $n - k$ dimenziós. Vizsgáljuk meg az $n + 1$ elemű S^0 félcsoportot. Az S^0 félcsoport bal redukzív és az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}$ reprezentációja által generált részalgebra $n + 1 - k$ dimenziós. Jelölje $\hat{0}$ az S^0 nullelemét. Tekintsük ezután S^0 -nak azt a rendezését melyet úgy kapunk S rendezéséből, hogy $\hat{0}$ S minden eleménél

nagyobb. Ahhoz, hogy S^0 bal redukzív, elég belátni, hogy $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$ hű reprezentációja S^0 -nak. Bármely két S -beli elem $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$ általi képe különböző. Ekkor $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}(\hat{0})$ az az $(n+1) \times (n+1)$ -es mátrix, melynek utolsó oszlopának minden eleme 1, a mátrix többi eleme pedig 0. Az $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}(S)$ elemei mind olyan mátrixok, melyek utolsó oszlopainak minden eleme 0, kivéve az utolsót, ami 1. Ebből az is látszik, hogy $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$ az S^0 hű reprezentációja és $\hat{0}$ képe lineárisan független S képétől. Továbbá S elemeinek $\mathcal{R}_{S^0, \mathbb{F}}$ szerinti képei pontosan akkor lineárisan összefüggőek, ha az $\mathcal{R}_{S, \mathbb{F}}$ szerint azok. Tehát $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^0)$ által generált részalgebra dimenziója $n+1-k$. $\square$

4. Következmény. *A 28.Lemma és a [1] cikkben szereplő ötelemű konstrukció nem meglepő következménye, hogy a 27.Tétel állítása nem teljesül ötnél több elemű félcsoportok esetén sem.*

A témában további vizsgálatokra ad lehetőséget ha a reprezentációkat egy bizonyos félcsoportosztályra szorítjuk meg és abban az esetben vizsgáljuk a nem negatív egészek reprezentálhatóságát. A következő konstrukció azért készült, mert szerettem volna reprezentálni az n elemű ciklikus félcsoportot ezt sajnos csak $(n+1) \times (n+1)$ -es mátrixokkal tudtam.

29. Tétel. *Legyen S egy az a elem által generált ciklikus félcsoport ami nem csoport. Ekkor 1 reprezentálható bármely $|S|+1$ -el úgy hogy a reprezentáció S^0 -át használja, ahol S^0 azt a félcsoportot jelöli ahol S -et egy nullelemmel bővítjük.*

Bizonyítás. A nullelem képe a nullmátrix, ha a többi mátrix hű reprezentációja S -nek és lineárisan függetlenek akkor készen vagyunk. Az S minden esetben felfogható egy a elem által generált szabadfélcsoportnak amelyen egy a következő alakú definiáló egyenlőség teljesül $a^i = a^{n+1}$ valamely $0 < i \leq n$ ahol $n = |S|$, mivel S nem csoport $0 < i$. Ekkor S reprezentálásához elég egy olyan A mátrixot találni amely kielégíti az $A^i = A^{n+1}$ egyenlőséget és $A^i \neq A^n$ is teljesül. Az A mátrix egy $(n+1-i) \times (n+1-i)$ -es és egy $i \times i$ -es blokkból áll. Az első blokk legyen az $(1, 2, 3, \dots, n-i-1, n-i)$ permutációnak megfelelő permutációmátrix, ez egy $n-i$ -ed rendű permutáció. A másik blokk pedig az a mátrix melynek a nem-nulla elemei a főátló felett helyezkednek el és ezek 1-esek. Ekkor a második blokk i -edik hatványa a nullmátrix, az első blokk pedig periodikus, és a periódusa $n+1-i$, tehát teljesül a definiáló egyenlőség. Így A hatványai egy hű reprezentációját adják S -nek. Az A hatványainak lineáris függetlenségét kell még belátni. A második blokk $j < i$ hatványai úgy néznek ki, hogy a főátló fölötti j -edik átlóban vannak csak 1-esek, ezért A első $i-1$ hatványai lineárisan függetlenek egymástól és a többi hatványtól. Az $A^i, A^{i+1}, \dots, A^{n-i}$ elemekben pedig az első blokk az $n-i$ elemű ciklikus csoport reguláris reprezentációjával egyezik meg, tehát ezek lineárisan függetlenek. $\square$

Összefoglalás

Dolgozatomban a 14. Definícióban megadott fogalmat vizsgáltam. Először általános esetben, sikerült megadni a pontos feltételét egy k nemnegatív egész szám pozitív egészszel való reprezentálhatóságának valamely $\mathbb{F}$ test felett. Ezt tekintem dolgozatom legfőbb eredményének. Viszont ezzel még nem zárul le a téma vizsgálata, ugyanis tehetünk megszorításokat a vizsgált reprezentációkra, s így e témában még bőven van lehetőség újabb és újabb vizsgálatokra. Ha például a reprezentált félcsoportosztályra teszünk megszorítást, azt tehetjük olyan céllal, hogy többet tudjunk meg ezen félcsoportosztályról. A dolgozatomban két ilyen megszorítást vizsgáltam, az egyik a null-reprezentálhatóság a másik pedig a diagonálisan reprezentálhatóság. A null-reprezentálhatóságot majdnem teljesen sikerült leírni. A 0-ának 2, 3, 4-gyel való null-reprezentálhatósága viszont nyitott kérdés maradt, leszámítva a 2-vel az $\mathbb{F}_2$ test feletti null-reprezentálhatóságot (15. Tétel). Ebben az esetben bár elemi esetvizsgálatot végeztem; -ez sajnos nem vezet közelebb a kérdés tetszőleges test feletti megoldásához- a meglepő eredmény miatt mégis leírtam. Meglepő, mert itt a többi megoldott esettel ellentétesen nem esik egybe a reprezentálhatóság és null-reprezentálhatóság feltétele. A diagonális reprezentálhatóság esetén viszont még nem teljesen kidolgozott, itt megadtam néhány konstrukciót és felvázoltam a további vizsgálatok egy lehetséges menetét. Meglepő, hogy itt csak a diagonális mátrixok multiplikatív struktúráját vizsgálva -pedig azt hihetnénk ezt ismerjük- egy nem triviális kérdést kapunk (diagonális reprezentálhatóság). Meg kell említenem még az 5. Lemmát, ugyanis érdemes minden ilyen fajta vizsgálatot azzal kezdeni, hogy az említett lemma teljesül-e az adott reprezentációk osztályán belül. Beláttam, hogy az általam vizsgált esetekben igen és [1] cikkben vizsgált jobb-reguláris reprezentációk között is igaz. Az előbb felsorolt eredmények részben a [1] cikkben szereplő kérdésekre adnak választ, részben pedig hozzátesznek annak eredményeihez.

Hivatkozások

- [1] A. Nagy, Representable nonnegative integers over a field.
- [2] ———, Special Classes of Semigroups, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 2001.*
- [3] ———, On the separator of subset of semigroups, *Semigroup Forum* **83** (2011), 289–303.

- [4] *A.H. Clifford and G.B. Preston, The algebraic theory of semigroups, vol. I,II, American Mathematical Society, Providence/Rhode Island, I(1961),II(1967).*
- [5] *J.M. Howie, An introduction of semigroup theory, Academic Press, London/New York/San Francisco, 1976.*
- [6] *M. Petrich, Lectures in semigroups, Akademie-Verlag, Berlin, 1977.*