

TDK DOLGOZAT

Harmadrendű Fuchs-féle egyenlet dimenziójának vizsgálata

Ivanics Péter

matematika BSC szak

Témavezető: dr. Szabó Szilárd
adjunktus
BME-TTK Matematika Intézet
Geometria Tanszék



2011. december 15.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
1.1. Geometriai háttér és fő eredmény	2
1.2. A megoldás módszere	3
1.3. Másodrendű eset	5
2. A harmadrendű eset általános vizsgálata	6
2.1. Az egyenletrendszer felírása	6
2.2. A szingularitásokra vonatkozó feltételek	7
2.3. A látszólagos szingularitásokra vonatkozó feltételek	8
2.4. A feltételek összesítése	12
3. Az $n = 2$ eset	12
4. Az $n = 3$ eset	13
4.1. A mátrix konfluens Vandermonde-alakra hozása	15
4.2. A konfluens Vandermonde-determinánsok kiszámítása	16
5. A további kutatás irányai	18

1. Bevezető

1.1. Geometriai háttér és fő eredmény

A dolgozat tárgya egy speciális, látszólagos szingularitásokkal rendelkező lineáris differenciálegyenlet együtthatóinak vizsgálata. A kutatás geometriai motivációjának megértéséhez először is tekintsünk egy Σ Riemann-felületet, adott $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ különböző pontokkal. Rögzítsünk egy E , m rangú topologikus vektornyalábot a Σ felett, és vegyük a D *logaritmikus konnexiókat* E -n. Egy konnexió egy elsőrendű differenciáloperátor $D: E \rightarrow E \otimes \Omega_\Sigma^1$, ahol Ω_Σ^1 a Σ -feletti 1-formákat jelöli, továbbá D $\mathbb{C}$ -lineáris és kielégíti a Leibniz-szabályt. Speciálisan egy logaritmikus konnexió $D: E \rightarrow E \otimes \Omega_\Sigma^1(\log(P))$, ahol $\Omega_\Sigma^1(\log(P))$ a Σ feletti meromorf 1-formákat jelöli. Így a logaritmikus konnexió egy $t \notin P$ pont körül $D = d + A(z)dz$ alakú – ahol $A(z)$ egy mátrix értékű holomorf függvény –, egy $t_i \in P$ körül pedig $D = d + \frac{A(z)}{z-t_i}dz$ alakú. Az $A(t_i)$ sajátértékeit $\mu_{i,k}$ -val jelöljük, ahol $k = 1, \dots, m$.

Legyen $\mathcal{M} = \{(E, D)\} / \sim$ a *logaritmikus konnexiók modulustere*, ahol $\sim$ a konnexió-izomorfizmusok által definiált konnexiók közötti ekvivalenciareláció. $\mathcal{M}$ következő tulajdonságai ismertek [2] alapján:

(i) $\mathcal{M}$ egy $2N$ dimenziós, komplex algebrai varietás, ahol

$$N = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = \frac{m(m-1)}{2}(n-1) - m + 1. \quad (1.1)$$

(ii) $\mathcal{M}$ -en létezik holomorf szimplektikus struktúra.

Keresünk $\mathcal{M}$ egy sűrű nyílt halmazán ($\mathcal{M}^0$) egy kanonikus koordinátarendszert. A modulustér és a koordinátarendszer tanulmányozása további geometriai problémákhoz kapcsolódik, mint például Riemann-felületek fundamentális csoportja vagy a csomóelmélet. Bizonyos, a modulustérből származó objektumoknak számelméleti jelentősége is van.

A dolgozat fő eredménye:

1. Tétel. *Legyen most Σ a Riemann-gömb, ekkor létezik $\mathcal{M}$ -nek $m = 3$, $n = 3$, generikus $\mu_{i,k}$ -k esetén egy sűrű, nyílt részhalmaza és egy 12-edfokú V affin részvarietás $T^*(\mathbb{C} \setminus P)^4$ -en, amelyre $\mathcal{M}^0 = T^*((\mathbb{C} \setminus P)^4 \setminus \Delta) \setminus V$. (Δ a nagyátlót jelöli.)*

Következmény: $\mathcal{M}^0$ -on kapunk egy kanonikus koordinátarendszert.

1.2. A megoldás módszere

2. Tétel. Rögzített Σ Riemann-felület, P ponthalmaz, rögzített E m rangú vektornyaláb és $\mu_{i,k}$ exponensek esetén az $\mathcal{M}$ modulustér minden generikus eleme reprezentálható olyan m -edrendű skaláris lineáris közönséges differenciálegyenlettel, amelynek $t_0, t_1, \dots, t_n$ -ben $\mu_{i,k}$ sajátértékekkel jellemzett szingularitása és valamely $Q = \{q_1, \dots, q_N\}$ pontokban – ahol $N = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$ – látszólagos szingularitása van:

$$w^{(m)}(z) + B_1(z)w^{(m-1)}(z) + \dots + B_m(z)w(z) = 0, \quad (1.2)$$

ahol $B_k(z)$ -k k -adrendű formák k -adrendű pólussal P -ben, ill. Q -ban. Az ilyen egyenletet Fuchs-félének nevezzük. [3]

Egy $q_j \in \mathbb{CP}^1$ pontot látszólagos szingularitásnak nevezünk, ha létezik a megoldásoknak olyan alaprendszere, amely reguláris függvényekből áll.

Habár a [3]-ban a 2. tételt bebizonyítják, indokolt a probléma további vizsgálata. Az 1. tétel a 2. tételnek az első, lehetséges legkisebb nemtriviális példája, ahol $V \neq \emptyset$. Bizonyításomban a [3]-ban felvázolttól eltérő módszereket használok.

Célunk érdekében először felírjuk a differenciálegyenlet együtthatóit két polinom hányadosaként, ahol a nevezőbeli polinomnak éppen a szingularitások lesznek a gyökei.

$$B_1(z) = \frac{G(z)}{\psi(z)}, \quad B_2(z) = \frac{H(z)}{\psi^2(z)}, \dots, \quad B_m(z) = \frac{K(z)}{\psi^m(z)},$$

$$G(z) = G_0 + G_1 z + \dots + G_{n+N-1} z^{n+N-1}, \quad (1.3a)$$

$$H(z) = H_0 + H_1 z + \dots + H_{2(n+N-1)} z^{2(n+N-1)}, \quad (1.3b)$$

...

$$K(z) = K_0 + K_1 z + \dots + K_{m(n+N-1)} z^{m(n+N-1)}, \quad (1.3c)$$

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^n (z - t_i) \prod_{j=1}^N (z - q_j). \quad (1.3d)$$

A differenciálegyenlet vizsgálatát a klasszikus Frobenius-módszerrel végezzük.

3. Tétel. Ha az (1.2) egyenletben a $(t_i - z)G(z)/\psi(z)$, $(t_i - z)^2 H(z)/\psi^2(z), \dots$ holomorf 1, 2 stb. rendű formák egy t_i szingularitás egy környezetében, akkor a $w(z)$ megoldások $(z - t_i)^{\mu_{i,1}}, (z - t_i)^{\mu_{i,2}}, \dots, (z - t_i)^{\mu_{i,m}}$ függvények szerint viselkednek egy t_i csúcsú szögtartományban, ahol a $\mu_{i,k}$ -k az ún. indiciális egyenlet megoldásai. (Hasonló igaz a q_j látszólagos szingularitásokra is.)

Az indiciális egyenletet úgy állítjuk elő, hogy a differenciálegyenletbe a $\sum_{l=1}^{\infty} a_l (z - t_i)^{l+\mu_i}$ alakú megoldásfüggvényt helyettesítjük be, majd vesszük a legkisebb

z kitevőhöz tartozó együtthatót. Behelyettesítjük t_i -t, majd egyenlővé tesszük nullával:

$$\mu_i(\mu_i - 1) \cdots (\mu_i - m + 1) + G_0^{t_i} \mu_i(\mu_i - 1) \cdots (\mu_i - m + 2) + \cdots + K_0^{t_i} = 0, \quad (1.4)$$

ahol $G_0^{t_i}, \dots, K_0^{t_i}$ a $B_1(z), \dots, B_m(z)$ függvények Laurent-sorainak első, nem feltétlen nulla tagjai a t_i helyen. Az indiciális egyenlet $\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,m}$ sajátértékeit a t_i -hez tartozó exponenseknek nevezzük. Továbbá kettő multiplicitású esetben igazak a következők:

- (i) Ha $\mu_{k_1} - \mu_{k_2} \notin \mathbb{Z}$, akkor a megoldások $w_{k_1} = z^{\mu_{k_1}} \cdot C_1(z)$, $w_{k_2} = z^{\mu_{k_2}} \cdot C_2(z)$ alakúak, ahol $C_1(z)$ és $C_2(z)$ holomorf függvények.
- (ii) Ha $\mu_{k_1} - \mu_{k_2} \in \mathbb{Z}$, akkor a megoldások $w_{k_1} = z^{\mu_{k_1}} \cdot C_1(z)$, $w_{k_2} = z^{\mu_{k_2}} \cdot C_2(z) + \kappa_{k_1, k_2}^i w_{k_1} \log(z - t_i)$ alakúak, ahol $C_1(z), C_2(z)$ holomorf, $\kappa_{k_1, k_2}^i \in \mathbb{C}$ konstans.
- (iii) Ha $\mu_{k_1} = \mu_{k_2}$, akkor a megoldások $w_{k_1} = z^{\mu_{k_1}} \cdot C_1(z)$, $w_{k_2} = z^{\mu_{k_2}} \cdot C_2(z) + \kappa_{k_1, k_2}^i w_{k_1} \cdot \log(z - t_i)$ alakúak, ahol $C_1(z), C_2(z)$ holomorf, $\kappa_{k_1, k_2}^i \in \mathbb{C}$, de $\kappa_{k_1, k_2}^i \neq 0$.

Magasabb multiplicitású esetben analóg képletek érvényesek.

Mivel a modulustérben minden t_i -hez $\mu_{i,k}$ -k rögzítettek, ezért ismeretükben az indiciális egyenletből kifejezhetjük $G_0^{t_i}, H_0^{t_i}, \dots$ értékeket, sőt, mint látni fogjuk, a $G_0^{q_i}, H_0^{q_i}, \dots$ értékeket is az indiciális egyenletből fogjuk nyerni.

További feltételeket ad az (1.2)-beli együtthatókra, hogy a megoldásfüggvényekben nem szerepelhetnek logaritmikus tagok, mert akkor nem kapnánk látszólagos szingulartitást, hiszen a logaritmusfüggvény nem reguláris nullában.

Klasszikusan ismert, hogy mindezen feltételek nem lineárisan függetlenek, a reziduumszám tétele miatt az összes szingularitás összes sajátértékére fennáll az ún. Fuchs-féle reláció [1]:

$$\sum_{i=1, k=1}^{n, m} \mu_{i,k} = 1. \quad (1.5)$$

Az derül ki, hogy a fenti feltételek összessége még mindig N szabadsági fokot hagy, ezért bevezethetünk $p_1, \dots, p_N$ koordinátákat. Később fogjuk látni, hogy ezek mik lehetnek.

A megoldás során felhasználjuk a *konfluens Vandermonde-mátrixok* determinánsára vonatkozó tételt. Ezek olyan Vandermonde-típusú mátrixok, ahol a sorokban nem csak különböző változók szerepelnek egyre növekvő hatványon, hanem a sorok saját változójuk szerinti deriváltjai is. Előfordulhatnak magasabb rendű deriváltak, de akkor minden kisebb rendű deriválnak is szerepelnie kell! Sőt, megengedett, hogy ne minden változónak szerepeljen azonos rendű deriváltja! A sorok a deriválás rendje, azon belül a változók indexe szerinti sorrendben követik egymást a mátrixban. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_k$ a mátrix

változói, és legyenek rendre $n_1, n_2, \dots, n_k$ a mátrixban szereplő deriváltrendjük. Ekkor a konfluens Vandermonde-determináns valamilyen $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ állandóval:

$$K \cdot \prod_{\forall i < j \text{ párra}} (x_j - x_i)^{(n_i+1) \cdot (n_j+1)}. \quad (1.6)$$

1.3. Másodrendű eset

A másodrendű esetet teljes egészében a [4] cikk tárgyalja, itt csak a gondolatmenetet és az eredményeket foglalom össze, mert a harmadrendű eset vizsgálata erre épül.

Másodrendű differenciálegyenletnél ($m=2$) $\mathbb{CP}^1$ -ben az $n+1$ db szingularitás mellett (1.1) szerint $N=n-2$ látszólagos szingularitásunk van. Az (1.3) szerint $\deg G(z) = 2n-3$, $\deg H(z) = 4n-6$, $\deg \psi(z) = 2n-2$ polinomok, az (1.2) egyenlet megfelelő alakja a következő:

$$w''(z) + \frac{G(z)}{\psi(z)} w'(z) + \frac{H(z)}{\psi^2(z)} w(z) = 0.$$

A $G(z)$ -ből és $H(z)$ -ből összesen $6n-7$ db ismeretlen együtthatónk van. Nézzük, hány egyenletet tudunk felírni!

A Frobenius-módszerrel dolgozva kapjuk az (1.4)-nek megfelelő indiciális egyenletet:

$$\mu_i(\mu_i - 1) + G_0^{t_i} \mu_i + H_0^{t_i} = 0.$$

Így van $n+1$ egyenletünk $G(z)$ együtthatóira és $n+1$ egyenletünk $H(z)$ együtthatóira:

$$\begin{aligned} G_0^{t_i} &= 1 - (\mu_{i,1} + \mu_{i,2}), \\ H_0^{t_i} &= \mu_{i,1} \cdot \mu_{i,2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

A látszólagos szingularitásokra a $\mu_{j,k}$ -k meghatározottak, az indiciális egyenlet egyik gyökének 0-nak kell lennie, hogy $w_1(0) \neq 0$ teljesüljön. Ez rögtön azt eredményezi, hogy $H_0^{q_j} = 0$. Az indiciális egyenlet másik gyöke nem lehet 1, hiszen akkor (1.7)-nek megfelelően $G_0^{q_j} = 0$ lenne, de ez nem lehetséges. Így a minimális érték a $\mu_{j,2} = 2$. Vagyis:

$$\begin{aligned} G_0^{q_j} &= -1, \\ H_0^{q_j} &= 0. \end{aligned}$$

Ez újabb $2(n-2)$ db egyenlet.

A $\mu_{j,1} - \mu_{j,2} \in \mathbb{Z}$ miatt ki kell zárni a logaritmikus tagokat, ez újabb $n-2$ egyenlet. Ezt a feltétel a [4]-beli 3.1-es lemma fogalmazza meg, a G és a H együtthatóira együtt vonatkozik:

$$H''(q_j) + H'(q_j) \cdot (H'(q_j) + G'(q_j)). \quad (1.8)$$

Végül még szabadon megválaszthatjuk $H'(q_j)$ értékeket a p_j koordinátáknak, újabb $n-2$ egyenletet kapva. Így összesen $6n-6$ egyenletünk van, de a rangot eggyel csökkenti az (1.5) reláció:

$$\sum_{i=0}^n \mu_{i,1} + \mu_{i,2} = 1.$$

Ezzel valóban egy legfeljebb $6n-7$ rangú lineáris egyenletrendszerhez jutottunk G és H együtthatóira.

Az egyenletrendszer alakjából azonnal következik, hogy G $2n-2$ együtthatójára $2n-1$ egyenletünk van, és az (1.5) Fuchs-reláció miatt ebből csak 1 nem független, tehát G együtthatói egyértelműen meghatározhatóak. Emiatt az (1.8)-beli $G-H$ csatolás megszűnik, a [4]-ben pedig bizonyítást nyer, hogy H együtthatóira vonatkozó egyenletrendszer mátrixa egy $(4n-5) \times (4n-5)$ -ös konfluens Vandermonde-mátrix, amelynek determinánsa (1.6) miatt nem 0, vagyis a mátrix teljes rangú. Tehát másodrendű esetben valóban teljesül a 2. tétel.

2. A harmadrendű eset általános vizsgálata

2.1. Az egyenletrendszer felírása

$\mathbb{CP}^1$ -ben most is $n+1$ db valódi, és (1.1) szerint $N = 3n-5$ db látszólagos szingularitásunk van. Legyenek ezek:

$$P = \{t_0, \dots, t_n\}, \quad Q = \{q_1, \dots, t_{3n-5}\},$$

ahol t_0 -át a végtelenbe választjuk. Az (1.2) differenciálegyenlet együtthatóira (1.3)-nak megfelelően bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} G(z) &= G_0 + \dots + G_{4n-6} z^{4n-6}, \\ H(z) &= H_0 + \dots + H_{8n-12} z^{8n-12}, \\ I(z) &= I_0 + \dots + I_{12n-18} z^{12n-18}, \\ \psi(z) &= \prod_{i=1}^n (z - t_i) \prod_{j=1}^{3n-5} (z - q_j). \end{aligned}$$

Ez összesen $24n-33$ együttható. A differenciálegyenlet:

$$w'''(z) + \frac{G(z)}{\psi(z)} w''(z) + \frac{H(z)}{\psi^2(z)} w'(z) + \frac{I(z)}{\psi^3(z)} w(z) = 0. \quad (2.1)$$

2.2. A szingularitásokra vonatkozó feltételek

A (2.1) megoldását t_i környezetében Frobenius-módszerrel keressük, vagyis a $w(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(z-t_i)^{l+\mu_i}$ alakot írjuk be az egyenletbe. A 3. tétel szerint eljárva az együtt-hatók helyett is azok Laurent-sorát kell szerepeltetnünk. Adott t_i ponthoz a $G_0^{t_i}$, $H_0^{t_i}$, $I_0^{t_i}$ rendre a Laurent-sor -1 ., -2 ., -3 . tagjai. Az $i = 1, \dots, n$ pontokra:

$$G_0^{t_i} = \lim_{z \rightarrow t_i} (z-t_i) \frac{G(z)}{\psi(z)} = \frac{G_0 + G_1 t_i + \dots + G_{4n-6} t_i^{4n-6}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (t_i - t_k) \prod_{l=1}^{3n-5} (t_i - q_l)}, \quad (2.2a)$$

$$H_0^{t_i} = \lim_{z \rightarrow t_i} (z-t_i)^2 \frac{H(z)}{\psi^2(z)} = \frac{H_0 + H_1 t_i + \dots + H_{8n-12} t_i^{8n-12}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (t_i - t_k)^2 \prod_{l=1}^{3n-5} (t_i - q_l)^2}, \quad (2.2b)$$

$$I_0^{t_i} = \lim_{z \rightarrow t_i} (z-t_i)^3 \frac{I(z)}{\psi^3(z)} = \frac{I_0 + I_1 t_i + \dots + I_{12n-18} t_i^{12n-18}}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (t_i - t_k)^3 \prod_{l=1}^{3n-5} (t_i - q_l)^3}. \quad (2.2c)$$

Ugyanezzel a számítással t_0 -ra a következők adódnak:

$$G_0^{t_0} = G_{4n-6},$$

$$H_0^{t_0} = H_{8n-12},$$

$$I_0^{t_0} = I_{12n-18}.$$

Ekkor az (1.4)-nek megfelelő indiciális egyenletet kapjuk:

$$\mu_i(\mu_i - 1)(\mu_i - 2) + G_0^{t_i} \mu_i(\mu_i - 1) + H_0^{t_i} \mu_i + I_0^{t_i} = 0.$$

μ_i -re rendezve:

$$\mu_i^3 + (G_0^{t_i} - 3)\mu_i^2 + (H_0^{t_i} - G_0^{t_i} + 2)\mu_i + I_0^{t_i} = 0.$$

A Viète-formulák alapján (a gyököket $\mu_{i,k}$ módon indexelve):

$$\mu_{i,1} + \mu_{i,2} + \mu_{i,3} = 3 - G_0^{t_i}, \quad (2.4a)$$

$$\mu_{i,1}\mu_{i,2} + \mu_{i,1}\mu_{i,3} + \mu_{i,2}\mu_{i,3} = H_0^{t_i} - G_0^{t_i} + 2, \quad (2.4b)$$

$$\mu_{i,1}\mu_{i,2}\mu_{i,3} = -I_0^{t_i}. \quad (2.4c)$$

Kifejezzük $G_0^{t_i}$, $H_0^{t_i}$, $I_0^{t_i}$ értékeket, végső soron pedig az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk G , H és I együtthatóira (mindenhol $i = 1, \dots, n$):

$$G_{4n-6} = 3 - (\mu_{0,1} + \mu_{0,2} + \mu_{0,3}), \quad (2.5a)$$

$$\sum_{k=0}^{4n-6} t_i^k G_k = [3 - (\mu_{i,1} + \mu_{i,2} + \mu_{i,3})] \prod_{k=1, k \neq i}^n (t_i - t_k) \prod_{l=1}^{3n-5} (t_i - q_l), \quad (2.5b)$$

$$H_{8n-12} = \mu_{0,1}\mu_{0,2} + \mu_{0,1}\mu_{0,3} + \mu_{0,2}\mu_{0,3} - (\mu_{0,1} + \mu_{0,2} + \mu_{0,3}) + 1, \quad (2.5c)$$

$$\sum_{k=0}^{8n-12} t_i^k H_k = [\mu_{i,1}\mu_{i,2} + \mu_{i,1}\mu_{i,3} + \mu_{i,2}\mu_{i,3} - (\mu_{i,1} + \mu_{i,2} + \mu_{i,3}) + 1] \cdot \prod_{k=1, k \neq i}^n (t_i - t_k)^2 \prod_{l=1}^{3n-5} (t_i - q_l)^2, \quad (2.5d)$$

$$I_{12n-18} = -\mu_{0,1}\mu_{0,2}\mu_{0,3}, \quad (2.5e)$$

$$\sum_{k=0}^{12n-18} t_i^k I_k = (-\mu_{i,1}\mu_{i,2}\mu_{i,3}) \prod_{k=1, k \neq i}^n (t_i - t_k)^3 \prod_{l=1}^{3n-5} (t_i - q_l)^3. \quad (2.5f)$$

2.3. A látszólagos szingularitásokra vonatkozó feltételek

Teljesen hasonlóan járunk el, mint a szingularitások esetében, minden q_j ponthoz ($j = 1, \dots, 3n-5$) meghatározható $G_0^{q_j}$, $H_0^{q_j}$, $I_0^{q_j}$ a (2.2)-vel analóg módon:

$$\begin{aligned} G_0^{q_j} &= \lim_{z \rightarrow q_j} (z - q_j) \frac{G(z)}{\psi(z)} = \frac{G_0 + G_1 q_j + \dots + G_{4n-6} q_j^{4n-6}}{\prod_{k=1}^n (q_j - t_k) \prod_{l=1, l \neq j}^{3n-5} (q_j - q_l)}, \\ H_0^{q_j} &= \lim_{z \rightarrow q_j} (z - q_j)^2 \frac{H(z)}{\psi^2(z)} = \frac{H_0 + H_1 q_j + \dots + H_{8n-12} q_j^{8n-12}}{\prod_{k=1}^n (q_j - t_k)^2 \prod_{l=1, l \neq j}^{3n-5} (q_j - q_l)^2}, \\ I_0^{q_j} &= \lim_{z \rightarrow q_j} (z - q_j)^3 \frac{I(z)}{\psi^3(z)} = \frac{I_0 + I_1 q_j + \dots + I_{12n-18} q_j^{12n-18}}{\prod_{k=1}^n (q_j - t_k)^3 \prod_{l=1, l \neq j}^{3n-5} (q_j - q_l)^3}. \end{aligned}$$

Másrészt az indiciális egyenletből, a (2.4)-hez hasonlóan ($i \rightarrow j$, $t_i \rightarrow q_j$), ismét egy lineáris egyenletrendszert kapunk az együtthatókra. Itt nem ismerjük a $\mu_{j,k}$ értékeket, de meghatározhatjuk őket.

Az indiciális egyenlet gyökei nem lehetnek egyenlők, mert akkor megjelenének el nem tűnő logaritmikus tagok a 4. oldalon tárgyalt (iii) eset miatt. Továbbá $\mu_{j,1} = 0$, mert:

$$w_1(q_j) = \sum_{l=\mu_{j,1}}^{\infty} a_l (z - q_j)^l \neq 0.$$

Tehát a lehetséges sajátértékek: $\mu_{j,1} = 0$, $\mu_{j,2} = 1$, $\mu_{j,3} = 2 \forall j$ -re. Azonban ekkor $G_0^{q_j} = 0$, $H_0^{q_j} = 0$, $I_0^{q_j} = 0$, így q_j -ben nincs látszólagos szingularitás.

A következő lehetőség $\mu_{j,1} = 0$, $\mu_{j,2} = 1$, $\mu_{j,3} = 3 \forall j$ -re. Ekkor a $G_0^{q_j} = -1$, $H_0^{q_j} = 0$, $I_0^{q_j} = 0$ egyenlőségekhez jutunk, amelyekkel az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk (mindenütt $j = 1, \dots, 3n-5$):

$$\sum_{k=0}^{4n-6} q_j^k G_k = - \prod_{k=1}^n (q_j - t_k) \prod_{l=1, l \neq j}^{3n-5} (q_j - q_l), \quad (2.7a)$$

$$\sum_{k=0}^{8n-12} q_j^k H_k = 0, \quad (2.7b)$$

$$\sum_{k=0}^{12n-18} q_j^k I_k = 0. \quad (2.7c)$$

Feltétel a logaritmikus tagok eltűnésére:

Ebben a szakaszban kiszámítjuk, milyen feltételt jelent az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszerben a logaritmikus tagok eltűnése. Itt már bonyolultabb a helyzet, mint a másodrendű eset [4]-beli 3.1-es lemmájában, ezért más módszerhez kell folyamodnunk. Bár [3] is tartalmaz általános eredményeket, én nem ezt követve jártam el.

A választott $\mu_{j,k}$ sajátértékek esetén a differenciálegyenlet megoldásaiban a 4. oldal (ii) esete miatt megjelennek logaritmikus tagok κ_{k_1, k_2}^j együtthatóval, ahol a (k_1, k_2) szám-pár azt jelzi, hogy a μ_{j, k_1} és μ_{j, k_2} sajátértékekhez tartozik a logaritmikus tag. Ennek alapján a (2.1) egyenlet három megoldása a q_j pont környezetében:

$$\begin{aligned} w_1(z - q_j) &= a_0 + a_1(z - q_j) + a_2(z - q_j)^2 + \dots + \kappa_{1,2} \log(z - q_j) \cdot w_2(z - q_j) + \\ &\quad + \kappa_{1,3} \log(z - q_j) \cdot w_3(z - q_j), \\ w_2(z - q_j) &= b_1(z - q_j) + b_2(z - q_j)^2 + \dots + \kappa_{2,3} \log(z - q_j) \cdot w_3(z - q_j), \\ w_3(z - q_j) &= c_3(z - q_j)^3 + c_4(z - q_j)^4 + \dots \end{aligned}$$

Ezzel a három függvénnyel és egy általános $w(z)$ megoldásfüggvénnyel elkészíthető egy Wronski-determináns, amely $w'''(z)$ együtthatójával történő leosztással (2.1) alakúra hozható. Az így nyert együtthatókat Laurent-sorba fejtjük, majd összehasonlítjuk az eredeti egyenlet együtthatóinak Laurent-soraival, nullának választva a κ_{k_1, k_2}^j -ket. A Wronski-determináns számításakor w_k -kban elég elmenni az első pár tagig, hiszen a magasabb rendűek nem fognak járulékot adni a z -ben alacsonyabb kitevőjű tagok együtthatóihoz. (A számításokat Mathematica 7.0 szoftverrel végeztem.)

$$\begin{aligned} \frac{G(z)}{\psi(z)} &= -\frac{1}{z - q_j} + \left(-\frac{b_2}{b_1} - \frac{2c_4}{c_3} \right) + \mathcal{O}(z - q_j), \\ \frac{H(z)}{(\psi(z))^2} &= \frac{2b_2}{b_1} \frac{1}{z - q_j} + \left(\frac{2a_1b_2 - 2a_2b_1}{a_0b_1} + \frac{4b_1b_2c_4 - 2b_2^2c_3}{b_1^2c_3} \right) + \mathcal{O}(z - q_j), \\ \frac{I(z)}{(\psi(z))^3} &= \frac{2a_2b_1 - 2a_1b_2}{a_0b_1} \frac{1}{z - q_j} + \frac{2(a_2b_1 - a_1b_2)(2b_1c_4 - b_2c_3)}{a_0b_1^2c_3} + \mathcal{O}(z - q_j). \end{aligned}$$

Másrészt az együtthatók Laurent-sorai, a (2.7)-ből ismert $G_0^{q_j}$, $H_0^{q_j}$, $I_0^{q_j}$ értékeket már felhasználva:

$$\begin{aligned}\frac{G(z)}{\psi(z)} &= -\frac{1}{z-q_j} + G_1^{q_j} + \mathcal{O}(z-q_j), \\ \frac{H(z)}{(\psi(z))^2} &= 0 + \frac{H_1^{q_j}}{z-q_j} + H_2^{q_j} + \mathcal{O}(z-q_j), \\ \frac{I(z)}{(\psi(z))^3} &= 0 + \frac{I_1^{q_j}}{(z-q_j)^2} + \frac{I_2^{q_j}}{z-q_j} + I_3^{q_j} + \mathcal{O}(z-q_j).\end{aligned}$$

A kétféleképpen kapott Laurent-sorok azonos z kitevőjű tagjainak együtthatói meg kell hogy egyezzenek, így összefüggéseket kapunk $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_3, c_4$ illetve $G_1^{q_j}, H_1^{q_j}, H_2^{q_j}, I_1^{q_j}, I_2^{q_j}, I_3^{q_j}$ között. Az összehasonlításból egyből adódik, hogy:

$$I_1^{q_j} = 0. \quad (2.8)$$

A következő megfigyelés, hogy $H_1^{q_j}$ csak a b_1, b_2 -től függ, értéke a szabad paraméter lesz, amit majd p_j -vel jelölünk:

$$H_1^{q_j} = p_j. \quad (2.9)$$

A következő két összefüggés észrevételéhez az $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_3, c_4$ együtthatók kiejtésével jutunk el:

$$G_1^{q_j} H_1^{q_j} + (H_1^{q_j})^2 + H_2^{q_j} + I_2^{q_j} = 0, \quad (2.10)$$

$$G_1^{q_j} I_2^{q_j} + H_1^{q_j} I_2^{q_j} + I_3^{q_j} = 0. \quad (2.11)$$

Tehát a (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) feltétel ekvivalens a logaritmikus tagok eltűnésével. $\square$

Most nézzük meg, hogy mit is jelent mindez az együtthatókra vonatkozó lineáris egyenletrendszer szintjén! Vagyis fejezzük ki a $G_1^{q_j}, H_2^{q_j}, I_2^{q_j}, I_3^{q_j}$ értékeket az eredeti G, H, I polinomok együtthatóiból! A $G_1^{q_j}$ -re már nincs is szükségünk, mert azt már a korábbi egyenletekből ki tudjuk számolni, tehát itt, mint ismert értéket (továbbiakban g_j) kezelhetjük. A többit a Laurent-sor kiszámításának definíciója alapján kapjuk meg (felhasználjuk a (2.8) és a (2.9) egyenlőséget):

$$\begin{aligned}H_1^{q_j} &= \frac{d}{dz} \left[(z-q_j)^2 \frac{H(z)}{\psi^2} \right] \Big|_{z=q_j} = \mu_j H'(q_j), \\ H_2^{q_j} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-q_j)^2 \frac{H(z)}{\psi^2} \right] \Big|_{z=q_j} = p_j \frac{\tilde{\mu}_j}{\mu_j} + \frac{\mu_j}{2} H''(q_j), \\ I_2^{q_j} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-q_j)^3 \frac{I(z)}{\psi^3} \right] \Big|_{z=q_j} = \frac{\nu_j}{2} I''(q_j),\end{aligned}$$

$$I_3^{q_j} = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left[(z - q_j)^3 \frac{I(z)}{\psi^3} \right] \Big|_{z=q_j} = \frac{\tilde{\nu}_j}{2} I''(q_j) + \frac{\nu_j}{6} I'''(q_j),$$

ahol bevezettük az alábbi egyszerűsítő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{(z - q_j)^2}{\psi^2(z)} \Big|_{z=q_j}, \\ \tilde{\mu}_j &= \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - q_j)^2}{\psi^2(z)} \right] \Big|_{z=q_j}, \\ \nu_j &= \frac{(z - q_j)^3}{\psi^3(z)} \Big|_{z=q_j}, \\ \tilde{\nu}_j &= \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - q_j)^3}{\psi^3(z)} \right] \Big|_{z=q_j}. \end{aligned}$$

Most már beírhatjuk ezeket az együtthatókat, a (2.8) és a (2.9) egyenletekből megkapjuk a lineáris egyenletrendszerünk további sorait (mindenhol $j = 1, \dots, 3n - 5$):

$$\sum_{k=1}^{12n-18} k q_j^{k-1} I_k = 0, \quad (2.12)$$

$$\sum_{k=1}^{8n-12} k q_j^{k-1} H_k = \frac{p_j}{\mu_j}. \quad (2.13)$$

A (2.10) és a (2.11) egyenletekbe is behelyettesítünk, majd átrendezünk:

$$\begin{aligned} \mu_j \frac{H''(q_j)}{2} + \nu_j \frac{I''(q_j)}{2} &= -g_j p_j - p_j^2 - \frac{\tilde{\mu}_j}{\mu_j} p_j, \\ ((g_j + p_j)\nu_j + \tilde{\nu}_j) \frac{I''(q_j)}{2} + \nu_j \frac{I'''(q_j)}{6} &= 0, \end{aligned}$$

ahol ismét bevezetünk egy jelölést:

$$\omega_j = (g_j + p_j)\nu_j + \tilde{\nu}_j.$$

Így nyerjük a következő, végső alakot (mindenhol $j = 1, \dots, 3n - 5$):

$$\sum_{k=2}^{8n-12} \binom{k}{2} \mu_j q_j^{k-2} H_k + \binom{k}{2} \nu_j q_j^{k-2} I_k = -g_j p_j - p_j^2 - \frac{\tilde{\mu}_j}{\mu_j} p_j, \quad (2.14)$$

$$\sum_{k=2}^{12n-18} \left(\binom{k}{2} \omega_j q_j^{k-2} + \binom{k}{3} \nu_j q_j^{k-3} \right) I_k = 0. \quad (2.15)$$

2.4. A feltételek összesítése

Tehát a (2.5a), (2.5b), (2.7a) egyenletek $4n - 4$ összefüggést adnak meg G $4n - 5$ együtthatója között, de az (1.5)-ös Fuchs-reláció felhasználásával már éppen kellő számúan vannak. A (2.5c), (2.5d), (2.7b), (2.13) egyenletek H -ra $7n - 9$ -en, míg a (2.5e), (2.5f), (2.7c), (2.12), (2.15) egyenletek I -re $10n - 14$ -en vannak, és előállt még a (2.14) egyenlet, amely $3n - 5$ feltételt tartalmaz a H és I együtthatóira közösen. Ez így összesen éppen elég a $24n - 33$ ismeretlenre.

Fontos megjegyeznünk, hogy a lineáris egyenletrendszer jobb oldalán álló kifejezéseket – mégha a jelölések szintjén sokfélék is – ismerjük, hiszen t_i -k és $\mu_{i,k}$ exponensek adottak, q_j -k és p_j -k megválaszthatók, g_j -k pedig kiszámíthatók még a felhasználásuk előtt. Jelen vizsgálatnak nem tárgya a konkrét együtthatók kiszámítása, így a továbbiakban nem lesz szükség az egyenletrendszer jobb oldalán álló kifejezésekre.

Ahhoz, hogy az egyenletrendszer egyértelműen megoldható legyen, és ne a levegőbe beszéljünk, meg kell mutatni, hogy valóban teljes rangú mátrixot kaptunk. Sajnos ez egyáltalán nem nyilvánvaló, és az általános esetben még nem is sikerült bizonyítanom, ezért a továbbiakban speciális eseteket vizsgálók.

Általánosságban – n valódi és $3n - 5$ látszólagos szingularitás esetén – annyi mondható, hogy a G együtthatóira felírt lineáris egyenletrendszer mátrixa teljes rangú, ugyanis egy szabályos Vandermonde-mátrix, amelynek a determinánsa (1.6) miatt nem nulla. A továbbiakban ezért G együtthatóival nem fogok foglalkozni, csak a mátrix többi részének rangját vizsgálom.

3. Az $n = 2$ eset

Ekkor a szingularitások: $P = \{t_0, t_1, t_2\}$, a látszólagos szingularitás: $Q = \{q_1\}$, a (2.1) egyenletben szereplő együtthatók pedig:

$$\begin{aligned} G(z) &= G_0 + G_1 z + G_2 z^2, \\ H(z) &= H_1 + H_1 z + H_2 z^2 + H_3 z^3 + H_4 z^4, \\ I(z) &= I_0 + I_1 z + I_2 z^2 + I_3 z^3 + I_4 z^4 + I_5 z^5 + I_6 z^6. \end{aligned}$$

A mátrixban szereplő konstansok:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{(q_1 - t_1)^2 (q_1 - t_2)^2}, \\ \nu_1 &= \frac{1}{(q_1 - t_1)^3 (q_1 - t_2)^3}, \\ \omega_1 &= -\frac{3}{(q_1 - t_1)^3 (q_1 - t_2)^4} - \frac{3}{(q_1 - t_1)^4 (q_1 - t_2)^3} + \frac{p_1 + g_1}{(q_1 - t_1)^3 (q_1 - t_2)^3}. \end{aligned}$$

Az alábbi mátrixot nyerjük H és I együttthatóira a (2.5c), (2.5d), (2.7b), (2.13), (2.14), (2.5e), (2.5f), (2.7c), (2.12), (2.15) egyenletekből:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q_1 & q_1^2 & q_1^3 & q_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2q_1 & 3q_1^2 & 4q_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 3\mu_1 q_1 & 6\mu_1 q_1^2 & 0 & 0 & \nu_1 & 3\nu_1 q_1 & 6\nu_1 q_1^2 & 10\nu_1 q_1^3 & 15\nu_1 q_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^4 & t_1^5 & t_1^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^4 & t_2^5 & t_2^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q_1 & q_1^2 & q_1^3 & q_1^4 & q_1^5 & q_1^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2q_1 & 3q_1^2 & 4q_1^3 & 5q_1^4 & 6q_1^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 3\omega_1 q_1 + \nu_1 & 6\omega_1 q_1^2 + 4\nu_1 q_1 & 10\omega_1 q_1^3 + 10\nu_1 q_1^2 & 15\omega_1 q_1^4 + 20\nu_1 q_1^3 \end{pmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak még könnyen kiszámíthatjuk a determinánsát, ha kifejtjük a 6. sora szerint. A következő fejezetben ismertetendő általános metódussal majd máshogyan is megkaphatjuk. A determinánsa $-(t_1 - t_2)^2$, ami a t_i -k különbözősége esetén soha nem nulla, vagyis a mátrix teljes rangú, a G , H , I együttthatói és így a (2.1) egyenlet egyértelműen meghatározott a kezdeti adatok által.

4. Az $n = 3$ eset

Elérkeztünk a dolgozat egyik fő eredményéhez, az $n = 3$ eset részletes vizsgálatához. Ebben a szakaszban bebizonyítom nemcsak azt, hogy a mátrix generikusan teljes rangú, hanem kiszámítom a determinánsát is, amely a további kutatásokhoz lesz hasznos. A számításokat ebben a fázisban már nem lehetett kézzel végezni, végig a Mathematica 7.0 szoftvert használtam.

Tehát $P = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, a szabad paraméterek $\tilde{Q} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, a (2.1) egyenlet együttthatói:

$$G(z) = G_0 + G_1 z + \dots + G_6 z^6, \quad (4.1)$$

$$H(z) = H_0 + H_1 z + \dots + H_{12} z^{12}, \quad (4.2)$$

$$I(z) = I_0 + I_1 z + \dots + I_{18} z^{18}, \quad (4.3)$$

$$\psi(z) = \prod_{k=1}^3 (z - t_k) \prod_{l=1}^4 (z - q_l). \quad (4.4)$$

A $\psi(z)$ -ből, $P, Q, \tilde{Q}$ halmazokból, $\mu_{i,k}$ exponensekből, illetőleg a külön kiszámítható g_j -kből már származtathatók a $\mu_j, \nu_j, \tilde{\nu}_j, \omega_j$ értékek, így ismételten a (2.5c), (2.5d), (2.7b), (2.13), (2.14), (2.5e), (2.5f), (2.7c), (2.12), (2.15) egyenletekből az alábbi 32×32 -es mátrixot nyerjük H és I együtthatóira:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \cdots & t_1^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \cdots & t_2^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & \cdots & t_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & q_1 & q_1^2 & q_1^3 & \cdots & q_1^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & q_2 & q_2^2 & q_2^3 & \cdots & q_2^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & q_3 & q_3^2 & q_3^3 & \cdots & q_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & q_4 & q_4^2 & q_4^3 & \cdots & q_4^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2q_1 & 3q_1^2 & \cdots & 12q_1^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2q_2 & 3q_2^2 & \cdots & 12q_2^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2q_3 & 3q_3^2 & \cdots & 12q_3^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2q_4 & 3q_4^2 & \cdots & 12q_4^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 3q_1\mu_1 & \cdots & 66q_1^{10}\mu_1 & 0 & 0 & \nu_1 & 3q_1\nu_1 & \cdots & 153q_1^{16}\nu_1 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 3q_2\mu_2 & \cdots & 66q_2^{10}\mu_2 & 0 & 0 & \nu_2 & 3q_2\nu_2 & \cdots & 153q_2^{16}\nu_2 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 3q_3\mu_3 & \cdots & 66q_3^{10}\mu_3 & 0 & 0 & \nu_3 & 3q_3\nu_3 & \cdots & 153q_3^{16}\nu_3 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 3q_4\mu_4 & \cdots & 66q_4^{10}\mu_4 & 0 & 0 & \nu_4 & 3q_4\nu_4 & \cdots & 153q_4^{16}\nu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \cdots & t_1^{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \cdots & t_2^{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & \cdots & t_3^{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & q_1 & q_1^2 & q_1^3 & \cdots & q_1^{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & q_2 & q_2^2 & q_2^3 & \cdots & q_2^{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & q_3 & q_3^2 & q_3^3 & \cdots & q_3^{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & q_4 & q_4^2 & q_4^3 & \cdots & q_4^{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2q_1 & 3q_1^2 & \cdots & 18q_1^{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2q_2 & 3q_2^2 & \cdots & 18q_2^{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2q_3 & 3q_3^2 & \cdots & 18q_3^{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2q_4 & 3q_4^2 & \cdots & 18q_4^{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & \nu_1 + 3q_1\omega_1 & \cdots & 816q_1^{15}\nu_1 + 153q_1^{16}\omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & \nu_2 + 3q_2\omega_2 & \cdots & 816q_2^{15}\nu_2 + 153q_2^{16}\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \omega_3 & \nu_3 + 3q_3\omega_3 & \cdots & 816q_3^{15}\nu_3 + 153q_3^{16}\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \omega_4 & \nu_4 + 3q_4\omega_4 & \cdots & 816q_4^{15}\nu_4 + 153q_4^{16}\omega_4 \end{pmatrix}.$$

4.1. A mátrix konfluens Vandermonde-alakra hozása

A mátrix determinánsát közvetlenül nem tudjuk kiszámítani, még számítógéppel sem, ellenben jól láthatóan majdnem két blokkra esik szét, csak 4 közös sor van. Ezek a „majdnem” blokkok „majdnem” konfluens Vandermonde-mátrix alakúak. Ezen a vonalon elindulva bontsuk fel a mátrixot blokkdiagonális alakúra, ahol az egyik blokk 13×13 -as, a másik 19×19 -es, és a 13×19 -es vagy a 19×13 -as blokk nullmátrix! Így a teljes mátrix determinánsa a két diagonálisban lévő blokk determinánsának szorzata lesz. Ezt a kíváncsiságot az eredeti mátrix 8 db másik mátrixszá való felbontása teljesíti, amit a következőkben konstruálunk meg.

Első lépésben M -et bontsuk fel két olyan mátrixra, amelyből az első a 13. sor 1–13. elemét, a második a 14–32. elemét tartalmazza, így $\det(M) = \det(M_1) + \det(M_2)$. Ezzel M_1 a kívánt alakú, jelölje R_1 és S_1 a diagonális blokkjait. M_2 -ben cseréljük ki a 13. és a 14. sort! Ne felejtsük, így a determinánsa (-1) -szeresére változik! Az így kapott M'_2 mátrix olyan alakú mint az M mátrix, csak a 13. sorában nem a q_1 , hanem a q_2 hatványai állnak (a 14.-ben pedig q_1 hatványai), viszont a 14. sor 1–13. elemei nullák. Erre a mátrixra is a 13. sor szerinti felbontást alkalmazva ismét kapunk egy kívánt alakú mátrixot, melynek blokkjai legyenek R_2 és S_2 . Folytatjuk az eljárást (sorcsere, kettébontás), most már a 15. sor 1–13. elemeit is kinullázva kapjuk R_3 , S_3 -at. Végül megkapjuk R_4 , S_4 -et is, ahol M_4 mátrixban mindkét másik téglalap alakú blokk nulla. Kapunk még egy mátrixot, amelyben a 13–32. sorok 1–13. elemei nullák, így ennek 0 a determinánsa. Tehát az M determinánsa:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^4 (-1)^{j-1} \det(R_j) \det(S_j), \quad (4.5)$$

ahol mellel a j index arra is utal, hogy R_j -ben melyik q_j szerepel a 13. sorban, illetve S_j -ben melyik q_j hiányzik az első három sorból. Az S_j mátrixok utolsó négy sorában a (2.15) egyenletből származó, $I(q_j)$ második és harmadik deriváltjához tartozó együtthatók szerepelnek. Azonban S_j első három sorában a (2.14) egyenletből csak $I(q_j)$ második deriváltjaihoz kapcsolódó együtthatók szerepelnek, így a determináns megváltozása nélkül kiejthetjük az utolsó négy sorból háromban a második derivált együtthatóit. Tehát az új S_j :

$$S_j[\tilde{k}, \cdot] := S_j[\tilde{k}, \cdot] - \frac{\omega_k}{\nu_k} S_j[k, \cdot], \quad (k = 1, \dots, 3),$$

ahol $\tilde{k}$ a k -adik sorral azonos l indexű q_l tényezőket tartalmazó sor az utolsó négy közül, $[k, \cdot]$ pedig a k -adik sort jelenti.

Az R_j mátrixokból kiemelünk μ_j szorzótényezőt, így már konfluens Vandermonde-alakúak, velük nincs több dolgunk. Az S_j mátrixokat kettébontjuk a $(15 + j)$ -edik soruk mentén. Egyikben az $I(q_j)$ második deriváltja fog szerepelni, ebből kiemelve $\omega_j \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \nu_4^2 / \nu_j^2$ -et konfluens Vandermonde-mátrixot kapunk (továbbiakban S'_j mátrix). A

másikban az $I(q_j)$ harmadik deriváltja lesz, itt $\nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \nu_4^2 / \nu_j$ -t emelhetünk ki, az így kapott mátrix legyen $\hat{S}'_j$. Utóbbinál éppen a q_j -hez tartozó második derivált hiányozna a konfluens Vandermonde-sághoz, ezért a harmadik derivált helyére a másodikat írjuk be, ezzel ugyanazt a mátrixot kapjuk mint az előbb, vagyis S'_j -t. A determináns kiszámítása után lederiválunk q_j szerint és osztunk 3-mal, mert S_j -ben a harmadik derivált harmada szerepel. Tehát:

$$\hat{s}_j := \det(\hat{S}'_j) = \frac{1}{3} \frac{d}{dq_j} \det(S'_j). \quad (4.6)$$

4.2. A konfluens Vandermonde-determinánsok kiszámítása

Az R_1 (a semmit nem befolyásoló 1. sorától eltekintve) konfluens Vandermonde, még-hozzá a következő változókkal: $\{t_1, t_2, t_3, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}, q_4^{(0)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, q_4^{(1)}, q_1^{(2)}\}$, ahol a felső indexben az elem rendje szerepel. Ekkor az (1.6) szerint a determináns kiszámolható, az előjelet a változók sorában az inverzióinak száma adja, ami jelen esetben páros. Tehát a determináns (r_1):

$$\begin{aligned} \det(R_1) = & (-q_1 + q_2)^6 (-q_1 + q_3)^6 (-q_2 + q_3)^4 (-q_1 + q_4)^6 (-q_2 + q_4)^4 (-q_3 + q_4)^4 (q_1 - t_1)^3 \cdot \\ & \cdot (q_2 - t_1)^2 (q_3 - t_1)^2 (q_4 - t_1)^2 (q_1 - t_2)^3 (q_2 - t_2)^2 (q_3 - t_2)^2 (q_4 - t_2)^2 \cdot \\ & \cdot (-t_1 + t_2) (q_1 - t_3)^3 (q_2 - t_3)^2 (q_3 - t_3)^2 (q_4 - t_3)^2 (-t_1 + t_3) (-t_2 + t_3). \end{aligned}$$

(Megjegyzés: a Mathematicával számolt polinomban a lexikografikus sorrend nem a determinánsbeli, de ez csak leírásbeli különbség.) A többi R_j determinánsát megkaphatjuk hasonló módon, de a legegyszerűbb számítási mód, ha átindexeljük a q_j -t q_1 -gyé, a q_1 -et q_j -vé. Ekkor meg kell számolnunk az inverziókat, ami ekvivalens azzal, ha ún. *standard alakra* hozzuk a mátrixot, amin az R_1 változóinak sorrendjét értjük, vagyis hogy a t_i -k után előbb szerepel az a q_j változó, aminek a többedik deriváltja jelenik meg a mátrixban, egyébként pedig indexük szerint növekvő sorrendben szerepelnek a változók. A standard alakra hozáshoz a megfelelő nullad- és elsőrendű sorokat kell megcserélni, ami R_2, R_3, R_4 -ben rendre 2, 4, 6 sorcserét jelent, tehát a determináns előjele változatlan. Az r_2, r_3, r_4 determinánsokat helyhiány miatt nem közlöm, majd csak a teljes determinánsba foglalom bele.

Az S'_1 mátrixban a változók: $\{1, t_1, t_2, t_3, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}, q_4^{(0)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, q_4^{(1)}, q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}, q_4^{(2)}, q_2^{(3)}, q_3^{(3)}, q_4^{(3)}\}$, de ehhez a sorrendhez először standard alakra kell hozni S'_j -t. Könnyű látni, hogy ehhez minden S'_j esetében éppen 39 sorcsere szükséges, tehát egy negatív előjelet eredményez majd a determinánsban. Páratlan számú inverziót csak az első és harmadik deriváltak okoznak, így ha ugyanannyian lennének, akkor épp kioltanák egymást, de a harmadik deriváltakból hiányzik a j indexű tag, így az inverziók száma: $3 \cdot (4-j)$, ami rendre $(-1), (+1), (-1), (+1)$ szorzókat eredményez S'_j -k determinánsában. Így már kiszámíthatjuk S'_1 determinánsát, a többi S'_j -re R_j -khez hasonlóan indexcserével

juthatunk el. Most nem kell alkalmazni a sorcserét, mert már megszámoztuk az inverziókat minden S'_j -ben. Ismét alkalmazva (1.6) képletet megkapjuk $s_j := \det(S'_j)$ -ket. Majd (4.6)-tal számolva előállítjuk $\hat{s}_j$ -okat.

$$\begin{aligned} s_1 = & (-q_1 + q_2)^{12} (-q_1 + q_3)^{12} (-q_2 + q_3)^{16} (-q_1 + q_4)^{12} (-q_2 + q_4)^{16} (-q_3 + q_4)^{16} (q_1 - t_1)^3 \cdot \\ & \cdot (q_2 - t_1)^4 (q_3 - t_1)^4 (q_4 - t_1)^4 (q_1 - t_2)^3 (q_2 - t_2)^4 (q_3 - t_2)^4 (q_4 - t_2)^4 \cdot \\ & \cdot (-t_1 + t_2) (q_1 - t_3)^3 (q_2 - t_3)^4 (q_3 - t_3)^4 (q_4 - t_3)^4 (-t_1 + t_3) (-t_2 + t_3). \end{aligned}$$

Végül (4.5)-nek megfelelően összeszorozzuk és összeadjuk az összes fent kiszámolt polinomot, behelyettesítjük μ_j , ν_j , ω_j -ket, megkapjuk M determinánsát:

$$\sigma := \det(M) = \sum_{j=1}^4 (-1)^{j-1} (\mu_j r_j) \left(\frac{\omega_j \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \nu_4^2}{\nu_j^2} s_j + \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \nu_4^2}{\nu_j} \hat{s}_j \right).$$

Hosszas egyszerűsítgetések után kiemelhetünk σ -ból egy kisebb polinomot ($\sigma = \chi\phi$):

$$\chi = \prod_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 4} (q_{j_1} - q_{j_2})^6 \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} (t_{i_1} - t_{i_2})^2.$$

A visszamaradó ϕ polinom pedig q_1, q_2, q_3, q_4 -ben szimmetrikus:

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{j=1}^4 \left[\prod_{\substack{k_1, k_2=1 \\ k_1, k_2 \neq j, k_1 < k_2}}^4 (q_{k_1} - q_{k_2})^2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^4 (q_j - q_l) \prod_{m=1}^3 (q_j - t_m) \right] \cdot \\ & \cdot \left[(p_j + g_j) + \sum_{l=1, l \neq j}^4 \frac{1}{q_j - q_l} + \sum_{m=1}^3 \frac{-2}{q_j - t_m} \right], \end{aligned}$$

ahol a törtek nevezői a megfelelő szorzótényezővel mind kiesnek, tehát valóban polinomot kapunk.

Az M teljes rangú mátrix, ha a determinánsa nem 0. Nyilván χ általában nem nulla, a ϕ nem nullaságához pedig elég ellenőrizni, hogy benne a legmagasabb kitevőjű q_1 hatvány együtthatója nem 0. A q_1^6 együtthatója:

$$(q_2 - q_3)^2 (q_2 - q_4)^2 (q_3 - q_4)^2 (p_1 + g_1),$$

ami pedig általában nem 0, mert g_1 független p_1 -től. Ezzel beláttuk, hogy a mátrix teljes rangú. Vagyis a determináns, mint t_i -k, q_j -k, p_j -k és $\mu_{i,k}$ -k polinomja, egy diszkriminánsvarietást határoz meg $T^*(\mathbb{C} \setminus P)^4$ -en. Tehát egy Riemann-gömb feletti 3-rangú vektornyaláb 3 pontban szinguláris logaritmikus konnexióinak tere ezen varietáson kívül koordinátázható. Bebizonyítottuk az 1. tételt.

□

Mindebből az is következik, hogy amennyiben $N < 3n - 5$, a rendszer alulhatározott, vagyis további paraméterek választhatók meg szabadon. Ellenben, ha $N > 3n - 5$, akkor a rendszer túlhatározott, vagyis $N - 3n + 5$ sor kifejezhető a korábbi sorokból.

5. A további kutatás irányai

A dolgozat fő eredménye a harmadrendű egyenlet általános vizsgálata, az $n = 2$, ill. $n = 3$ esetben a generikus teljes rangúság bebizonyítása és a determináns kiszámítása volt. Ezzel egy konkrét, legkisebb lehetséges méretű nemtriviális példát adtam a [3] cikkben általánosan tárgyalt problémára. A továbbiakban elsődleges cél a meghatározott diszkriminánsvarietás vizsgálata, speciálisan a szingularitások egybeesése ($t_{i_1} = t_{i_2}$, $q_{j_1} = q_{j_2}$ stb.) esetén, illetve annak a kérdésnek az eldöntése, hogy létezik-e egyértelmű megoldása a differenciálegyenletnek a varietáson. Másik fontos cél: kimutatni a felírt egyenletrendszer jobb oldalának függetlenségét. Valószínűsíthető, hogy a jobb oldal által meghatározott részvarietás transzverzálisan metszi a dolgozatban kiszámolt diszkriminánsvarietást. További feladat a harmadrendű esetben általános n -re belátni a generikus teljes rangúságot, és meghatározni a diszkriminánsvarietást. Ehhez az első lépések már megtörténtek, úgy tűnik, a módszer általánosítható tetszőleges n -re. Távlati cél lehet a magasabbrendű differenciálegyenlettel jellemezhető rendszerek vizsgálata is. Végző cél a modulustér jobb megértése. Ez nemcsak a bevezetőben említett témakörökben vezethet új eredményekre, de például kapcsolódik Hilbert 21. problémájához – az előírt monodrómia csoportú lineáris differenciálegyenletek létezéséhez –, ahol szintén megjelenik a vizsgált modulustér.

Köszönetnyilvánítás

Hálás vagyok konzulensemnek, Szabó Szilárdnak, aki a kutatási feladatot felajánlotta, bevezetett a témakörbe és szélesebb kontextusba helyezte az eddig elért eredményeket. Idejét nem sajnálva hasznos észrevételekkel segítette a dolgozat létrejöttét.

Irodalomjegyzék

- [1] ANOSOV D. V. and BOLIBRUCH, A. A., *The Riemann-Hilbert problem*, Aspects of Mathematics, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 1994. (ISBN: 3-528-06496-X)
- [2] PUT, Marius van der and SINGER, Michael F., *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer-Verlag, 157–185, 2003. (ISBN: 3-540-44228-6)
- [3] DUBROVIN, Boris and MAZZOCCO, Marta, *Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations*, Communications in Mathematical Physics, 271 (2), 289–373, 2007.
- [4] SZABÓ Szilárd, *The dimension of the space of Garnier equations with fixed locus of apparent singularities*, manuscript, 2011.