

Lur'e típusú rendszerek stabilizálása NMPC módszerrel állapot és vezérlés korlátok mellett

Varga Gabriella

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Kar

Matematika alapszak

Témavezető: Dr. Gyurkovics Éva
BME Matematika Intézet
Differenciálegyenletek Tanszék

2011. november 1.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Probléma bemutatása	3
2.1. Rendszer leírás	3
2.2. Állapot és vezérlés korlátok	4
2.3. Célfüggvény	4
3. Előismeretek	5
3.1. Ljapunov függvény	5
3.2. Schur komplementer	6
3.3. S-lemma	6
3.4. Ellipszoid és politop kapcsolata	6
3.5. NMPC módszer	7
4. Fő eredmények	8
4.1. Segéd tételek	8
4.2. Az NMPC módszer alkalmazása	11
5. Szimulációs példák	13
5.1. 1. példa	13
5.2. 2. példa	24
6. Összegzés	28

1. Bevezetés

A valós eseményeket leíró rendszereknél gyakori, hogy leírásuknál nem tudunk minden külső tényezőt figyelembe venni (ezeket a tényezőket nevezzük bizonytalanságoknak), és/vagy a rendszer leírás csak nemlineáris modellel lehetséges. Az utóbbi 15-20 évben sokan foglalkoztak ezen probléma valamely értelemben vett megoldásával, és még ma is sok kutatás tárgya. A többféle nemlineáris rendszer leírás közül most azokat a rendszereket vizsgáljuk, amiket Lur'e rendszereknek szokás nevezni. A fellépő nemlinearitást bizonytalanságnak fogjuk fel, olyan rendszereket vizsgálunk, ahol a nemlinearitások és/vagy bizonytalanságok dinamikáját nem tekintjük ismertnek, csak azt tételezzük fel, hogy azok egy bizonyos szektor feltételnek eleget tesznek. Így módon az ebben a dolgozatban előforduló bizonytalanságok determinisztikus természetűek. A fenti feltételeken túl az állapotokra és a vezérlésre is korlátokat teszünk fel.

Alapvető célunk olyan visszacsatolt vezérlés meghatározása, amelynek alkalmazásával az origó a vizsgált rendszerünk aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete lesz. A célunknak eleget tevő vezérlések közül azt választjuk, amelyre az adott célfüggvény értéke kisebb. Mivel a rendszer dinamikája bizonytalanságot tartalmaz, így nem lehetséges a célfüggvény minimalizálása, csak egy garantált költséget fogunk tudni megadni. Abban, hogy célunkat elérjük a lineáris mátrix egyenlőtlenségek (linear matrix inequalities LMIs) segítenek, amelyekkel a nemlinearitásra adott szektor feltételt is kezelni tudjuk.

Nemlineáris rendszerek stabilizálására találták ki a csúszó időhorizont módszert (más néven nemlineáris modell prediktív kontrol módszer). Az utóbbi elnevezés angol rövidítése az NMPC betűszó, amellyel erre a módszerre szokás hivatkozni. Ismeretes, hogy végtelen időintervallumon tekintett optimális irányítási feladat megoldása-megfelelő feltételek mellett-egyúttal stabilizálja is a rendszert. Ez a módszer azonban túlzottan nagy számítási ráfordítást igényel. Az NMPC módszer alapötlete: egy végtelen időintervallumon vett optimalizálási feladat helyett véges időintervallumokon vett optimalizálási feladatok egy sorozatát oldjuk meg.

Az NMPC módszernek már sok változatát publikálták. Ezen dolgozatban az [1]-ben leírt módszert vizsgáljuk meg. Ott egy olyan módszert mutattak, mely során egy változót "trial and error" módszerrel rögzítettek, és így a feladat LMI-k megoldására volt visszavezethető. Az [1] eredményeit felhasználva, olyan megoldást kerestünk, melynek segítségével ez a változó is mindig szabad lesz, de továbbra is LMI-k segítségével megoldható. Ezen új módszer hatásait vizsgáljuk a rendszerre szimulációs példák segítségével.

2. Probléma bemutatása

Ebben a részben megmutatjuk a fent említett rendszer pontos leírását, megfogalmazzuk a nemlinearitás szektor feltételét, az állapot és vezérlés korlátokat és a célfüggvényt.

2.1. Rendszer leírás

Tekintsünk az alábbi általános bizonytalan differenciálegyenlet rendszer leírást a [4] alapján.

$$\delta x = Ax + Bu + Ew + \sum_{i=1}^s H_i p_i \quad (1)$$

$$q_i = C_{q_i} x + E_{q_i} w + D_{q_i} p, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2)$$

ahol $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ az állapot, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a vezérlés, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ a külső zavarok, δx pedig $\dot{x}$ folytonos esetben, és x^+ diszkrét esetben. Továbbá p_i -k és q_i -k függhetnek t, x, w -től, értékeik dimenziója l_{p_i} és l_{q_i} . A p_i tartalmazza a rendszer dinamikájának összes bizonytalanságát és nemlinearitását, a q_i a bizonytalan outputok. A $(p^T, q^T)^T$ -ről, ahol $p^T = (p_1^T, \dots, p_s^T)$, $q^T = (q_1^T, \dots, q_s^T)$, csak azt tudjuk, hogy értékeik egy adott $\Omega \subset \mathbb{R}^{l_p + l_q}$, ahol $l_p = l_{p_1} + \dots + l_{p_s}$, $l_q = l_{q_1} + \dots + l_{q_s}$, halmazra vannak korlátozva. Tegyük fel, hogy

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l_p + l_q}, \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{0i} & S_{0i} \\ S_{0i}^T & R_{0i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, s \right\}, \quad (3)$$

ahol $Q_{0i} = Q_{0i}^T$, $R_{0i} = R_{0i}^T \geq 0$ és S_{0i} mátrixok a megfelelő dimenzióval.

Dolgoztatomban olyan nemlineáris rendszert vizsgáltam, melyet Lur'e rendszernek nevezünk, és a fent leírt rendszer egy olyan speciális esete, ahol

- folytonos idejű rendszert vizsgálunk, tehát δx az $\dot{x}$ -ot jelöli,
- nincsenek külső zavarok, tehát $E = 0$,
- $s = 1$.

Így juthatunk el az [1]-ben leírt rendszerhez, melyet vizsgálni fogunk, és így néz ki:

$$\dot{x} = A + G\gamma(z) + Bu, \quad z = Hx, \quad (4)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ konstans lienáris mátrixok, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapotot, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a vezérlést jelöli, $z \in \mathbb{R}^p$ az output, $t \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$. A $\gamma(z) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$

z -től függő olyan függvény, amelyre $\gamma(0) = 0$ teljesül. Ekkor az $x(t) = 0, u(t) = 0$ mellett megoldása a (4) rendszernek, vagyis az origó egyensúlyi helyzet. Ebben a rendszerben z játsza a bizonytalansági output szerepét, a q -t, $\gamma(z)$ pedig a bizonytalansági inputét, vagyis a p -t. A γ függvényről azt tesszük fel, hogy eleget tesz egy úgynevezett szektor feltételnek:

$$z^T \beta \gamma(z) - \gamma^T(z) \gamma(z) \geq 0, \quad (5)$$

ahol adott $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ és $\beta_i \in \mathbb{R}$ pozitívak. Ez a feltétel a (3) egy speciális esetét jelenti a $Q_{01} = -I, R_{01} = 0$ és $S_{01} = \frac{1}{2}\beta$ szereposztással. Minthogy $z = Hx$, az (5) feltételt átírhatjuk

$$\begin{bmatrix} x \\ \gamma(z) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}H^T \beta^T \\ -\frac{1}{2}\beta H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \gamma(z) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (6)$$

alakba.

2.2. Állapot és vezérlés korlátok

Olyan irányítási feladatokat vizsgálunk, amelyekre a priori állapot és vezérlés korlátozás adott, tehát egy $(x(t), u(t))$ pár akkor megengedett, ha

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{C}, \quad (7)$$

ahol

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : c_i x + d_i u \leq 1, i = 1, 2, \dots, r \right\}, \quad (8)$$

megadott $c_i \in \mathbb{R}^n$ és $d_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, 2, \dots, r$ vektorokkal.

2.3. Célfüggvény

Legyen $\bar{t} \geq 0$ adott időpont, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ egy adott állapot, és legyen $u(\cdot)$ a $[\bar{t}, \infty)$ intervallumon értelmezett vezérlés. Tegyük fel, hogy a (4) differenciálegyenlet rendszernek az $u(\cdot)$ vezérlés és az $x(\bar{t}) = \bar{x}$ kezdeti feltétel mellett létezik $[\bar{t}, \infty)$ -en egy egyértelműen meghatározott $\xi(\cdot) = x(\cdot, \bar{t}, \bar{x}, u)$ megoldása. Rendeljük hozzá a $(\xi(\cdot), u(\cdot))$ folyamathoz a

$$\mathcal{J}(\xi(\cdot), u(\cdot)) = \int_{\bar{t}}^{\infty} (\xi^T(\tau) Q \xi(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)) d\tau \quad (9)$$

célfüggvényt (vagy költségfüggvényt), ahol $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ és $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív definit súlymátrixok. Jelöljük $\mathcal{P}([\bar{t}, \infty), \bar{x})$ -el azt a feladatot, amely a (9) célfüggvény minimalizálását tűzi ki célul a (4) rendszerre vonatkozóan $x(\bar{t}) = \bar{x}$ kezdeti feltétel és (7), (8) korlátozó feltételek mellett.

A célunk az, hogy a kezdő állapotok bizonyos halmazához olyan vezérlést határozzunk meg, amely mellett a (7), (8) korlátozó feltételek teljesülnek, és az origó a (4) rendszer aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete. További elvárás, hogy a megadott vezérlésre a költségfüggvény értéke egy csak a kezdőállapottól függő értéket ne haladjon meg. Ennek megvalósítására az NMPC módszert fogjuk használni. A módszer alapgondolata a következő: egy aktuális $\bar{t}$ időpontban mért $\bar{x}$ állapothoz meghatározzuk a fentiekben megfogalmazott optimális irányítási feladat megoldását, és a kapott optimális vezérlést alkalmazzuk egy megadott intervallumon, amelynek a letelte után az eljárást ismételjük.

3. Előismeretek

Ebben a részben azokat a definíciókat és lemmákat írjuk le bizonyítás nélkül, amelyekre később a tételek bizonyítása során szükség lesz.

3.1. Ljapunov függvény

Az alábbi lemma differenciálegyenlet rendszer egyensúlyi helyzetének stabilitás vizsgálatát segíti ([8] alapján).

1. Lemma. *Ha megadható a $p \in M$ egyensúlyi pont valamely nyílt $U \subset M$ környezetén olyan $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos differenciálható függvény, melyre*

- $V(p) < V(q)$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontban,
- $(L_f V)(q) < 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontban $((L_f V)(p) = (V'(p), f(p)), p \in M)$,

akkor a p egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis.

Ezt a V függvényt nevezzük Ljapunov-függvénynek. A későbbiekben a rövid $\dot{V} = L_f V$ jelölést fogjuk használni.

3.2. Schur komplementer

Az alábbi definíciót és lemmát ([10] alapján) sokszor használjuk a bizonyítások során.

1. Definíció. Legyen

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (10)$$

szimmetrikus mátrix, ahol A, B, C mátrixok méretei rendre $p \times p, p \times q, q \times q$. Ekkor az

$$S = A - BC^{-1}B^T \quad (11)$$

mátrixot az M mátrix Schur-komplementerének nevezzük.

2. Lemma. M mátrix pozitív definit $\Leftrightarrow C$ és S mátrixok pozitív definitek.

3.3. S-lemma

A [7]-ben leírt S-lemma szigorú változata:

3. Lemma. Tegyük fel, hogy $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ szimmetrikus mátrixok, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

- Bármely $x \neq 0$ esetén amelyre $x^T \Phi_1 x \geq 0$, teljesül az $x^T \Phi_0 x > 0$ egyenlőtlenség.
- Létezik τ pozitív konstans, hogy $x^T (\Phi_0 - \tau \Phi_1) x > 0$ minden $x \neq 0$ -ra.

3.4. Ellipszoid és politop kapcsolata

Az alábbi lemmát a [2] és [3]-ban vezették le, és bizonyították.

4. Lemma. A $\mathcal{W} = \{y \in \mathbb{R}^n : w_i y \leq 1, i = 1, \dots, r\}$ halmaz akkor és csakis akkor tartalmazza a $\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T F y \leq \mu\}$ ellipszoidot ($F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $w_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$), ha

$$w_i (\mu F^{-1}) w_i^T \leq 1, i = 1, \dots, r. \quad (12)$$

3.5. NMPC módszer

NMPC lényege, hogy egy stabilizáló visszacsatolás meghatározását optimalizálási feladatok sorozatára vezeti vissza. A módszer egy változatát az alábbi módon fogalmazhatjuk meg a [6] szerint: Tekintsünk az alábbi rendszert:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (13)$$

$$x(t) \in \mathcal{X}, \quad u(t) \in \mathcal{U}, \quad (14)$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $f(0, 0) = 0$. Jelöljük az eddigiekhez hasonlóan $\xi(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u)$ -val a (13) egyenlet egy adott $u(\cdot)$ megengedett vezérléshez és $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását. Tekintsük a célfüggvényt az alábbi alakban:

$$\mathcal{J}(t_0, t_1, u, x_0) = G(\xi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(\xi(t), u(t)) dt, \quad (15)$$

ahol

$$f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (16)$$

$f_0(0, 0) = 0, G(0) = 0, f_0(x, u) > 0$ minden $(x, u) \neq (0, 0)$ -ra, $\mathbb{R}_+$ jelöli a pozitív valós számokat, és az előforduló függvények elegendően simák. Legyen $\mathcal{X}_f \subset \mathbb{R}^n$ adott halmaz, amelyre $0 \in \mathcal{X}_f$, és vegyük hozzá a feladathoz az alábbi végállapotra vonatkozó feltételt:

$$\xi(t_1) \in \mathcal{X}_f. \quad (17)$$

Legyen $\mathcal{P}(t_0, t_1, x_0)$ probléma a (15) célfüggvény a (13) és (17) feltételek melletti minimalizálási feladata. Ekkor az NMPC módszer során az alábbi feladatok sorozatát kell megoldani:

- Legyen $\bar{t}$ az aktuális időpont, és $\bar{x} = x(\bar{t})$ az aktuális állapot.
- Válasszunk Δt lépésközt, és t_p tervezési időhorizontot.
- Oldjuk meg a $\mathcal{P}(\bar{t}, \bar{t} + t_p, \bar{x})$ problémát.
- Megoldásként kapott optimális vezérlés: $\bar{u} : [\bar{t}, \bar{t} + t_p] \rightarrow \mathcal{U}$
- Alkalmazzuk az $\bar{u}$ vezérlést a $[\bar{t}, \bar{t} + \Delta t]$ -n.
- Ebből megkapjuk az $\hat{x}(\bar{t} + \Delta t; \bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) = \hat{\xi}(\bar{t} + \Delta t)$ megoldást.
- Az $\bar{x} = \hat{\xi}(\bar{t} + \Delta t)$ kezdeti feltétellel ismételjük meg az eljárást.

Az így kapott vezérlés egy visszacsatolt vezérlés, mivel $\bar{u}$ függ $x(\bar{t})$ -től. Ha a rendszer dinamikája bizonytalanságot tartalmaz, akkor a visszacsatolt vezérlés vitathatatlanul előnyösebb a program szerinti vezérlésnél, mivel mindig az aktuális állapothoz igazodik. A fentiekben az NMPC módszer algoritmusának a vázát ismertettük, viszont ez az eljárás önmagában nem biztosítja a (4) rendszer origójának aszimptotikus stabilitását. Ahhoz, hogy stabilizáló vezérlést kapjunk a (17) végállapotról vonatkozó feltételt kell jól megválasztani.

Alapvető különbség a jelen dolgozatomban megfogalmazott feladatra vonatkozóan az, hogy a stabilizáló vezérlést úgy kell meghatározni, hogy az bármely a (6) feltételnek eleget tevő γ függvény esetén megfelelő legyen. Minthogy a γ függvény különböző megvalósulásához a (4) rendszernek ugyanazon kezdőponthoz és vezérléshez is különböző trajektóriái tartoznak, így a célfüggvény optimalizálása nem megvalósítható, hanem helyette egy úgynevezett garantált költségű vezérlést fogunk tekinteni.

4. Fő eredmények

A jelen dolgozathoz kiindulásként az [1] munka szolgált, amelyben megmutatták, hogy az NMPC módszer olyan mátrixegyenlőtlenségek megoldására vezethető vissza, amelyek bizonyos paraméter rögzítése mellett lineárisak. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a paraméter ad hoc rögzítése nélkül is LMI-kre vezethető vissza a feladat megoldása.

4.1. Segéd tételek

1. Tétel. Vegyük a (4) rendszert a (6) szektor feltétellel. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $0 < \Lambda = \Lambda^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixok, és $\rho \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ pozitív konstansok, hogy a

$$\begin{bmatrix} -\Lambda A^T - \Gamma^T B^T - \Lambda \Lambda - B\Gamma & -\rho G - \frac{1}{2}\Lambda H^T \beta^T & \Lambda Q^{\frac{1}{2}} & \Gamma^T R^{\frac{1}{2}} \\ -\rho G - \frac{1}{2}\beta H \Lambda & \rho I & 0 & 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} \Lambda & 0 & \mu I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \Gamma & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

LMI teljesül. Ekkor $P = \mu \Lambda^{-1}$ és $K = \Gamma \Lambda^{-1}$ jelölésekkel az alábbi állítások érvényesek:

1. Az $u_K(t) = Kx(t)$ visszacsatolt vezérlés alkalmazása esetén az origó a (4) rendszer aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete, bármely, a (6) szektor feltételnek eleget tevő nemlinearitás esetén.

2. A fenti u_K garantált költségű vezérlés, az $x \rightarrow V(x) = x^T P x$ függvény pedig garantált költség, vagyis

$$\mathcal{J}(\bar{\xi}(\cdot), u_K(\cdot)) \leq V(\bar{x}), \quad (19)$$

bármely, a (6) szektorfeltételnek eleget tevő nemlinearitás esetén, ahol $\bar{\xi}(\cdot) = x(\cdot; \bar{t}, \bar{x}, u_K(\cdot))$.

Bizonyítás. A bizonyítás során megmutatjuk, hogy hogyan jött ki a (18) mátrix egyenlőtlenség, amelyből bizonyíthatóak az első és második állítások. Legyen $V(x) = x^T P x$ Ljapunov-függvény jelölt. Világos, hogy V folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^n$ -en, és $V(x) > V(0) = 0$ minden $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra. Számítsuk ki a $\dot{V}(x) = L_f V(x)$ értéket:

$$\dot{V}(x) = x^T A^T P x + x^T K^T B^T P x + x^T P A x + x^T P B K + \gamma^T(z) G^T P x + x^T P G \gamma(z). \quad (20)$$

A feladat kitűzése szerint $Q, R > 0$, amelyből $x^T(Q + K^T R K)x > 0$ következik, ha $x \neq 0$.

Az 1. Lemma szerint az origó aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet, ha a Ljapunov-függvény rendszer szerinti deriváltja negatív definit, azaz most $\dot{V}(x) < 0$, minden $x \neq 0$ esetén. Ez biztosan teljesül, ha

$$\dot{V}(x) < -x^T(Q + K^T R K)x. \quad (21)$$

Ezt az egyenlőtlenséget megszorozhatjuk, egy $\alpha \in \mathbb{R}$ pozitív konstanssal, amely a definitiséget nem befolyásolja. Átrendezve az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ \gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha A^T P + \alpha K^T B^T P + \alpha P A + \alpha P B K + \alpha Q + \alpha K^T R K & \alpha P G \\ \alpha G^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \gamma \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

relációnak kell fennállnia minden $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, és minden olyan γ -ra, ami kielégíti a (6) feltételt. Vezessük be a $\Psi = \alpha A^T P + \alpha K^T B^T P + \alpha P A + \alpha P B K$ jelölést.

Alkalmazzuk a 3. Lemmát a (22) és a (6) egyenlőtlenségekre. E szerint létezik olyan $\tau \in \mathbb{R}$ pozitív konstans, hogy minden nem zérus $(x^T, \gamma^T)^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ \gamma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi + \alpha Q + \alpha K^T R K & \alpha P G + \frac{\tau}{2} H^T \beta^T \\ \alpha G^T P + \frac{\tau}{2} \beta H & -\tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\Psi & -\alpha P G - \frac{\tau}{2} H^T \beta^T \\ -\alpha G^T P - \frac{\tau}{2} \beta H & \tau I \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} & K^T R^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} K & 0 \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Erre a mátrix egyenlőtlenségre alkalmazzuk a 2. Lemmát:

$$\begin{bmatrix} -\Psi & -\alpha PG - \frac{\tau}{2} H^T \beta^T & Q^{\frac{1}{2}} & K^T R^{\frac{1}{2}} \\ -\alpha G^T P - \frac{\tau}{2} \beta H & \tau I & 0 & 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{1}{\alpha} I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} K & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} I \end{bmatrix} > 0 \quad (25)$$

Szorozzuk meg ezt a mátrixot $\text{diag}(I, \frac{1}{\tau}, I, I)$ -vel balról és jobbról is (ezt a műveletet szokás kongruencia transzformációnak nevezni), majd alkalmazzuk ismét a kongruencia transzformációt $\text{diag}((\alpha P)^{-1}, I, I, I)$ -vel:

$$\begin{bmatrix} -(\alpha P)^{-1}(A + BK)^T - (A + BK)(\alpha P)^{-1} & * & * & * \\ -\frac{1}{\tau} G^T - \frac{1}{2} \beta H (\alpha P)^{-1} & \frac{1}{\tau} I & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}} (\alpha P)^{-1} & 0 & \frac{1}{\alpha} I & * \\ R^{\frac{1}{2}} K (\alpha P)^{-1} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} I \end{bmatrix} > 0, \quad (26)$$

ahol $*$ jelöli a szimmetrikus mátrixnak megfelelő blokkok transzponáltját.

Ezután cseréljük ki a változókat úgy, hogy $(\alpha P)^{-1} = \Lambda$, $K\Lambda = \Gamma$, $\frac{1}{\tau} = \rho$, $\frac{1}{\alpha} = \mu$. Ekkor a (18) LMI-t kapjuk. Ezzel beláttuk, hogy ha Λ , Γ , ρ , μ a (18) LMI megoldásai, akkor a $K = \Gamma\Lambda^{-1}$ mátrixszal definiált u_K vezérlés alkalmazása esetén $\dot{V}(x) < 0$ minden nem zérus x -re, tehát az 1. Lemmából következik az első állítás.

Legyen $\bar{\xi}(\cdot)$ a második állításban szereplő trajektrória. A $\dot{V}(x)$ értelmezése és a (21) egyenlőtlenség miatt

$$\frac{d}{dt} V(\bar{\xi}(t)) = \dot{V}(\bar{\xi}(t)) < -\bar{\xi}(t)^T (Q + K^T R K) \bar{\xi}(t). \quad (27)$$

Integráljuk a (27) mindkét oldalát $\bar{t}$ -től T -ig, ekkor azt kapjuk, hogy

$$-V(\bar{\xi}(T)) + V(\bar{\xi}(\bar{t})) > \int_{\bar{t}}^T (\bar{\xi}(\tau)^T Q \bar{\xi}(\tau) + u_K^T(\tau) R u_K(\tau)) d\tau. \quad (28)$$

Minthogy $\bar{\xi}(T) \rightarrow 0$, ha $T \rightarrow \infty$, ebből következik, hogy

$$V(\bar{\xi}(\bar{t})) > \mathcal{J}(\bar{\xi}(\cdot), u_K(\cdot)), \quad (29)$$

tehát a második állítás is igaz. ■

Az 1. Tételben mutattunk egy olyan $u_K(t) = Kx(t)$ visszacsatolt vezérlést, amelyet alkalmazva az origó a (4) rendszer aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete, bármely (6) szektor feltételnek eleget tevő nemlinearitás esetén, és ad egy garantált költséget az u_K vezérlésre.

Nem biztos azonban, hogy teljesül rá a (8) állapot és vezérlés korlát. A következő tételben egy olyan lineáris mátrix egyenlőtlenséget vezetünk le, amely biztosítja a (8)-ban szereplő korlátok teljesülését.

2. Tétel. *Ha léteznek olyan $0 < \Lambda = \Lambda^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixok, amelyekre az*

$$\begin{bmatrix} 1 & c_i \Lambda + d_i \Gamma \\ (c_i \Lambda + d_i \Gamma)^T & \Lambda \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (30)$$

mátrixegyenlőtlenségek igazak, akkor a $K = \Gamma \Lambda^{-1}$ mátrix esetén $(x^T, (Kx)^T)^T$ teljesíti a (8) állapot és vezérlés korlátot minden $x \in \mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq \mu\}$ esetén, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ pozitív konstans és $P = \mu \Lambda^{-1}$.

Bizonyítás. Valóban, $(x^T, (Kx)^T)^T \in \mathcal{C}$ teljesül, ha

$$x \in \mathcal{C}_K = \{x \in \mathbb{R}^n : (c_i + d_i K)x \leq 1, \quad i = 1, \dots, r\}. \quad (31)$$

Ugyanakkor a 4. Lemma szerint $\mathcal{C}_K \supset \mathcal{E}$ akkor és csakis akkor igaz, ha

$$1 - (c_i + d_i K)\Lambda(c_i + d_i K)^T \geq 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (32)$$

A 2. Lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy a (31) ekvivalens az

$$\begin{bmatrix} 1 & c_i + d_i K \\ (c_i + d_i K)^T & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (33)$$

egyenlőtlenségekkel. Ebből a $\text{diag}(I, \Lambda)$ kongruencia transzformációval a (30) egyenlőtlenséget kapjuk. ■

4.2. Az NMPC módszer alkalmazása

Legyen

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots \quad (34)$$

a $[0, \infty)$ intervallum egy felosztása, és legyen $x(t_k)$ a rendszer t_k időpontbeli állapota. Alkalmazzuk az NMPC módszert

$$\bar{t} = t_k, \quad \bar{x} = x(t_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

mellett, vagyis tekintsük a $k = 0, 1, \dots$ esetén a $\mathcal{P}([t_k, \infty), x(t_k))$ problémát.

3. Tétel. Vegyük a (4) rendszert a (6) szektor feltétellel és a (8) korlátozásokkal. A $k = 0, 1, \dots$ értékekre tekintsük a $0 < \Lambda_k = \Lambda_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixváltozókra, és $\rho_k \in \mathbb{R}$, $\mu_k \in \mathbb{R}$ pozitív konstans változókra a

$$\min_{\mu_k, \rho_k, \Gamma_k, \Lambda_k} \mu_k \quad (36a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(t_k) \\ x(t_k) & \Lambda_k \end{bmatrix} > 0 \quad (36b)$$

$$\begin{bmatrix} -\Lambda_k A^T - \Gamma_k^T B^T - A \Lambda_k - B \Gamma_k & -\rho_k G - \frac{1}{2} \Lambda_k H^T \beta^T & \Lambda_k Q^{\frac{1}{2}} & \Gamma_k^T R^{\frac{1}{2}} \\ -\rho_k G - \frac{1}{2} \beta H \Lambda_k & \rho_k I & 0 & 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} \Lambda_k & 0 & \mu_k I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \Gamma_k & 0 & 0 & \mu_k I \end{bmatrix} > 0 \quad (36c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c_i \Lambda_k + d_i \Gamma_k \\ (c_i \Lambda_k + d_i \Gamma_k)^T & \Lambda_k \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (36d)$$

optimalizálási feladatot. A $K_k = \Gamma_k \Lambda_k$ és $P_k = \mu_k \Lambda_k^{-1}$ jelöléssel az alábbi állítások érvényesek:

1. A (36) konvex optimalizálási feladat, és ha létezik megoldása a t_k -ban, akkor lesz megoldása a t_{k+1} -ben is.
2. A (36) optimalizálási feladat megoldásával kapott P_k mátrix esetén a $V_k(x(t_k)) = x^T(t_k) P_k x(t_k)$ függvény a (9) célfüggvényre minimális felsőkorlátot szolgáltat.
3. Ha a (36) optimalizálási feladatnak létezik megoldása a $t_0 = 0$ -ban, akkor az

$$u(t) = K_k x(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (37)$$

vezérlés mellett az origó a (4) rendszer aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete, bármely a (6) szektor feltételnek eleget tevő nemlinearitás esetén, miközben a (8) állapot és vezérlés korlátok teljesülnek minden $t \geq 0$ -ra.

Bizonyítás. A (36) lineáris mátrix egyenlőtlenségeket tartalmaz, így ez egy konvex optimalizálási feladat lesz. Mivel csak a (36b) egyenlőtlenség függ $x(t_k)$ -től, ezért ha (36c), (36d) LMI-knek létezik megoldása t_k -ban, akkor a t_{k+1} mintavételi pontban is megoldhatóak lesznek. A (36c) azonos a (18) LMI-vel, tehát 1. Tétel bizonyításából következik, hogy $\dot{V}_k(x(t_k)) < 0$ bármely $x \neq 0$ esetén, amelyből $V_{k+1}(x(t_{k+1})) < V_k(x(t_k))$ adódik. Alkalmazzuk a (36b)-re a 2. Lemmát:

$$1 - x^T(t_k)(\alpha_k P_k)^{-1} x(t_k) > 0 \quad (38)$$

Ebből átalakításokkal $\mu_k > x^T(t_k)P_k x(t_k)$ adódik. Mivel $\mu_k > V_k(x(t_k)) > V_{k+1}(x(t_{k+1}))$, így ha t_k -ban megoldható a (36b) LMI, akkor t_{k+1} -ben is lesz megoldása, azaz a t_k -ban kapott Λ_k mátrixváltozó megoldása marad t_{k+1} -ben is a (36b) LMI-nek. Ezzel beláttuk 3. Tétel első részét. Az 1. Tétel bizonyítása során beláttuk, hogy $V_k(x(t_k))$ garantált költség. Mivel $V_k(x(t_k)) < \mu_k$, és az optimalizálási feladat során μ_k -t minimalizáljuk, ezért a $V_k(x(t_k))$ minimális felső korlátja lesz a (9) költségfüggvénynek. Így a 3. Tétel második részét is beláttuk.

A (36c) azonos a (18) LMI-vel, ezért a (37) vezérlést alkalmazva az origó a (4) rendszer aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete lesz.

Be kell még látni, hogy az állapot és vezérlés korlátozó feltételei is teljesülnek. A 2. Tételben lévő (30) LMI megegyezik a (36d) LMI-vel, ezért

$$x(t_k) \in \mathcal{E}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_k x \leq \mu_k\}. \quad (39)$$

Az 1. Tétel szerint $V_k(x(t_k))$ Ljapunov-függvénye a (4) rendszernek, és P_k konstans a $t \in [t_k, t_{k+1})$ -en, ezért

$$\mu_k > x^T(t_k)P_k x(t_k) > x^T(t)P_k x(t), \quad (40)$$

ha $t \in [t_k, t_{k+1})$. Így $x(t) \in \mathcal{E}_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ teljesül, és a 2. Tétel szerint $(x^T(t), (Kx(t))^T)^T$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ -re teljesülnek a (8) állapot és vezérlés korlátok. Minden t_k , $k = 0, 1, \dots$ mintavételi pontban megmutatható, hogy $x(t) \in \mathcal{E}_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ teljesül, így a (37) vezérlés esetén a (8) feltételek teljesülnek minden $t \geq 0$ -ra. Így beláttuk a 3. Tétel harmadik részét is. ■

5. Szimulációs példák

5.1. 1. példa

A példa során megmutatjuk, hogy ahogy az [1] szerzői jól sejtették, hogy a stabilizáció sebessége csak gyengén érzékeny a τ -ra. Ehhez az általuk használt rugalmas csatlakozású robot kar adataira alkalmaztuk a 3. Tételben leírt optimalizálási feladat megoldását. Az ehhez szükséges adatok:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -16.7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.33 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

a nemlinearitás:

$$\gamma(z) = \sin(z) + z \quad (42)$$

A (6) szektor feltétel azt jelenti, hogy

$$(\beta z - \sin(z) - z)^T (\sin(z) + z) \geq 0 \quad (43)$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ha $\beta \geq 2$ akkor ez igaz. Válasszuk a legkisebb lehetséges értéket β -ra. Az állapot és vezérlés korlátok feltételei a következők:

$$-1.5 \leq u \leq 1.5, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x_3 \leq \frac{\pi}{2} \quad (44)$$

A költségfüggvényhez szükséges súlymátrixok:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad R = 0.1 \quad (45)$$

Legyen a kezdőpontunk $x_0 = [1.2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Az NMPC módszerhez $\Delta t = 0.1$ -es lépésközt választottuk.

Az optimalizálási feladat megoldásához az alábbi algoritmust használtuk:

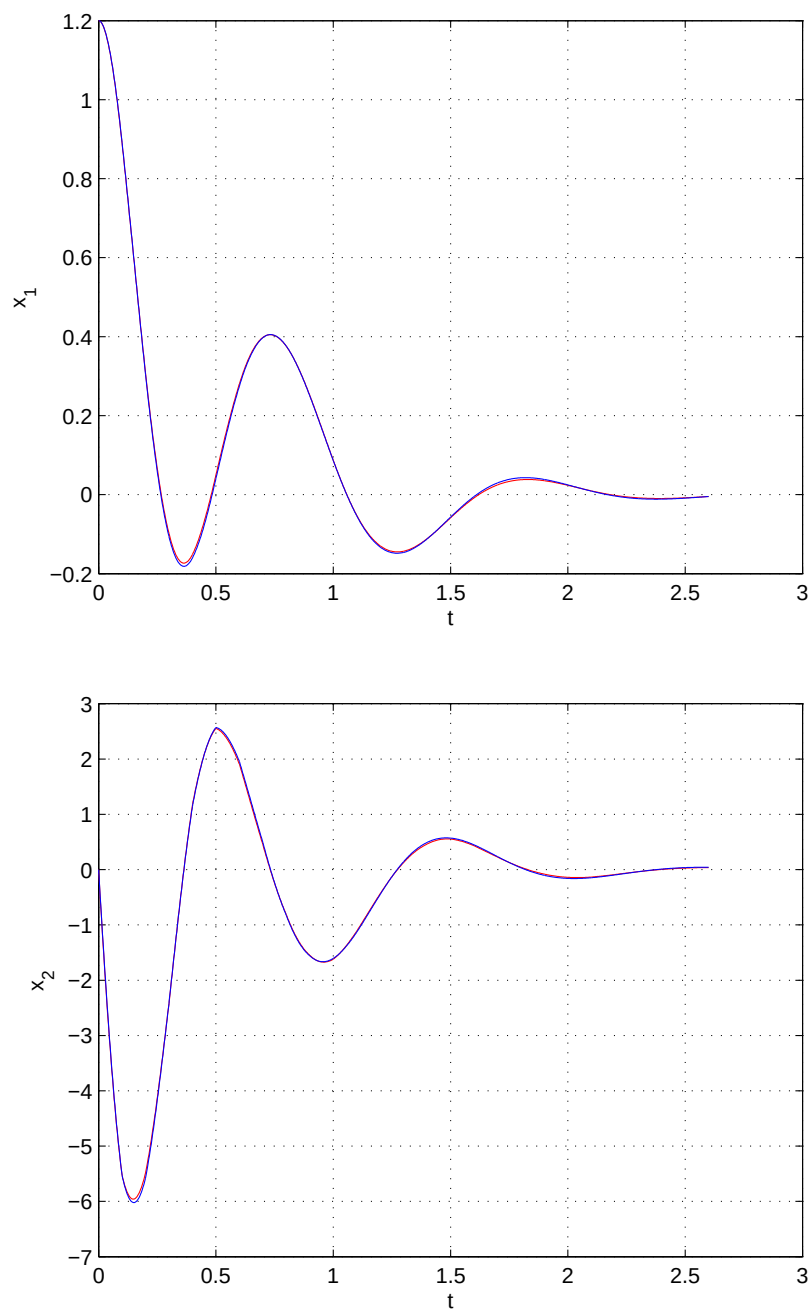
Legyen $k = 0, 1, \dots, N$, $\bar{t} = k\Delta t$ és $\bar{x} = x(\bar{t})$. A $k = 0$ -ban $x(0) = x_0$ kezdeti állapottal számolunk.

A k -adik lépésben:

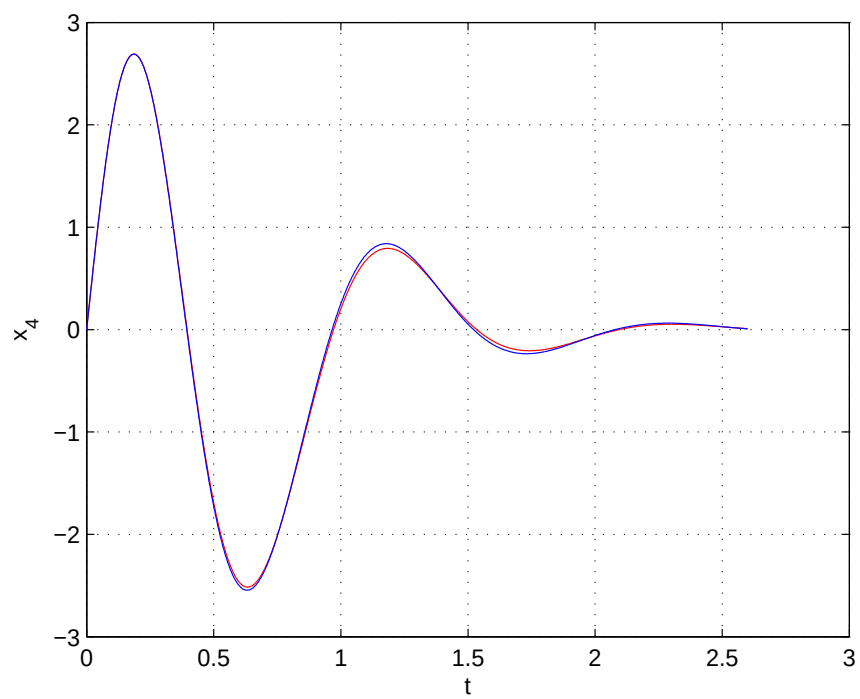
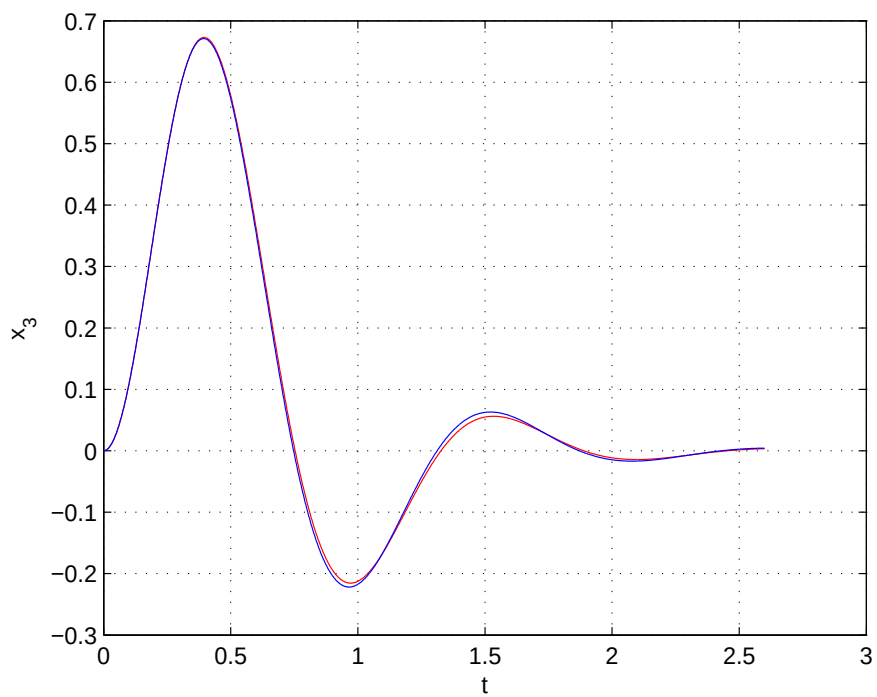
1. A $\bar{x}$ kezdőállapotra megoldottuk a 3. Tételben lévő LMI-eket a Matlab LMI Lab eszköztárának segítségével. (Az eszköztár használatának leírása a [9]-ben található meg.)
2. A kapott értékekből kiszámoltuk a $K_k = \Gamma_k \Lambda_k$ -t.
3. A Matlab ode45 parancsával megoldottuk a (4)-ben leírt differenciálegyenletet a kapott K_k -val a $[\bar{t}, \bar{t} + \Delta t]$ intervallumon.
4. $k = k + 1$.

Először az általunk levezetett NMPC módszert hasonlítjuk össze az [1]-ben leírt NMPC módszerrel. Az 1. és 2. ábrákon az állapot komponenseket hasonlítottuk össze. Látszik, hogy az

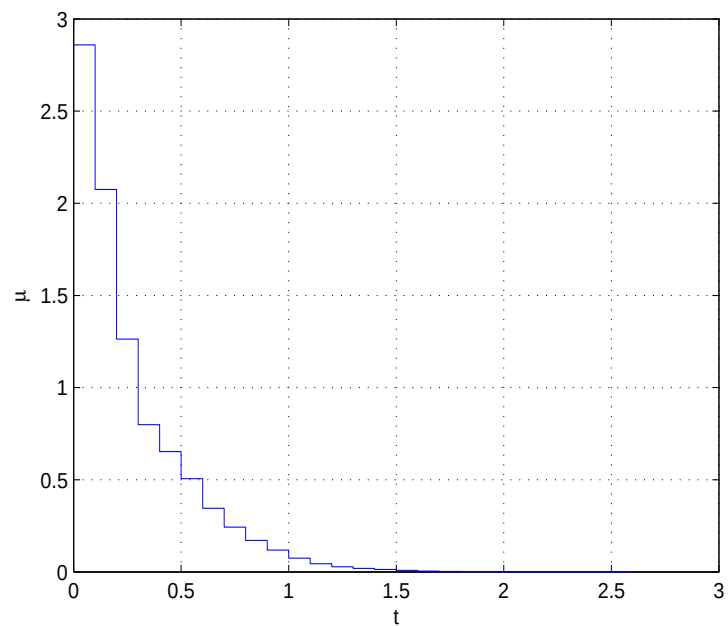
általunk levezetett módszer csak néhol tér el az [1]-belitől, így a stabilizáció sebessége sem lett gyorsabb.



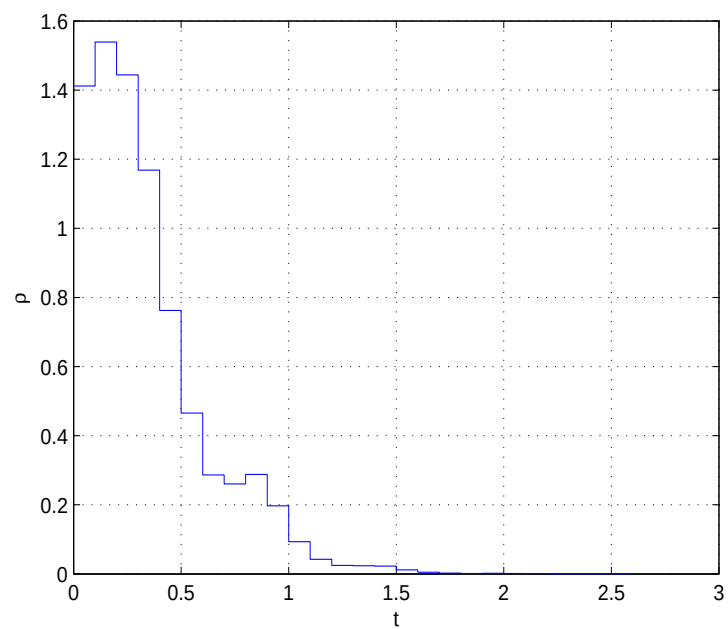
1. ábra. Az állapot első és második komponense az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros), az [1]-ben mutatott módszerrel (kék).



2. ábra. Az állapot harmadik és negyedik komponense az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros), az [1]-ben mutatott módszerrel (kék).



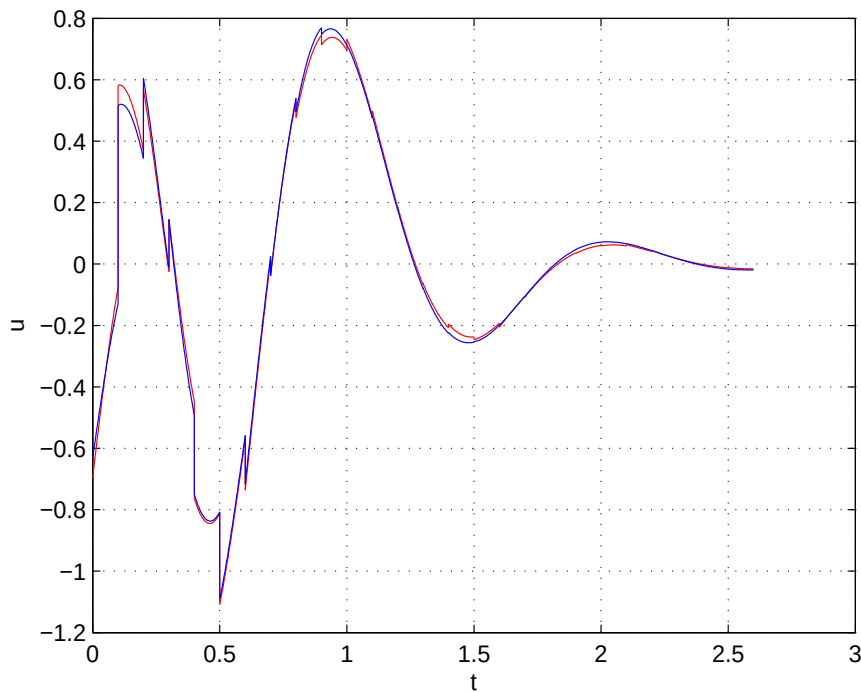
3. ábra. Az optimalizálási feladat megoldása során minimalizált μ az idő függvényében.



4. ábra. A ρ konstans változó az idő függvényében.

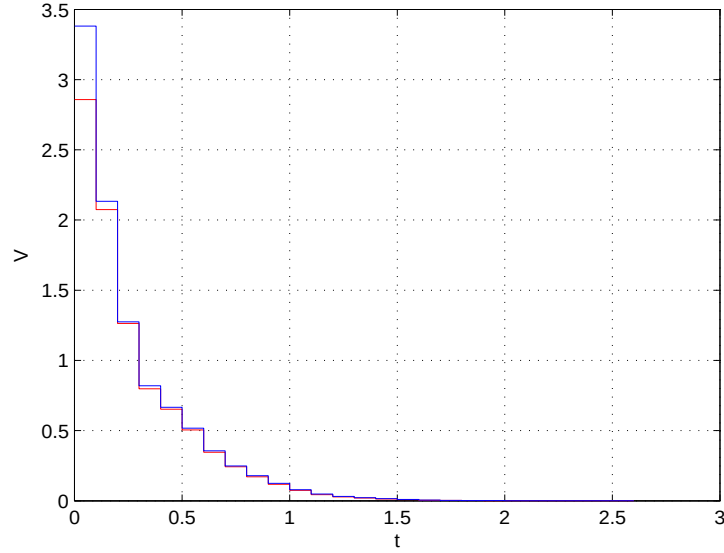
A 3. ábrán látható az optimalizálási feladat azon változója az idő függvényében, amelyet minimalizáltunk. Az általunk levezetett módszernél $\rho = \frac{1}{\tau}$, és τ az [1]-ben 'trial and error' módszerrel rögzített változó. A 4. ábrán a ρ -t ábrázoltuk az idő függvényében, látható, hogy amit az [1]-ben rögzítettek 1 értéken, annak inervze az általunk levezett módszer alkalmazása során nem lesz konstans az időben.

Az 5. ábrán látható az $u = Kx$ vezérlés az idő függvényében, ezen is látható, hogy nincs szignifikáns eltérés a két módszer között.



5. ábra. A vezérlés az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros), az [1]-ben mutatott módszerrel (kék).

A 6. ábrán a (9) célfüggvény minimális felső korlátját ($\bar{V}_k(x(t_k))$) hasonlítottuk össze. Látszik, hogy a minimális felsőkorlát a (9) célfüggvényre az általunk levezetett NMPC módszernél kisebb, mint az [1]-ben levezetett módszernél.

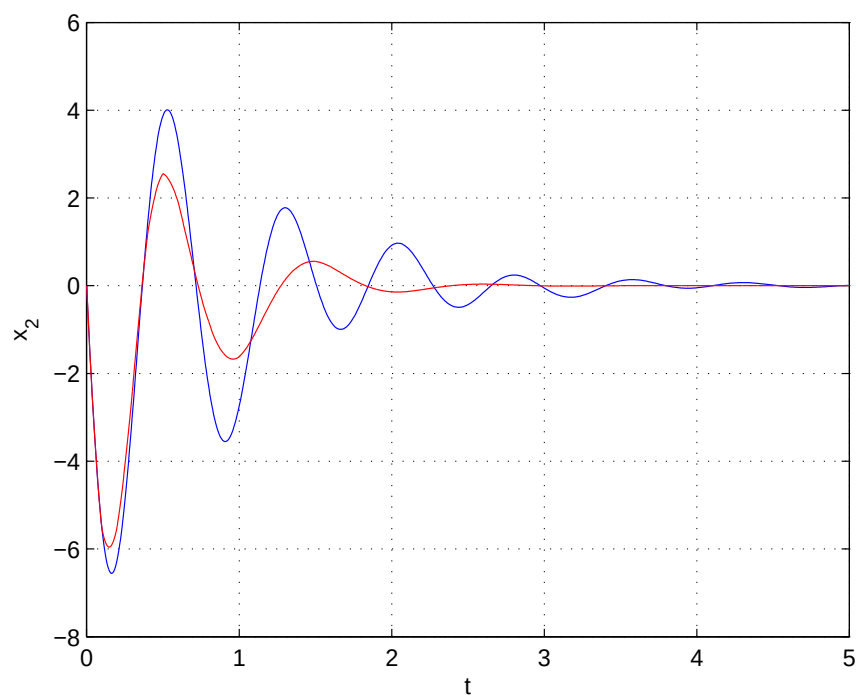
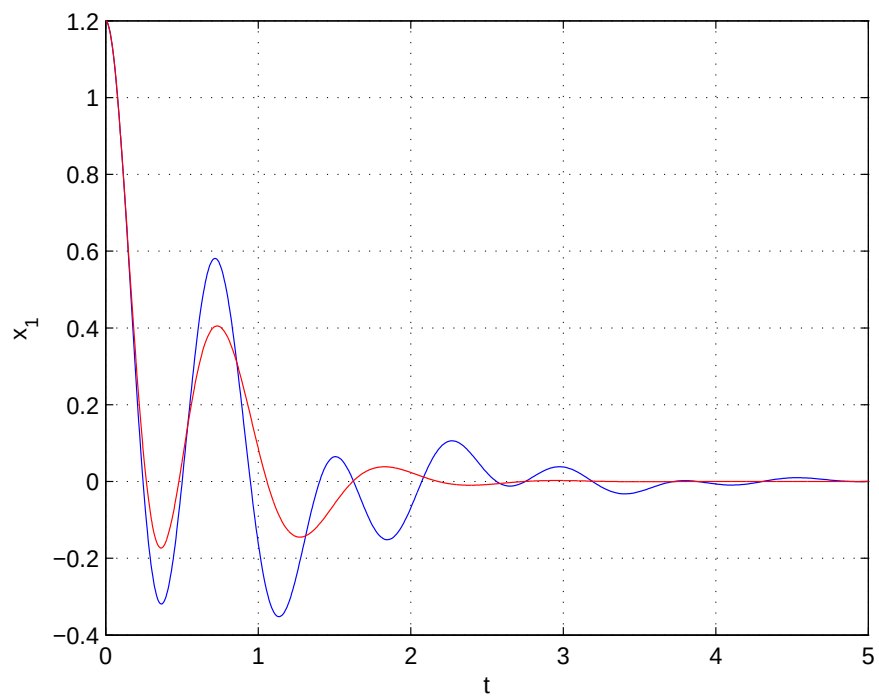


6. ábra. A célfüggvény minimális felső korlátja az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros), az [1]-ben mutatott módszerrel (kék).

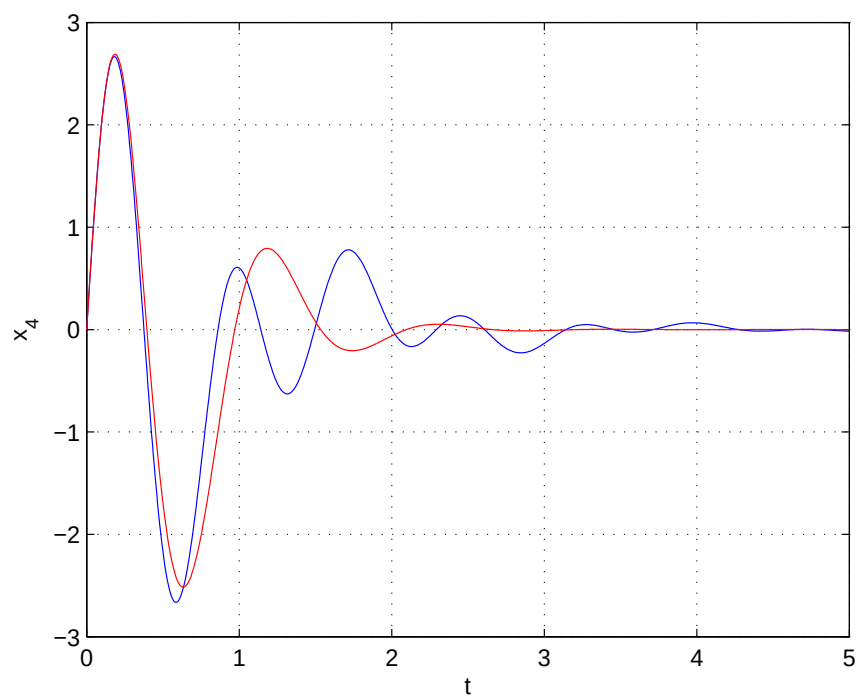
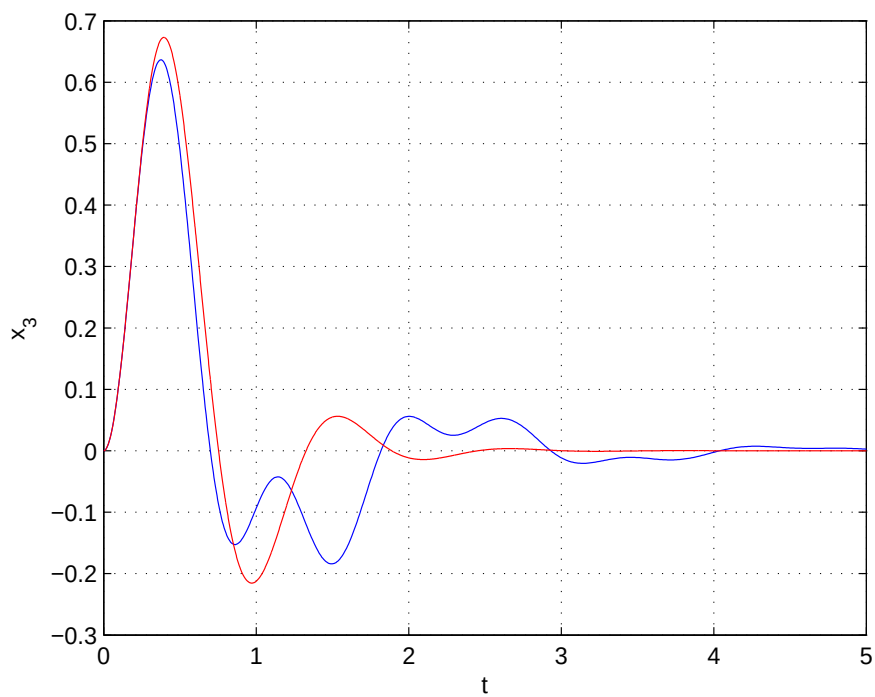
Most megmutatjuk, hogy az NMPC módszer mennyivel hatásosabb, mint a statikus vezérlés, amely során az első mintavételi pontban számolt K_0 értékkel számoljuk végig a vezérlést. A 7. és a 8. ábrán az állapotot komponensenként hasonlítottuk össze. Látható, hogy a statikus vezérlést alkalmazva az egyensúlyi állapot elérése közel kétszer annyi ideig tart, mint az NMPC módszer alkalmazásával. A 9. ábrán a trajektóriák összehasonlítása látható. Addig futtattunk, amíg az NMPC módszerrel nem értünk el az egyensúlyi helyzethez, érzékelhető, hogy a statikus vezérlést alkalmazva az állapotok még csak közelítik az origót, de nem érik el azt. A 10. ábrán a vezérléseket hasonlítottuk össze. Ezen is látható, hogy a statikus vezérlés futásideje lényegesen hosszabb. NMPC módszert alkalmazva gyorsabb a stabilizáció, de nagyobb fokú vezérlés alkalmazására volt szükség, amíg elértük a stabilizációt. A 11. ábrán látható a (9) költségfüggvény integrál mögötti része, azaz:

$$J = \xi^T(t)Q\xi(t) + u^T(t)Ru(t) \quad (46)$$

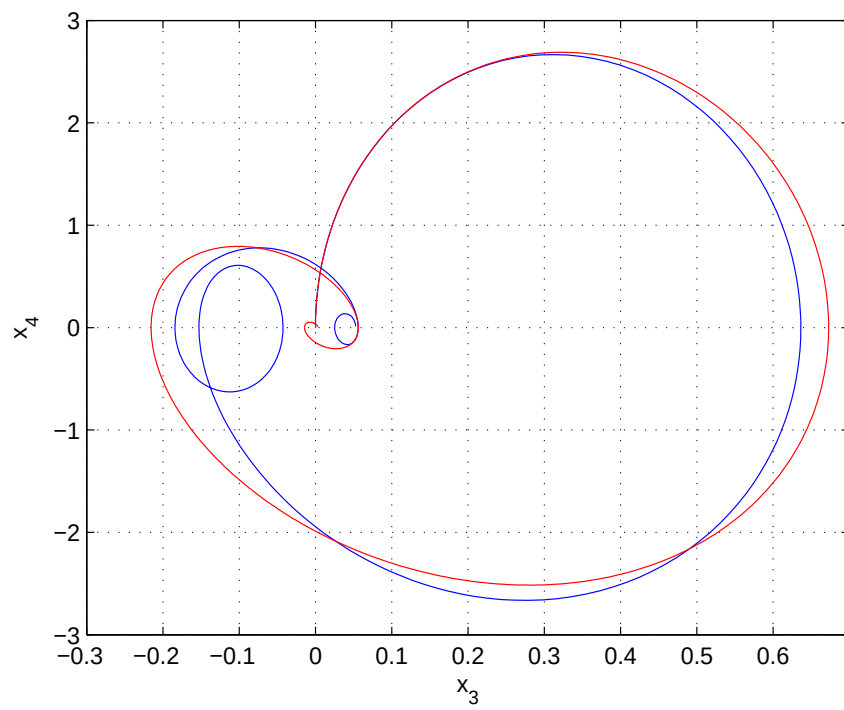
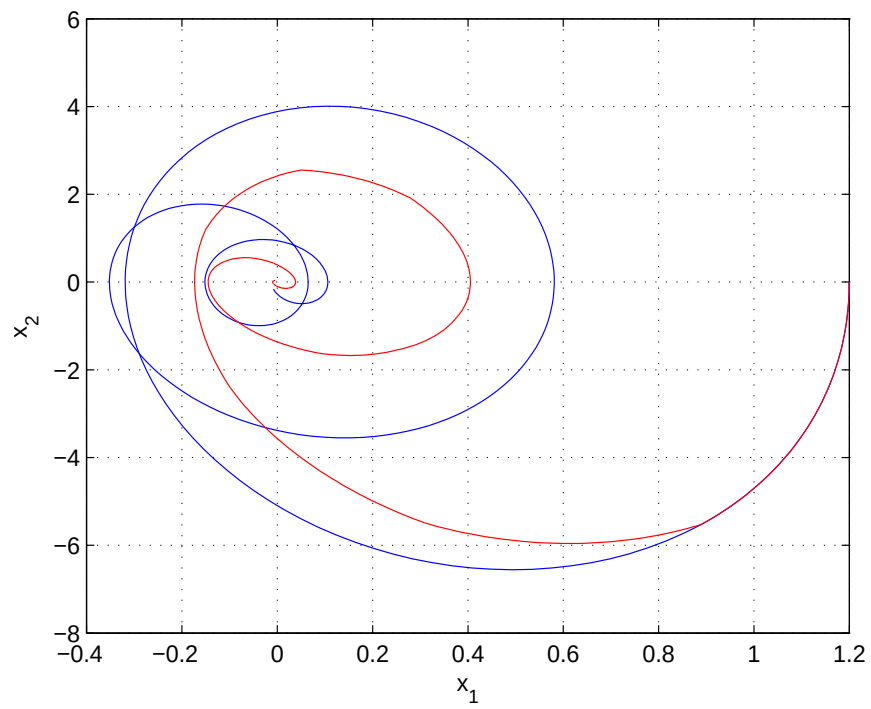
függvény az időben. Ezeket integrálva a Matlab trapz parancsával a költségfüggvény értékére NMPC módszerrel 1.5812-t, statikus vezérléssel 2.1774-t kaptunk, tehát a nagyobb fokú vezérlés mellett is az NMPC módszer költsége jóval kisebb, mint a statikus vezérlés költsége. A költségfüggvény minimális felső korlátja $\bar{V}_0(x(0))$ -ban 2.8575, amely több, mint a két vezérlés során kapott költség, tehát tényleg felső korlát lesz $\bar{V}_k(x(t_k))$.



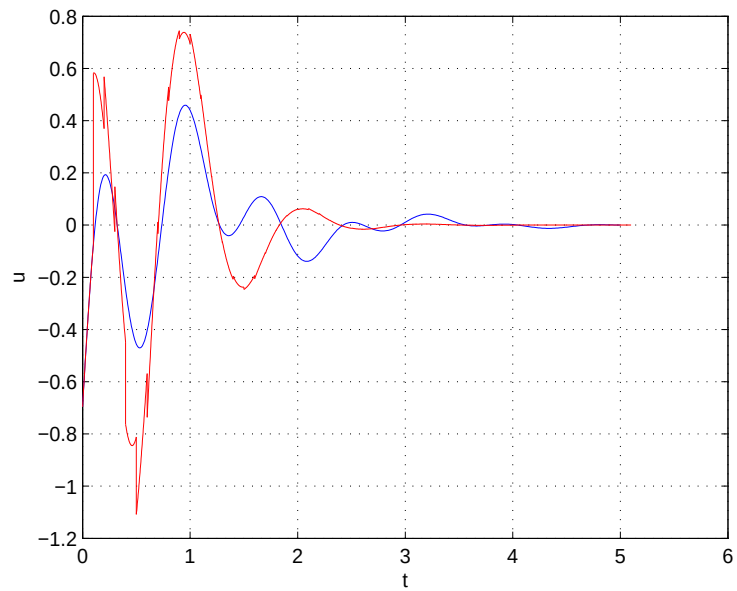
7. ábra. Az állapot első és második komponense az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).



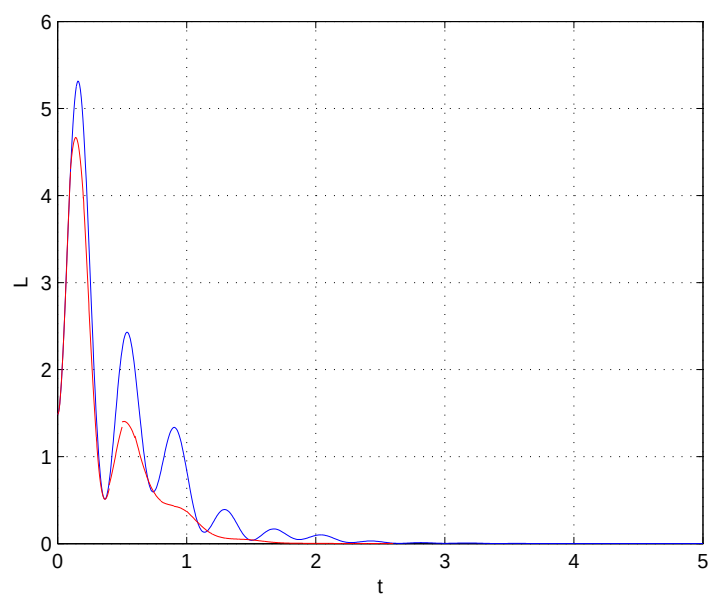
8. ábra. Az állapot harmadik és negyedik komponense az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).



9. ábra. Trajektóriák; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).



10. ábra. A vezérlés az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).



11. ábra. A J az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).

5.2. 2. példa

Egy másik példán is szemléltetjük a fent leírt NMPC módszert. Ez is egy rugalmas csatlakozású robot kar mozgását modellezi, az adatok a [4]-beli példából valók. A használt adatok:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -974.1935 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7750 & 0 & -7750 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -25.8065 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a nemlinearitás:

$$\gamma(z) = \sin(z) + z. \quad (48)$$

A (6) szektor feltétel teljesül, ha $\beta \geq 2$. Válasszuk megint a lehetséges legkisebb értéket β -ra. Most csak az állapotra teszünk fel korlátokat, amelyek így néznek ki:

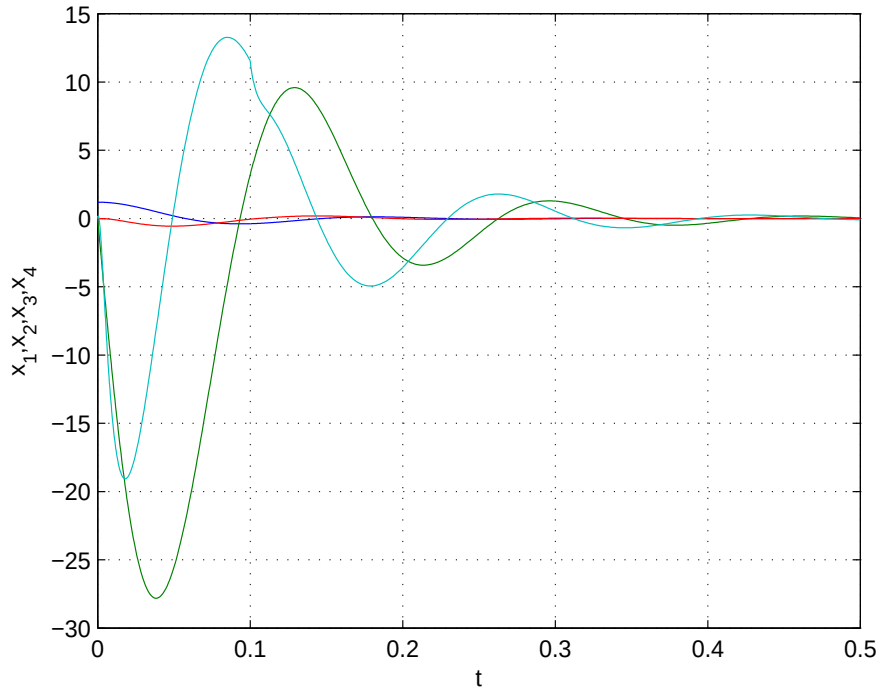
$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x_3 \leq \frac{\pi}{2} \quad (49)$$

A célfüggvényhez szükséges súlymátrixok:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad R = 0.1 \quad (50)$$

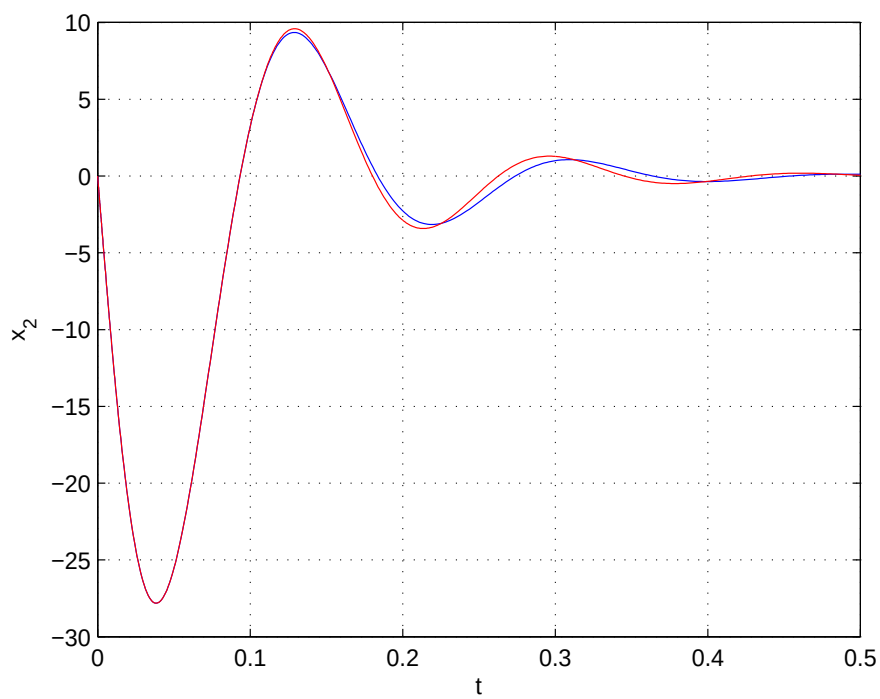
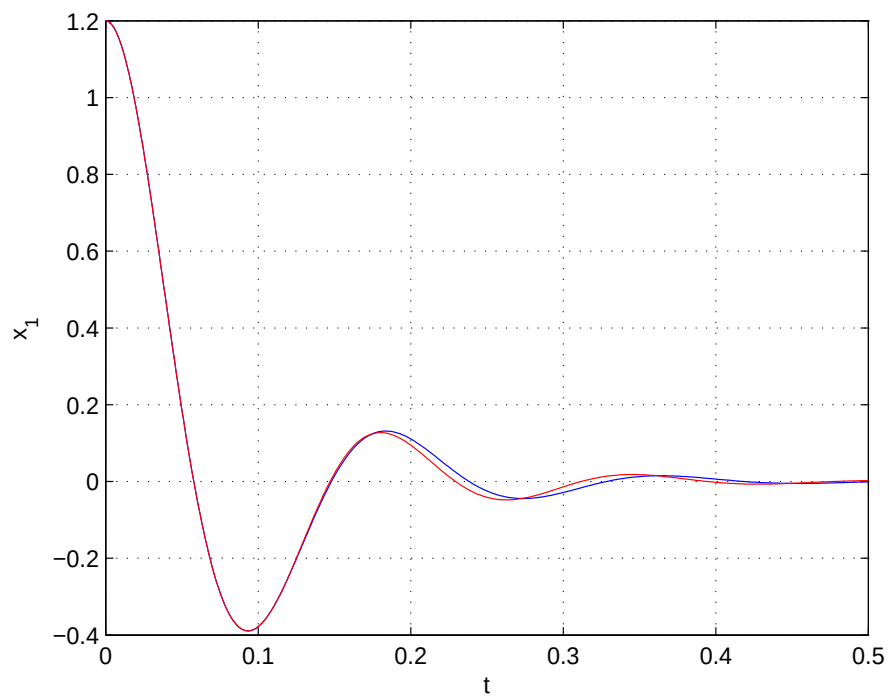
Legyen a kezdőállapotunk $x_0 = [1.2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. A szimuláláshoz az előző példában leírt algoritmust használtuk.

A 12. ábrán az összes állapot komponenst ábrázoltuk az idő függvényében, látható, hogy ezekre az adatokra sokkal gyorsabban érhető el a rendszer origója, mint az 1. példában leírt adatokra.

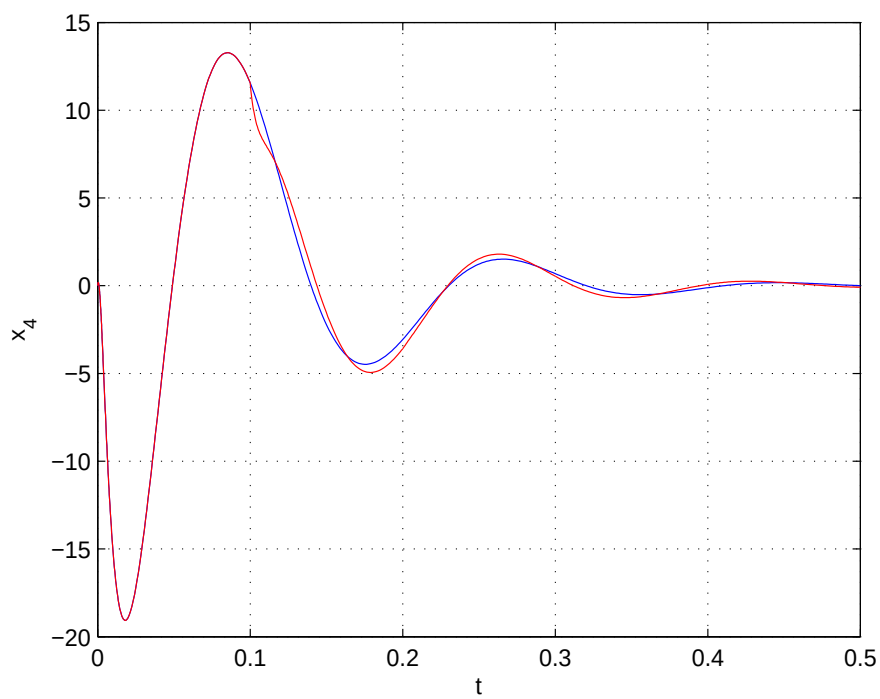
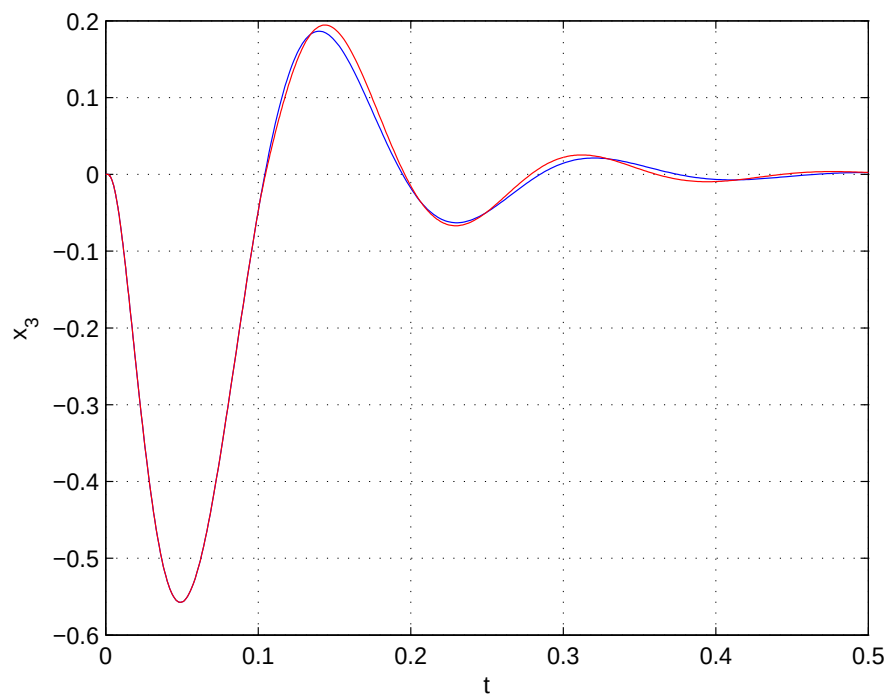


12. ábra. Az állapot komponensek az idő függvényében; x_1 a sötétkék, x_2 a zöld, x_3 a piros, x_4 a világoskék vonal.

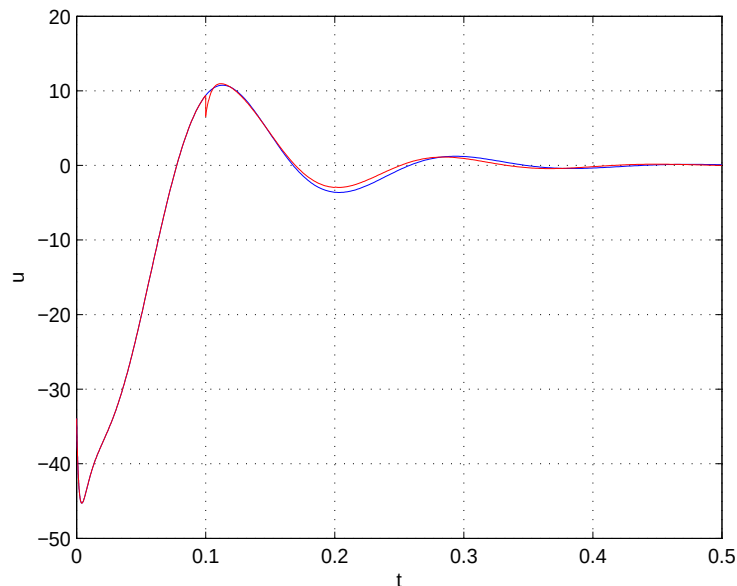
Megmutatjuk, hogy az NMPC módszer mennyivel hatásosabb, mint a statikus vezérlés, azaz az $u(t) = K_0 x(t)$ vezérlés alkalmazása. A 13. és a 14. ábrán láthatóak az állapot komponensek összehasonlítása az idő függvényében, az NMPC módszer esetén, és a statikus vezérlés esetén. Látható, hogy a statikus vezérlés alkalmazásával sem kell lényegesen több idő az egyensúlyi állapot eléréséhez. Ez azzal magyarázható, hogy az általunk szimulált bizonytalanság egy ilyen kis intervallumon nem okoz akkora eltérést a rendszerünkben, hogy azt, a statikus vezérléssel ne tudnánk kezelni. A 15. ábrán a vezérléseket hasonlítottuk össze, itt is csak kis különbség fedezhető fel a két módszer között. A (9) költségfüggvény értékére az NMPC módszer esetén 12.6241-et kaptunk, statikus vezérlés esetén 12.6409-et kaptunk, tehát ezek sem mutatnak sok eltérést, de az NMPC módszerrel némileg kisebb a költség. A költségfüggvény minimális felső korlátjára $\bar{V}_0(x(0)) = 12.9150$ értéket kaptunk, ami több, mint a kapott költségfüggvény értékek, tehát tényleg felső korlát lesz.



13. ábra. Az állapot első és második komponense az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).



14. ábra. Az állapot harmadik és negyedik komponense az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).



15. ábra. A vezérlés az idő függvényében; összehasonlítva az általunk levezetett NMPC módszert (piros) a statikus vezérléssel (kék).

6. Összegzés

Sikerült találnunk és bizonyítanunk egy olyan NMPC módszert, amely minden változójában szabad, ellentétben az [1]-beli módszerrel, ahol egy változót fixnek vettek (erre a változóra τ -ként hivatkozunk).

Az 1. példán megmutattuk, hogy az [1] szerzői jól sejtették, hogy az általuk levezetett NMPC módszer csak gyengén érzékeny τ -ra, mivel az általunk levezetett NMPC módszerrel kapott eredmények nem különböznek lényegesen az [1]-belitől. A mi módszerünk előnye, hogy nincs szükség előzetes számolásokra, megfelelő fix változó után kutatva. Beláttuk, hogy az NMPC módszer segítségével gyorsabb stabilizáció érhető el, és a költségünk is kisebb lesz. A 2. példában egy gyorsan stabilizálódó rendszert mutattunk, ahol az NMPC módszerrel sem lehetett lényegesen gyorsabb stabilizációt elérni.

További vizsgálatokat igényelnek olyan Lur'e-szerű rendszerek vizsgálata, ahol paraméterbizonytalanság is fellép. A valós eseményeket leíró rendszereknél egy reális probléma, hogy a rendszert leíró mátrixokat sem ismerjük pontosan.

Hivatkozások

- [1] C. Böhm, S. Yu, R. Findeisen és F. Allgöwer: Predictive Control for Lure Systems Subject to Constraints Using LMIs. Proceedings of the European Control Conference 2009, Budapest (2009).
- [2] S. Boyd, El Ghaoui, E. Feron és V. Balakishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [3] W. Chen és D. J. Ballance: On attraction domain of model predictive control of nonlinear systems with input/state constraints. Technical Report, CSC-99009, 1999, University of Glasgow.
- [4] Gyurkovics É. és Takács T.: Application of a multiplier method to uncertain Lur'e-like systems. System & Control Letters 60 (2011) 854-862
- [5] Gyurkovics É. és Takács T.: Application of matrix multipliers in case of conic uncertainty sets. Proceedings of the European Control Conference 2009, Budapest (2009).
- [6] Gyurkovics É.: Optimális irányítások. <http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/13.pdf>
- [7] Pólik I. és Terlaky T.: A survey of the S-lemma. SIAM Review 49 (2007) 371-418.
- [8] Simon L. P., Tóth J.: Differenciálegyenletek. Typotex, Budapest (2005)
- [9] Stoyan Gisbert: MATLAB. Typotex, Budapest (2005)
- [10] Stoyan G. és Takó G.: Numerikus módszerek I. Typotex, Budapest (2002)