

Tranziens plazmahullámok által okozott gyorsionveszteségek kvantitatív jellemzése

OTDK dolgozat

Horváth László

fizika BSc hallgató, BME TTK

Témavezetők:

Dr. Pokol Gergő egyetemi docens

BME Nukleáris Technikai Intézet

Papp Gergely doktorandusz

BME Nukleáris Technikai Intézet

2012. május 15.

Kivonat

Mágneses összetartású fúziós plazmákban az energia egyensúly szempontjából fontos, hogy a külső fűtés és a magreakciók által keltett gyorsionok a plazmában adják le energiájukat. Ezen ionok elvesztése drasztikusan lecsökkenti a fűtési teljesítményt, továbbá súlyosan károsíthatja a berendezés falát. A negatív hatások szükségessé teszik a jelenség vizsgálatát és megértését. Korábban az ASDEX Upgrade (AUG) tokamakon kvalitatívan vizsgálták a plazmahullámok és a gyorsionvesztések közti kapcsolatot [1]. Munkám során ezt az összefüggést kvantitatívan elemeztem, melyhez STFT (Short Time Fourier Transform – Rövid Idejű Fourier-transzformáció) alapú átviteli függvényt alkalmaztam.

A hagyományosan definiált átviteli függvény stacioner, szélessávú jelek esetén az átlagolások számának növekedésével gyorsan tart a várható értékéhez. Az általam vizsgált fizikai probléma viszont keskenysávú, tranzien্স jelek feldolgozását kívánta meg. Ezen jelek feldolgozására kiválóan alkalmasak a rövid idejű Fourier-transzformáción alapuló módszerek, mivel egyszerre nyújtanak információt a jelenségek idő- és frekvencia térbeni viselkedéséről. Keskenysávú jelek esetén azonban az átviteli függvény könnyen kimutathat csatolást az azonos frekvenciájú hullámok között abban az esetben is, ha nincs köztük lineáris kapcsolat. Az eredmény értelmezését tovább nehezítette, hogy a tranzien্স események miatt csak kevés átlagolásra volt lehetőségem. A problémák kiküszöbölése érdekében analitikusan kiszámoltam az átviteli függvényt egy általam alkotott additív jelmodellre. Az eredményekből következtetni tudtam arra, hogy valós jelre számított átviteli függvény éréke milyen tényleges csatolást jelent.

A kidolgozott eljárást IDL nyelven implementáltam és a németországi ASDEX Upgrade (AUG) tokamak mérési eredményeire alkalmaztam. A jelek kinyerésének megkönnyítése érdekében az általam írt rutint további idő-frekvencia felbontáson alapuló programokkal együtt integráltam az AUG legtöbb diagnosztikájának jelét beolvasni- és elemezni képes MTR rendszerbe. Az integrációval együtt az említett rutinokat egy közös grafikus felülettel is elláttam, mely az integrációval karöltve lehetővé teszi más – az AUG-on dolgozó – szakemberek számára a programcsomag használatát. A kidolgozott módszer segítségével különböző típusú és módusszámú plazmahullámok gyorsionszóró-képességét határoztam meg.

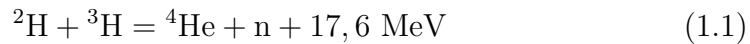
Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	5
2	Az adatfeldolgozáshoz használt módszerek és elméleti hátterük bemutatása	7
2.1	Lineáris idő-frekvencia transzformációk	7
	Rövid idejű Fourier-transzformáció	9
2.2	Keskenysávú jelek vizsgálata	13
	Kereszt-teljesítménysűrűség-spektrum	13
	Ingadozó frekvenciájú harmonikus oszcillátorok keresztspektruma	15
2.3	Az átviteli függvény	20
	A hagyományos átviteli függvény	20
	STFT átviteli függvény	22
2.4	Az átviteli függvény analitikus vizsgálata	23
	Jelmodell	23
	Az átviteli függvény várható értéke	24
	Az átviteli függvény gyenge csatolás esetén	25
3	Plazmahullámok által okozott gyorsionveszteségek vizsgálata	32
3.1	Alkalmazott diagnosztikák bemutatása	32
3.2	TAE módusok gyorsionszóró-képességének kvantitatív jellemzése	34
4	Összefoglalás és kitekintés	38
	Irodalomjegyzék	41
A	NTI Wavelet Tools	46

1. fejezet

Bevezetés

Jövönk egyik ígéretes energiaforrása a nukleáris fúzió. Jelenlegi ismereteink szerint a szabályozott magfúzió létrehozása szempontjából a deutérium-trícium reakció (1.1) a legkedvezőbb, köszönhetően a hatáskeresztmetszetének és a reakció közben felszabaduló energiának [2].



A fúzió egyik lehetséges megvalósítása a toroidális mágneses térrel összetartott plazmával működő fúziós berendezés [3, 4], ahol a plazma által folyamatosan leadott energiát fűtéssel kell pótolni. Ez egyrésztől történhet külső fűtésekkel, másrésztől önfenntartó plazmához szükség van a reakcióban keletkező α -részecskék fűtésére. Ehhez biztosítani kell, azt hogy a termikus sebességnél jóval gyorsabb ionok a plazmában adják le energiájukat. Elvesztésük drasztikusan lecsökkentheti a fűtési teljesítményt [5] és súlyosan károsíthatja a berendezést. Egy későbbi energiatermelő fúziós reaktor ezen hatások miatt csak kismértékű gyorsionvesztéssel lesz képes elviselni [6].

A ionvesztések alapvetően kétféle mechanizmus útján jöhetnek létre. Egyrésztől felgyorsíthatja a radiális transzportot a mágneses tér szimmetriájának torzulása, melyet például a toroidális tekercsek véges száma vagy rezisztív MHD módusok okozhatnak. Másrésztől a plazmában kialakuló MHD instabilitások rezonáns hullám-részecske kölcsönhatás útján képesek gyorsionvesztéssel okozni. Rezonáns részecske-hullám kölcsönhatás akkor tud létre jönni, ha a részecske kváziperiodikus mozgása során zömében ugyanabban a fázisban találkozik a hullám által perturbált elektromágneses térrel.

Céлом az, hogy olyan jelfeldolgozási eszközt fejlesszek mellyel kvantitatív jellemzést lehet adni a különböző plazmahullámok gyorsionszóró-képességéről. Ezért módszerem alapja az egy bemenetű egy kimenetű rendszerek jellemzésére használt átviteli függvény. Ennek kiszámítására, a fizikai folyamat gyors

san változó, tranziens jellege miatt a 2.1. fejezetben bemutatott rövid idejű Fourier-transzformációt használom.

A vizsgált fizikai folyamatokban mért jelek tipikusan keskenysávúak, melyek a 2.2. fejezetben bemutatott problémát okozhatják az eredmények kiértékelésekkor. Ezen hatások figyelembevételével a 2.3. fejezetben analitikus számítást végzek, melyben kitérek arra, hogyan lehet megállapítani a valódi átvitelt keskeny- és szélessávú zajjal terhelt jelekből számított átviteli függvény esetén.

A dolgozatban bemutatásra kerülő általános érvényű adatfeldolgozó módszereket a 3. fejezetben gyorsionveszteségek vizsgálatára alkalmazom. A módszerek demonstrálása érdekében gyorsionok keltette Alfvén-sajátmódusukat vizsgálom, ezek közül is elsősorban toroidális Alfvén-sajátmódusukat [7] (Toroidal Alfvén Eigenmode - TAE) fogok elemezni. A most épülő ITER tokamakban várhatóan ezek kelthetik a legnagyobb gyorsionveszteségeket [8].

2. fejezet

Az adatfeldolgozáshoz használt módszerek és elméleti háttérük bemutatása

A jelfeldolgozás alapvető módszere a jelalak vizsgálata. További jól ismert eljárás a jel spektrális felbontása. Előbbi esetben maximális időfelbontásunk lesz, viszont nincs frekvenciabeli információnk, utóbbi esetben ennek fordítottja igaz. Munkám során tranziens jelenségek viselkedését vizsgáltam, melyhez szükségem volt egyszerre a jelek idő- és frekvenciatérbeli felbontására is. Ehhez lineáris idő-frekvencia transzformációkat használtam.

A tranziens események vizsgálata mellett az is problémát okozott, hogy a jelekben megjelenő módusok keskenysávúak voltak. Később látni fogjuk, hogy ez nagyon megnehezítheti az eredmények értelmezését. A problémák kiküszöbölése érdekében analitikusan kiszámoltam az átviteli függvény várható értékét egy általam alkotott additív jelmodellre. Az eredményekből következtetni lehet arra, hogy a kísérletekben mért értékek valójában milyen kapcsolatot jeleznek a rendszer bemenete és kimenete között.

2.1. Lineáris idő-frekvencia transzformációk

A fejezetben szereplő definíciókat Stephane Mallat *A Wavelet Tour of Signal Processing* [9] című könyve alapján vezetem be. A lineáris idő-frekvencia transzformációk úgy állnak elő, hogy a jelet idő-frekvencia atomok bázisán fejtjük ki a megszokott módon:

$$Tf(u, \xi) = \langle f, g_{u, \xi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_{u, \xi}^*(t) dt ,$$

ahol $g_{u,\xi}$ az idő-frekvencia atom, egy olyan komplex értékű függvény, melynek energiája jól lokalizált időben és frekvenciában, továbbá normált ($\|g_{u,\xi}(t)\| = 1$). Az u és ξ indexek az atom pozícióját határozzák meg az idő-frekvencia síkon. Az atom időbeli (u) és frekvenciabeli (ξ) közepét, illetve időbeli (σ_t) és frekvenciabeli (σ_ω) kiterjedését a következő képletekkel definiálhatjuk:

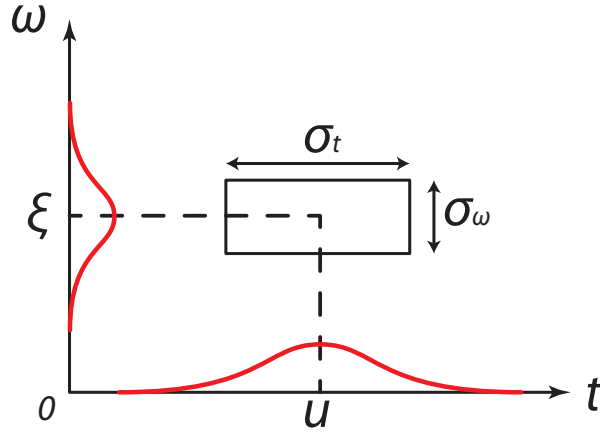
$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot |g_{u,\xi}(t)|^2 dt ,$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot |G_{u,\xi}(\omega)|^2 d\omega ,$$

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - u)^2 \cdot |g_{u,\xi}(t)|^2 dt ,$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \xi)^2 \cdot |G_{u,\xi}(\omega)|^2 d\omega ,$$

ahol G a g Fourier-transzformáltját jelöli.



2.1. ábra. Idő-frekvencia atom Heisenberg-doboza.

A 2.1. ábrán látható az atom idő- és frekvenciabeli helyzetét és kiterjedését jól szemléltető Heisenberg-doboz, mely egy (u, ξ) közepű, σ_t , σ_ω oldalhosszúságú téglalap az idő-frekvencia síkon. A tengelyeken az atom burkolói

láthatóak. A (2.1) határozatlansági reláció korlátozza az atom idő- és frekvenciabeli felbontását:

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} . \quad (2.1)$$

Tehát ha jobb idő felbontást szeretnénk elérni, azt csak a frekvencia felbontás rovására tehetjük meg és fordítva. Így nem érhetünk el egyszerre korlátlan idő és frekvencia felbontást is. A (2.1) kifejezésben egyenlőség Gábor-atom esetén áll fent. A Gábor-atom egy időben és frekvenciában eltolt Gauss-függvény, mely a következő formában írható fel:

$$g_{u,\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\sigma_t}} \cdot \exp\{i\xi t\} \exp\left\{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma_t^2}\right\} . \quad (2.2)$$

Az általam használt lineáris idő-frekvencia transzformációnak létezik diszkrét és folytonos változata is. Diszkrét transzformáció esetén megfelelő bázis - azaz atomcsalád - választása esetén ortogonális transzformációt kapunk. Ekkor az atomok Heisenberg-dobozai átfedés nélkül töltik ki a teret és a transzformált értékeink függetlenek lesznek. Ezzel ellentétben folytonos transzformáció esetén az atomok átfednek, a transzformált értékek nem lesznek függetlenek egymástól. A folytonos transzformáció legnagyobb előnye, hogy idő- és frekvenciaeltolás invariáns lesz, mely elengedhetetlen feltétele a tranziens jelek vizsgálatának. A folytonos lineáris idő-frekvencia transzformációkat megkülönböztethetjük aszerint, hogy hogyan generáljuk az idő-frekvencia atomcsaládot.

Rövid idejű Fourier-transzformáció

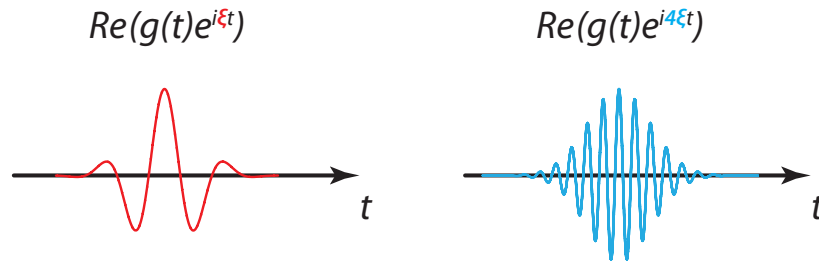
Munkám során rövid idejű Fourier-transzformációt (Short Time Fourier Transform - STFT) alkalmaztam, mely egy olyan lineáris idő-frekvencia transzformáció, ahol az atomcsalád a (2.3) kifejezés időbeli (u) és frekvenciabeli (ξ) eltolásával áll elő. Ennek köszönhetően a transzformált az időeltolás invariancia mellett a frekvencia eltolásra is invariáns lesz.

$$g_{u,\xi} = e^{i\xi t} g(t-u) \quad (2.3)$$

u és ξ folytonosan változnak, így az atomcsalád Heisenberg-dobozai egyenletesen lefedik a teret. Mivel az alapatom normált ($\|g\| = 1$), az összes atom normált lesz. A 2.2. ábrán szemléltetem, hogy a frekvencia eltolás milyen hatással van az atomra.

A transzformált értékeket a következő módon számíthatjuk:

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} g(t-u) dt . \quad (2.4)$$

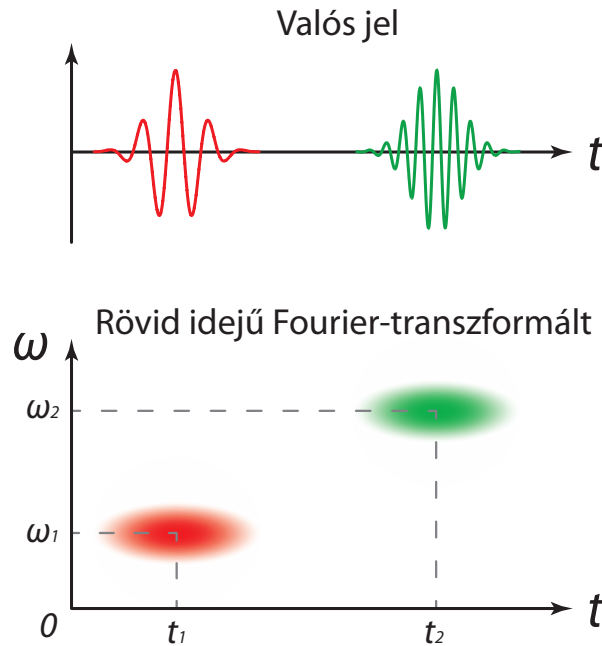


2.2. ábra. Frekvenciaeltolás hatása Gábor-atomokra.

Rövid idejű Fourier-transzformáció esetén a transzformált abszolútérték négyzete értelmezhető energiaeloszlásként az idő-frekvencia síkon, melyet spektrogramnak hívunk:

$$P_s f(u, \xi) = |Sf(u, \xi)|^2. \quad (2.5)$$

A 2.3. ábrán látható, hogy a két eltérő frekvenciájú, egymáshoz képest időben eltolt oszcilláció, különböző idő-frekvencia pontban jelenik meg a spektrogrammon.



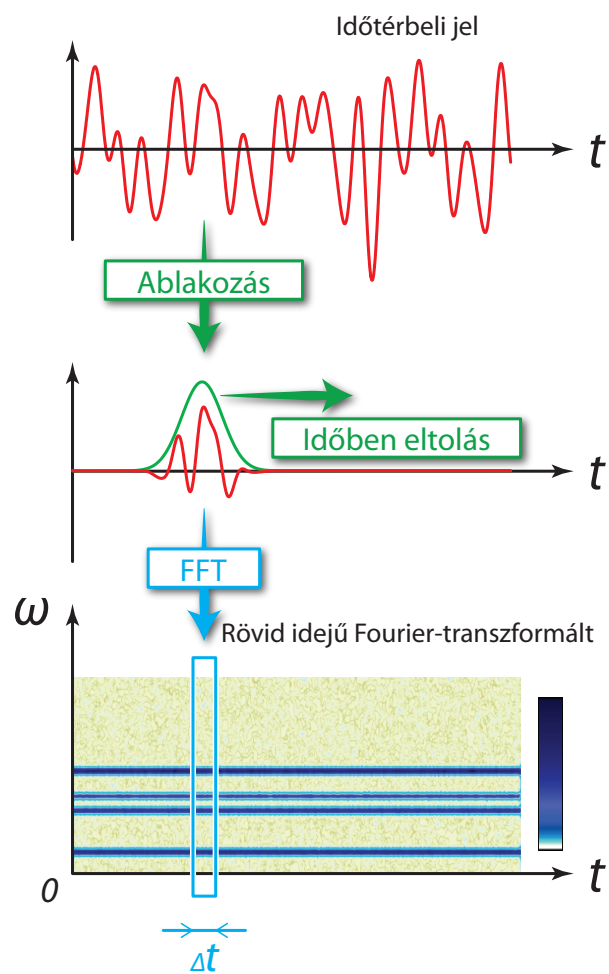
2.3. ábra. A két eltérő frekvenciájú, egymáshoz képest időben eltolt oszcilláció, különböző idő-frekvencia pontban jelenik meg a spektrogrammon.

A folytonos STFT transzformációt közelítőleg tudjuk kiszámítani úgy, hogy az idő-frekvencia síkon minél sűrűbben adjuk meg a transzformált ér-

tékeket. Ablakfüggvénynek szemléltető ábrákon és a továbbiakban a számítások során is minden esetben Gábor-atomot használok, mely azt jelenti, hogy $g(t)$ függvény egy Gauss-görbe. A T -vel definiált ablakszélesség a szórás kétszeresét jelenti. Ennek legkedvezőbb tulajdonsága, hogy mind idő, mind frekvencia térben az atom burkolója Gauss-függvény lesz, így a diszkrét Fourier-transzformációnál általában használat ablakfüggvényekkel -mint például boczar- vagy Hanning-ablak - ellentétben itt hiányoznak a frekvenciaterben megjelenő mellékcsúcsok.

A Gábor-atom hátránya, hogy nem kompakt tartójú. Ha a számítás elvégzéshez levágnánk a görbe végeit, akkor az atom elvesztené jó tulajdonságát. Ezen probléma hatásait a Gauss-ablak számábrázolásig történő folytatásával lehet minimálisra csökkenteni.

Diszkrét jelekre a folytonos transzformáció kiszámításának menetét szematikusan a 2.4. ábra mutatja. Az időtérbeli, N mintavételi pontból álló jelet leablakozzuk egy időben u -val eltolt atommal, majd az ablakon kívül eső részeket lenullázzuk, így kapunk egy, az eredeti jel hosszával megegyező hosszúságú, de már időben lokalizált energiájú jelet. Ezen a jelen elvégezzük a gyors Fourier-transzformációt (Fast Fourier Transform - FFT). Az így számított spektrum értékei lesznek az u időponthoz tartozó transzformált értékek. Ezután az ablakot eltoljuk néhány mintavételi idővel - attól függően, hogy mennyire szeretnénk megközelíteni a folytonos transzformációt - és abban a pontban is kiszámítjuk a spektrumot. Majd ezt megismételjük további mintavételi pontokban is, míg el nem érjük a számítási tartomány határát. Legjobb közelítés esetén minden mintavételi pontban kiszámítjuk a spektrumot, ekkor eredményül $N \times N$ méretű transzformáltat kapunk.



2.4. ábra. Rövid idejű Fourier-transzformáció számításának sematikus menete.

2.2. Keskenysávú jelek vizsgálata

A kereszt-teljesítménysűrűség-spektrum - melynek normálásával számíthatjuk az átviteli függvényt - segítségével bemutatom milyen nehézségek lépnek fel keskenysávú jelek vizsgálatánál. A problémák kiküszöbölése érdekében egy általam alkotott keskenysávú jelmodellre analitikusan kiszámolom az átviteli függvény várható értékét. Az eredményeket összehasonlítva a mérésekből származó jelek átviteli függvényével következtetni tudok arra, hogy ténylegesen milyen kapcsolat áll fenn a vizsgált események között.

Kereszt-teljesítménysűrűség-spektrum

A kereszt-teljesítménysűrűség-spektrum (2.7) - röviden kereszt-spektrum - széleskörben használt jelfeldolgozási eszköz. Elsőként definiálom a kiszámításához szükséges függvényeket, majd röviden bemutatom a tulajdonságait, közben kitérek a keskenysávú jelek esetén fellépő problémákra is.

A kereszt-spektrum meghatározásához Fourier-transzformációt alkalmazunk, melynek a következő definícióját használom [9]:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt ,$$

az inverz transzformáció:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega .$$

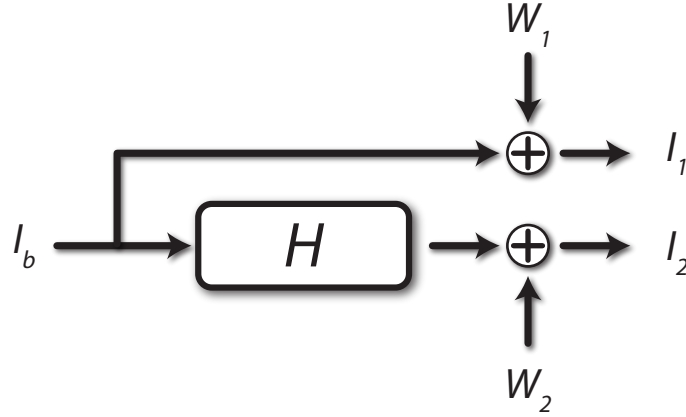
Ezek segítségével definiálható a teljesítménysűrűség-spektrum (Auto Power Spectral Density - APSD) (2.6) és a kereszt-teljesítménysűrűség-spektrum (Cross Power Spectral Density - CPSD) (2.7):

$$APSD_x(\omega) = X(\omega)X^*(\omega) , \quad (2.6)$$

$$CPSD_{xy}(\omega) = X(\omega)Y^*(\omega) , \quad (2.7)$$

ahol $X(\omega)$ és $Y(\omega)$ az $x(t)$ és $y(t)$ függvény Fourier-transzformáltjai, és $*$ a komplex konjugálást jelöli. A kereszt-spektrum komplex mennyiség, melynek fázisát és abszolút értékét külön-külön ábrázolhatjuk.

A függvény vizsgálatához vegyük a 2.5. ábrán látható lineáris rendszert, melyet teljes mértékben definiál a $h(t)$ impulzus-válaszfüggvény vagy annak Fourier-transzformáltja a $H(\omega)$ átviteli függvény. Adjunk a rendszerre egy



2.5. ábra. Lineáris rendszer vázlata.

$i_b(t)$ gerjesztést. Ha figyelembe vesszük, hogy mind a bemeneten, mind a kimeneten mért jelhez független, additív zajok adódnak, akkor rendszerünket a következő egyenletekkel írhatjuk le idő térben és frekvencia térben:

$$i_1(t) = i_b(t) + w_1(t) \iff I_1(\omega) = I_b(\omega) + W_1(\omega) ,$$

$$i_2(t) = i_b(t) * h(t) + w_2(t) \iff I_2(\omega) = I_b(\omega) \cdot H(\omega) + W_2(\omega) ,$$

ahol $*$ a konvolúciót jelöli, a nagy betűvel jelölt mennyiségek pedig a kisbetűs mennyiségek Fourier-transzformáltjai. A kimenet és bemenet között számított keresztspektrum:

$$\begin{aligned} CPD_{12}(\omega) &= I_1(\omega)I_2^*(\omega) = \\ &= I_b(\omega)I_b^*(\omega)H^*(\omega) + I_b(\omega)W_2^*(\omega) + \\ &\quad + I_b^*(\omega)H^*(\omega)W_1(\omega) + W_1(\omega)W_2^*(\omega) . \end{aligned}$$

Az eredmény nem váratlan, viszont ha elegendő CPD becslést kiátlagolunk, akkor a független valószínűségi változók szorzatainak átlaga zérushoz tart:

$$\langle I_b(\omega)W_2^*(\omega) \rangle \rightarrow 0 ,$$

$$\langle I_b^*(\omega)W_1(\omega) \rangle \rightarrow 0 ,$$

$$\langle W_1(\omega)W_2^*(\omega) \rangle \rightarrow 0 ,$$

ahol $\langle \dots \rangle$ jelöli az átlagolást. Ez annak köszönhető, hogy a zajok determinisztikus tagok fázisától független, véletlen fázissal rendelkeznek. Az eredmény:

$$\langle CPD_{12}(\omega) \rangle = I_b(\omega)I_b^*(\omega)H^*(\omega) .$$

Tehát ha az abszolút érték valamely frekvencián magas lesz akkor feltehetőleg ezek az összetevők mindkét jelben erősen megvannak. Azt is láttuk, ahhoz, hogy jó becslést kapjunk a keresztspektrumra átlagolásra van szükség. Ezt az átlagolást leggyakrabban úgy végezzük, hogy az időjelet blokkokra bontjuk, külön-külön kiszámoljuk a keresztspektrumot, majd a blokkok eredményét összeátlagoljuk. Átlagolás nélkül csak a jelek amplitúdójának szorzatát kapjuk meg, függetlenül attól, hogy a jel hányad része származik független zajokból. A becslésünk lépésről-lépésre közelíti a várható értékét, a szórása $\frac{1}{\sqrt{N}}$ szerint változik [10]. Ez egyben azt jelenti, hogy két egymástól független, szélessávú zaj közötti keresztspektrum az átlagolások számának növelésével $\frac{1}{\sqrt{N}}$ -nel változik. A következő fejezetben bemutatom, hogy milyen eredményre számíthatunk abban az esetben, ha jeleink keskenysávú zajok.

Ingadozó frekvenciájú harmonikus oszcillátorok keresztspektruma

Ehhez először is definiálni kell pontosan mit értünk keskenysávú zaj alatt. Itt a korábbi TDK dolgozatomban [11] is alkalmazott jelmodellt használok, mely egy időben változó fázissal rendelkező, adott frekvenciájú harmonikus oszcillátor. Feltesszük, hogy a fázis blokkonként csak kicsit ingadozik, ezért egy blokkon belül lineárisnak tekintjük:

$$\varphi_q^{(j)} = \varphi_{q0}^{(j)} + \varphi_{q1}^{(j)} \cdot t, \quad (2.8)$$

oly módon, hogy a fázisfüggvény folytonos legyen:

$$\varphi_{q0}^{(j+1)} = \varphi_{q0}^{(j)} + \varphi_{q1}^{(j)} \cdot T_a, \quad (2.9)$$

ahol (j) a blokk sorszámát, T_a a blokk időbeli hosszát jelöli. φ_{q1} pedig egy blokkonként változó, normális eloszlású, zérus várható értékű és σ szórású valószínűségi változó. Ez a modell megfelel egy erős hullámnak, melynek frekvenciája lassan, de a jel többi komponensétől függetlenül ingadozik.

Tekintsünk egy ω_q frekvenciájú, $\varphi_q(t)$ változó fázisú és Q amplitúdójú harmonikus oszcillátort, melynek egyenlete a következő¹:

$$x_q(t) = Q \cdot \exp[i(\omega_q t + \varphi_q(t))].$$

A fázis helyére behelyettesítve (2.8) kifejezést:

$$x_q^{(j)} = Q \cdot \exp \left[i(\omega_q t + \varphi_{q0}^{(j)} + \varphi_{q1}^{(j)} t) \right] = Q \cdot \exp \left[i[(\omega_q + \varphi_{q1}^{(j)})t + \varphi_{q0}^{(j)}] \right].$$

¹A hagyományos Fourier-transzformációval számított keresztspektrumot általában stationer jelekre alkalmazzuk, ezért az oszcillátor amplitúdója minden blokkban állandó.

Két azonos frekvencián rezgő oszcillátor közti keresztspektrum kiszámításához szükség van a j -vel indexelt, T_a szélességű blokkok Fourier-transzformáltjaira²:

$$\begin{aligned}
X_q^{(j)}(\omega) &= \int_{(j-1) \cdot T_a}^{j \cdot T_a} \exp[-i\omega t] x_q^{(j)}(t) dt = \\
&= \int_{(j-1) \cdot T_a}^{j \cdot T_a} \exp[-i\omega t] \cdot Q \cdot \exp\left[i\left[\left(\omega_q + \varphi_{q1}^{(j)}\right)t + \varphi_{q0}^{(j)}\right]\right] dt = \\
&= Q \cdot \exp\left[i\varphi_{q0}^{(j)}\right] \int_{(j-1) \cdot T_a}^{j \cdot T_a} \exp\left[i\left(\omega_q - \omega + \varphi_{q1}^{(j)}\right)t\right] dt = \\
&= Q \cdot \exp\left[i\varphi_{q0}^{(j)}\right] \cdot \delta\left(\omega_q - \omega + \varphi_{q1}^{(j)}\right) . \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Egy mintavételezett jel esetén leggyakrabban gyors Fourier-transzformációt alkalmazunk. Ekkor nem folytonos a transzformáltunk, hanem frekvenciafelbontásonként (Δf) diszkrét értékeket vesz fel. Ezért nem lehet kiértékelni tetszőleges frekvenciát, csak $(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega + \frac{\Delta\omega}{2})$ intervallumokat. Így (2.10)-et kiértékelve az $(\omega_q - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_q + \frac{\Delta\omega}{2})$ intervallumon:

$$X_q^{(j)}\left(\omega_q \pm \frac{\Delta\omega}{2}\right) = Q \cdot \exp\left[i\varphi_{q0}^{(j)}\right] \cdot \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} \delta(\omega_q - \omega + \varphi_{q1}^{(j)}) d\omega .$$

Ha feltételezem, hogy a frekvenciaingadozás a frekvencia felbontáson belül van, azaz $-\frac{\Delta\omega}{2} \leq \varphi_{q1}^{(j)} \leq \frac{\Delta\omega}{2}$ akkor,

$$X_q^{(j)}\left(\omega_q \pm \frac{\Delta\omega}{2}\right) = Q \cdot \exp\left[i\varphi_{q0}^{(j)}\right] .$$

Mindezek alapján két ω_0 frekvenciájú harmonikus oszcillátor - melyek függetlenek ugyan, de fázisuk lassan változik - közti keresztspektrum:

$$X_a^{(j)}\left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}\right) = A \cdot \exp\left[i\varphi_{a0}^{(j)}\right] ,$$

²A $[(j-1) \cdot T, j \cdot T]$ integrálási határ nem jelent mást mint boxcar ablakozást. Emiatt egy harmonikus oszcillátor Fourier-transzformáltja valójában nem egy ω_q -val eltolt Dirac-delta lesz, hanem annak konvolúciója a boxcar ablak Fourier-transzformáltjával, azaz egy $\frac{\sin(x)}{x}$ függvénnyel. Az eredmény egy ω_q -val eltolt $\frac{\sin(x)}{x}$ lesz, mely mellécsúcsokat okoz, de a főcsúcs amplitúdója nem változik. Mivel az alábbi levezetés csak a szemléltetést szolgálja, ezért jelen esetben eltekintek a ablakozás hatásának figyelembevételétől.

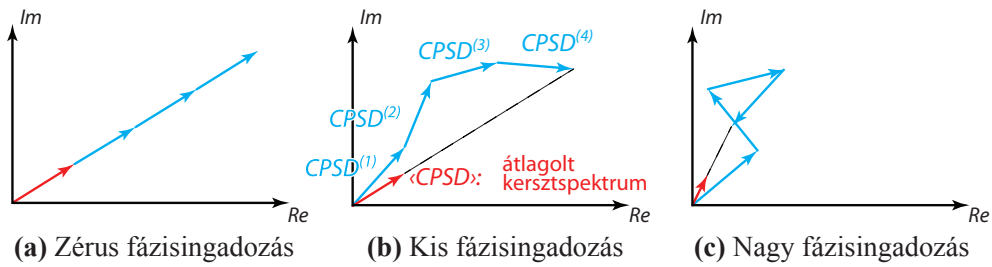
$$\begin{aligned}
X_b^{(j)} \left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2} \right) &= B \cdot \exp \left[-i\varphi_{b0}^{(j)} \right] , \\
CPSD_{ab}^{(j)} \left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2} \right) &= X_a^{(j)} \left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2} \right) \cdot X_b^{(j)*} \left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2} \right) , \\
CPSD_{ab}^{(j)} \left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2} \right) &= A \cdot B \cdot \exp \left[i(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)}) \right] . \quad (2.11)
\end{aligned}$$

A (2.11) kifejezés egy blokk keresztspektrumának eredménye, mely egy komplex szám $A \cdot B$ abszolút értékkel és $\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)}$ fázissal. Az abszolút érték állandó, a fázis pedig blokkról blokkra változik. (2.9) kifejezés alapján kiszámíthatjuk, mekkora a fáziskülönbség két egymást követő blokk keresztspektruma között:

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{a0}^{(j+1)} - \varphi_{b0}^{(j+1)} \right) - \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)} \right) &= \left(\varphi_{a0}^{(j+1)} - \varphi_{a0}^{(j)} \right) - \left(\varphi_{b0}^{(j+1)} - \varphi_{b0}^{(j)} \right) = \\
&= \left(\varphi_{a1}^{(j)} - \varphi_{b1}^{(j)} \right) \cdot T_a .
\end{aligned}$$

$\left(\varphi_{a1}^{(j)} - \varphi_{b1}^{(j)} \right)$ két, σ_a , illetve σ_b szórású normális eloszlású valószínűségi változó összegeként áll elő, így maga is normális eloszlású $\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$ szórással.

Abban az esetben ha a két oszcillátor független egymástól, a keresztspektrum abszolút értéke attól függ mennyi átlagolásunk van, és mekkora a fázisingadozás szórása. Ezt jól szemlélteti a 2.6. ábra, ahol a komplex síkon sematikusán ábrázoltam a blokkok keresztspektrumát és az átlagot három különböző esetben. Amennyiben a fázisingadozás szórása zérus (2.6a. ábra)



2.6. ábra. Keresztspektrum átlagolásának sematikus ábrázolása zérus (a), kicsi (b) és nagy (c) fázisingadozás esetén. Független oszcillátorok esetén az átlagolt keresztspektrum az átlagolások számának növelésével egyáltalán nem (a), lassan (b) vagy gyorsan (c) tart nullához.

az átlagolt CPSD mindvégig magas lesz. Ha a szórás kicsi (2.6b. ábra), sok

átlagolásra van szükség. Nagy szórás esetén (2.6c. ábra) már néhány átlagolás elég, hogy közel kerüljünk az átlagolt keresztsspektrum várható értékéhez, mely független zajok esetén nulla. Fontos megjegyezni, hogy fáziscsatolt hullámok esetében a fázisingadozástól függetlenül az 2.6a. ábrához hasonló eredményt kapunk, mivel - a csatolás miatt - a fáziskülönbség állandó lesz.

A továbbiakban kiszámolom az átlagolt keresztsspektrum abszolútértékének várható értékét, mely eredmény a későbbiekben is fontos lesz. Az abszolútérték várható értékénél egyszerűbben ki lehet számolni az abszolútérték-négyzet várható értékét. Ezért kihasználom, hogyha egy $\vec{V}$ véletlen síkbeli vektor eloszlása nulla várható értékű, forgásszimmetrikus normális eloszlás, akkor [12]:

$$\frac{\mathbb{E}(|\vec{V}|)}{\sqrt{\mathbb{E}(|\vec{V}|^2)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (2.12)$$

így elsőként az abszolút érték várható értékét számítom ki:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\langle CPD_{ab}(\omega) \rangle|^2] &= \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A \cdot B \cdot \exp \left[i(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)}) \right] \right|^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{A \cdot B}{N} \sum_{j=1}^N \exp \left[i(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)}) \right] \right) \cdot \left(\frac{A \cdot B}{N} \sum_{j=1}^N \exp \left[i(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)}) \right] \right)^* \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{A \cdot B}{N} \sum_{j=1}^N \exp \left[i(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)}) \right] \right) \cdot \left(\frac{A \cdot B}{N} \sum_{j=1}^N \exp \left[-i(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)}) \right] \right) \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{A^2 \cdot B^2}{N^2} \cdot \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)} - (\varphi_{a0}^{(k)} - \varphi_{b0}^{(k)}) \right) \right] \right) \right] = \end{aligned}$$

a várható érték linearitása miatt,

$$\begin{aligned} &= \frac{A^2 \cdot B^2}{N^2} \cdot \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\exp \left[i \left((\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(k)}) - (\varphi_{b0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(k)}) \right) \right] \right) \right] = \\ &= \frac{A^2 \cdot B^2}{N^2} \cdot \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{E} [\exp [iX]], \end{aligned}$$

ahol $X := (\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(k)}) - (\varphi_{b0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(k)})$. A (2.9) kifejezés alapján X normális eloszlású valószínűségi változók összegeként áll elő, tehát maga is normális

eloszlású és $(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(k)})$ a következőképpen írható fel:

$$\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(k)} = \begin{cases} \sum_{l=k+1}^j \varphi_{a1}^{(l)} \cdot T_a & \text{ha } j > k \\ 0 & \text{ha } j = k \\ \sum_{l=j+1}^k \varphi_{a1}^{(l)} \cdot T_a & \text{ha } j < k \end{cases}$$

Mindhárom esetben $\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(k)}$, $|j - k|$ normális eloszlású valószínűségi változó összegeként áll elő, így maga is normális eloszlású, $|j - k|T_a^2\sigma_a^2$ szórásnégyzet-tel $(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, |j - k|T_a^2\sigma_a^2))$. Az előzőekhez hasonlóan $\varphi_{b0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, |j - k|T_a^2\sigma_b^2)$, így $X \sim \mathcal{N}(0, |j - k|T_a^2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2))$.

Általános esetben igaz, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó $(Z \sim \mathcal{N}(0, \theta^2))$ esetén e^{iZ} várható értéke a következő [13]:

$$\mathbb{E}[e^{iZ}] = e^{-\frac{\theta^2}{2}}. \quad (2.13)$$

Felhasználva a (2.13) összefüggést:

$$\mathbb{E}[\exp[iX]] = \exp\left[-|j - k| \cdot T_a^2 \cdot \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2}\right].$$

Bevezetve az $\alpha = \exp\left[-T_a^2 \cdot \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2}\right]$ jelölést:

$$\mathbb{E}[|\langle CPD_{ab}(\omega) \rangle|^2] = \frac{A^2 B^2}{N^2} \cdot \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha^{|j-k|}, \quad (2.14)$$

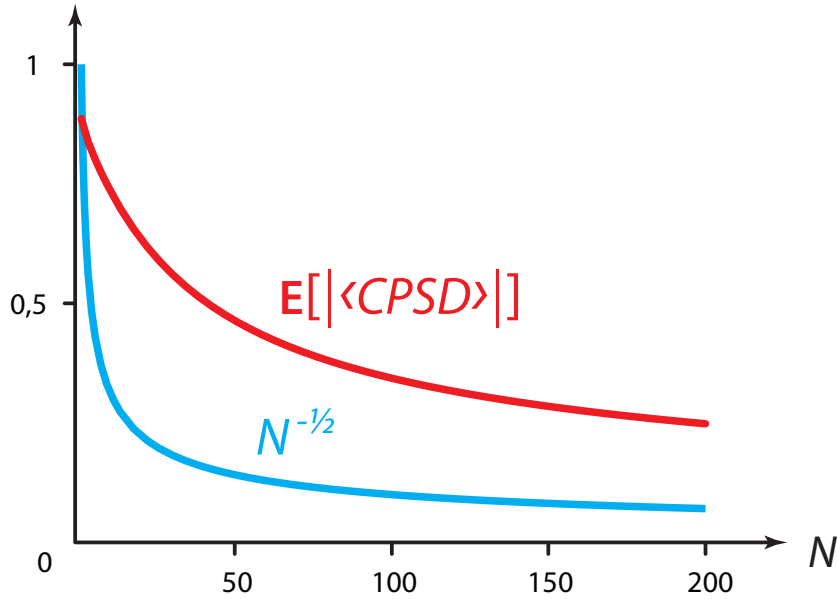
mely pár mértani sorozat összegzése után:

$$\mathbb{E}[|\langle CPD_{ab}(\omega) \rangle|^2] = \frac{A^2 B^2}{N^2} \cdot \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} N - \frac{2\alpha}{(1 - \alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1 - \alpha)^2} \alpha^N \right).$$

A (2.12) kifejezés alapján:

$$\mathbb{E}[|\langle CPD_{ab}(\omega) \rangle|] = \frac{AB}{N} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} N - \frac{2\alpha}{(1 - \alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1 - \alpha)^2} \alpha^N}. \quad (2.15)$$

Amennyiben a szórássok végtelenbe tartanak, azaz szélessávú zajról van szó α 0-hoz tart, így a (2.15) végeredmény ebben a határesetben visszaadja az $\frac{1}{\sqrt{N}}$ -es csökkenést. A 2.7. ábrán látható a (2.15) kifejezés az átlagolások függvényében $A = 1$, $B = 1$, $\sigma_a = \sigma_b = 0,35$ paraméterekkel, illetve a szélessávú zaj határeset. Az előbbi jóval lassabban tart 0-hoz, ezért van szükség az átviteli függvény részletesebb analitikus vizsgálatra, melyet a következő fejezetben mutatok be.



2.7. ábra. Az (2.15) kifejezés az átlagolások függvényében ábrázolva $A = 1$, $B = 1$, $\sigma_a = \sigma_b = 0,35$ paraméterekkel pirossal, illetve a szélessávú zaj határeset kékkel.

2.3. Az átviteli függvény

A hagyományos átviteli függvény

Tekintsünk egy egy bemenetű, egy kimenetű rendszert (lásd 2.5. ábra). Ha ennek az átvitelét szeretnénk megvizsgálni, akkor a bemenetre kötünk egy adott frekvenciájú, ismert amplitúdójú szinusz jelet, majd mérjük a kimeneten megjelenő jelet. Lineáris rendszer esetén azonos frekvenciájú, de más amplitúdójú és fázisú szinusz jelenik meg a kimeneten. A két amplitúdó aránya jelenti a rendszer erősítését, a két fázis különbsége pedig a fázistolást adott frekvencián. Ezt a mérést elvégezhetjük az összes olyan frekvencián, melyen kíváncsiak vagyunk a rendszer átvitelére. Amennyiben egy adott tartományban mindenhol szeretnénk megállapítani az átvitelt érdemes egy folytonosan változó frekvenciájú szinusz gerjesztőjelet rákapcsolni a bemenetre. Ezzel a módszerrel a frekvencia tartomány két végén torzítások jelentkeznek, ennek ellenére gyors és aránylag jó átvitelbecslést tesz lehetővé [10].

Hasonló módon minden frekvencián azonos súlyú összetevővel rendelkezik a fehér zaj. Ez a legalkalmasabb az átviteli függvény becsléséhez, azonban ekkor hosszú idejű mérések szükségesek, mivel nem determinisztikus folyamattal van dolgunk, így az eredmények csak várható értékbeli becslést adnak [10].

Vizsgáljuk meg hogyan számítható a hagyományos átviteli függvény. A 2.5. ábrán látható rendszer bemenetén és kimenetén mérhető jelek:

$$I_1(\omega) = I_b(\omega) + W_1(\omega) ,$$

$$I_2(\omega) = I_b(\omega) \cdot H(\omega) + W_2(\omega) . \quad (2.16)$$

Az összefüggésekben a jelek frekvenciatérbeli megfelelői láthatóak. Természetesen a bemenethez és a kimenethez is hozzáadódik egy $W_i(\omega)$ detektálási zaj. Ezek alapján a hagyományos módszerrel számítható átviteli függvények:

$$\frac{I_2(\omega)}{I_1(\omega)} = \frac{H(\omega) + \frac{W_2(\omega)}{I_b(\omega)}}{1 + \frac{W_1(\omega)}{I_b(\omega)}} \quad \text{és} \quad \frac{RMS_2}{RMS_1} = \sqrt{\frac{|H(\omega)|^2 + \frac{|W_2(\omega)|^2}{|I_b(\omega)|^2}}{1 + \frac{|W_1(\omega)|^2}{|I_b(\omega)|^2}}} . \quad (2.17)$$

A (2.17) összefüggéseken látható, hogy magas zaj-jel viszony esetén az eredmény jelentős, szisztematikus torzítást tartalmaz, különösen magas frekvencia tartományokban mikor az átvitel leesik, a végeredményt a torzítást okozó tagok határozzák meg. Ennek kiküszöbölése érdekében szorozzuk meg a (2.16) egyenletet I_1^* -gal:

$$I_2(\omega) \cdot I_1^*(\omega) = I_b(\omega) \cdot H(\omega) \cdot I_1^*(\omega) + W_2(\omega) \cdot I_1^*(\omega) ,$$

$$I_2(\omega) \cdot I_1^*(\omega) = [I_1(\omega) - W_1(\omega)] \cdot H(\omega) \cdot I_1^*(\omega) + W_2(\omega) \cdot I_1^*(\omega) .$$

A zajt tartalmazó tagok várható értéke átlagolás esetén zérus, így az eredmény:

$$I_2(\omega) \cdot I_1^*(\omega) = I_1(\omega) \cdot H(\omega) \cdot I_1^*(\omega) ,$$

$$CPSD_{12}(\omega) = H(\omega) \cdot APSD_1(\omega) .$$

A legjobb eredményt úgy kapjuk, hogy a bementet fehér zajjal gerjesztjük, vagy még jobb, ha szabadon hagyjuk a rendszert, megvárjuk míg stationer állapotba kerül és a bemeneten mért zaj spektrumával elosztjuk a ki- és bemenet közti keresztspektrumot. Ekkor a rendszer átviteli függvényének torzítatlan becslését kapjuk [10]:

$$H(\omega) = \frac{CPSD_{12}(\omega)}{APSD_1(\omega)} .$$

STFT átviteli függvény

A tranziens események vizsgálata miatt rövid idejű Fourier-transzformáció használtam, melynek segítségével (2.6)-hez és (2.7)-hez hasonlóan definiálhatjuk az idő- és frekvenciafüggő teljesítménysűrűség-spektrumot (2.18) és kereszt-teljesítménysűrűség-spektrumot (2.19):

$$APSD_x(t, \omega) = X(t, \omega)X^*(t, \omega) , \quad (2.18)$$

$$CPSD_{xy}(t, \omega) = X(t, \omega)Y^*(t, \omega) , \quad (2.19)$$

ahol $X(t, \omega)$ és $Y(t, \omega)$ az $x(t)$ és $y(t)$ függvény rövid idejű Fourier-transzformáltjai. Ezek segítségével az átviteli függvény a következő módon definiálható:

$$H_{xy}(t, \omega) = \frac{CPSD_{xy}(t, \omega)}{APSD_x(t, \omega)} . \quad (2.20)$$

Számításaim során az átviteli függvény pontosabb becsléséhez egy boxcar ablakkal mozgó átlagolást végeztem:

$$H_{xy}(t, \omega) = \frac{\langle CPSD_{xy}(t, \omega) \rangle}{\langle APSD_x(t, \omega) \rangle} ,$$

$$\langle APSD_x(t, \omega) \rangle = \frac{1}{T_a} \int_{t-T_a/2}^{t+T_a/2} APSD_x(t, \omega) dt ,$$

$$\langle CPSD_{xy}(t, \omega) \rangle = \frac{1}{T_a} \int_{t-T_a/2}^{t+T_a/2} CPSD_{xy}(t, \omega) dt .$$

2.4. Az átviteli függvény analitikus vizsgálata

A 2.2. fejezetben bemutattam, hogy a keskenysávú zajok jelenléte mellett a keresztspektrum - és ez által a normálásával kapott átviteli függvény - lassabban tart a várható értékéhez, mint azt szélessávú zajok esetén tenné. Ennek kiküszöbölése érdekében analitikusan kiszámoltam az átviteli függvény várható értékét két, részben csatolt oszcillátor között, melyek keskeny és szélessávú additív zajokat is egyaránt tartalmaznak. A jelmodell részletes leírását a következő fejezet tartalmazza.

Jelmodell

A bementi jel (2.21) első tagja egy ingadozó fázisú (lásd 2.2. fejezet) harmonikus oszcillátor, a második tagja egy szélessávú additív fehér zaj. A kimenet (2.22) első két tagja egy B amplitúdójú harmonikus oszcillátor, melynek s -ed része csatolt a bemenettel, $(1 - s)$ -ed része pedig független. A harmadik tag pedig egy szélessávú additív fehér zaj. Az itt definiált s változó tulajdonképpen egy csatolási együttható, mely jellemzi a bemenet és a kimenet közti csatolás erősségét.

$$\begin{aligned} x_a(t) &= A \cdot \exp [i(\omega_0 t + \varphi_a^{(j)}(t))] + w_a(t) = \\ &= A \cdot \exp \left[i(\omega_0 t + \varphi_{a0}^{(j)} + \varphi_{a1}^{(j)} t) \right] + w_a(t) = \\ &= A \cdot \exp \left[i \left((\omega_0 + \varphi_{a1}^{(j)}) t + \varphi_{a0}^{(j)} \right) \right] + w_a(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} x_b(t) &= B \cdot s \cdot \exp [i(\omega_0 t + \varphi_a^{(j)}(t) + \varphi)] + \\ &+ B \cdot (1 - s) \cdot \exp [i(\omega_0 t + \varphi_b^{(j)}(t))] + w_b(t) = \\ &= B \cdot s \cdot \exp \left[i(\omega_0 t + \varphi_{a0}^{(j)} + \varphi_{a1}^{(j)} t + \varphi) \right] + \\ &+ B \cdot (1 - s) \cdot \exp \left[i(\omega_0 t + \varphi_{b0}^{(j)} + \varphi_{b1}^{(j)} t) \right] + w_b(t) = \\ &= B \cdot s \cdot \exp \left[i \left((\omega_0 + \varphi_{a1}^{(j)}) t + \varphi_{a0}^{(j)} + \varphi \right) \right] + \\ &+ B \cdot (1 - s) \cdot \exp \left[i \left((\omega_0 + \varphi_{b1}^{(j)}) t + \varphi_{b0}^{(j)} \right) \right] + w_b(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mivel itt a jelek STFT transzformáltjait számítom ki, mely egy folytonos transzformáció, a φ_{a1} -ek és φ_{b1} -ek változása más jelent mint diszkrét esetben. Itt úgy definiálom a fázis változást, hogy a fázis lineáris tagjai, tehát φ_{a1} és φ_{b1} , a Gauss-ablak szélességén belül állandóak. Az átlagolás során a mozgó

ablak szélessége N -szerese a Gauss-ablak szélességének. Mivel a fázis lineárisan változik az eredmény ugyanazt adja, mintha átlagolnám az N darab lineáris szakaszhoz tartozó, N darab $\varphi_0^{(j)}$ fázist. Így az átlagolás hasonlóan számítható, mint a 2.2. fejezetben.

Az átviteli függvényt (2.20) a keresztspektrum normálásával kapjuk, ezért a számításaim során az egyszerűség miatt újfent a keresztspektrummal dolgozom, majd a végén végzem el a normálást.

Az átviteli függvény várható értéke

Az STFT transzformáció során egy adott időpillanathoz tartozó értékeket Fourier-transzformáció segítségével számíthatjuk ki (lásd 2.4. ábra), ezért először is szükségünk van a bementi (2.21) és kimeneti (2.22) jelek Fourier-transzformáltjaira:

$$X_a^{(j)}(t, \omega) = A \cdot \exp \left[i\varphi_{a0}^{(j)} \right] \cdot \delta \left(\omega_0 - \omega + \varphi_{a1}^{(j)} \right) + W_a \cdot \exp \left[i\varphi_{ar}^{(j)} \right] , \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} X_b^{(j)}(t, \omega) = & Bs \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} + \varphi \right) \right] \cdot \delta \left(\omega_0 - \omega + \varphi_{a1}^{(j)} \right) + \\ & + B(1-s) \cdot \exp \left[i\varphi_{b0}^{(j)} \right] \cdot \delta \left(\omega_0 - \omega + \varphi_{b1}^{(j)} \right) + W_b \cdot \exp \left[i\varphi_{br}^{(j)} \right] . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Itt az additív szélessávú fehér zajok Fourier-transzformáltját adott frekvencián egy φ_r random fázisú komplex számként írtam fel.

A transzformált értékek az oszcillátorok ω_0 rezgési frekvenciáján fontosak számunkra, ezért ott kiértékelem a Fourier-transzformáltakat. Szigorúan véve az ω_0 helyen a (2.23) és (2.24) kifejezésekben szereplő Dirac-delták 0-át adnak, de a Fourier-transzformáció előtt alkalmazott Gauss-ablak „szétkeni” a jelet a környező frekvenciákra, így ha $\varphi_{a1}^{(j)}$ és $\varphi_{b1}^{(j)}$ elegendően kicsi, a Dirac-delták járulékot fognak adni:

$$X_a^{(j)}(t, \omega_0) = A \cdot \exp \left[i\varphi_{a0}^{(j)} \right] + W_a \cdot \exp \left[i\varphi_{ar}^{(j)} \right] , \quad (2.25)$$

$$X_b^{(j)}(t, \omega_0) = B \cdot s \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} + \varphi \right) \right] + B \cdot (1-s) \cdot \exp \left[i\varphi_{b0}^{(j)} \right] + W_b \cdot \exp \left[i\varphi_{br}^{(j)} \right] .$$

Ezek alapján már felírható a keresztspektrum ω_q frekvencián:

$$\begin{aligned} CPSD_{ab}^{(j)}(t, \omega_0) &= X_a^{(j)}(\omega_0) \cdot X_b^{*(j)}(\omega_0) = \\ &= A \cdot B \cdot s \cdot \exp[-i\varphi] + A \cdot B \cdot (1-s) \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A \cdot W_b \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{br}^{(j)} \right) \right] + B \cdot s \cdot W_a \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{ar}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(j)} - \varphi \right) \right] + \\
& + B \cdot (1-s) \cdot W_a \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{ar}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)} \right) \right] + W_a \cdot W_b \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{ar}^{(j)} - \varphi_{br}^{(j)} \right) \right] . \quad (2.26)
\end{aligned}$$

A (2.26) eredményben megjelenő tagok szemléletes jelentést hordoznak. Az első - kékkel - jelölt tag a csatolt rész. A második - pirossal jelölt - tag jelenti a „hamis” csatolást, mely a keskenysávú zaj miatt jelenik meg. A további zölddel jelölt tagok pedig a szélessávú zaj miatt adódnak.

A (2.26) összefüggés egyértelműen meghatározza a keresztspektrum abszolútértékének eloszlását és ezáltal várható értékét is. Analitikus kiszámítását a probléma összetettsége miatt csak gyenge csatolás ($s \ll 1$) határestben végzem el, mivel a számításhoz fel kell használni a (2.12) összefüggést, melyet csak abban az esetben alkalmazhatunk, ha a keresztspektrum nulla várható értékű forgásszimmetrikus normális eloszlás. Ez $s \mapsto 1$ esetben nem teljesül.

Az átviteli függvény gyenge csatolás esetén

A következőkben kiszámítom a keresztspektrum abszolútértékének várható értékét gyenge csatolás ($s \ll 1$) esetén. Ehhez a 2.2. fejezethez hasonlóan először az abszolútérték négyzetének várható értékét számítom ki:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[|\langle CPSD_{ab}(t, \omega_0) \rangle|^2 \right] = \\
& = \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle CPSD_{ab}(t, \omega_0) \rangle \right) \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle CPSD_{ab}(t, \omega_0) \rangle \right)^* \right] .
\end{aligned}$$

Bevezetve a következő, egyszerűbb jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)} &= \varphi_0^{(j)}, \quad \varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{br}^{(j)} = \varphi_{r1}^{(j)}, \quad \varphi_{ar}^{(j)} - \varphi_{a0}^{(j)} = \varphi_{r2}^{(j)}, \\
\varphi_{ar}^{(j)} - \varphi_{b0}^{(j)} &= \varphi_{r3}^{(j)}, \quad \varphi_{ar}^{(j)} - \varphi_{br}^{(j)} = \varphi_{r4}^{(j)}, \quad (2.27)
\end{aligned}$$

melyekkel

$$\mathbb{E} \left[|\langle CPSD_{ab}(t, \omega_0) \rangle|^2 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(A^2 B^2 s^2 \exp [i (\varphi - \varphi)] + A^2 B^2 s(1-s) \exp [i (-\varphi - \varphi_0^{(k)})] + \right. \right. \\
&\quad + A^2 B W_b s \exp [i (-\varphi - \varphi_{r1}^{(k)})] + A B^2 W_a s^2 \exp [-i \varphi_{r2}^{(k)}] + \\
&\quad + A B^2 W_a s(1-s) \exp [i (-\varphi - \varphi_{r3}^{(k)})] + A B W_a W_b s \exp [i (-\varphi - \varphi_{r4}^{(k)})] + \\
&\quad + A^2 B^2 s(1-s) \exp [i (\varphi_0^{(j)} + \varphi)] + A^2 B^2 (1-s)^2 \exp [i (\varphi_0^{(j)} - \varphi_0^{(k)})] + \\
&\quad + A^2 B W_b (1-s) \exp [i (\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})] + A B^2 W_a s(1-s) \exp [i (\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)] + \\
&\quad + A B^2 W_a (1-s)^2 \exp [i (\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})] + A B W_a W_b (1-s) \exp [i (\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})] + \\
&\quad + A^2 B W_b s \exp [i (\varphi_{r1}^{(j)} + \varphi)] + A^2 B W_b (1-s) \exp [i (\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})] + \\
&\quad + A^2 W_b^2 \exp [i (\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})] + A B W_a W_b s \exp [i (\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)] + \\
&\quad + A B W_a W_b (1-s) \exp [i (\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})] + A W_a W_b^2 \exp [i (\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})] + \\
&\quad + A B^2 W_a s^2 \exp [i (\varphi_{r2}^{(j)} + \varphi)] + A B^2 W_a s(1-s) \exp [i (\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})] + \\
&\quad + A B W_a W_b s \exp [i (\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})] + B^2 W_a^2 s^2 \exp [i (\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)})] + \\
&\quad + B^2 W_a^2 s(1-s) \exp [i (\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})] + B W_a^2 W_b s \exp [i (\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})] + \\
&\quad + A B^2 W_a s(1-s) \exp [i (\varphi_{r3}^{(j)} + \varphi)] + A B^2 W_a (1-s)^2 \exp [i (\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})] + \\
&\quad + A B W_a W_b (1-s) \exp [i (\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})] + B^2 W_a^2 s(1-s) \exp [i (\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)] + \\
&\quad + B^2 W_a^2 (1-s)^2 \exp [i (\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})] + B W_a^2 W_b (1-s) \exp [i (\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})] + \\
&\quad + A B W_a W_b s \exp [i (\varphi_{r4}^{(j)} + \varphi)] + A B W_a W_b (1-s) \exp [i (\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})] + \\
&\quad + A W_a W_b^2 \exp [i (\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})] + B W_a^2 W_b s \exp [i (\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)] + \\
&\quad \left. + B W_a^2 W_b (1-s) \exp [i (\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})] + W_a^2 W_b^2 \exp [i (\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})] \right) \Big] =
\end{aligned}$$

Mivel a szummázás és a várható érték képzés is lineáris művelet, tagonként elvégezhetjük. A kézzel jelölt tag a csatolás miatt, a pirossal jelölt tagok pedig a „hamis” csatolás miatt jelennek meg. A zölddel jelölt tagok $j = k$ esetben járulékot adnak. A többi - feketével jelölt - tagok várható értéke zérus lesz, mivel a fázisuk a sík minden irányába ugyanakkora valószínűséggel mutat. A jobb átláthatóság érdekében átrendeztem a tagokat:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot (\mathbb{E} [A^2 W_b^2] + \mathbb{E} [B^2 W_a^2 s^2] + \mathbb{E} [B^2 W_a^2 (1-s)^2] + \mathbb{E} [W_a^2 W_b^2]) + \\
&+ \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{E} [A^2 B^2 s^2 \exp [i(\varphi - \varphi)]] + \mathbb{E} [A^2 B^2 s(1-s) \exp [i(-\varphi - \varphi_0^{(k)})]] + \right. \\
&+ \mathbb{E} [A^2 B^2 s(1-s) \exp [i(\varphi_0^{(j)} + \varphi)]] + \mathbb{E} [A^2 B^2 (1-s)^2 \exp [i(\varphi_0^{(j)} - \varphi_0^{(k)})]] \left. \right) + \\
&+ \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{E} [A^2 W_b^2 \exp [i(\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})]] + \mathbb{E} [B^2 W_a^2 s^2 \exp [i(\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)})]] + \right. \\
&+ \mathbb{E} [B^2 W_a^2 (1-s)^2 \exp [i(\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})]] + \mathbb{E} [W_a^2 W_b^2 \exp [i(\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})]] \left. \right) + \\
&+ \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{E} [A^2 B W_b s \exp [i(-\varphi - \varphi_{r1}^{(k)})]] + \mathbb{E} [A B^2 W_a s^2 \exp [-i\varphi_{r2}^{(k)}]] + \right. \\
&+ \mathbb{E} [A B^2 W_a s(1-s) \exp [i(-\varphi - \varphi_{r3}^{(k)})]] + \mathbb{E} [A B W_a W_b s \exp [i(-\varphi - \varphi_{r4}^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [A^2 B W_b (1-s) \exp [i(\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})]] + \mathbb{E} [A B^2 W_a s(1-s) \exp [i(\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)]] + \\
&+ \mathbb{E} [A B^2 W_a (1-s)^2 \exp [i(\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})]] + \mathbb{E} [A B W_a W_b (1-s) \exp [i(\varphi_0^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [A^2 B W_b s \exp [i(\varphi_{r1}^{(j)} + \varphi)]] + \mathbb{E} [A^2 B W_b (1-s) \exp [i(\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [A B W_a W_b s \exp [i(\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)]] + \mathbb{E} [A B W_a W_b (1-s) \exp [i(\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [A W_a W_b^2 \exp [i(\varphi_{r1}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})]] + \mathbb{E} [A B^2 W_a s^2 \exp [i(\varphi_{r2}^{(j)} + \varphi)]] + \\
&+ \mathbb{E} [A B^2 W_a s(1-s) \exp [i(\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})]] + \mathbb{E} [A B W_a W_b s \exp [i(\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [B^2 W_a^2 s(1-s) \exp [i(\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})]] + \mathbb{E} [B W_a^2 W_b s \exp [i(\varphi_{r2}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [A B^2 W_a s(1-s) \exp [i(\varphi_{r3}^{(j)} + \varphi)]] + \mathbb{E} [A B^2 W_a (1-s)^2 \exp [i(\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [A B W_a W_b (1-s) \exp [i(\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})]] + \mathbb{E} [B^2 W_a^2 s(1-s) \exp [i(\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)]] + \\
&+ \mathbb{E} [B W_a^2 W_b (1-s) \exp [i(\varphi_{r3}^{(j)} - \varphi_{r4}^{(k)})]] + \mathbb{E} [A B W_a W_b s \exp [i(\varphi_{r4}^{(j)} + \varphi)]] + \\
&+ \mathbb{E} [A B W_a W_b (1-s) \exp [i(\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_0^{(k)})]] + \mathbb{E} [A W_a W_b^2 \exp [i(\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r1}^{(k)})]] + \\
&+ \mathbb{E} [B W_a^2 W_b s \exp [i(\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r2}^{(k)} + \varphi)]] + \mathbb{E} [B W_a^2 W_b (1-s) \exp [i(\varphi_{r4}^{(j)} - \varphi_{r3}^{(k)})]] \left. \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{E} \left[A^2 B^2 s^2 \exp [i (\varphi - \varphi)] \right] + \mathbb{E} \left[A^2 B^2 (1-s)^2 \exp \left[i \left(\varphi_0^{(j)} - \varphi_0^{(k)} \right) \right] \right] + \right. \\
&+ \mathbb{E} \left[A^2 B^2 s(1-s) \exp \left[i \left(\varphi_0^{(j)} + \varphi \right) \right] \right] + \mathbb{E} \left[A^2 B^2 s(1-s) \exp \left[i \left(-\varphi - \varphi_0^{(k)} \right) \right] \right] \left. \right) + \\
&+ \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot \left(\mathbb{E} \left[A^2 W_b^2 \right] + \mathbb{E} \left[B^2 W_a^2 s^2 \right] + \mathbb{E} \left[B^2 W_a^2 (1-s)^2 \right] + \mathbb{E} \left[W_a^2 W_b^2 \right] \right) .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Az eredmény (2.28) első és utolsó tagjai nem függenek az összegzési indexektől. A második tag várható értékét a 2.2. fejezetben már kiszámítottam. A harmadik és negyedik tag várható értéke hasonlóan számítható, mint a második tagé, de csak az egyik összegzési indextől függenek, így egyszerűbb lesz: a (2.14) kifejezésben csak az egyik szummázást kell végre hajtani, így az egy mértani sorozat összege lesz:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} [|\langle CPSD_{ab}(t, \omega_0) \rangle|] = \\
&= A^2 B^2 s^2 + \frac{A^2 B^2 (1-s)^2}{N^2} \cdot \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} N - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} \alpha^N \right) + \\
&+ 2 \cdot A^2 B^2 s(1-s) \cdot \frac{\alpha}{N} \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} + \\
&+ \frac{1}{N} \cdot \left(A^2 W_b^2 + B^2 W_a^2 s^2 + B^2 W_a^2 (1-s)^2 + W_a^2 W_b^2 \right) ,
\end{aligned}$$

ezt behelyettesítve a (2.12) kifejezésbe:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} [|\langle CPSD_{ab}(t, \omega_0) \rangle|] = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(A^2 B^2 s^2 + \frac{A^2 B^2 (1-s)^2}{N^2} \cdot \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} N - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} \alpha^N \right) + \right. \\
&+ 2 \cdot A^2 B^2 s(1-s) \cdot \frac{\alpha}{N} \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} + \\
&+ \frac{1}{N} \cdot \left(A^2 W_b^2 + B^2 W_a^2 s^2 + B^2 W_a^2 (1-s)^2 + W_a^2 W_b^2 \right) \left. \right)^{0,5} .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

A (2.29) végeredményen kézzel láthatjuk a valódi csatolásból eredő tagot. A piros tagok a „hamis csatolásból”, a zöld tagok az additív fehér zajból származnak.

Érdekes megvizsgálni a csatolás nélküli, azaz $s = 0$ esetet. Ekkor az első és harmadik - a „hamis” csatolás keresztszorzatából eredő - tagok eltűnnek.

Megmarad a második tag, mely lassan cseng le, és az $\frac{1}{\sqrt{N}}$ -nel eltűnő széles-sávú zajok járuléka.

Ahhoz, hogy az átviteli függvényt kiszámíthassam, még szükség van az APSD várható értékére, mely (2.25) kifejezés alapján:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\langle APSD_a^{(j)}(t, \omega_0) \rangle] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_a^{(j)}(t, \omega_0) \cdot X_a^{(j)*}(t, \omega_0) \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A^2 + A \cdot W_a \cdot \exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{ar}^{(j)} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + A \cdot W_a \cdot \exp \left[-i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{ar}^{(j)} \right) \right] + W_a^2 \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(A^2 + AW_a \left(\exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{ar}^{(j)} \right) \right] + \exp \left[-i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{ar}^{(j)} \right) \right] \right) + W_a^2 \right) \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(A^2 + W_a^2 \right) \right] + \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(AW_a \left(\exp \left[i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{ar}^{(j)} \right) \right] + \exp \left[-i \left(\varphi_{a0}^{(j)} - \varphi_{ar}^{(j)} \right) \right] \right) \right)}_{=0} \right]
\end{aligned}$$

Az összefüggés második tagja az átlagolásokkal gyorsan lecseng, mivel ez a valós mennyiség ugyanakkora valószínűséggel lehet pozitív és negatív is, így:

$$\mathbb{E} [\langle APSD_a^{(j)}(t, \omega_0) \rangle] = A^2 + W_a^2$$

Végül az átviteli függvény:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} [|\langle H_{ab}(t, \omega_0) \rangle|] = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot (A^2 + W_a^2)} \left[A^2 B^2 s^2 + \frac{A^2 B^2 (1-s)^2}{N^2} \cdot \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} N - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} \alpha^N \right) + \right. \\
&\quad + 2 \cdot A^2 B^2 s(1-s) \cdot \frac{\alpha}{N} \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{N} \cdot (A^2 W_b^2 + B^2 W_a^2 s^2 + B^2 W_a^2 (1-s)^2 + W_a^2 W_b^2) \right]^{0,5}. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

A (2.30) kifejezésből kifejezhetjük s -t:

$$Es^2 + Fs + G = 0 ,$$

ahol

$$E = A^2B^2 + \frac{A^2B^2}{N^2} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}N - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}\alpha^N \right) + \\ - 2A^2B^2 \frac{\alpha}{N} \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} + \frac{2B^2W_a^2}{N} ,$$

$$F = -\frac{2A^2B^2}{N^2} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}N - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}\alpha^N \right) + \\ + 2A^2B^2 \frac{\alpha}{N} \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} - \frac{2B^2W_a^2}{N} ,$$

$$G = \frac{A^2B^2}{N^2} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}N - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}\alpha^N \right) + \\ + \frac{1}{N}(A^2W_b^2 + W_a^2W_b^2) + \frac{B^2W_a^2}{N} - \frac{4H^2(A^2 + W_a^2)^2}{\pi} .$$

Tehát s értéke számítható a másodfokú egyenlet megoldóképletéből.

Felmerülhet a kérdés, hogy a sokak által ismert koherencia függvény milyen viszonyban van s -sel. Az STFT koherencia a (2.31) összefüggéssel definiálható [14]:

$$COH_{xy}(t, \omega) = \frac{|\langle CPSD_{xy}(t, \omega) \rangle|}{\sqrt{\langle APSD_x(t, \omega) \rangle \langle APSD_y(t, \omega) \rangle}} . \quad (2.31)$$

Látható, hogy az átviteli függvénytől csak a normálásban különbözik. A koherencia 0 és 1 közötti értékeket vehet fel, mely értékek arányosak a csatolás mértékével. Azonban a valódi csatolást jelentő s változó értékeit csak ideális esetben olvashatjuk le a koherenciáról. Ugyanis ha egy vizsgált jelben a nagy teljesítménnyel jelenlévő hullámok frekvencia ingadozása kicsiny, és az átviteli függvény, vagy a koherencia becsléséhez csak kevés átlagolást tudunk biztosítani, akkor a koherencia értékek nem egyeznek meg s -sel. Viszont ha jól ismerjük a jel tulajdonságait, mint a hullám amplitúdók, a frekvencia ingadozás és a jel-zaj viszony, akkor mind a koherenciából, mind az átviteli függvényből s értéke megállapítható. A tényleges átvitelt pedig az $\frac{B \cdot s}{A}$ összefüggés adja.

Az analitikus eredmény validálása érdekében tesztjeleket generáltam különböző amplitúdójú, frekvenciaingadozású és jel-zaj viszonyú harmonikus oszcillátorokból. Az ezekre számított átviteli függvény eredménye jó egyezést mutatott a (2.31) kifejezés alapján várttal. A tesztek azonban rámutattak arra, hogy a s értékének visszaállítása az átviteli függvényből nagyon érzékeny a bementi paraméterekre.

3. fejezet

Plazmahullámok által okozott gyorsionvesztések vizsgálata

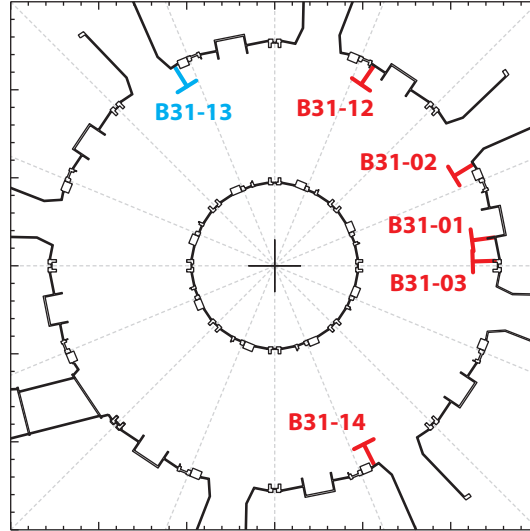
A 2. fejezetben leírt módszer teljesen általános, alkalmazható bármilyen lineárisan közelíthető rendszer viselkedésének vizsgálatára. A rövid idejű Fourier-transzformáció kiszámításhoz szükséges NTI Wavelet Tools programcsomag már rendelkezésemre állt, melyet korábban fejlesztettek a Nukleáris Technikai Intézetben [15–17]. Ezt kiegészítettem egy átviteli függvény számító rutinnal, illetve a könnyebb használhatóság érdekében az egész programcsomaghoz készítettem egy grafikus felületet (lásd A. függelék) és beintegráltam az ASDEX Upgrade tokamak publikusan elérhető adatfeldolgozó csomagjai közé.

Az átviteli függvényben rejlő előnyöket bemutatom egy példán keresztül, melyben plazmahullámok és gyorsionvesztések közti összefüggéseket elemeztem az ASDEX Upgrade [18] tokamakon végzett kísérlet eredményeinek segítségével. Mágnesesen összetartott toroidális plazmában különböző gyorsion keltette Alfvén-sajátmódusok jelenhetnek meg. A példaként bemutatott - már korábban vizsgált [19] - #23824-es kisülésben különböző toroidális Alfvén-sajátmódusok (Toroidal Alfvén Eigenmode - TAE) gyorsionszóróképességét vizsgáltam.

3.1. Alkalmazott diagnosztikák bemutatása

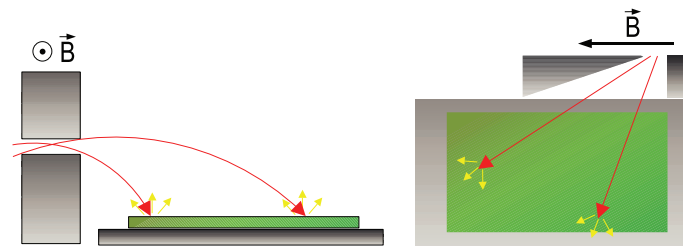
A TAE-k jól megfigyelhetők a berendezés mágneses diagnosztikáinak segítségével. Az általam használt szondák elhelyezkedését a 3.1 ábrán láthatjuk. Az összesen hat darab, 2 MHz-es mintavételi frekvenciával rendelkező, különböző toroidális pozícióban elhelyezkedő szonda jeleiből kiszámíthatjuk a TAE-k módusszámait is. A továbbiakban bemutatott spektrogramokon a kékkel je-

lött B31-13-as szonda jelei lesznek láthatóak.



3.1. ábra. Az általam használt mágneses szondák elhelyezkedése az ASDEX Upgrade tokamak egy toroidális metszetében.

A gyorsionveszteségeket a FILD [20] (Fast Ion Loss Detector - Gyorsionveszteség detektor) detektor segítségével vizsgálhatjuk, mely néhány mm-el a plazmát határoló limiter mögött helyezkedik el. A gyorsionok egy henger alakú takaró lemezen kialakított keskeny apertúrán keresztül egy szcintillátor lemezbe csapódnak. A becsapódás helye függ a részecskék Larmor-sugarától, illetve a részecskék sebessége és a lokális mágneses tér által bezárt szögtől. A 3.2. ábrán látható két különböző Larmor-sugárral és sebességiránnyal rendelkező részecske becsapódása a szcintillátor lemezbe. A szcintillátor lemezből



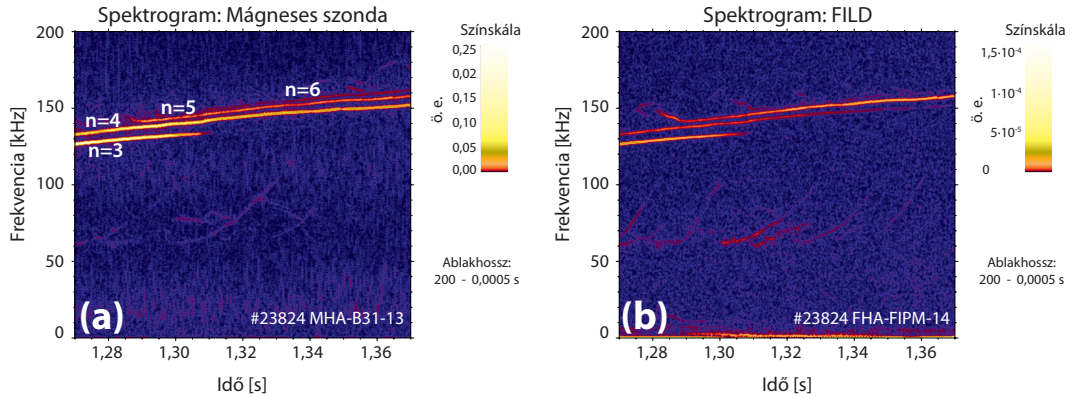
3.2. ábra. A FILD (Fast Ion Loss Detector - Gyorsionveszteség detektor) sematikus ábrája, melyen látható, hogy különböző Larmor-sugárral és sebességiránnyal rendelkező részecskék különböző helyen csapódnak a szcintillátor lemezbe. (Eredeti ábra: [20])

kilépő fotonokat 20 darab fotoelektronsokszorozó gyűjti össze, melyek mintavételi frekvenciája 2 MHz. Továbbá a lemez egy CCD kamera segítségével

is megfigyelhető. Az általam végzet kiértékelést a FIPM-14-es fotoelektron-sokszorozó jelein végeztem, melyhez körülbelül 50 – 80 mm-es Larmor-sugár és $70^\circ - 80^\circ$ -os szög tartozik [21].

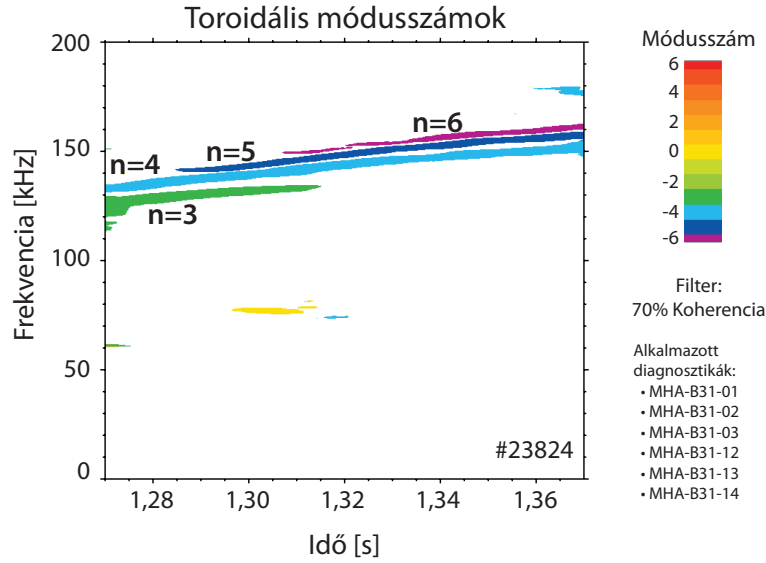
3.2. TAE módusok gyorsionszóró-képességének kvantitatív jellemzése

A 3.3a ábrán az MHA-B31-13-as mágneses szonda jeleiből számított spektrogramot láthatjuk. A [19] cikkben ennél szélesebb időintervallumon végeztek vizsgálatokat, azonban az általam használt idő- és frekvencia felbontással, az intézeti szerver rendelkezésre álló 16 GB memórialimit miatt, nem tudtam volna ábrákat készíteni. Így esett a választásom az $[1,27 \text{ s} - 1,37 \text{ s}]$ időintervallumra. Megfigyelhetjük, hogy a 120 – 170 kHz-es frekvencia tartományban TAE-k jelennek meg, az ábrán jelölt ($n = 3, 4, 5$) toroidális módusszámokkal. A 3.3b ábrán pedig a FILD dektektor jeléből számított spektrogramon jól láthatóak a TAE-k okozta gyorsionveszteségek. A 60 – 80 kHz-es tartományban nagyon kicsiny teljesítménnyel Alfvén-kaszkádok láthatóak a mágneses jeleken, melyek szintén gyorsionveszteségeket okoznak. Ezek vizsgálatához azonban más számítási és ábrázolási paraméterek szükségesek, ezért ezek vizsgálatáról csak röviden írok.



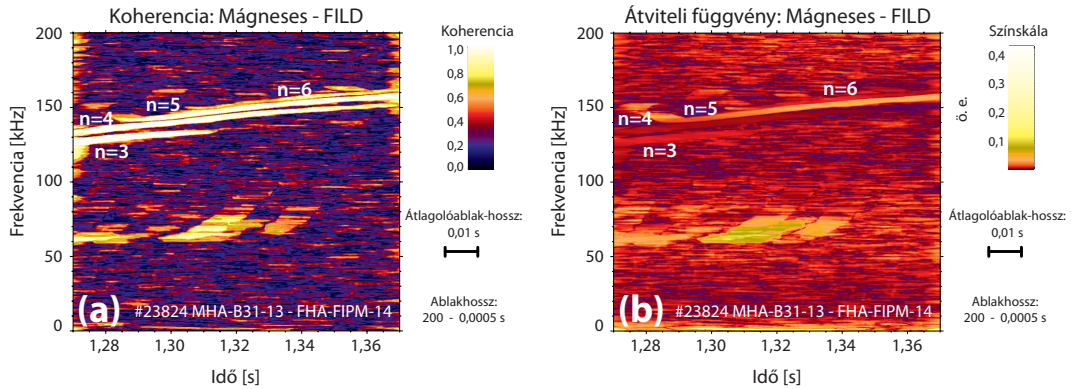
3.3. ábra. Az MHA-B31-13-as mágneses szonda (a) és a FILD-CH-14 detektor (b) jeleiből számított spektrogrammok a #23824 kisülés $[1,27 \text{ s} - 1,37 \text{ s}]$ időintervallumán. Jól látható, hogy az 120 – 170 kHz-es tartományban lévő TAE-k és a 60 – 80 kHz-es tartományban lévő Alfvén-kaszkádok gyorsionveszteséget okoznak.

Az $n = 3, 4, 5$ toroidális módusszámmal rendelkező módusok módusszámaina [19] cikkben tüntették fel. A hat különböző toroidális pozícióban elhelyezett mágneses szonda segítségével elvégeztem egy módusszám számítást is



3.4. ábra. A mágneses szondák jeleiből számított toroidális módusszámok a #23824 kisülés [1,27 s – 1,37 s] időintervallumán, azokban az idő-frekvencia pontokban, ahol a koherencia értéke 0,7 felett volt. Látható, hogy a spektrogramokon jól kivehető TAE-k módusszámai $n = 3, 4, 5, 6$. (A színskálán a negatív előjel az ion diamágneses drift irányába történő haladást jelöli, a pozitív pedig az elektron diamágneses drift irányát.)

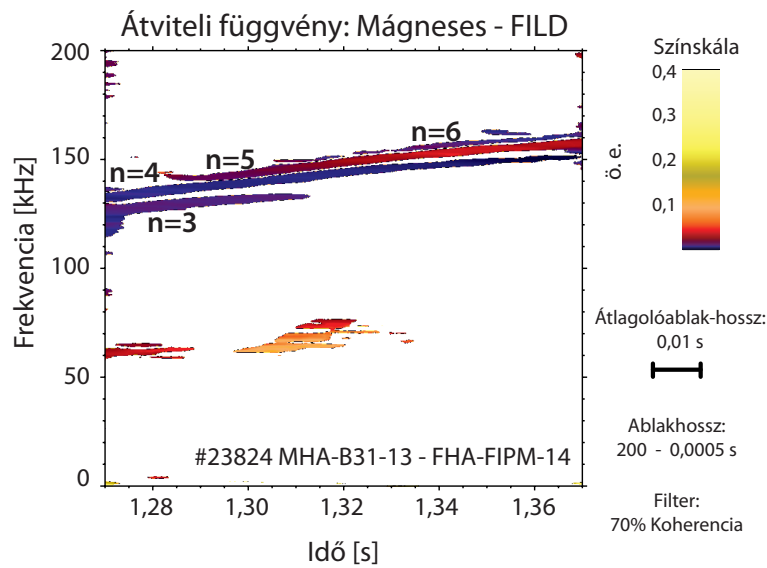
(3.4. ábra), melyen jól kivehető, hogy az $n = 5$ -ös módusnál néhány kHz-cel magasabb frekvenciájú módus toroidális módusszáma $n = 6$. Az $n = 3, 4, 5$ módusok módusszáma megegyezik a cikkben közölttel.



3.5. ábra. Az MHA-B31-13-as mágneses szonda és a FILD-CH-14 detektor között számított STFT koherencia (a) és átviteli függvény (b) a #23824 kisülés [1,27 s – 1,37 s] időintervallumán. Látható, hogy erős csatolás van a TAE-k és a gyorsionveszteségek között.

A 3.5. ábrán látható ugyanarra az időintervallumra számított koherencia és átviteli függvény, az MHA-B31-13 mágneses szonda és a FILD-CH-14 detektor között. Ebben az esetben a magas koherencia és a viszonylag sok ($N = 20$) átlagolás miatt jó közelítéssel $s = 1$ -nek tekinthető azokban az idő-frekvencia pontokban, ahol a koherencia 1-hez közeli. Így az átviteli függvényen ábrázolt értékek jó becslést adnak a valódi átvitelre.

Az átviteli függvényen nehezen kivehető, hogy melyik TAE módus okozott gyorsionvesztésséget, mivel ha a valamely időfrekvencia pontban a mágneses szonda jelének teljesítménye kicsiny, az átviteli függvény értéke an-



3.6. ábra. Az MHA-B31-13-as mágneses szonda és a FILD-CH-14 detektor között számított STFT átviteli függvény, 0,7-es koherencia szűrés mellett a #23824 kisülés [1,27 s – 1,37 s] időintervallumán. Jól kivehető a különböző toroidális módusszámú TAE-k, különböző gyorsionszóró-képessége.

Típus	Toroidális Módusszám	Átvitel
TAE	$n = 3$	$\sim 0,011$
TAE	$n = 4$	$\sim 0,007$
TAE	$n = 5$	$\sim 0,04$
TAE	$n = 6$	$\sim 0,009$
AC	-	$\sim 0,05 - \sim 0,12$

3.1. táblázat. Különböző módusszámú TAE-k és Alfvén-kaskádok relatív gyorsionszóró-képességei a #23824 kisülés [1,27 s – 1,37 s] időintervallumán.

nak ellenére magas lesz, hogy kicsi a kereszt spektrum. Ezért a 3.6. ábrán csak azokban az idő-frekvencia pontokban ábrázoltam az átviteli függvényt, ahol a koherencia 0,7-nél magasabb volt. Az átviteli függvény értékeit a különböző módusok esetében a 3.1. táblázat tartalmazza. Itt feltüntettem az Alfvén-kaszkádot is, mivel jól láthatóan magasabb a hullámenergiára vetített gyorsionszóró-képességük, mint a TAE-knek, viszont, ahogy már említettem, ezek vizsgálata más paraméterezést igényel. Az eredményekből jól kivehető, hogy az $n = 5$ -ös módus jóval erősebben szór a többihez képest. Továbbá az is megfigyelhetjük, hogy az $n = 6$ -os módus hullámenergiára vetített gyorsionszóró-képessége körülbelül megegyezik az $n = 4$ -es móduséval, annak ellenére, hogy a 3.3a. ábrán lévő spektrogrammon láthatóan jóval alacsonyabb az $n = 6$ -os módus teljesítménye.

4. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

Munkám célja az volt, hogy olyan jelfeldolgozási módszert fejlesszek, mellyel kísérleti eredmények alapján kvantitatív jellemzést lehet adni különböző tranziens plazmahullámok gyorsionszóró-képességéről.

Dolgozatomban bemutattam a tranziens jelek vizsgálatára kiválóan alkalmas rövid idejű Fourier-transzformáció alkalmazásával számított átviteli függvényt. Analitikus számításokat végeztem, mellyel megmutattam, hogy a keskenysávú zajok milyen problémát okoznak a statisztikus függvények - a keresztspektrum, a koherencia és az átviteli függvény - kiértékelésében, majd levezettem, hogy a rendszerben jelenlévő csatolás valódi mértéke hogyan befolyásolja a mérhető átvitelt az átlagolások száma és a zaj függvényében.

A lineáris idő-frekvencia transzformáción alapuló koherencia és módusszám számítás már korábban leprogramozott implementációját kiegészítettem egy átviteli függvényt számító rutinnal, továbbá a gyors és egyszerű használhatóság érdekében készítettem hozzá egy grafikus felületet és integráltam az ASDEX Upgrade tokamak legtöbb diagnosztikájának jelét beolvasni és elemezni képes MTR rendszerbe.

Az átviteli függvény segítségével az ASDEX Upgrade tokamak egy korábban vizsgált [19] kisülésében sikerült kvantitatívan meghatároznom a különböző módusszámú TAE módusok gyorsionszóró-képességét. Az $n = 5$ -ös toroidális módusszámú módus gyorsionszóró-képessége körülbelül négyszer akkorának bizonyult, mint az $n = 3, 4, 6$ módusszámú módusoké. További figyelemreméltó eredmény, hogy a mágneses szondákon megfigyelt alacsony teljesítménye ellenére az $n = 6$ -os módus hullámenergiára vetített gyorsionszóró-képessége is összevethető az $n = 3$ -as és $n = 4$ -es módusokéval.

A kidolgozott módszerekkel a továbbiakban folytatni szeretném a gyorsionvesztések szisztematikus vizsgálatát, melyekben érdemes lesz nagyobb figyelmet szentelni az Alfvén-kaszkádnak is, hiszen láthattuk, hogy jelentős gyorsionszóró-képességgel bírnak.

Az általam megalkotott jelmodellbe bevezetett s csatolási együttható automatikus kiszámítását is tervezem implementálni a programcsomagba oly módon, hogy a koherenciához hasonlóan ennek értékét is ábrázolni tudjam minden idő-frekvencia pontban.

A jelfeldolgozási technika és programcsomag általános voltának köszönhetően elképzelhető a fizika más területen való alkalmazása is.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőimnek Dr. Pokol Gergőnek és Papp Gergelynek, akik tanácsaikkal és ötleteikkel segítették munkámat. Állandó támogatásuk és biztatásuk nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Irodalomjegyzék

- [1] M. García-Muñoz, H.-U. Fahrbach, S. Günter, V. Igochine, M. J. Mantsinen, M. Maraschek, P. Martin, P. Piovesan, K. Sassenberg, and H. Zohm. Fast-Ion Losses due to High-Frequency MHD Perturbations in the ASDEX Upgrade Tokamak. *Phys. Rev. Lett.*, 100:055005, Feb 2008. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.055005>.
- [2] John Wesson. *Tokamaks*. Clarendon Press, Oxford, third edition, 2004. <http://www.oup.com/us/catalog/general/subject/Physics/NuclearParticleAstrophysics/?view=usa&ci=0198509227>.
- [3] Thomas James Dolan. *Fusion research*. Pergamon Press, corrected edition, 2000.
- [4] Jeffrey P. Freidberg. *Plasma Physics and fusion energy*. Cambridge University Press, 2008.
- [5] S.D. Pinches, V.G. Kiptily, S.E. Sharapov, D.S. Darrow, L.-G. Eriksson, H.-U. Fahrbach, M. García-Muñoz, M. Reich, E. Strumberger, A. Werner, the ASDEX Upgrade Team, and JET-EFDA Contributors. Observation and modelling of fast ion loss in JET and ASDEX Upgrade. *Nuclear Fusion*, 46(10):S904, 2006. <http://stacks.iop.org/0029-5515/46/i=10/a=S06>.
- [6] S. D. Pinches, H. L. Berk, D. N. Borba, B. N. Breizman, S. Briguglio, A. Fasoli, G. Fogaccia, M. P. Gryaznevich, V. Kiptily, M. J. Mantsinen, S. E. Sharapov, D. Testa, R. G. L. Vann, G. Vlad, F. Zonca, and JET-EFDA Contributors. The role of energetic particles in fusion plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 46(12B):B187, 2004. <http://stacks.iop.org/0741-3335/46/i=12B/a=017>.
- [7] P. Piovesan, V. Igochine, P. Lauber, K. Sassenberg, A. Flaws, M. García-Muñoz, S. Günter, M. Maraschek, L. Marrelli, P. Martin, P.J. Mc Carthy, and the AUG team team. TAE internal structure through high-

- resolution soft x-ray measurements in ASDEX-Upgrade. *Nuclear Fusion*, 48(6):065001, 2008. <http://stacks.iop.org/0029-5515/48/i=6/a=065001>.
- [8] ITER Physics Expert Group on Energetic Particles, Heating and Current Drive and ITER Physics Basis Editors. Chapter 5: Physics of energetic ions. *Nuclear Fusion*, 39(12):2471, 1999. <http://stacks.iop.org/0029-5515/39/i=12/a=305>.
- [9] Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*. Academic Press, 3rd edition, 2008.
- [10] G. Pór. *Műszaki Diagnosztika*. Egyetemi jegyzet (előkészületben), 2005.
- [11] Horváth László. *Bikoherencia rutin fejlesztése és fúziós plazmadiagnosztikai alkalmazása*. TDK dolgozat, BME NTI, 2010. http://deep.reak.bme.hu/~horla/download/2010_Horvath_TDK.pdf.
- [12] Tóth Imre Péter. Egy síkbeli bolyongási modellről. 2010. http://deep.reak.bme.hu/~horla/download/2010_Toht_Egy_sikbeli_bolyongasi_modellrol.pdf.
- [13] Rényi Alfréd. *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- [14] G. Pokol. *Fúziós berendezésekben fellépő tranziens hullámjelenségek tanulmányozása statisztikus eljárásokkal és elméleti modellekkel*. Phd értekezés, BME NTI, 2009.
- [15] G.I. Pokol, N. Lazányi, G. Pór, A. Magyarkuti, G. Papp, A. Gude, V. Igochine, M. Maraschek, and ASDEX Upgrade Team. A wavelet based method for detecting transient plasma waves and determining their spatial structure. In *Proceedings of the 37th EPS Conference on Plasma Physics, Dublin, 2010*, volume 34A of *Europhysics Conference Abstracts*, pages P–5.129, 2010. <http://ocs.ciemat.es/EPS2010PAP/pdf/P5.129.pdf>.
- [16] G. Papp, G. I. Pokol, G. Por, A. Magyarkuti, N. Lazányi, L. Horváth, V. Igochine, M. Maraschek, and ASDEX Upgrade Team. Low frequency sawtooth precursor activity in ASDEX Upgrade. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53(6):065007, 2011. <http://stacks.iop.org/0741-3335/53/i=6/a=065007>.
- [17] NTI Wavlet Tools. *Publikus fejlesztői oldal*, 2011. <http://deep.reak.bme.hu:3000/projects/wavelet/wiki>.

- [18] A. Kallenbach, V. Bobkov, F. Braun, A. Herrmann, H. Hohnle, R.M. McDermott, R. Neu, J.-M. Noterdaeme, T. Putterich, J. Schweinzer, J. Stober, E. Strumberger, W. Suttrop, D. Wagner, and H. Zohm. ASDEX Upgrade results and future plans. In *Fusion Engineering (SOFE), 2011 IEEE/NPSS 24th Symposium on*, pages 1 –8, june 2011. http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=6052356.
- [19] M. García-Muñoz, N. Hicks, R. van Voornveld, I. G. J. Classen, R. Bilato, V. Bobkov, M. Bruedgam, H.-U. Fahrbach, V. Igochine, S. Jaemsaee, M. Maraschek, and K. Sassenberg. Convective and Diffusive Energetic Particle Losses Induced by Shear Alfvén Waves in the ASDEX Upgrade Tokamak. *Phys. Rev. Lett.*, 104:185002, May 2010. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.185002>.
- [20] M. García-Muñoz, P. Martin, H.-U. Fahrbach, M. Gobbin, S. Günter, M. Maraschek, L. Marrelli, H. Zohm, and the ASDEX Upgrade Team. NTM induced fast ion losses in ASDEX upgrade. *Nuclear Fusion*, 47(7):L10, 2007. <http://stacks.iop.org/0029-5515/47/i=7/a=L03>.
- [21] M. García-Muñoz. *Fast Response Scintillator Based Detector for MHD Induced Energetic Ion Losses in ASDEX Upgrade*. Phd értekezés, 2006. <http://tinyurl.sfx.mpg.de/sqnz>.

A. függelék

NTI Wavelet Tools

A BME Nukleáris Technikai Intézetben fejlesztett NTI Wavelet Tools programcsomag segítségével rövid idejű Fourier-transzformáción és folytonos wavelet transzformáción alapuló koherencia és módusszám számításokat lehet végezni. A fúziós körökben elterjedt IDL (Interactive Data Language) nyelven írt programcsomag korábban nem rendelkezett grafikus felülettel, mely megnehezítette a használatát azok számára, akik nem vettek részt a fejlesztésében. Továbbá a feldolgozandó jelek elérése is állandó gondot jelentett. A problémák kiküszöbölése érdekében egy platformfüggetlen grafikus felületet (A.1. ábra) írtam a programcsomag számára, mellyel egyidőben beintegráltam az ASDEX Upgrade legtöbb diagnosztikájának jelét beolvasni- és elemezni képes MTR rendszerbe. Így amellett, hogy könnyebbé vált a használata, a jelbeolvasással kapcsolatos problémák is részben megoldódtak. A program hasonló módon bármely más adatbeolvasó rendszerbe integrálható.

Természetesen az integráció nem volt kihatással a program függetlenségére, melyet önmagában, az ASDEX informatikai rendszere nélkül is lehet használni. Ebben az esetben a program meghatározott struktúrájú adatokat képes beolvasni. A grafikus felület különválasztja egymástól az eredmények számítását és ábrázolását. Ez azért fontos, mert az akár sok gigabájt memóriát és jó pár órát igényelő számításokat nem kell újra elvégezni ahhoz, hogy a különböző ábrázolási paraméterek variálásával elkészítsük az adott fizikai folyamat megértéséhez szükséges optimális ábrát.

NTI Wavelet Tools

File Filter Help

Input Data

Load data

Save data

?

Data History: loaded_with_MTR

Coordinates History: Loaded_with_MTR

Working ...

Calculate data, it can take a lot of time!

Channel pairs selected!

Select channel pairs!

Data loaded!

Welcome to NTI Wavelet Tools!

Version: 1.1.1 - r395

Experiment: AUGD

Shotnumber: 23418

Time range: 3.3200000 s - 3.3300000 s

Sample Frequency: 2000.0000 kHz

Number of channels: 4

Processing

Load Processed Data

Select channel pairs

Num. of Sel. Ch. Pairs: 6 ?

Version info

Transforms

☒ Transforms

☐ DW/T

Family: Model

Order: 6

Dscale: 0.10000 ?

☒ STFT

Gauss

Length: 50

Fires: 500

Step: 1 ?

Frequency Range: min: 0.0000000 kHz max: 200.0000 kHz ?

☐ Cross-transforms

Average: 5 ?

☐ Coherences

☐ Mode numbers

Toroidal

Filter

Rel. pos.

?

Filter parameters: Mode number Steps: 1 Mode number range: 6 - 6 ?

Predicted Memory Usage: 0.46 GB

Start Calculation

Save Processed Data

General Settings

☐ Force Linear Frequency Axis

☒ Transforms

☐ Smoothed

☒ Energy

Scale opt.: 0.2000 ?

☐ Phase

☒ Cross-transforms

☐ Smoothed

☒ Energy

Scale opt.: 0.2000 ?

☐ Phase

☒ Coherences

☐ All

☐ Average

☒ Minimum

?

☒ Mode numbers

Coherence Limit: 0.0000 %

Power Limit: 0.0000 %

Q Limit: 100.00 % ?

Start Plotting

Set Save Path

Save Path: C:\Users\yorda\save_data

Visualization

A.1. ábra. Az NTI Wavelet Tools grafikus felülete.