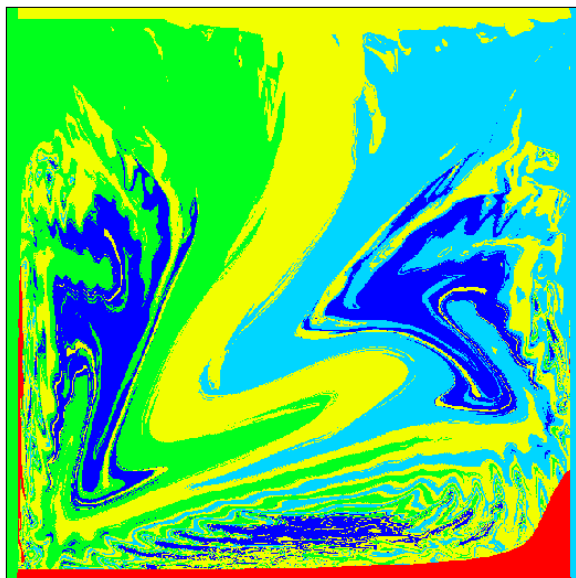


# Transzportfolyamatok térbeli struktúraelemzése: modellfejlesztés és alkalmazás



Szerző:

***Szanyi Sándor***

Infrastruktúra-építőmérnöki szak (MSc 2. évf), BME

Intézmény:

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, ÉMK

Konzulensek:

<sup>1</sup>***Dr. Józsa János***, egyetemi tanár

<sup>1</sup>***Dr. Krámer Tamás***, egyetemi docens

<sup>2</sup>***Dr. Tél Tamás***, egyetemi tanár

<sup>1</sup>*BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék*

<sup>2</sup>*ELTE Elméleti Fizikai Tanszék*

2011

## Tartalomjegyzék

|                                                                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Bevezetés .....</b>                                                                                                       | <b>3</b>  |
| <b>1. Szakirodalmi áttekintés.....</b>                                                                                       | <b>4</b>  |
| <b>2. A PCA modell felépítése.....</b>                                                                                       | <b>5</b>  |
| 2.1 Áramlási modell, számítási rácsháló és peremfeltételek .....                                                             | 6         |
| 2.2 Kezdőpontok kiosztása és trajektória számítás .....                                                                      | 10        |
| 2.3 Új részecskepozíció cellájának meghatározása .....                                                                       | 10        |
| 2.4 Peremek kezelése .....                                                                                                   | 12        |
| 2.4.1 Cheng-módszer.....                                                                                                     | 12        |
| 2.4.2 Utólagos sebességkorrekció módszere .....                                                                              | 13        |
| 2.4.3 Utólagos helyzetkorrekció módszere .....                                                                               | 13        |
| 2.5. A kaotikus advekció és a transzportfolyamatok beépített vizsgálati módszerei.....                                       | 13        |
| <b>3. A modell igazolása .....</b>                                                                                           | <b>14</b> |
| 3.1 Tesztelés analitikusan megoldható áramlásokban.....                                                                      | 14        |
| 3.2 A PCA és a Tecplot eredményeinek összehasonlítás analitikusan megoldható és nem megoldható esetekben .....               | 17        |
| <b>4. Káoszelméleti alkalmazások a transzportfolyamatok térbeli struktúraelemzésének céljából, realizisztikus tóban.....</b> | <b>21</b> |
| 4.1. Bevezetés.....                                                                                                          | 21        |
| 4.2. Hidrodinamikai háttér.....                                                                                              | 22        |
| 4.3. Realisztikus medergeometriájú gúla-tó főbb jellemzői .....                                                              | 22        |
| 4.3. A kaotikus viselkedés alapjai, jellemző részecskepályák.....                                                            | 24        |
| 4.4. Stroboszkópikus-leképezés .....                                                                                         | 28        |
| 4.5 Festékfolt módszer .....                                                                                                 | 31        |
| 4.6 Lékelés, partot elérő szennyezőanyagok .....                                                                             | 34        |
| 4.7 Véges méretű Ljapunov-exponens számítása a térbeli struktúra keveredési viszonyainak jellemzésére .....                  | 42        |
| <b>5. Eredmények összefoglalása és további kutatási irányok vázolása .....</b>                                               | <b>48</b> |
| <b>Irodalomjegyzék .....</b>                                                                                                 | <b>50</b> |
| I. függelék: Cheng-módszer: deriváltak levezetése a Jacobi-mátrix meghatározásához.....                                      | 53        |
| II. függelék: A belső határréteg-fejlődés (IBL) és szél-csúsztatófeszültség összekapcsolt modellje....                       | 57        |
| III. függelék: 4 dimenziós tömb memória allokálása és feltöltése .....                                                       | 59        |
| IV. függelék: Lékelés a gúla-tó stacioner áramlásában .....                                                                  | 60        |
| V. függelék: Stabil és instabil sokaságok .....                                                                              | 61        |

## **Bevezetés**

A tavakban és tározókban létrejövő vízmozgásokat főként a szél keltette áramlások határozzák meg, melyek eredményeként kialakult struktúrák adják meg a transzportfolyamatok, azon belül a nagyléptékű áramlások létrehozta advektív transzport jellegét. A kialakuló áramlások illetve transzportfolyamatok határozzák alapvetően meg az oldott és lebegő anyagok, illetve például a fito- és zooplanktonok térbeli áthelyeződését, eloszlását a vizekben. Ezek vizsgálatakor szembesülhetünk olyan esetekkel, amikor a mérnöktudományi feladatok túlnyomó részére szokásosan használt Euler-féle folyamatleíró eszközeinkkel egyáltalán nem, vagy csak nagyon nehezen magyarázható egy-egy jelenség. Ezen jelenségek értelmezésekor, új, alapvetően Lagrange-szemléletű módszerek vezethetnek eredményre. Erre tipikus példa a vizekben zajló, gyakran kaotikus jellegű elkeveredés detektálása, valamint kialakulási mechanizmusának elemzése. Jelen munka célja térbeli (3D) Lagrange-szemléletű vizsgálatok elvégzése, egyszerűsített, de a sekély tavakat jól reprezentáló geometriájú, szél meghajtású vízterekre, azok advektív áramlások keltette transzportstruktúráinak feltárására. A kitűzött Lagrange-rendszerű célok eléréséhez értelemszerűen nélkülözhetetlen volt egy a vizsgálatokra alkalmas, sokoldalú részecskekövető szoftver fejlesztése. A szoftver fejlesztése és validálása után, annak alkalmazásának segítségével fogom elemezni a 3D elkeveredési folyamatokat, hangsúlyosan azok kaotikus jellegének kimutatására. 3D Lagrange-szemléletű, nagyszámú részecske követésén alapuló vizsgálatokat fogok elvégezni egy gúla-geometriájúra egyszerűsített tóra, amelyekkel bizonyítom, hogy a tó áramlása periodikusan időfüggő esetben kaotikus advekciós tulajdonságokat mutat, ezzel szemben a stacioner eset nem kaotikus viselkedésű. Ismereteim szerint eddig a tavak transzportfolyamatainak megismerését szolgáló ilyen térbeli vizsgálatokról nem publikáltak még a nemzetközi szakirodalomban. Munkámhoz értékes előzménynek és kiindulási alapnak Pattantyús et al. (2008), Pattantyús (2008) és Károlyi et al. (2010), munkáit tekintem; ők hasonló áramlási környezetre elvégzett 2D fejlesztésükkel és vizsgálataikkal nagyban hozzájárultak jelen dolgozat megszületéséhez.

## 1. Szakirodalmi áttekintés

A részecskekövetés egy olyan interdiszciplináris téma, mely meglehetősen széles szakirodalommal rendelkezik. Többek között a fizikában, a meteorológiában és a mérnöki tudományokban egyaránt használnak különböző részecskekövető eljárásokat, programokat. Az egyes tudományágakban fejlesztett modelleknek más és más peremfeltételeknek kell megfelelniük, ezért nem alkalmazható egy általános trajektóriaszámító algoritmus minden problémára, feladatkörre. Azonban néhány általános tulajdonság minden részecskekövető eljárásra igaz. A részecskekövetés általában valamilyen folyadék- vagy gáz halmazállapotú közeg áramlási sebességterében történik. Egy a közeggel együtt mozgó részecske trajektóriájának a számítása a következő közönséges differenciálegyenlet numerikus integrálásán alapszik [Ottino, 1989].

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

ahol:  $t$  az idő,  $\mathbf{x}$  a részecske pozíciója a térben,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  pedig a sebességtér.

A kezdeti feltétel a részecske kezdeti pozíciója:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

A megoldás pedig a következő sorozat:  $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2) \dots$

Amennyiben a sebességtér egy rácsmódszeren alapuló modell eredményeként áll rendelkezésre, a megoldó algoritmus általában három főrésze osztható:

- A részecske cellájának megkeresése az adott  $t$  időpontban.
- A sebességtér interpolálása a rácsháló csomópontjai között.
- Az (1) egyenlet numerikus integrálása a részecske új pozíciójának megkereséséhez.

A rácsháló csomópontjai közötti általános belső pontra a sebességek legegyszerűbb meghatározása, ha az ismeretlen sebességvektor a hozzá legközelebb eső ismert csomópont értékét kapja. Ennél egy fokkal bonyolultabb, amikor azt feltételezzük, hogy az egyes irányokba eső sebességkomponensek csak a saját irányukban változhatnak és így a cellán belül ezeket lineárisan interpoláljuk (Pollock, 1988; Goode, 1990; Ning, 1994). Az előbb említett két módszer leginkább felszín alatti vizek áramlásvizsgálatánál használatosak. A legáltalánosabban alkalmazott eljárás a trilineáris interpoláció, ez esetben a befoglaló cella

összes csomópontja hatással van a keresett sebességre (Cheng et al., 1996; Pokrajac et al., 2002; Haegle et al., 2006). Az aktuális  $t$  időpontban az  $(x,y,z)$  koordinátájú térbeli pont sebességének meghatározása után alapvetően három csoportra oszthatjuk a megoldásokat: analitikusra, fél-analitikusra és numerikusra.

Az analitikus megoldás (pl. a Pollock-féle) bizonyos matematikailag leírható szabályszerűséget feltételez a cellán belüli sebességtér eloszlására. A legelterjedtebb megoldás a numerikus integrálás, mely lehet például Euler-féle elsőrendű, prediktor-korrektor vagy Adams-Brashfort másodrendű, Runge-Kutta harmad-, negyed- vagy még magasabb rendű. A fél-analitikus megoldások az előző két megoldás valamilyen ötvözei, Cheng módszere például vektor algebrában levezetett azonosságokat alkalmaz azon cellaoldal megtalálásához, amelyiken a követendő részecske kilépési pontja van, majd fél-implicit másodrendű pontosságú módszert alkalmaz a keresett pont megtalálásához. Ez ennél a módszernél egyben az algoritmus harmadik lépése is, hiszen a kilépési pont a következő időlépésbeli kezdő pozíciót adja. Amennyiben nem celláról cellára „lépked” az algoritmus, mint a Cheng módszernél, úgy a részecske új helyzetéhez tartozó cella megtalálása két lépésből áll: a módszer első része az, amikor megvizsgálásra kerül, hogy egy adott cellában van-e a részecske, a második lépés pedig maga a keresés, hogyha nincs egy adott cellában a részecske, akkor melyik a következő cella, amit vizsgálunk. Az első feladatrészt széles körben alkalmazott eljárás konvex cellák esetén az (Zhou és Leschziner, 1999; Chen és Pereira, 1999; Chordá et al., 2002), hogy végigjárjuk csúcsról csúcsra az adott cellát szigorúan egy körbejárási irány mentén és megvizsgáljuk, hogy attól jobbra vagy balra esik-e a keresett pont (matematikai megfogalmazását ld. 2.3 fejezet). A következő cella kiválasztása már jóval bonyolultabb és erősen rácsháló-függő kérdés, ezért ennek részletezésére most nem térek ki bővebben, mert még azonos típusú rácsháló esetén is különböző megoldások lehetségesek (lásd pl. Sadarjoen et al., 1998; Chordá et al., 2002; Kuang et al., 2008).

## **2. A PCA modell felépítése**

Az elkészített szoftvert az angol **P**article **P**ath **C**alaculator for **A**nlysis of **C**haotic **A**dvection rövidítéséből PCA-nak neveztam el. A szoftver forráskódja jelenleg mintegy 3000 sor, a programozási feladatok összetettségének érzékeltetése érdekében egy rövid forráskód részletet a III. függelékben közlök.

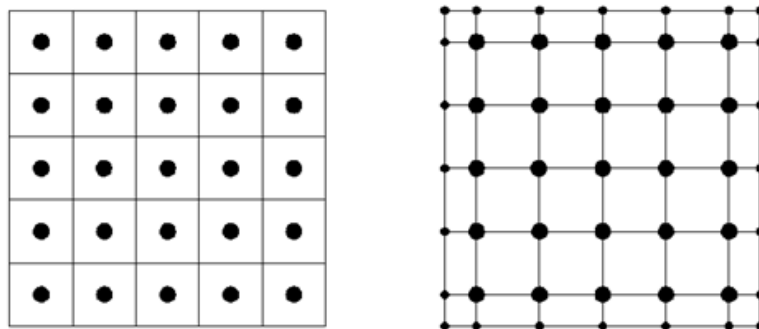
A szoftver három jól elkülönülő részből áll, az első a rácsháló-generálás, a második a trajektóriaszámítás, a harmadik pedig a kaotikus viselkedések illetve a transzport vizsgálatára

használatos egyéb algoritmusok. A modell megalkotásakor a főbb elvárások a következők voltak:

- A szoftver térbeli, tehát háromdimenziós esetekben alkalmazható legyen.
- Az algoritmus gyors legyen, hogy nagyszámú részecskepálya számítása se vegyen igénybe túl sok időt.
- A vízzáró peremeken való kilépést vagy „megállást” ne engedje meg.
- A modellbe legyenek beépítve kaotikus advekció vizsgálatára megfelelő eljárások, mint például a lékelés vagy véges méretű Ljapunov-exponens számító.
- Időfüggő áramlások vizsgálatára is alkalmas legyen.

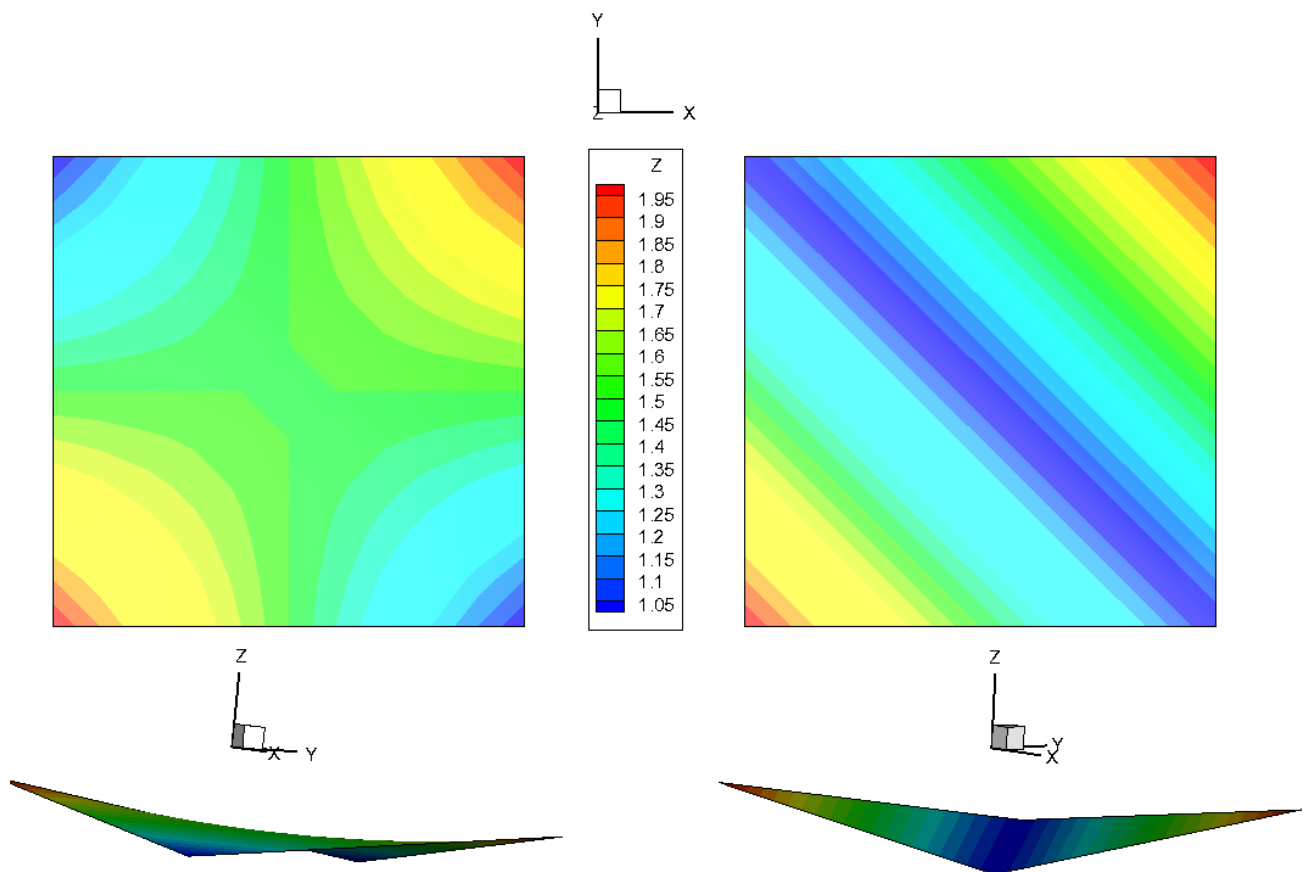
## **2.1 Áramlási modell, számítási rácsháló és peremfeltételek**

Az áramlási mezőket a Panormus 3D hidrodinamikai programmal számítottam (Napoli, 2010). Ez egy szabad forráskódú hidrodinamikai modell, mely 3D impulzus és a folytonossági egyenleteken (a Navier-Stokes és az abból származtatott Reynolds-féle alak) alapszik. Az egyenleteket görbevonalú, nem-ortogonális rácshálón véges-térfogatok módszerével oldja meg. A modell a folyadékot összenyomhatatlannak tekinti. A modellbe két turbulencia-modell (RANS, LES) van beépítve. Szintén tavi áramlásokkal foglalkozó előző TDK-dolgozatomban ugyanezt a programot validáltam és használtam (Szanyi, 2010). A sebességek a számítási rácsháló celláinak közepére vannak értelmezve. Mivel a sebességek nem a rács csomópontjaiban vannak kiszámítva, így két lehetőség adódik: az első, hogy az eredeti számítási rácshálóra interpolálok, illetve a peremeken extrapolálok a cellaközepekből sebességeket, vagy új rácshálót generálok a cellaközepekből, és „csak” a peremekre extrapolálok. A pontosságot szem előtt tartva ez utóbbi megoldás mellett döntöttem (1. ábra).



**1. ábra:** A Panormus (baloldali) és a PCA (jobboldali) rácshálója. A Panormus-szal számított sebességek helyét a nagyobb, míg az extrapolált sebességek helyét a kisebb pontok jelzik

A számítási rácsháló  $(x,y,z)$  Descartes-féle térkoordinátái után az egyes csomópontokhoz tartozó  $u,v,w$  koordinátatengely-irányú sebességkomponensek meghatározására van szükség. A belső pontoknál ez egyértelmű, hiszen a Panormus által kiszámított sebességek egy az egyben egy-egy rácspont értékeit adják, azonban a peremeken a peremfeltételektől függő sebességet kell extrapolálni. A modellbe két változatot építtem be, egy ún. tapadó és egy csúszó peremfeltételt. A tapadó esetben a peremeken nulla sebességeket definiáltam, míg csúszó esetben azt feltételeztem, hogy az adott cellában érvényes sebességnek csak a peremmel párhuzamos komponensei veendő figyelembe. A PCA-be két felületinterpoláló eljárást építtem be, egy bilineáris interpolációt és egy háromszög dekompozíción alapuló interpolációt (későbbiekben HDAI). Síkok esetén a két megoldás ugyanazt az eredményt adja. A cellák oldalait azonban négy pont határozza meg, melyek, ha egy általános esetet vizsgálunk nem esnek egy síkba. A bilineáris interpoláció ilyenkor ugyancsak nem egy síkot ad, hanem egy hiperboloid felületet, ezzel szemben a HDAI két síkból állítja elő a felületet.



**2. ábra:** A bilineáris interpoláció (bal) és a háromszög dekompozíción alapuló interpoláció (jobb) 2D (felül) illetve 3D (alul) eredménye

A csúszó peremfeltétel esetén a perem menti sebességeket a HDAI-val kapott síkok alapján számítom. A HDAI interpoláció során úgy határozom meg a síkokat, hogy valamelyik átló mentén két háromszögre bontom a cellát, ha a cella adott oldala egy síkot alkot, akkor indifferens, hogy melyik átló mentén. Ha nem ismert a geometria – például mederfelvétel esetén –, akkor celláról cellára váltakozó irányban bontom ketté a cellákat, ha ismertek a törésvonalak, akkor azokra illeszkedve. Ezeken kívül a PCA-ben egy harmadik eljárás is választható, amely a szomszédos cellák magasságai alapján dönti el, hogy egy cellában valószínűsíthetően úgymond „völgyfenék” vagy „hegygerinc” fut. A térben három pont, ha nem egy egyenesbe esnek, akkor mindig egy síkot alkotnak. A sík általános egyenletét felírhatjuk a sík normálvektora  $n = [A, B, C]$  és egy pontja  $P_0 (x_0, y_0, z_0)$  alapján. A sík normál vektora ismert 3 pontból ( $P_1, P_2, P_3$ ) számítható a 3. egyenletből.

$$n = \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3} = [A, B, C] \quad (3)$$

Ezek alapján a sík egyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (4)$$

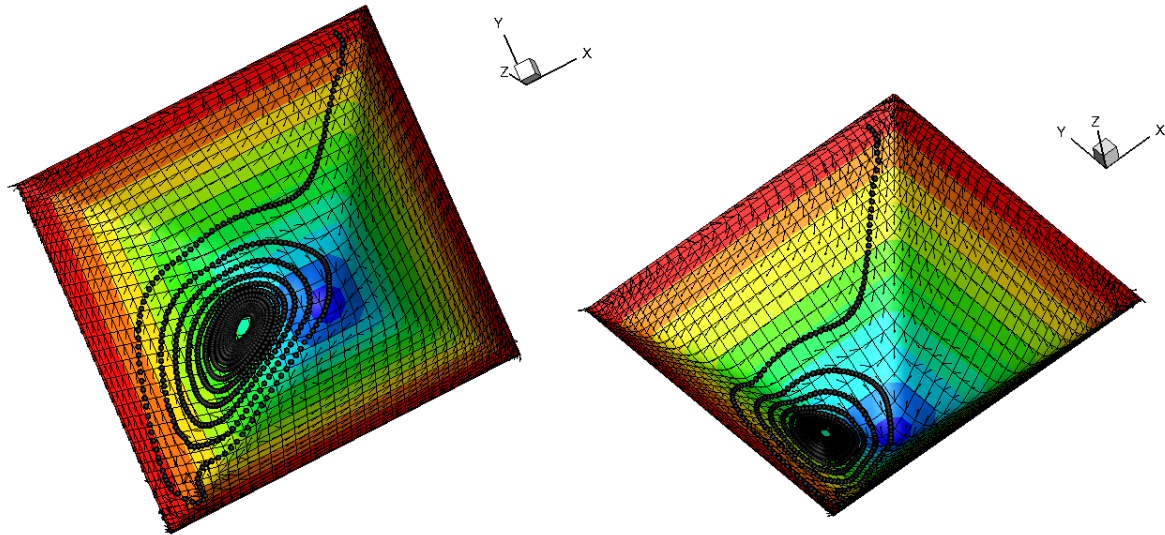
ahol:  $x, y, z$  a sík egy tetszőleges pontjának koordinátái.

Vegyünk egy mederfelszín menti, legalsó rétegben lévő cella alsó síkját. Csúszó peremfeltétel esetén a PCA úgy határozza meg az adott csomópontban a sebesség értékét, hogy veszi az összes háromszöget, amit a csúcs érint, ez belső csomópontok esetén maximum nyolc lehet, majd mind a nyolc síknál kiszámítja, hogy az adott  $u, v$  sebességekhez mekkora  $w$  sebesség szükséges ahhoz, hogy a síkban maradjon. Ezután a nyolc függőleges sebességkomponens alapján és az adott ponthoz eredetileg tartozó  $w$  értékből a legnagyobbat rendeli, így biztosítva azt, hogy semmilyen esetben se mutasson a peremről kifelé sebességvektor. A párhuzamos sebességeket úgy határoztam meg, hogy a háromszög csúcspontjaiból a 3. egyenlet alapján kiszámítom az  $n = [A, B, C]$  normálvektort. Ezután az egyik csúcs koordinátáit  $(x_0, y_0, z_0)$  behelyettesítem az 5. egyletbe, így a sík origójának az  $x = 0$  és az  $y = 0$  választva, a hozzá tartozó  $z(0,0)$  értéke számítható, majd az  $x = u$  és az  $y = v$  értékátadással kapok egy  $z(u, v)$  értéket. A választott síkkal párhuzamos sebességvektorhoz szükséges függőleges sebességkomponens a kettő különbsége lesz (6. egyenlet).

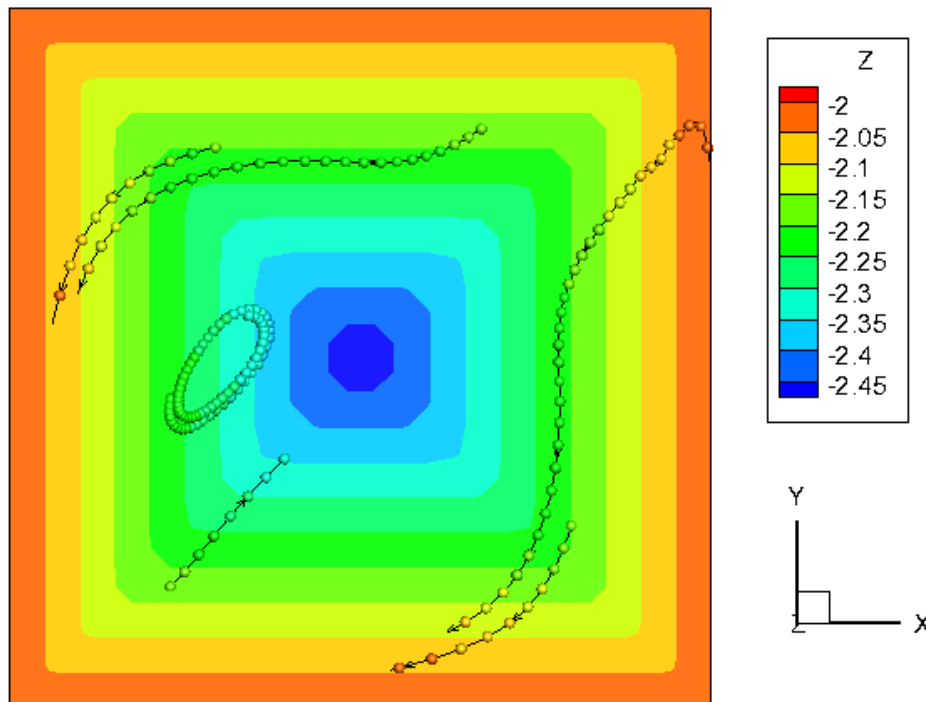
$$z = z_0 - \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0)}{C} \quad (5)$$

$$w = z(u, v) - z(0,0) \quad (6)$$

Ennek alapján egy összetett geometrián (a gúla-tó ismertetése 4.2 fejezetben található) teszteltem, hogy a peremekről valóban nincs kilépő sebességvektor (3-4. ábra). Ha csak a csúszó feltételből származó  $w$ -vel számolunk, akkor a síkon elindított trajektória a síkban marad (3. ábra), ha viszont valós esetet nézünk, akkor vagy a síkban marad, vagy a síkot a számítási tér irányába hagyja (4. ábra).



**3. ábra** Kizárólag a csúszó feltétel teljesülése gúla tó legalsó peremén



**4. ábra:** A gúla-tó alsó peremén a csúszó feltétel teljesülése valós esetben, kezdőpontok legalsó síkban vannak, ezzel szemben a végpontok feljebb.

## **2.2 Kezdőpontok kiosztása és trajektória számítás**

A kezdőpontok kiosztása is szoftveresen történik, megadása kétféle módon lehetséges. Az első lehetőség, hogy a felhasználó definiálja a befoglaló téglatestet egy térátlója végpontjainak koordinátaival, illetve megadja mind a három irányba a kívánt lépésközt. Ez alapján a szoftver kiosztja a kezdőpontokat, ha randomizált kiosztást választunk, akkor a szoftver normál eloszlás alapján perturbálja a már kiszámolt kezdőpontok koordinátáit mindhárom irányban. A másik megadási lehetőség, hogy egy vagy több általános hexaédert definiálunk a 8 csúcspontjának koordinátaival és ebben adjuk meg a pontok eloszlását. Ha a több hexaédes megoldást választjuk, akkor a különböző hexaéderekben megadott pontok között nem lesz kapcsolat a kaoszelméleti számításokkor, akkor sem, ha azok szomszédosak. Ez főleg a VMLE (Véges Méretű Ljapunov Exponens) számításánál lényeges.

A trajektóriaszámítás elindításához ezután már csak a számítási időt és az időlépést kell megadnunk, illetve ki kell választanunk, hogy milyen módszerrel közelítsük a részecske útjának általános differenciálegyenletét (1. egyenlet)

A numerikus integrálásra beépített módszerek:

- Prediktor-korrektor  $O(\Delta t^2)$ ,
- Cheng-módszer  $O(\Delta t^2)$  (csak perem közeli cellák esetén)
- Negyedrendű Runge-Kutta  $O(\Delta t^4)$

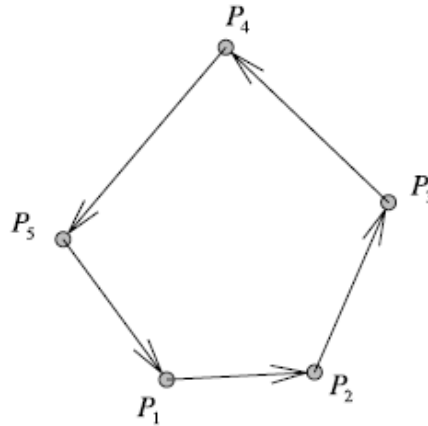
## **2.3 Új részecskepozíció cellájának meghatározása**

A fent említett megoldók minden lépése után meg kell határozni, hogy melyik cella tartalmazza a részecske új pozícióját. Ehhez egy jól ismert (Chen,1997; Zhou és Leschziner, 1997) eljárást alkalmaztam. Vegyünk egy általános zárt konvex poligont (5. ábra). Az ún. Omega teszt (7. egyenlet) megmutatja, hogy a keresett pont az éppen vizsgált oldaltól (3D-ban éltől) jobbra vagy balra esik, vagy pont az oldalon van-e.

Ha minden élre pozitív  $\Omega_i$ , akkor a pont a cellán belül van, ha nulla valamikor a teszt, akkor az éppen vizsgált oldalon van a pont. Minden más esetben a pont a cellán kívülre esik.

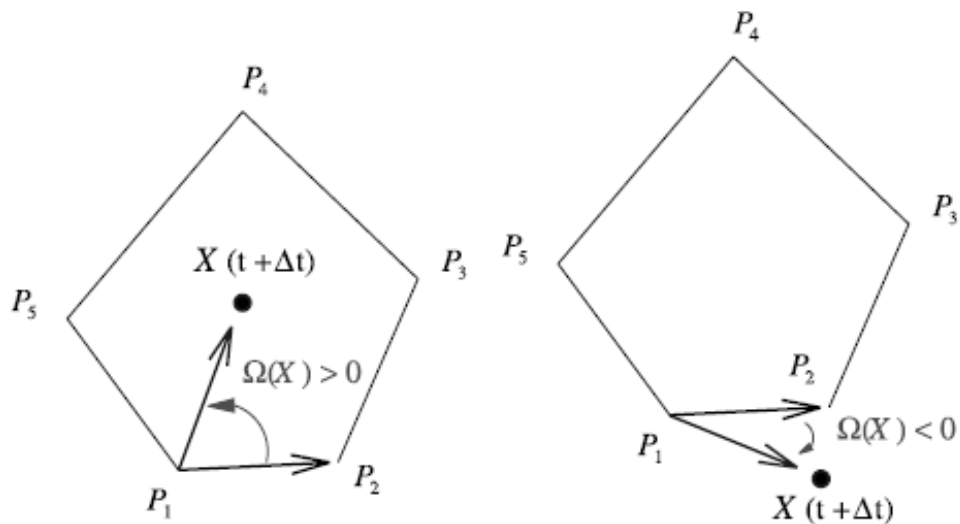
$$\Omega_i \equiv (x_{i+1} - x_i) \cdot (y(t + \Delta t) - y_i) - (x(t + \Delta t) - x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (7)$$

A módszerrel meg tudjuk határozni, hogy az keresett  $P(x,y,z)$  koordinátákkal rendelkező pont, melyik  $i,j$  oszlopba esik. Ezután a feltételezett cellában az adott  $x, y$  koordinátához az alsó síkon  $Z_{\text{alsó}}$ , a felső síkon pedig  $Z_{\text{felső}}$  koordinátát interpolálunk bilineárisan, vagy HDAI módszerrel (attól függően, hogy a rácsháló generálásnál mi lett beállítva). Ezt követően megvizsgálom, hogy a kettő közé esik-e, és ha igen, akkor lokalizáltam az új cellát, ha nem, akkor az eltérés irányában keresek tovább.



5. ábra: Konvex poligon az óramutató járásával ellentétes körbejárési irány esetén

(Chordá et al., 2002)



6. ábra: Példa az Omega tesztre (Chordá et al., 2002)

## **2.4 Peremek kezelése**

A hálógenerálás előtt megválasztottuk, hogy a csúszó, vagy a tapadó peremfeltételt alkalmazzuk. Ha VMLE számítást is akarunk végezni, akkor mindenképpen a csúszó feltételt kell alkalmazni. A csúszó és tapadó peremfeltétel esetén is lehetséges, hogy a nagy időlépés miatt, illetve a függőlegesen nagyon torzított sebességmező miatt a részecske – fizikailag irreálisan – elhagyja a számítási teret. Ebben az esetben több megoldási lehetőséget is választhatunk.

### **2.4.1 Cheng-módszer**

Az első egy fél-implicit,  $O(\Delta t^2)$  pontosságú módszer (Cheng, 1996). Cheng először analitikusan meghatározza, hogy a cella melyik oldalán fog távozni a részecske, úgy, hogy veszi egy él két végpontját és a részecske kezdeti pontját, melyek így egy síkot alkotnak. Ezután a három pont sebességvektora alapján meghatározza, hogy a részecske a sík mentén vagy annak melyik oldalán távozik a cellából. Miután ezt minden élre elvégezte, egyértelműen meghatározható, hogy a részecske melyik csúcson, élen vagy oldalon fog távozni. Mivel ez egy celláról cellára járó módszer, ezért a következő lépés az kilépési pont meghatározása. Ezt a kezdeti pontból és a kilépési oldal négy csúcsának koordinátaiból és sebességeiből számítja ki. Néhány matematikai átalakítás és behelyettesítés után a következő megoldandó két-ismeretlenes, nemlineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$f = (X_Q - X_P)(VX^2 + VY^2 + VZ^2)^{1/2} - [(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2]^{1/2} VX \quad (8)$$

$$g = (Y_Q - Y_P)(VX^2 + VY^2 + VZ^2)^{1/2} - [(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2]^{1/2} VY \quad (9)$$

ahol:  $f$  és  $g$  is zérus,  $X, Y, Z$  a három tér koordináta,  $VX, VY, VZ$  pedig az adott irányba eső sebességvektor,  $Q$  indexszel kilépési, míg  $P$  indexszel a kezdeti ponthoz tartozó változókat jelöltem.

Az alakfüggvény segítségével, az egyenletrendszer átírható úgy, hogy csak  $\zeta$  és  $\eta$  az alakfüggvény változóitól függjön. Ezután Newton-Raphson módszerrel megoldjuk a kapott nem lineáris egyenletrendszert. A Newton-Raphson módszerben szereplő Jacobi mátrixhoz szükséges deriváltakat a I. függelékben vezetem le. A tesztelés során 5-6 iterációs lépés volt szükséges ahhoz, hogy az  $f$  és  $g$  számításakor abszolút értékük összege maximum  $10^{-10}$  nagyságrendűvé csökkenjen.

#### **2.4.2 Utólagos sebességkorrekció módszere**

Az utólagos sebességkorrekció módszere egy saját módszer, mely a PCA szoftver fejlesztése során született. A módszer csúszó peremfeltétel esetén alkalmazható. Az algoritmus akkor aktiválódik, ha egy részecske elhagyja a számítási teret, ekkor ugyanis az utolsó pozícióját megvizsgálom, hogy a peremmel érintkező cellában volt-e, és ha nem, akkor csökkentem az időlépést egészen addig, amíg bent nem marad a következő lépésben. Ha úgy megy ki, hogy peremet érintő cellában volt, akkor az utolsó belső pozíciójához peremmel merőleges sebességet állítok be, és azzal léptetem egy időlépésnyit. Ezután az így kapott új pozícióból folytatom a számítást.

#### **2.4.3 Utólagos helyzetkorrekció módszere**

Az utólagos helyzetkorrekció azt jelenti, hogy ha egy részecske elhagyja a számítási területet, akkor a PCA kiszámítja, hogy hol hagyta el, és a perem azon pontjára helyezi, mivel a peremre csak befele, illetve peremmel párhuzamos sebességeket extrapolál a hálógenerátor, ezért a részecske bent fog maradni a számítási térben a következő lépésekben is. Ezt jól illusztrálja a 4. ábra, ahol peremről indított részecskék, hosszabb rövidebb peremen való közlekedés után mind befele hagyják el a peremet.

#### **2.5. A kaotikus advekció és a transzportfolyamatok beépített vizsgálati módszerei**

Az kaotikus advekció és a transzportfolyamatok vizsgálatára beépített módszerek itt csak felsorolás szintjén kerülnek elő, részletes leírásuk példákkal bemutatva 4. fejezetben található, ahol az alkalmazásuk előtt felvezetésként részletesen ismertetem azokat.

- **Stroboszkópikus-leképezés**
- **Festékfolt módszer**
- **Lékelés**
- **Véges méretű Ljapunov-exponens számítás előre és hátra**

### 3. A modell igazolása

#### 3.1 Tesztelés analitikusan megoldható áramlásokban

A szoftvert először analitikusan megoldható áramlásokban (Garcia-Martínez, 1997) teszteltem.

A sebességmezőt a következő egyenletek definiálják:

$$u = ax - by \quad (11)$$

$$v = ay + bx \quad (12)$$

$$w = konstans \quad (13)$$

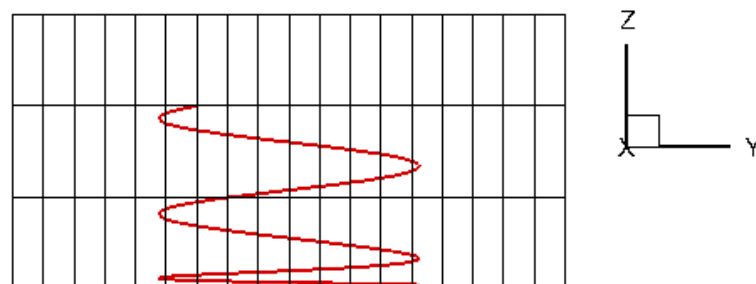
ahol:  $u, v, w$  rendre az  $x, y, z$  Descartes-féle koordinátairányokhoz tartozó sebességkomponensek. A sebességmező analitikus megoldása pedig:

$$x_i(t) = \exp(a \cdot t) [x_i^0 \cos(b \cdot t) - y_i^0 \sin(b \cdot t)] \quad (14)$$

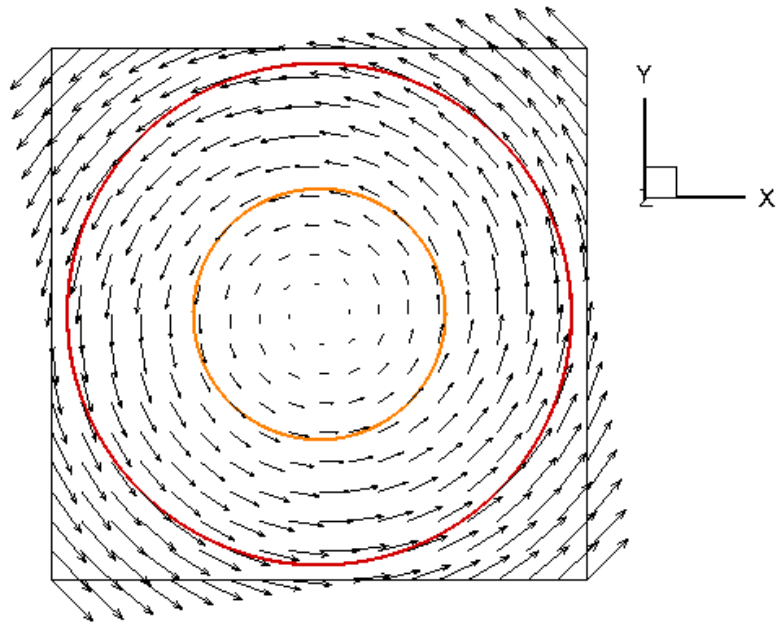
$$y_i(t) = \exp(a \cdot t) [x_i^0 \sin(b \cdot t) - y_i^0 \cos(b \cdot t)] \quad (15)$$

$$z_i(t) = z_i^0 + w \cdot t \quad (16)$$

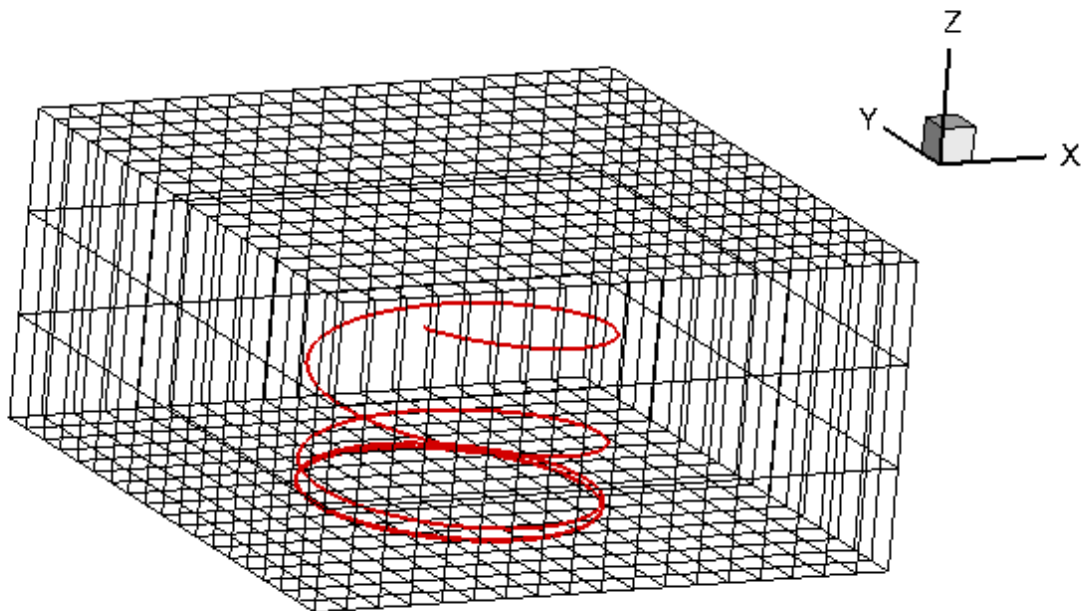
Két áramlásban vizsgáltam a PCA megoldásának pontosságát, egy olyan áramlásban, melyben az analitikus megoldás zárt, kör alakú részecskepályát ad eredményül (K áramlás), illetve egy olyan áramlásban, amelynek analitikus pályamegoldása egy spirál (S áramlás). A K áramlást úgy állítottam elő, hogy  $a = 0$  és  $b = 0,003$ , míg az S áramlás esetén  $a = 0,001$  és  $b = 0,003$   $x = -90 \dots 90$ ,  $y = -90 \dots 90$ . A nullához képest szimmetrikus koordináta-felosztást csak a sebességmező előállításához használtam. A rácsháló tényleges koordinátái viszont 0-tól kezdődnek, tehát jelen esetben  $x$  és  $y$  irányban is  $0 \dots 180$ . Az S és a K áramlás esetén is az analitikusan számított koordinátákkal megegyező trajektóriákat kaptam (7-10. ábra).



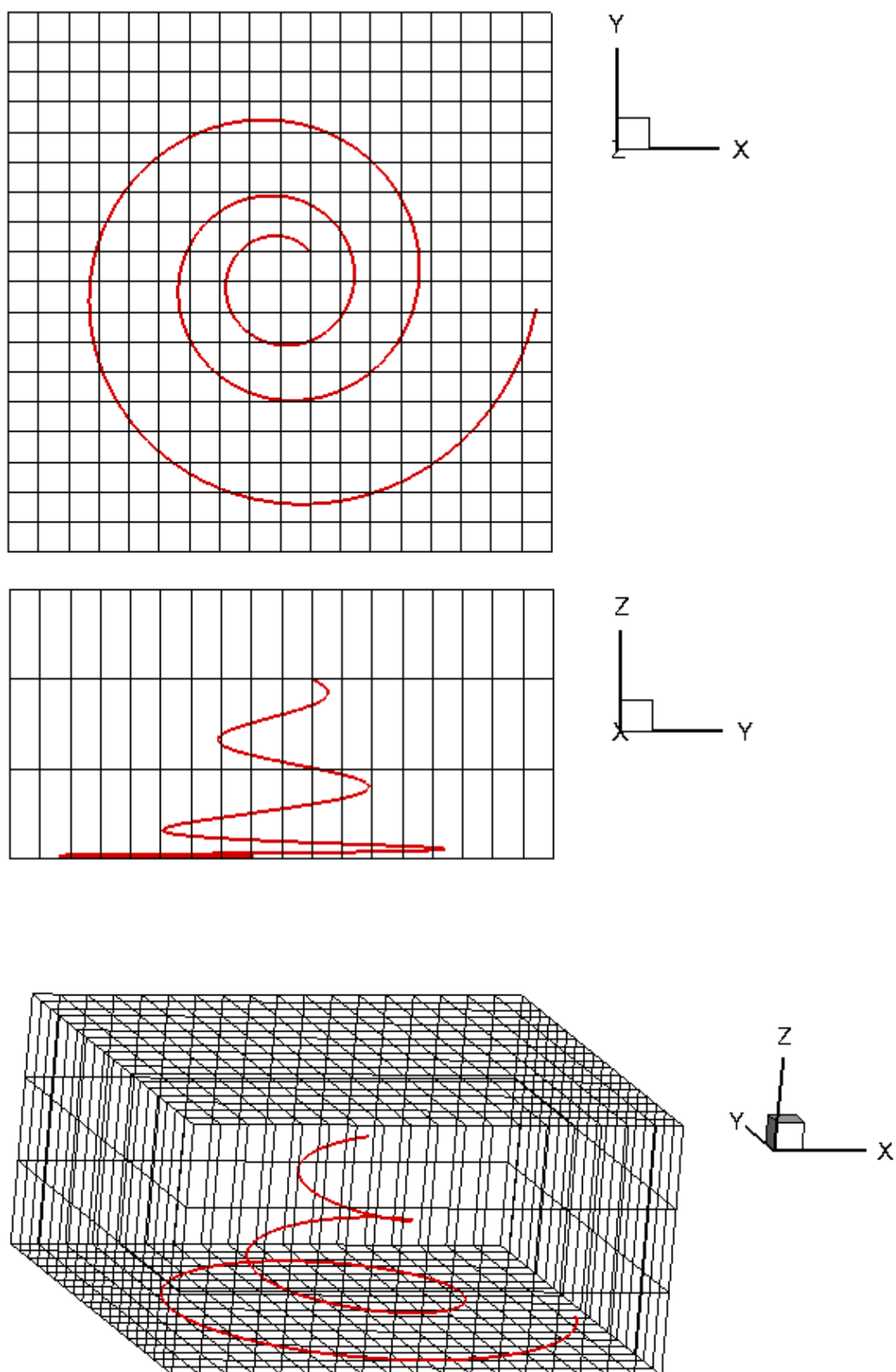
**7. ábra:** A PCA modell eredménye 3D ( $w=-0.0005$ ) K áramlásban,  $x=60$ ,  $y=60$ ,  $z=-1$  kezdő pontból indított részecske esetén, RK4 megoldóval (YZ nézet)



**8. ábra:** A PCA modell eredménye sík ( $w=0$ ) K áramlásban  $x=30$  és  $y=30$  illetve  $x=60$  és  $y=60$  kezdő pontokból indított részecskék esetén a  $z=-2\text{m}$  síkon, RK4 megoldóval



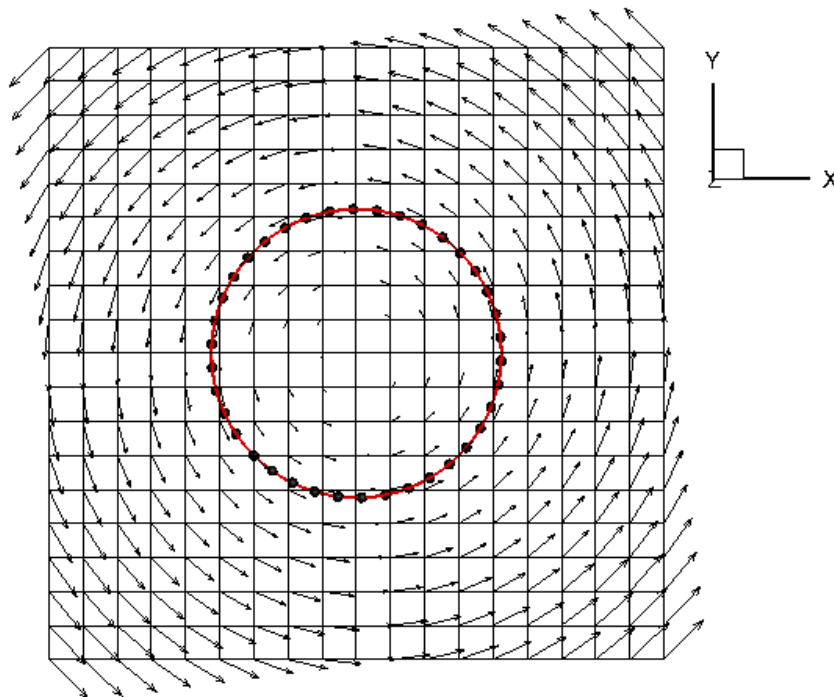
**9. ábra** A PCA modell eredménye 3D ( $w=-0.0005$ ) K áramlásban  $x=60$ ,  $y=60$ ,  $z=-1$  kezdő pontból indított részecske esetén, RK4 megoldóval (XYZ nézet)



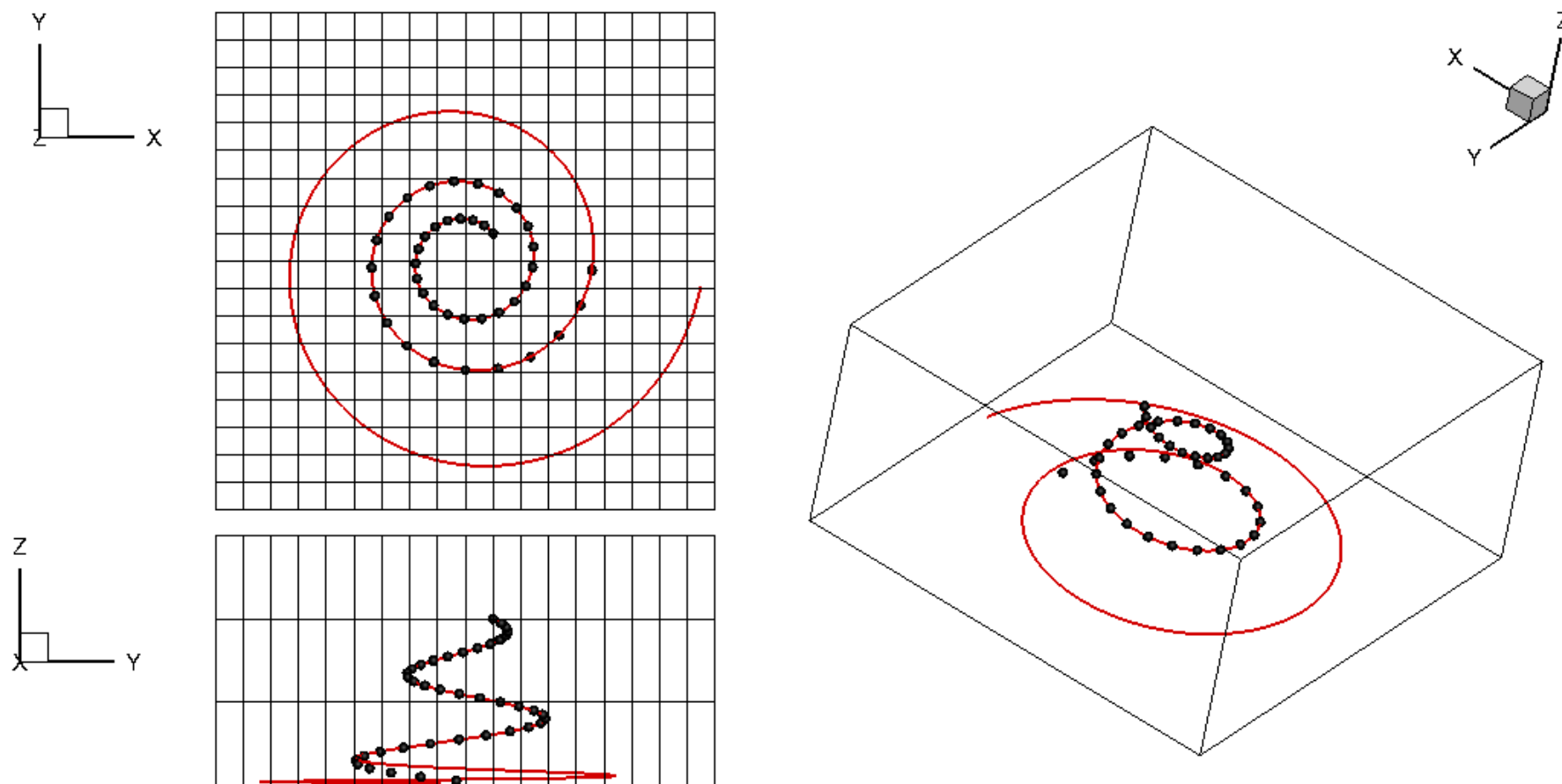
**10. ábra:** A PCA modell eredménye 3D ( $w=-0.0005$ ) S áramlásban  $x=100, y=100, z=-1$  kezdő pontból indított részecske esetén, RK4 megoldóval, különböző nézetekből

### **3.2 A PCA és a Tecplot eredményeinek összehasonlítás analitikusan megoldható és nem megoldható esetekben**

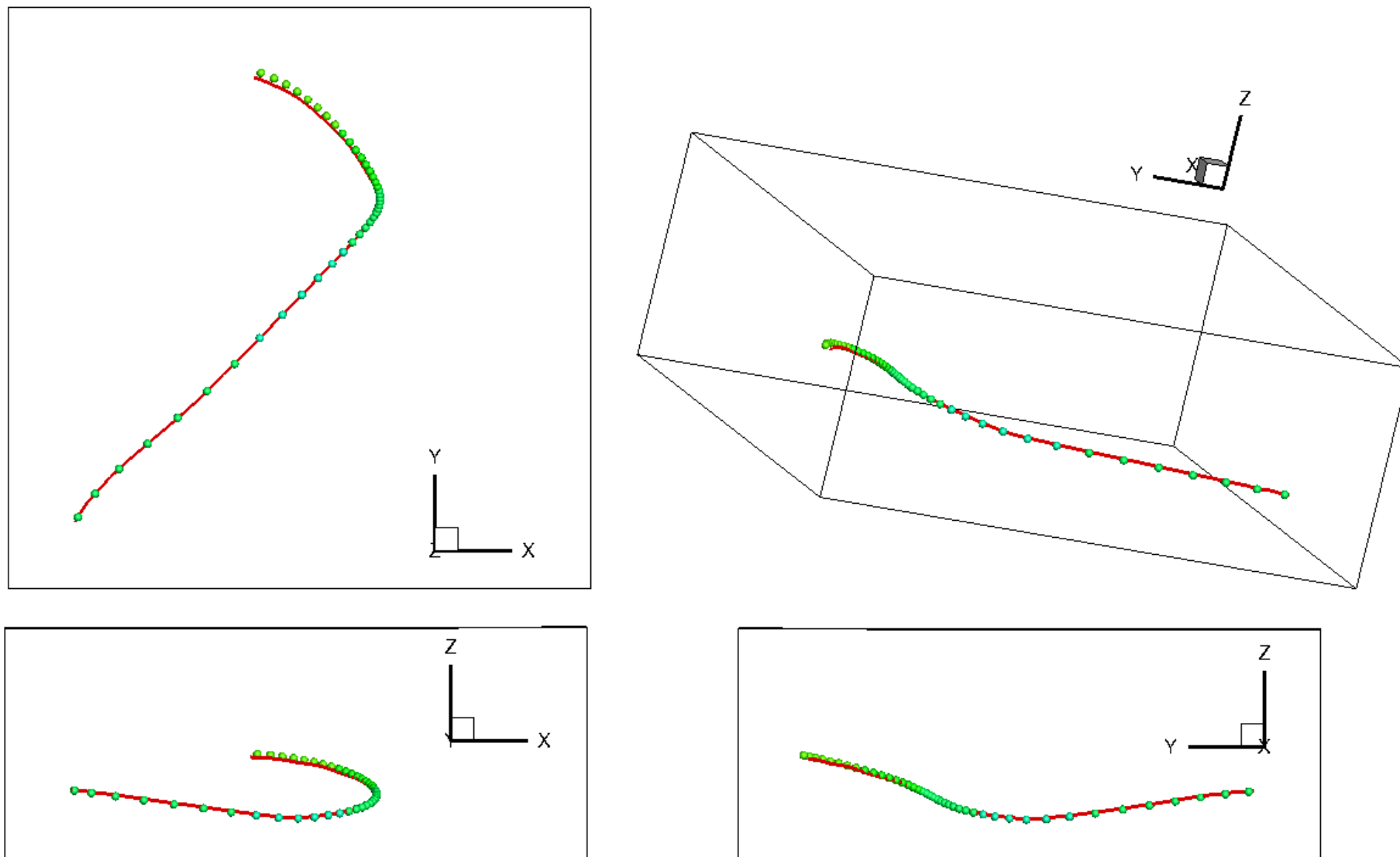
A PCA és a Tecplot 360 szoftver eredményeit először a már előzőekben használt, analitikusan is megoldható áramlásokban hasonlítom össze. A 2D K áramlás esetén (11. ábra) a két megoldás egyezik, mind a két modell egy kör alakú részecske pályát ad eredményül, melynek középpontja az áramlási tér középpontjával egyezik meg. A 3D esetben, mind K mind pedig S áramlás (12. ábra) esetén ugyanaz a konklúzió vonható le, nevezetesen, hogy a megoldások egyeznek, amíg perem közeli cella rétegbe nem érünk. A peremmel szomszédos rétegben lassabban süllyed a részecske a PCA modellben. A PCA (csúszó feltétel)  $w$  sebességkomponenst zérusra csökkentti fenéken, ezért az utolsó cellában már nem konstans a süllyedési sebesség, hanem lineárisan csökken, melynek eredménye, hogy míg a köztes rétegekben egyezik a megoldás, addig az utolsóban eltér. A másik észrevehető különbség, hogy a PCA-val szemben a Tecplot által számolt részecskepálya az  $x,y$  síkban nem folytatódik, miután elérte a feneket, és ez a különböző perem kezeléssel magyarázható. A Tecplotban a peremkezelés nem változtatható, ezért ez egyben korlátja is szoftvernek, mert így csak addig tud részecskepályát számítani, míg az el nem éri valamelyik peremet.



**11. ábra:** A Tecplot (fekete korongok) és PCA (piros folytonos) trajektóriája  $x=60$  és  $y=60$  kezdőpontból indított részecske esetén a K áramlásban



**12. ábra:** A PCA (piros, folytonos) és a Tecplot (fekete gömbök) eredményeinek összevetése az S áramlásban



**13. ábra:** A PCA (piros, folytonos) és a Tecplot (fekete gömbök) eredményeinek összevetése a gúla-tó egy trajektóriáján, különböző nézetekből

A Tecplot és a PCA eredményeit a gúla-tó (a tó ismertetése 4.2 fejezet) néhány trajektóriáján (14. ábra) is összehasonlítottam. Az általános tapasztalat az, hogy egy ideig jó egyezést ad a két modell által számított pálya, azonban egy idő után eltérnek, melynek több oka is lehet. Az egyik, hogy a Tecplot nem az eredeti cellaközépi sebességekre számítja a pályát, hanem a rácsháló celláinak csúcsaira interpolál sebességeket, így más hálón számít, mint a PCA. A másik, hogy a Tecplot fejlesztői nem hozták nyilvánosságra, hogy milyen módszerrel számítják a trajektóriákat. Valószínűsíthető, hogy egy adaptív, általános megoldással, mivel bármilyen hálón képes számítani, illetve meg kell adni, hogy egy cellán belül hány lépést tegyen meg.

#### A validálás konklúziói:

Mivel analitikusan megoldható esetben az áramlás rácshálótól független (trilineáris interpoláció nem csak közelíti a csompontok közti sebességeket, hanem egzaktul számítja, mivel a sebességek lineárisan függnak  $x$ -től és  $y$ -től) volt, ezért a két modell mind az S mind pedig a K áramlásban ugyanazt az eredményt adta, az eltérés csak a peremet érintő cellákban volt. Az analitikusan nem megoldható áramlásnál (gúla-tó) az eredmények eltérnek egymástól, mert a rácspontok közti sebességek nemlineáris eloszlásúak, a két modell pedig nem ugyanazon a rácshálón számít, illetve a két megoldó valószínűleg eltérő, így ebből is fakadnak különbségek. Összességében a tesztek alapján a PCA trajektóriaszámítóját kellően validáltnak tekintem.

#### **4. Káoszelméleti alkalmazások a transzportfolyamatok térbeli struktúraelemzésének céljából, realisztikus tóban**

##### **4.1. Bevezetés**

A vizekben a transzportfolyamatok határozzák meg az élettelen vagy élő, de önálló mozgással nem rendelkező anyagok tér- és időbeli áthelyeződését. A különféle szennyezőanyagok transzportja is egy igen fontos aspektusa napjaink vízmérnöki gyakorlatának, gondoljunk csak a tengeri olajkatasztrófákra, vagy mondjuk az algavirágzás miatti tömeges halpusztulásra.

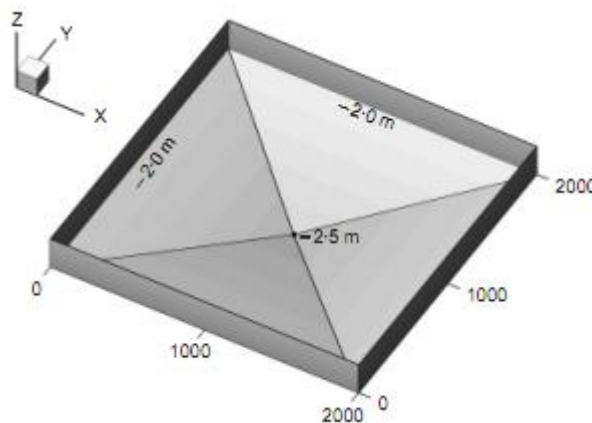
A szennyezőanyagok elkeveredése általában az advekcio és a (turbulens) diffúzió együttes hatására jön létre. Abban a hipotetikus esetben, amikor csak az advekcio van jelen a fluidumban, a konzervatív szennyezőanyag koncentrációváltozása egyfajta hígulás formájában jelenik meg, melynek mértéke elsősorban nem a fluidum sebességétől, hanem az advekcio jellegétől függ. Amennyiben az advekcio kaotikus tulajdonságokkal bír, akkor az esély az intenzív keveredésre jóval nagyobb, így a hígulás pedig nagy. A kaotikus advekcio okozta keveredés nagyságrendekkel meghaladhatja a Fick-féle közelítéssel leírt (turbulens) diffúzióból származó elkeveredést, ezért vizsgálata is új megközelítést kíván. Alapvetően nagy részecskeszámú Lagrange-szemléletű vizsgálatokra van szükségünk ahhoz, hogy a fluidum – esetünkben a víz – struktúráját, keveredési jellegét megértsük. Ehhez elsősorban a dinamikai rendszerek vizsgálatára kifejlesztett, a káoszelméletben már használatos módszerek vezethetnek eredményre.

#### **4.2. Hidrodinamikai háttér**

Az áramlástan háttérszámításokat a Panormus programmal végeztem, röviden már a 6. oldalon bemutatam, részletesebb ismertetése a VI. függelékben (Szanyi, 2010).

#### **4.3. Realisztikus medergeometriájú gúla-tó főbb jellemzői**

A gúla-tó apropóját az adta, hogy a közelmúltban egy ilyen geometriájú tó (14. ábra) szél keltette áramlási viszonyai között vizsgálta Pattantyús-Ábrahám et al. (2008) az advekcio kaotikus tulajdonságait. Vizsgálataiban azonban a sebességmezőt nem 3D, hanem mélységintegrált 2D áramlási modellel állította elő.

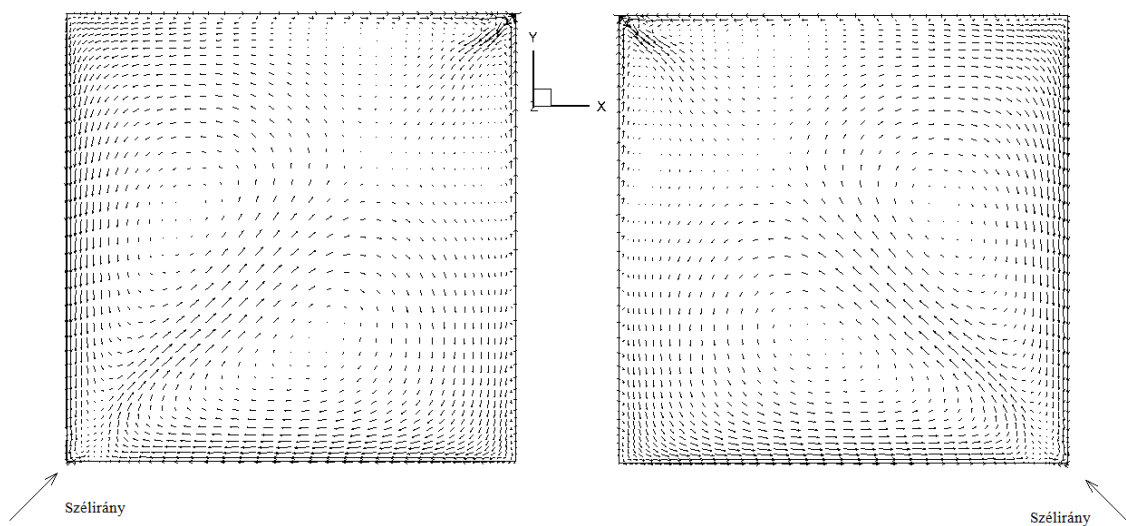


**14. ábra:** A gúla tó axonometrikus rajza (ábra: Károlyi et al., 2010)

Abban a káosz kialakulásához kulcsszerepet tulajdonított a sebességvektor-mező ún. nyeregponyjának. Azonban a tónak általam korábban végzett 3D vizsgálata (Szanyi, 2010) oly mértékben térbeli struktúrát mutatott, hogy célszerűnek tartottam előállítani és elemezni a felvett geometria mellett kialakuló térbeliséget, nagyszámú részecsketrajektórián alapuló kaotikus advekcio számításokkal.

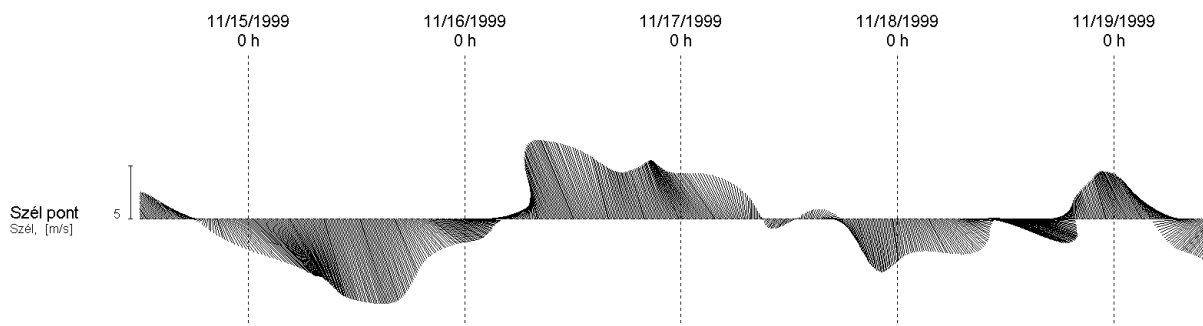
A gúla-tavat  $45^\circ$  és  $135^\circ$  irányból fújó, a vízfelszínen a meghajtáshossz mentén realisztikus belső határrétegfejlődést követő (ún. IBL-es, lásd III. függelék), állandó gerjesztés mellett vizsgáltam. Ha vízszintes síkokban figyeljük, akkor négy horizontális cirkuláció alakul ki (15. ábra), melyek egy síkmetszetben stagnációs pontnak látszó pontban találkoznak. A síkmetszetben stagnációs pont a fenék közelében nagyjából a tó közepén helyezkedik el, és felszín felé közeledve az átló mentén egyre inkább a széllel szembeni part felé tolódik. Ez

azonban térben értelmezve nem egy térbeli nyeregpont, mert függőleges irányban felfelé irányuló sebességkomponens jellemzi.



**15. ábra:** A gúla-tó sebességmezője  $z=-1\text{m}$  mélységben,  $45^\circ$  és  $135^\circ$ -os IBL-es meghajtás mellett

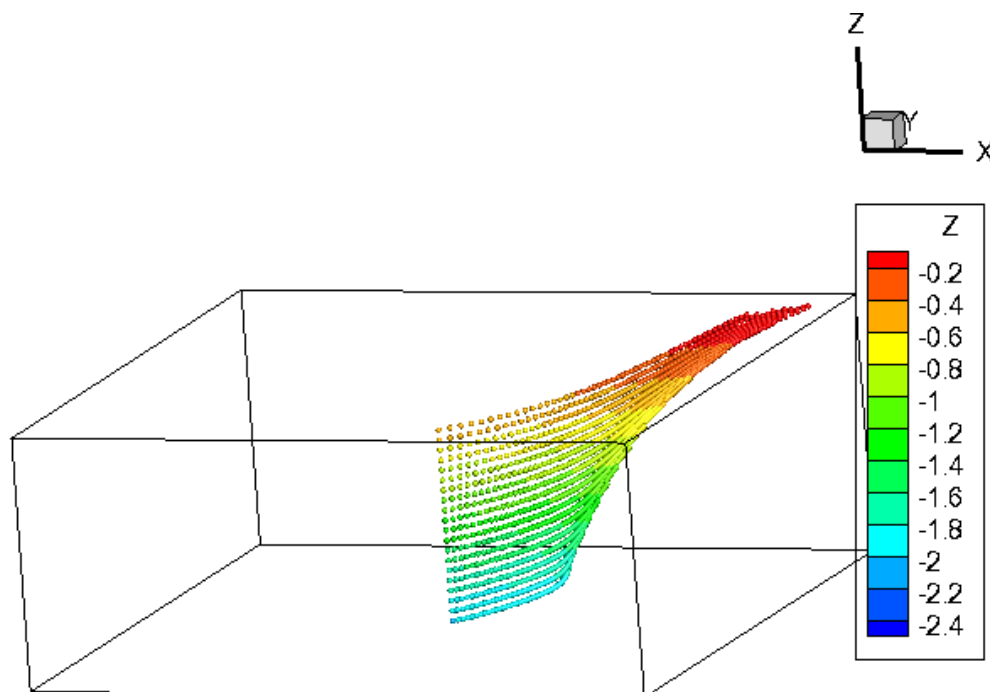
A további vizsgálatokhoz, egy periódusidőn belül ezt a két áramlást fogom pillanatszerűen váltani, és a két állás között nem végzek időbeli interpolációt. A szél állásának ilyen periodikus, gyors változása a valóságban is előfordul, hazánkban jellemzően például a Fertő-tónál. Az áramlás pillanatszerű váltása, vagyis a hidrodinamikai átmenet elhanyagolása már erősebben egyszerűsítő közelítés, de a viselkedés elsődleges megismerésére pl. kétrétegű áramlásokban alkalmasnak bizonyult (Lee, 2011), és általában szokásos módja a káoszjellemzők elsődleges feltárásának.



**16. ábra:** Egy a Fertő-tavon végzett szél mérés 5 óránál hosszabb periódusú összetevőinek időszora.

#### **4.3. A kaotikus viselkedés alapjai, jellemző részecskepályák**

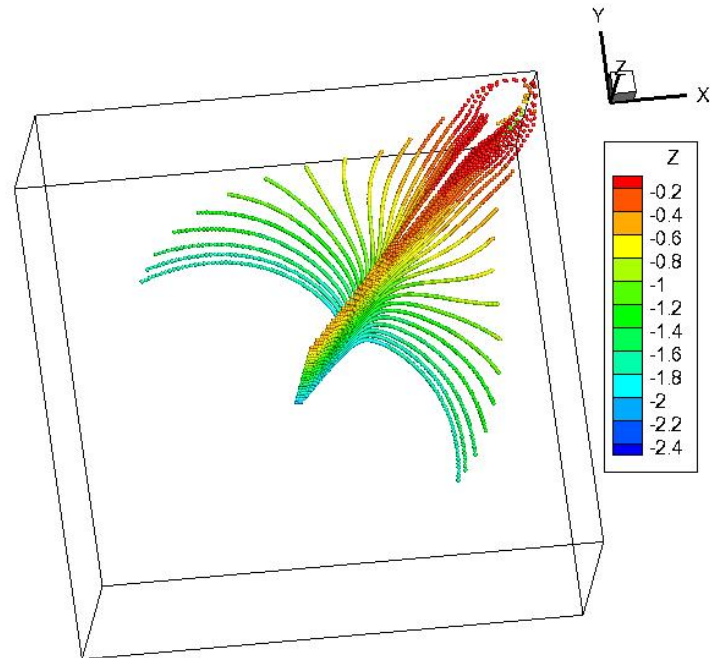
Először tekintsünk néhány karakterisztikus részecskepályát, mellyel jobban megismerhetjük az áramlás jellegzetességeit. Az Euler-féle szemlélet alapján, ahogy azt az előző fejezetben is már láttuk (15. ábra), horizontális síkokat nézve négy cirkuláció alakul ki, melyek egy síkmetszetben stagnációs-nak látszó pontban találkoznak. Célunk a pont körüli viselkedés megismerése, ezért először 20 részecskét helyezünk el alkalmasan egy függvényben, felülnézetből a lapátló mentén, és azt tapasztaljuk, hogy mind belefut a maga síkján az említett kritikus pontba, ahol ezután felfele haladnak tovább. Ezek a részecskék kirajzolják a kritikus vonalat, amely a kritikus pontokból épül fel (17. ábra).



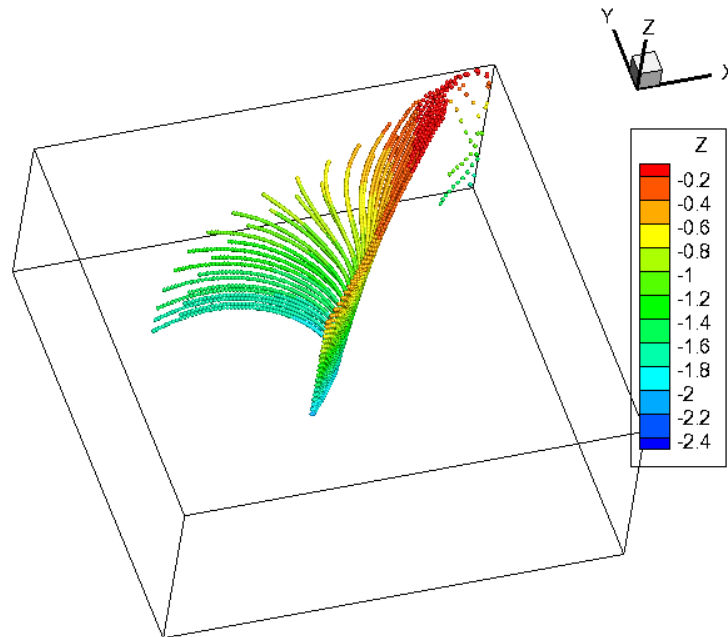
**17. ábra:** A kritikus vonal helye IBL-es 45°-os meghajtás esetén a gúla tóban

Az x-y síkban az átló egyik és másik oldalán, egymástól páronként nagyon kis távolságban is elhelyeztem 20-20 részecskét, és vizsgáltam útjukat (18. ábra). Azt tapasztaljuk, hogy két igen eltérő irányba hajlanak el a részecskepályák, attól függően, hogy az átló melyik oldalán indultak. Azt mondhatni, hogy szinte szétsziccelnek a kritikus vonal közelében, következésképpen távolságuk erőteljesen nőni fog. Ezután azt vizsgáltam, hogy ha az átlóhoz nagyon közel, de annak egyik oldalán indítok egymáshoz közeli részecskepárokat, vizsgálándó merre fognak haladni (19. ábra). Azt láthatjuk, hogy az átló egyazon oldaláról induló részecskék szorosan együtt, ugyanabba az irányba haladnak, tehát távolságok alig

változik. Összeségében éppen ezek miatt nevezhetjük a vizsgált vonalat kritikus vonalnak, és véleményem szerint ez eredményezhet kaotikus szóródást, aminek tipikus ismérve, hogy a kezdeti helyzetre nézve nagy a folyamat kimetelének bizonytalansága. Mindennek egzaktabb bizonyításához azonban további vizsgálatok szükségesek.



**18. ábra:** Az átló két oldaláról induló 20-20 részecske útja a kritikus vonal hatása alatt



**19. ábra:** Az átló közvetlen jobb oldaláról induló 20 részecskepár (pártávolság 10 m) pályája kritikus vonal hatására

Ha egy egyszerű dinamikai rendszer kaotikus tulajdonságokkal bír, akkor az azt jelenti, hogy habár viselkedését determinisztikus törvények írják le, a viselkedés hosszú időre mégsem jelezhető előre, bár statisztikai törvényszerűségei lehetnek. Egy ilyen áramlási rendszer kaotikus tulajdonságai szempontjából csak Lagrange-szemléletű módszerekkel vizsgálható hatékonyan. A Lagrange-féle leírás esetén, egy vírzészecske  $r(t)$  pályáját az Euler-rendszerű sebességmező határozza meg, ami alapján a részecske advekcióval mozog, ahogy azt az 1. egyenlet leírja. A kaotikus rendszereket fázisterükben szokták vizsgálni, esetünkben a fázistér egybeesik a valóságos, fizikai térrel.

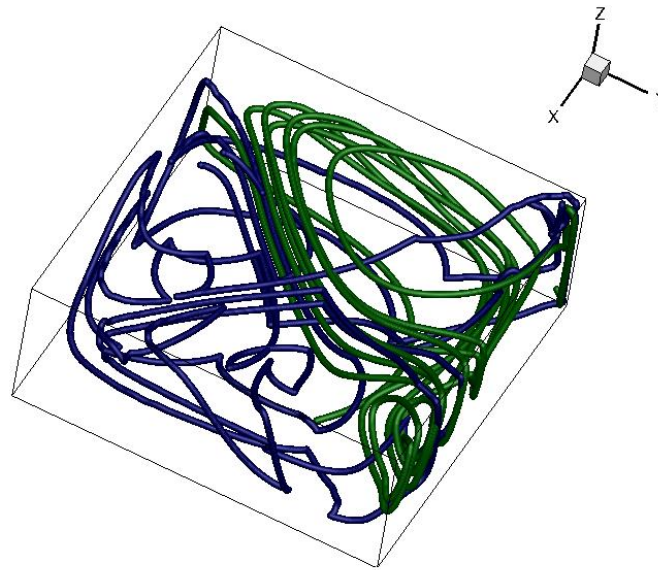
A dinamikai rendszerek esetén három alapvető tényező van, amelyet meg kell vizsgálnunk, ahhoz hogy eldönthessük, hogy az adott rendszer kaotikus-e (Pattantyús, 2008)

- A rendszert legalább három-ismeretlenes vagy azzá átalakítható differenciálegyenlet írja le.
- A rendszer nemlineáris.
- A rendszer nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre.

A gúla-tó áramlásait vizsgálva sorra veszem a fenti feltételeket. A rendszert stacioner esetben három-ismeretlenes egyenlet írja le, melynek rendje periodikusan változtatott meghajtás esetén féllal nő. A tóban a sebesség nemlineáris függvénye a helynek (15. ábra), tehát a második feltétel is teljesül, a harmadik feltétel azonban kicsit több körbejárást igényel.

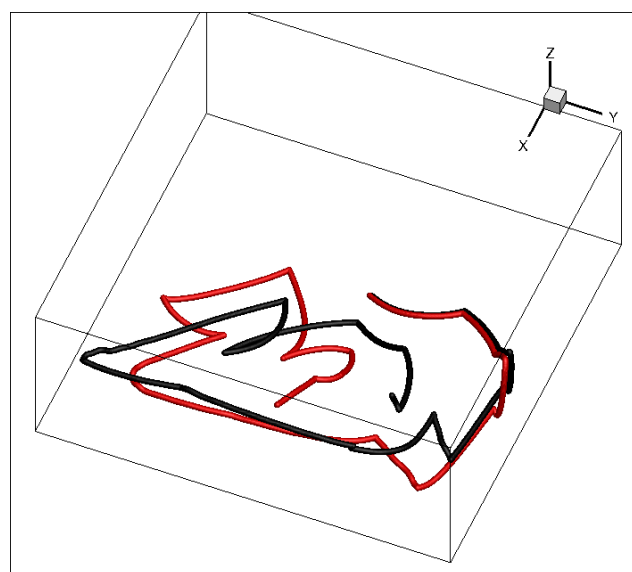
A kaotikus viselkedésű dinamikai rendszerekre igaz általában, hogy egy részecske akár az egész tartományt bejárhatja. Esetünkben is igaz ez azzal a kitéttel, hogy stacioner esetben az áramlás szimmetriatengelyét általában nem tudják átlépni a részecskék, tehát egy részecske egy félteret tud csak bejárni, ezzel szemben a legalább periodikusan időfüggő áramlásnál a részecske az egész tartományt bejárhatja (20. ábra).

Permanens esetben ugyan úgy tűnik, mintha a részecske az egész félteret bejárná, azonban, előrehaladása során folyamatosan hurkokat képez, melyek csak kicsit térnek el egymástól, így hosszú idő után úgy néz ki, mintha bejárná a félteret, de valójában egy kvázi-periodikus pályán mozog. Mivel minden részecske, amely bejárja a fél-tartományt, hasonlóképpen viselkedik, így a rendszer nem lehet kaotikus.



**20. ábra:** Karakterisztikus részecskepálya, periodikusan időfüggő ( $T=8$  óra) (kék) és stacioner esetben (zöld)

A kezdeti értéktől való függést néhány példán megvizsgálva arra a következtetésre juthatunk, hogy a kezdeti deviációhoz tartozó szeparáció meglehetősen nagy a periodikusan időfüggő esetben (21. ábra), amely így nagy érzékenységet mutat a kezdeti feltételre (kiindulási hely). Ettől kezdve kizárólag a periodikusan időfüggő esetet fogom elemezni, hiszen erről beláttuk, hogy a feltételeknek megfelel, tehát kaotikus.

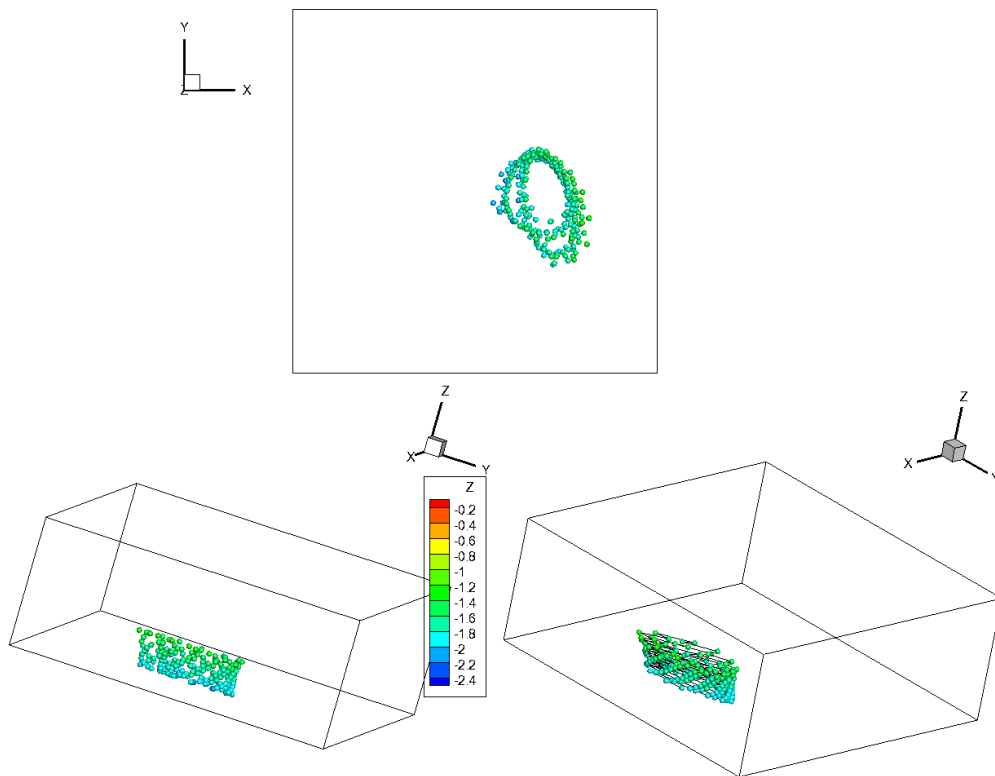


**21. ábra:** Két, kezdetben közel levő részecske pályája, periodikusan időfüggő, 8 órás periódusidejű esetben. Kezdőpontok:  $x=1003$ ,  $y=1203$  és  $1209$ ,  $z=-1m$

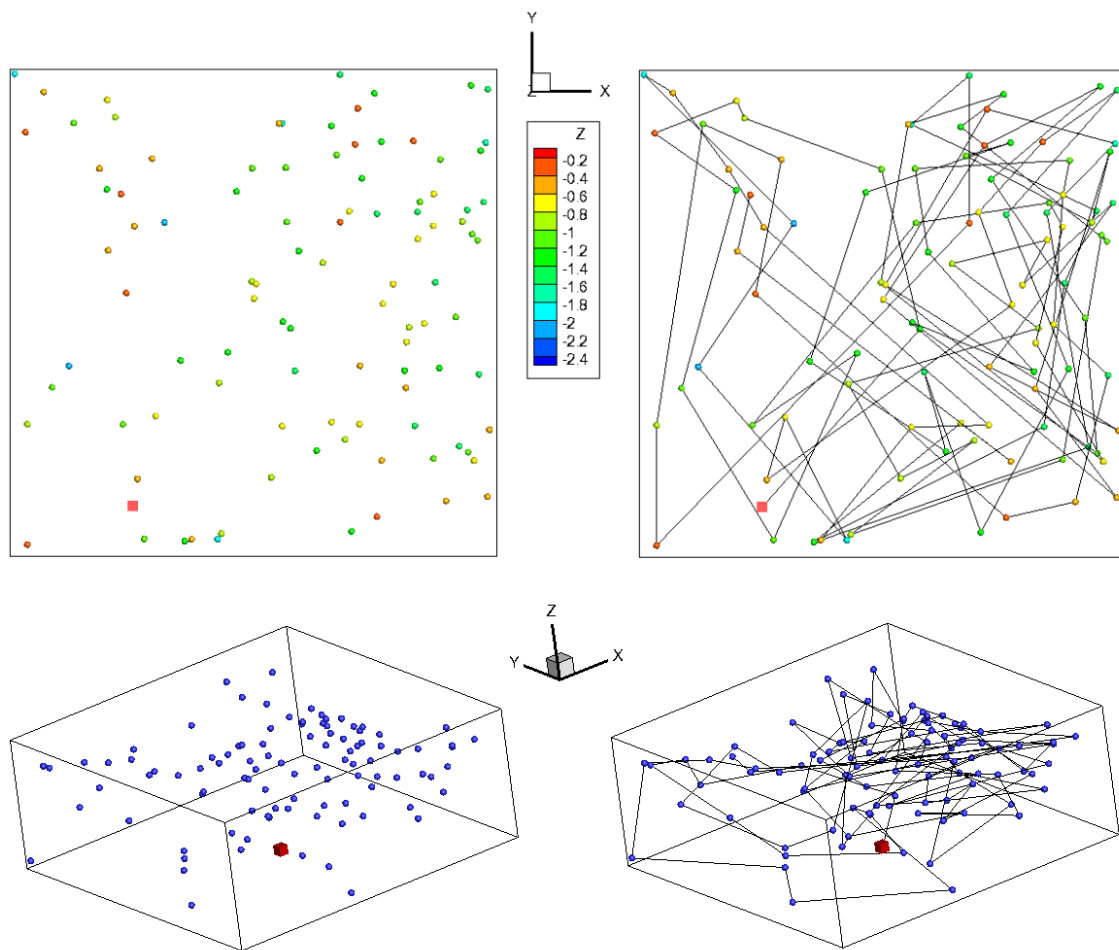
#### **4.4. Stroboszkópikus-leképezés**

A stroboszkópikus leképezés periodikusan hajtott dinamikai rendszerek vizsgálatára alkalmas eljárás. A leképezést úgy végezzük, hogy egy kiválasztott részecske pozícióját minden periódus végén rögzítjük és ábrázoljuk. Amennyiben több részecskénél tesszük ezt, akkor ún. stroboszkópikus-térképet kapunk.

Először tekintsük egy gyengén keveredő rész stroboszkópikus leképezését (22. ábra). A periódusidő ebben az esetben 2 óra volt. Megjegyezzük, hogy ez a kiválasztott rosszul keveredő rész azonban nem egy káoszelméletben értelmezett, többek között Pattantyús et al. (2008) által a gúla-tó 2D közelítésében is kimutatott klasszikus ún. tórusz, mivel a 3D adottságok által lehetővé téve alul és felül is nyitott, ezért nem igaz rá az a megállapítás, hogy az áramlásban egy zárt teret alkotna, mert horizontálisan síkmetszetei zártak ugyan, de alul lehet beáramlás és felül kiáramlás. Én ezentúl csak nyitott tóruszként fogok rá hivatkozni, bár ez egy önkényes elnevezés. A nyitott tórusz nem egzakt káoszelméleti értelmezése ellenére az mérnöki megközelítésből igen érdekes, hiszen számunkra az, hogy jelen esetben pl. 200 órán keresztül nem jut ki egy szennyeződés az adott helyről, nagy környezeti jelentőséggel bírhat.



**22. ábra:** Rosszul keveredő rész stroboszkópikus leképezése 2 órás periódusidejű áramlás esetén, 100 periódusidő után. Részecske kezdőpontja:  $x=1500$  m,  $y=1000$  m,  $z=-1,9$  m



**23. ábra** Az  $x=500$  m,  $y=200$  m,  $z=-1$  m, kezdőpontú (piros kocka, jól keveredő térrészből indított részecske stroboszkópikus leképezése (fél-periódusonként) 8 óra periódusidejű áramlás esetén 400 óráig figyelve

Egy jól keveredő rész stroboszkópikus vizsgálatánál jól látható (23. ábra), hogy egy részecske bejárhatja az egész tartományt. Ha az időben egymás után következő részecskepozíciókat összekötjük, megfigyelhetjük, milyen bonyolult is a részecske vándorlása fél periódusról fél periódusra. Ha a térbeli képet nézzük, láthatjuk, hogy sem horizontális, sem vertikális irányban nem lehet felfedezni szabályosságot az időben egymást követő helyek között. Ezért egy külső szemlélő, aki csak a stroboszkópikus képet nézi, akár azt is mondhatja, hogy megjelenésük egy újabb fél periódusidővel később véletlenszerű. Ha feltesszük, hogy véletlenszerűen jelenik meg bármely helyzet után, akkor érdemes sztochasztikus szemszögből megközelíteni a kérdést. Ezért a már bemutatott példán megvizsgáltam az időben egymást követő pontok közti térbeli távolság-eloszlását, tehát tulajdonképpen azt, hogy egy-egy

félperiódus alatt mekkora utat tesz meg a részecske. Érdekes tapasztalat, hogy ez (23. ábra) egy Gamma3-szerű, háromparaméterest sugalló eloszlást adott (24. ábra).



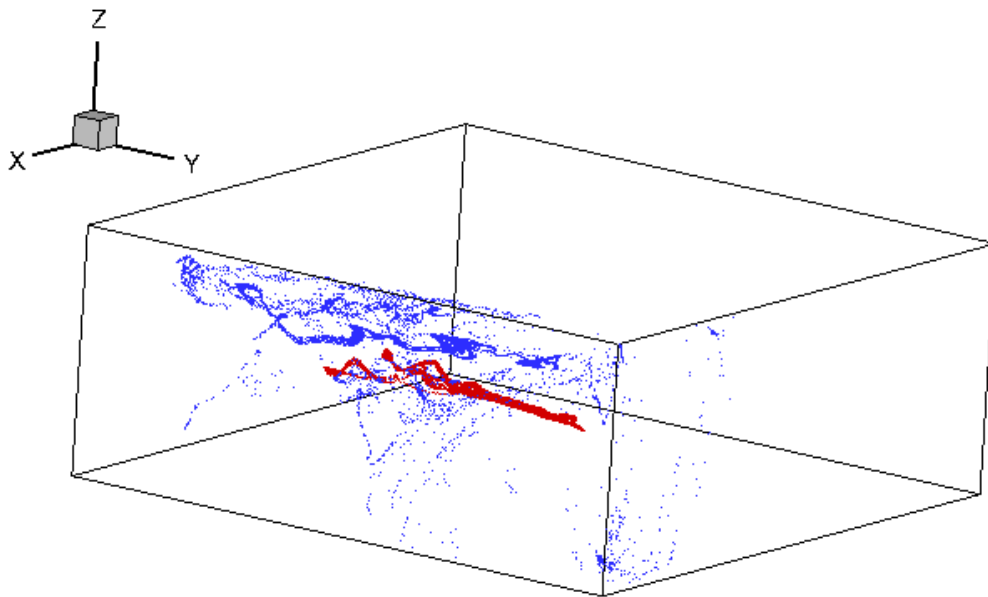
**24. ábra:** A távolságok eloszlása 200 m-es szűrő használatával

Ez az eredmény jól mutatja, hogy a rendszer mennyire magán viseli a káosz minden jellemzőjét. Egyrészt determinisztikus, mivel pontosan kiszámítható egy-egy félperiódusidővel később a részecske újabb pozíciója, másrészt viszont az véletlenszerű is, hiszen eloszlásfüggvénnyel jellemezhető, az hogy milyen távolságra jutott a részecske egy-egy félperiódus után.

#### **4.5 Festékfolt módszer**

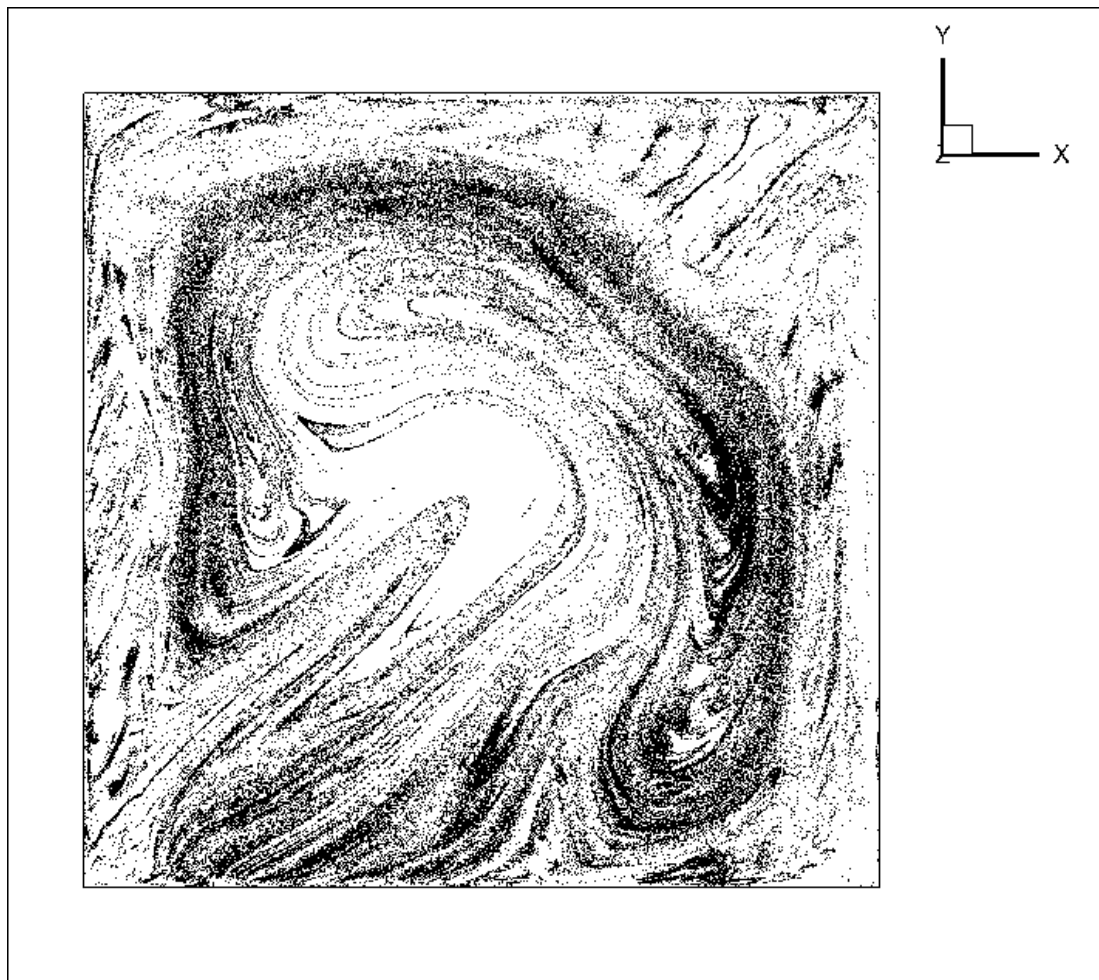
A festékfolt módszer, egy a gyakorlatból átvett alkalmazás. Laborokban (Gyüre, 2006; Kiss, 2009) és terepen egyaránt használunk színező vagy jelző anyagokat, melyeknek nyomon követjük sorsát azért, hogy megismerjük az áramlás struktúráját. A festékfolt módszer nagyszámú részecske tér- és időbeli viselkedésének vizsgálatáról szól. Az áramlásban valahol koncentráltan elengedünk nagyszámú részecskét és figyeljük, hogy mi történik velük. Ha az áramlás kaotikus, és nem egy tóruszba, vagy nyitott tóruszba helyezük a részecskéket, akkor azok gyorsan szétszóródnak.

Vizsgálatomban 4 órás periódusidejű áramlásban elengedtem két, egyenként 10000 részecskét tartalmazó, 50\*50 m-es négyzet alakú foltot a  $z=-0,7$  m-es síkban, és 60 óra után vizsgáltam annak szétterjedését. Az egyiket egy nyitott tóruszban (piros), a másikat (kék) egy jobban keveredő részben próbáltam elhelyezni. Amint láthatjuk (25. ábra), a piros jelzőanyag jóval kevésbé keveredett el, a többiektől elkülönült piros részecskét nem is találunk a tartományban, ezzel szemben a kék jelzőanyag sokkal jobban elkeveredett. Ha megbecsüljük azt a térfogatot, amelyet részecskék szennyezhetek a jelenlegi befogadó térrész alapján, akkor a piros szennyezőanyag esetén  $5000 \text{ m}^3$ -nek, míg kék szennyezőanyag esetén  $500000 \text{ m}^3$ -nek adódik, tehát két tízes-nagyságrendnyi különbség van a két eset között. Ez ugyan csak egy becslés és nem egzakt számítás, de jól szemlélteti a kialakuló különbségeket.

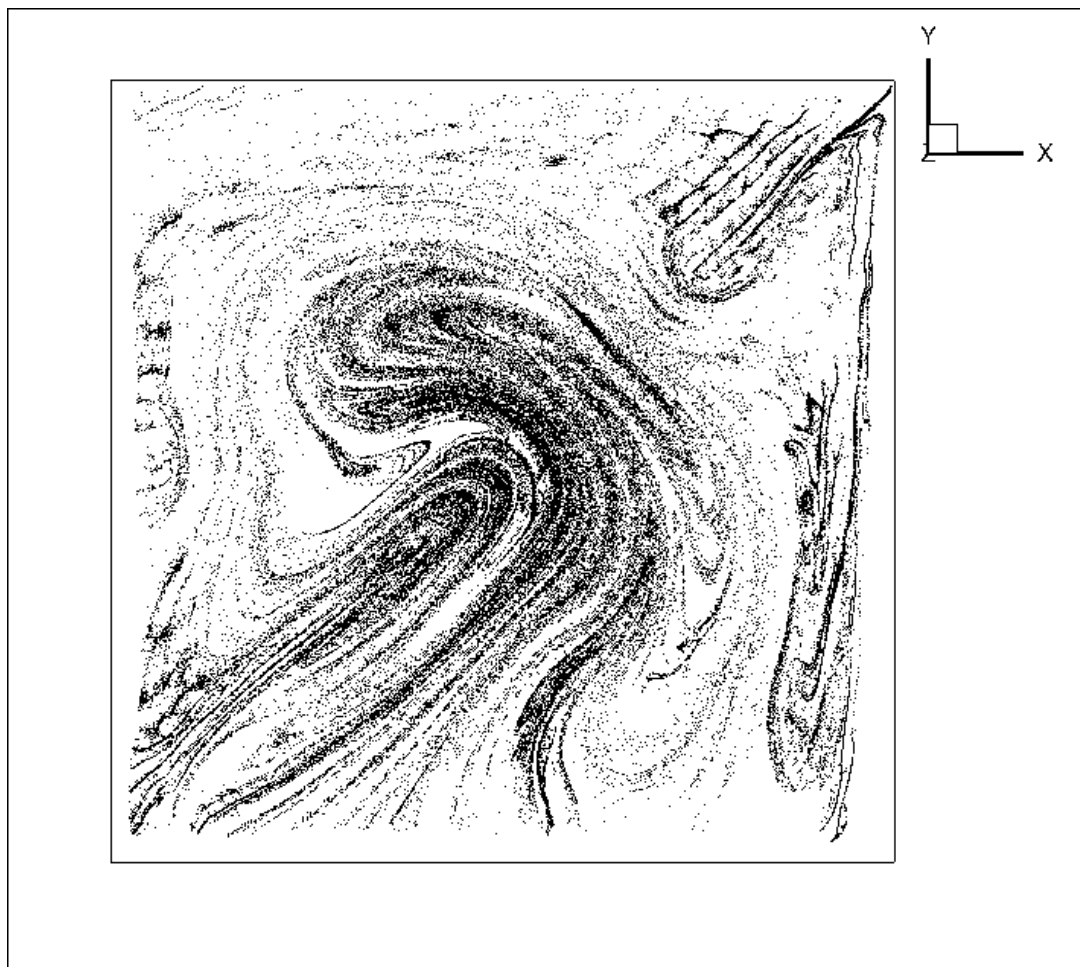


**25. ábra:** Festékfolt-terjedés ( $T=4$  óra) a gúla-tóban, kétszer 10000 részecske esetén, a kék részecskék kezdőpozíciója  $x=1000-1050\text{m}$ ,  $y=1000-1050\text{m}$ ,  $z=-0,7\text{m}$ , míg a piros részecskék kezdőpozíciója  $x=1500-1550\text{m}$ ,  $y=1000-1050\text{m}$ ,  $z=-0,7\text{m}$  koordinátájú négyzetben volt.

A festékfolt-terjedés nagyon nagy részecskeszám esetén kirajzolhat teljes struktúrákat is, így jóval részletgazdagabb lesz az információ, amit kapunk az áramlásról. Ezért a  $z=-1,89-1,91\text{m}$ ;  $x=y= 0-2000\text{ m}$ , tartományban, függőlegesen  $1\text{cm}$ , vízszintesen  $3\text{m}$ -es kezdőpont-kiosztással engedtem el összesen  $1,5$  millió részecskét, és megnéztem  $60$  óra után a pozíciójukat (26-27. ábra). A kialakult mintázat egy különös attraktorra utal (Tél és Gruiz, 2002), mely mérnöki értelmezés szerint annyit jelent, hogy van olyan pont vagy környezet, ahol a szennyezőanyag felhalmozódik. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy máshonnan kiürül. Ez azért is lehetséges, mert egy sávra nézve nem divergenciamentes az áramlás, mivel az adott sávban fel és leáramlás is történik.



**26. ábra:** Részecskepozíciók felülnézete az  $1-1,3\text{ m}$ -es sávot vizsgálva,  $T=8\text{ óra}$ . Kezdőfeltételek:  $z=-1,89-1,91\text{m}$ ;  $x=y= 0-2000\text{ m}$  tartományban, függőlegesen  $1\text{cm}$ , vízszintesen  $3\text{m}$ -es rács távolságot alkalmazva. Részecskék száma:  $1,5$  millió



**27. ábra:** Részecskepozíciók felülnézete az 2 - 2,5 m-es sávot vizsgálva,  $T=8$  óra. Kezdő feltételek lásd előző ábra.



**28. ábra:** A 24. ábrához hasonló mintázat a természetben, egy a Loch Ness-be befolyó patakban (Józsa Ildikó felvétele, 2011.)

#### **4.6 Lékelés, partot elérő szennyezőanyagok**

A lékelés módszerének alapgondolata a következő: a vizsgált részecskék kezdőfeltételeit két részre osztjuk aszerint, hogy érintettek-e egy adott résztartományt vagy sem, és csak azokat a pontokat jelenítjük meg, melyek érintették (Schneider és Tél, 2003; Tuval et al., 2004). Ezt a kiválasztott résztartományt (3D vizsgálataimban általában egy téglatest) léknek nevezzük. Kicsit másként megfogalmazva, a módszer azon alapul, hogy a meglékelt rendszer sokaságai<sup>1</sup> a zárt rendszer sokaságainak részhalmazát alkotják. Így, amely sokaságot lékeléssel meghatározunk, az a zárt rendszernek is sokasága. Ha az áramlás kaotikus jellegű, akkor a bennmaradt részecskék szálas-kacsos mintázatot rajzolnak ki. Ezeknek a bennmaradt részecskék kiindulási helyei az ún. stabil sokaság közvetlen közelében helyezkednek el, ahonnan elérik a nyereghalmazt (Pattantyús, 2008). A gúla-tóbeli részecske-sodródás fenti értelmű struktúrafeltárására legcélszerűbbnek azt találtam, hogy a parttól vett 50m-es sávban négy léket helyezek el a négy égtáj szerint és vizsgálom, hogy az ezektől a tó belseje felé egyenletesen szétosztott részecskék melyik partot érik el először.

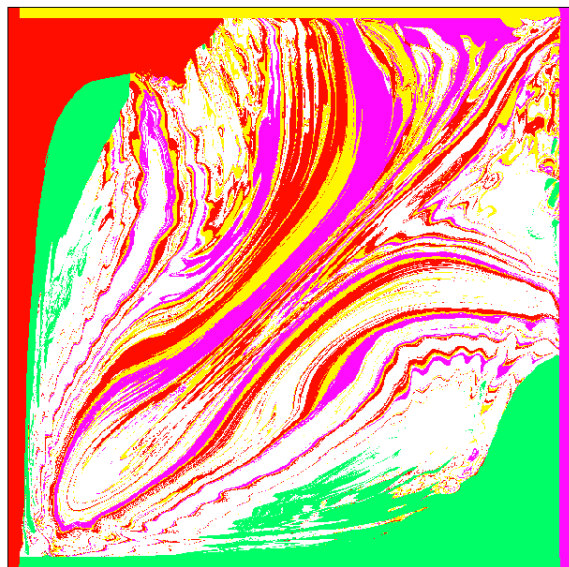
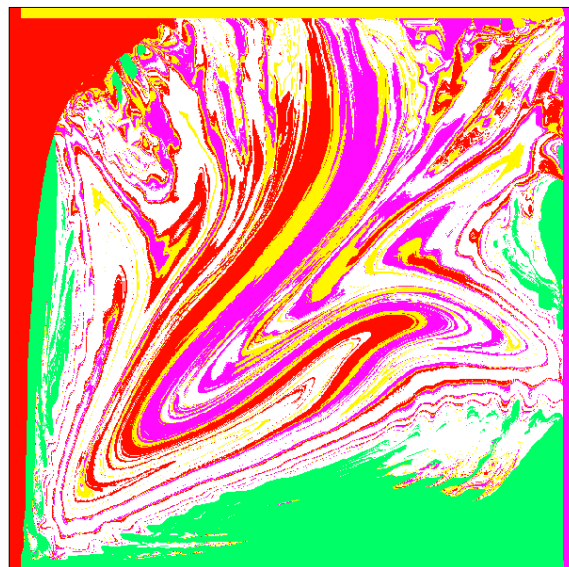
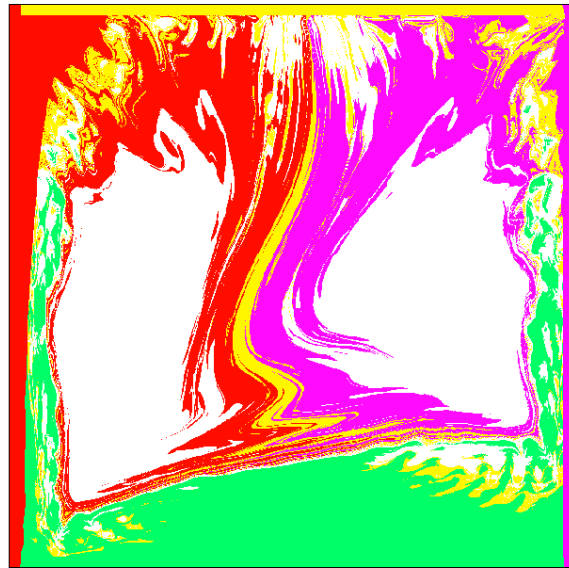
A lékelés jó példa arra, hogy hogyan ötvöződhet egy a kaotikus rendszerek vizsgálatára kifejlesztett módszer napjaink korszerű mérnöki gyakorlatával, hiszen igen fontos kérdés lehet, hogy például egy havária során a vízbe kerülő szennyezés melyik partot fogja elérni először. A vizsgálatot stationer (lásd V. függelék), illetve 2, 4, 6, 8 és 12 órás periódusidejű esetekre végeztem el. A vizsgálat 60 óráig tartott, és a 29. ábrán a kezdőponthoz rendelttem annak a partnak a színét, amelyiket először eléri. A part előtti 50 m-es sáv is ki van festve, így egyértelmű, hogy melyik parthoz melyik szín tartozik. Talán zavaróan hathat, hogy az átlapoló sarkoknak is van színe, hiszen azok két lékhez is tartoznak, azonban ezek csak az egyik színét kaphatták meg. Az ábrákon fehérrel azokat a zónákat jelöltem, amelyek a részecskék advekcióval az egyik partot sem érték el a vizsgált idő alatt.

Időfüggő áramlás esetén egyértelmű szabályszerűségeket lehet felállítani a periódusidő hossza és az egyes rétegekben kialakult struktúrák jellege között. Rövid periódusidő esetén viszonylag szimmetrikus képet kapunk gyengébb kaotikus jelleggel, aztán ahogy nő a periódusidő, úgy lesz egyre aszimmetrikusabb az eredmény, erősödő káosszal. A hosszabb periódusidő azért hoz aszimmetriát, mert az első szélállás (és így áramlásállás) hosszú ideig

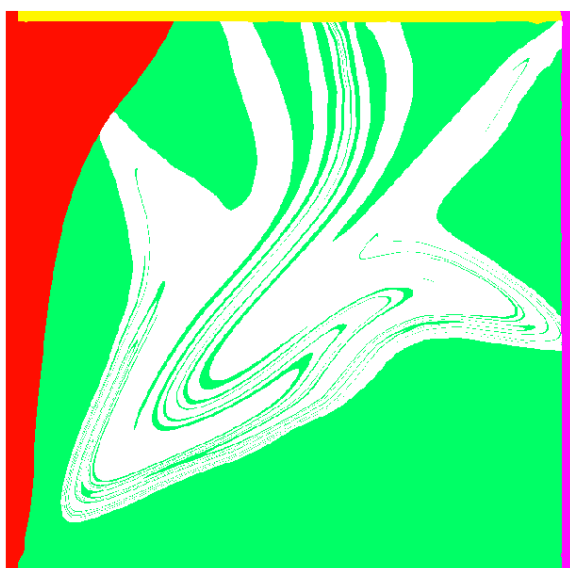
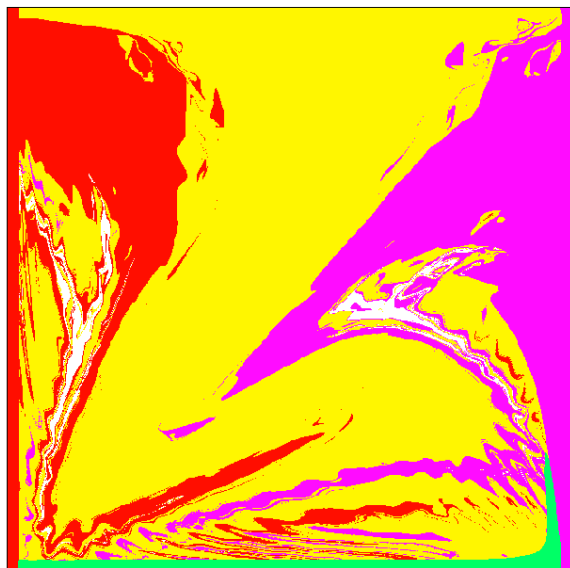
---

<sup>1</sup> A sokaságok fogalmi ismertetését az V. függelék tartalmazza

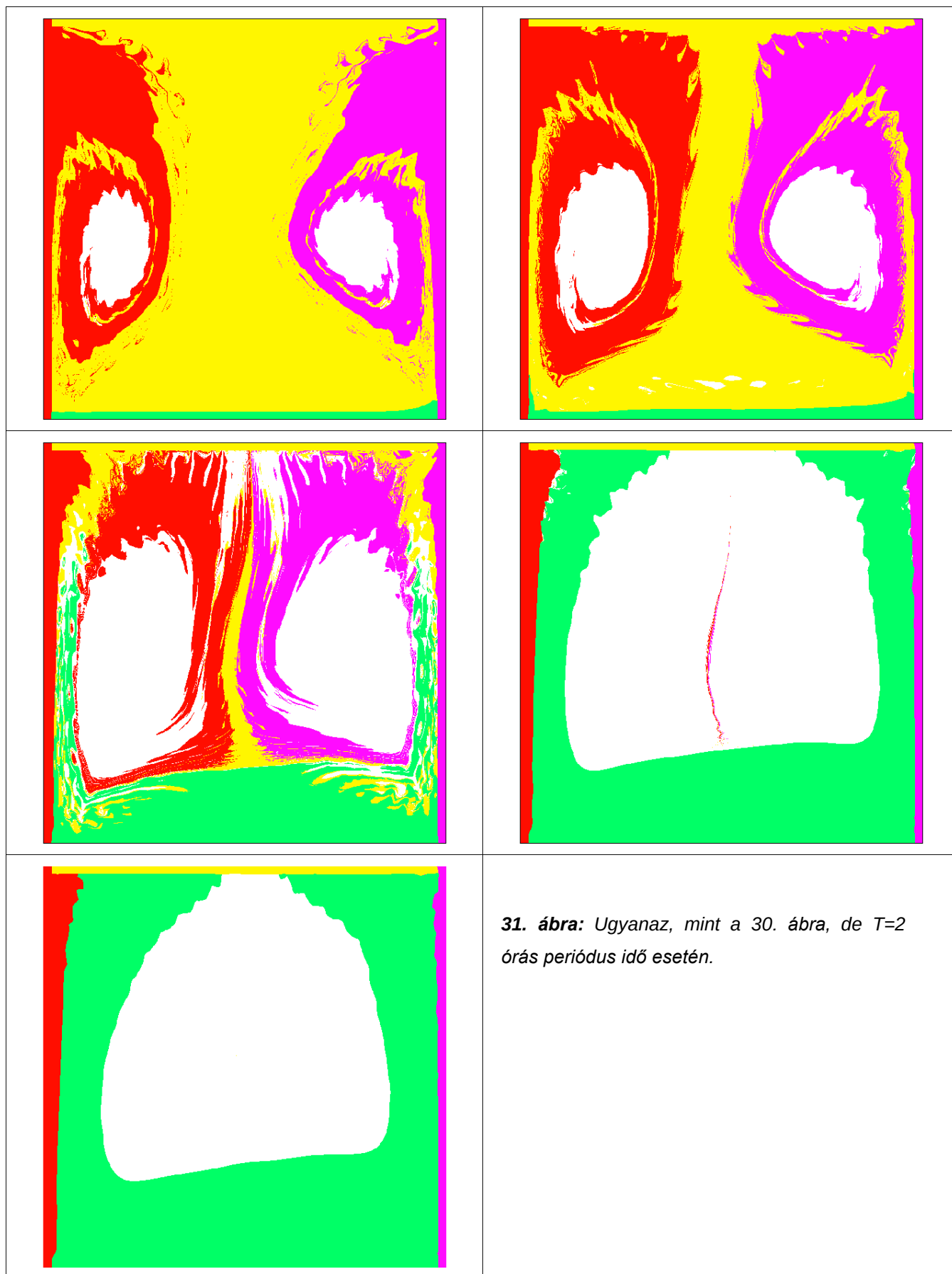
tudja kifejezni a hatását, és így a második állás már az első állás által erősen determinált mezőt kapja kezdeti állapotként.



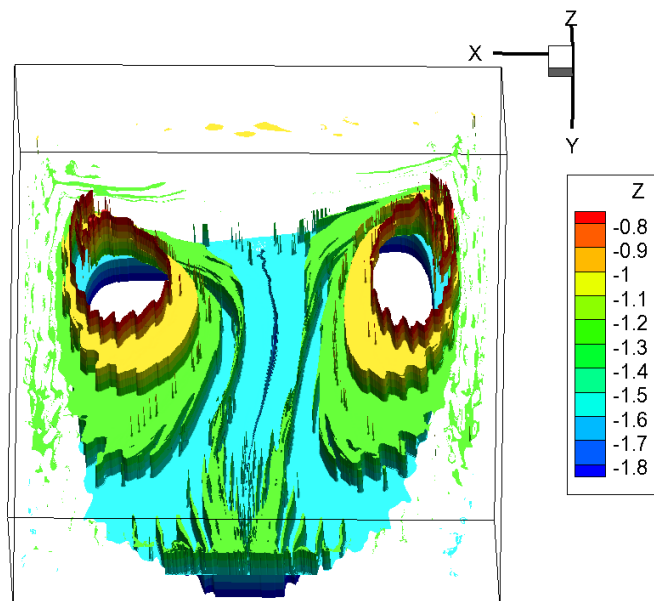
**29. ábra:** A négy partéltől 50m szélességben és teljes 2m-es mélységben elhelyezett lékbe érkező részecskék kezdeti pozíciója. Jobbról balra és fentről lefele haladva a  $z=-1,3$  m síkot tekintve sorban a 2,4,6,8,12 órás periódusidőhöz tartoznak. A részecskék száma szintenként 440 ezer.



**30. ábra:** A négy partéltől 50m szélességben és teljes 2m-es mélységben elhelyezett lékbe érkező részecskék kezdeti pozíciója. Az ábrák jobbról balra és fentről lefele haladva 8 órás periódus idő esetén,  $z=-0,7$   $-1,0$   $-1,3$   $-1,6$  és  $-1,9$  m mélységű síkokat mutatják. A részecskék száma szintenként 440 ezer.

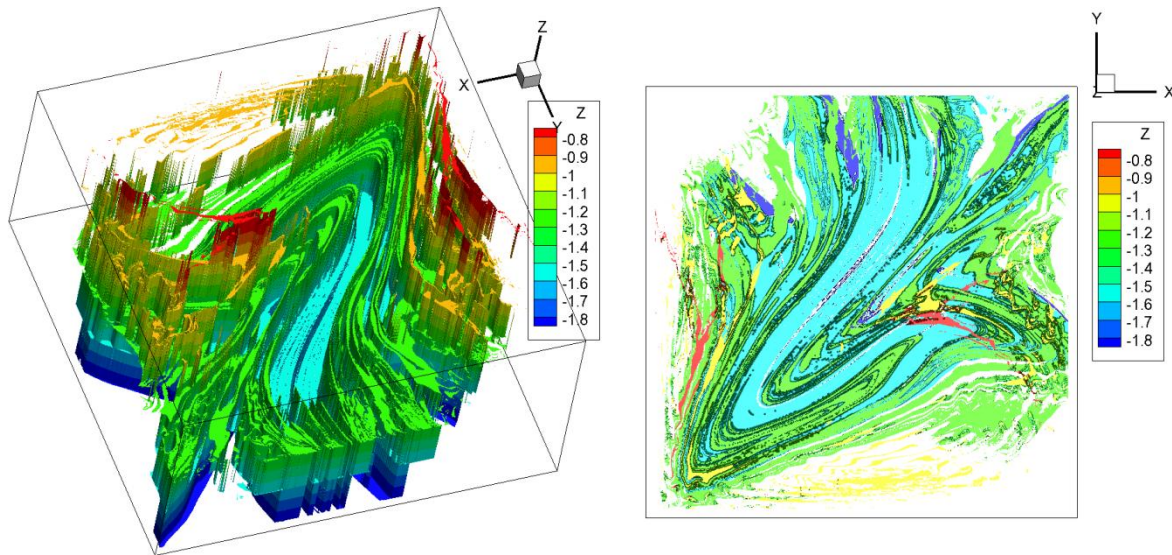


Az, hogy a periódusidő növelésével az áramlás kaotikus tulajdonságai erősödnek és egyre inkább szálak-kacsos mintázat alakul ki (29. ábra), miközben a rosszul keveredő részek pedig minden síkon csökkennek, abból adódik, hogy a részecskék egy-egy állásban hosszabb utat képesek megtenni, és így a már korábban tárgyalt kritikus vonal is hangsúlyosabb hatással lehet viselkedésükre. A  $T=2$  illetve a  $T=4$  óras esetben a felszíntől vett -1,3 m-es vízszintes síkban megfigyelhetjük (29. ábra), hogy két nagy egybefüggő rosszul keveredő rész van, ahonnan a részecskék 60 óra alatt sem jutnak el a part 50 m-es környezetébe. Praktikusan ez azt jelenti, hogy egy onnan induló szennyezőanyag felhő a vizsgált időszak alatt nem jelent veszélyt a parti 50m-es sávra. Azonban ahogy nő a periódusidő, egyre kisebbek lesznek ezek az egybefüggő rosszul keveredő részek. Ezzel együtt egyre inkább nő a szálasság, vagyis a kezdőértéktől való függés. Így ha csak kis pontossággal tudjuk megmondani a szennyezés lehetséges helyét, akkor a periódusidő növekedésével egyre inkább megjósolhatatlanná válik, hogy melyik part veszélyeztetett. Látható továbbá, hogy a mélység mentén haladva egyre inkább nőnek azok a területek, ahonnan nem érik el a partot a részecskék (30-es, 31-es ábra), egészen a  $z=-1,6$  m metszetig, ahol is a legnagyobb rosszul keveredő részeket látjuk, míg az utolsó  $z=-1.9$  m metszetben már ez szűkül valamelyest. A 2 órás periódusidejű esetet megvizsgálva (31. ábra) azt láthatjuk, hogy a felszín közelében két nyitott tórusz alakul ki, amelyeknek belsejéből nem érik el a partot a részecskék, ezek lefelé haladva folyamatosan nőnek végül összeolvadnak (31. ábra). A diszkrét síkmetszetek felhasználásával létrehozott durva térbeli megjelenítéssel is jól érzékeltetni tudjuk azt a felfelé két ágra bomló térrészt, amelynek belsejéből elinduló szennyezőanyag 60 óra alatt sem éri el a partot (32. ábra).



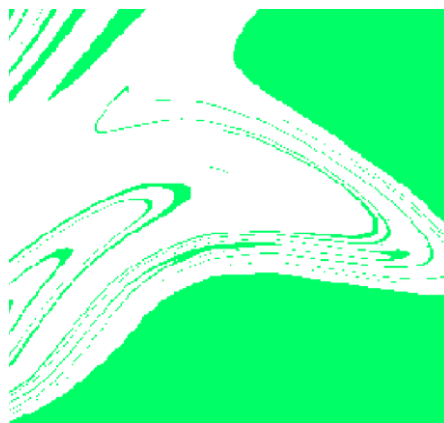
**32. ábra:** 2 órás periódusidőhöz tartozó, partot el nem érő részecskéket körülhatároló terület

A  $T=8$  óra periódusidejű esetben szálak-kacsos mintázat alakul ki minden síkban. A szálak csak síkban értelmezhetőek, míg térben kanyonos (33. ábra) szerkezetet alkotnak. Itt nem olyan egybefüggő és egyértelműen megmutatható az a tér, ahonnan részecskék nem érik el a partot. Ez is mutatja, hogy a káosz jóval erősebb és kiterjedtebb a nagyobb periódusidejű esetben.



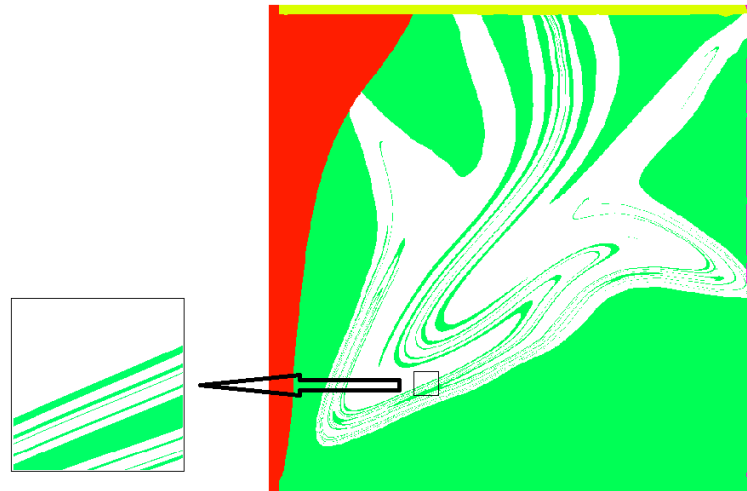
**33. ábra:** 8 órás periódusidőhöz tartozó, partot el nem érő részecskék által meghatározott terület.

Ahogy már említettük, a térbeli illusztrációk azért darabosak, mert kevés réteg alapján lettek előállítva. Ezzel együtt jól érzékeltetik a probléma térbeliségét és mutatják, milyen lehetőségek rejlenek a háromdimenziós vizsgálatokban. Ha a 30. ábrát jobban szemügyre vesszük, arra lehetünk figyelmesek, hogy egyes vonalak szaggatottak (kiemelve 34. ábra), vagy hol előbukkannak, hol eltűnnek. Ezek nem-diszkrét megoldás esetén vagy a felbontást tovább javítva folytonosak lennének, tehát csak a felbontás (térfogatra nézve fajlagos részecskeszám) következménye, hogy ilyen szaggatottak.



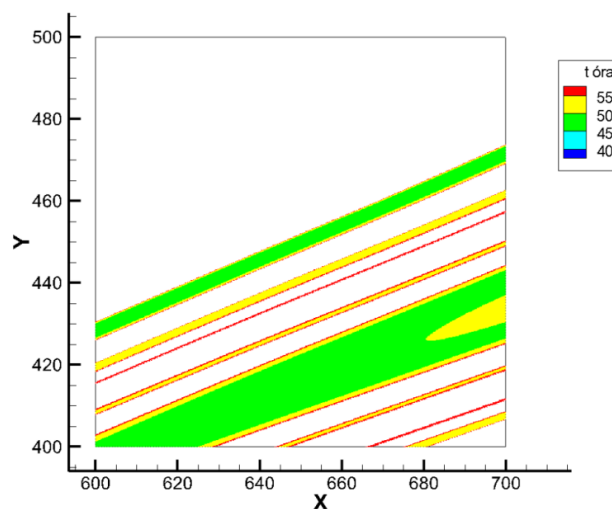
**34. ábra:** Nagyítás a 30. ábrából

Esetünkben a kis felbontás tehát azt jelenti azt, hogy adott térfogaton kevesebb részecskét engedtünk el kezdetben, mint amennyi a teljes szálasság kirajzolásához szükséges lenne. A részecskeszám növelésével a struktúrák a várakozásoknak megfelelően tovább finomodnak (35. ábra).

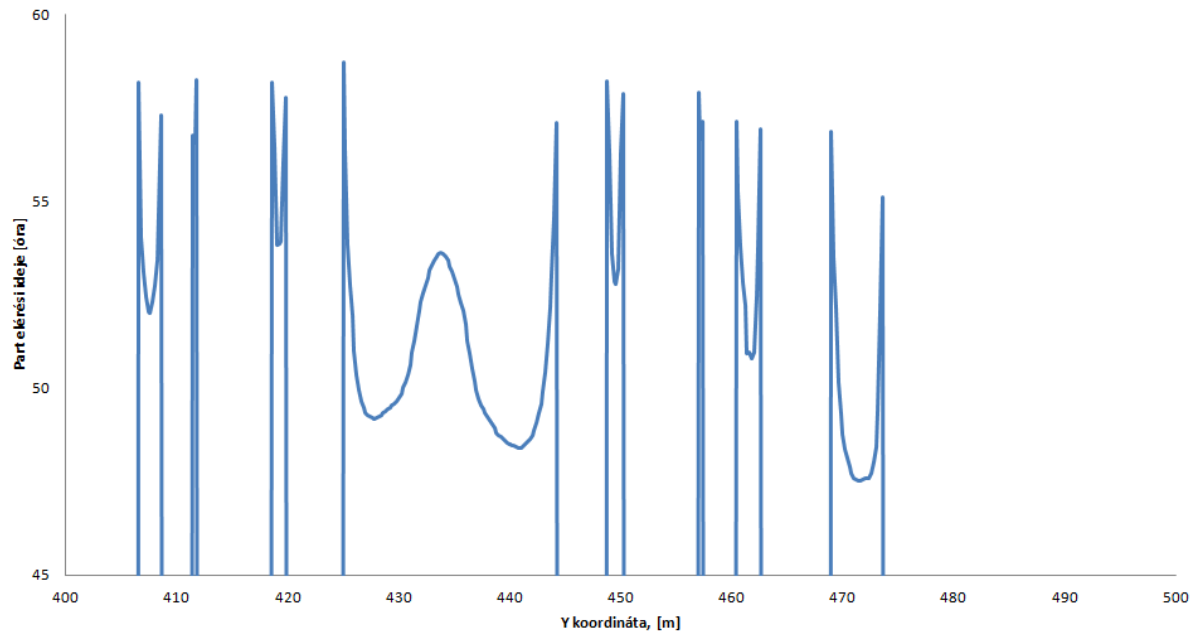


**35. ábra:** A  $z=-1,9$  m síkban, a  $T=8$  órás periódusidőhöz, vízszintesen 3 m-es (jobbra) és 0,5 m-es ( $x=600-700$  m,  $y=400-500$  m,  $z=-1,9$  m) felbontás esetén (balra) megmutatkozó szálasság részletgazdagsága.

Az ábrán a zöld tartományokat egy adott felbontás mellett két csoportba lehet sorolni: az egyik csoport fraktál, a másik csoport nem fraktál. A fraktálcsoportba tartozó szálak tovább osztódnak vékonyabb szálakra, míg a nem fraktál csoport a felbontás finomítása esetén már nem változik. Az elemzést további szempontokra kiterjesztve, a kiemelt résznél megvizsgáltam, milyen a part elérési ideje egy-egy szálon belül (36-37. ábra).



**36. ábra:** Az  $x=600-700$  m,  $y=400-500$  m,  $z=-1,9$  m négyzetben 0,5m-es felbontásnál a szálakban a part elérési ideje órában,  $T=8$  óra periódusidejű esetben



**37. ábra:** Az  $x=700$  m,  $y=400-500$  m,  $z=-1,9$  m koordinátájú metszetben a part elérési ideje órában,  $T=8$  óra periódusidejű esetben

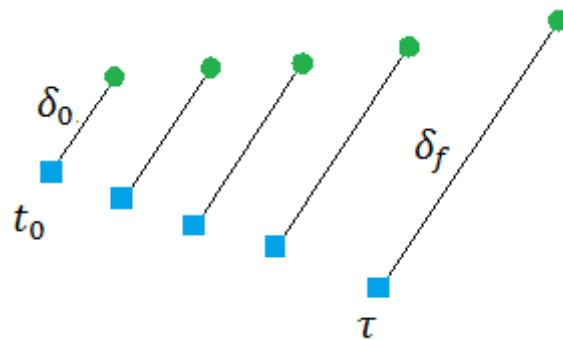
Az eloszlás (37. ábra) olyan, mint amilyen a tranziens (véges idejű) káosz irodalmában ismert élettartam eloszlás (Tél és Gruiz, 2002). Ha feltesszük, hogy a partot elérő részecske a parton marad, és nem mozog tovább - ahogyan nem is figyeltük a lék utáni mozgását -, akkor tranziens káoszról beszélhetünk, hiszen nagyon erősen függ a kaotikus viselkedés időhossza, élettartama a kezdő feltételtől, vagyis a kezdeti pozíciótól.

#### **4.7 Véges méretű Ljapunov-exponens számítása a térbeli struktúra keveredési viszonyainak jellemzésére**

A transzportfolyamatok összetettségének, káoszjellegének megértéséhez szükséges a kialakuló struktúrák további tulajdonságainak megvilágítása is. Célszerű tudnunk például, hogy hol találhatóak olyan részek az áramlásban, ahol kezdetben közeli részecskék gyorsan eltávolodnak egymástól, illetve hol találhatóak olyan részek, ahol kezdetben közeli részecskék hosszú idő után is közel maradnak. Ennek megismerésére a hatékony jellemző az ún. véges méretű Ljapunov-exponens (VMLE) (Aurell et al., 1997). A VMLE-t különböző áramlások keveredési viszonyainak jellemzésére már számos esetben alkalmazták (Boffetta et al., 2000; d'Ovidio et al., 2004; Lekien et al., 2005), tavakra először csak a közelmúltban (Pattantyús et al., 2008, Károlyi et al., 2010) került alkalmazásra, de csak 2D esetben.

Legyen a  $t_0$  kezdeti időpontban két vizsgált részecske távolsága  $\delta_0$ . Az  $\mathbf{x}$  hely környékén  $t = \tau$  az az időpont, amikor két részecske távolsága elér egy előre meghatározott  $\delta_f$  határtávolságot (38. ábra). Ezek ismeretében a VMLE a következőképp számítható:

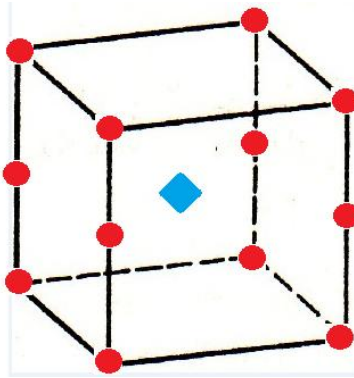
$$\lambda(\mathbf{x}, t_0, \delta_0, \delta_f) = \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{\delta_f}{\delta_0} \right) \quad (10)$$



**38. ábra:** A VMLE számítás sematikus rajza

Az exponens értéke függ tehát a helytől ( $\mathbf{x}$ ), az időtől ( $t_0$ ), valamint a kezdeti  $\delta_0$  deviációtól (kezdeti eltérés) és a  $\delta_f$  határtávolságtól. A VMLE meghatározására a szakirodalomban kétfajta megközelítést találhatunk: az első megközelítés az, hogy figyeljük a szomszéd részecskéktől való szeparációt és a VMLE térképen az adott helyhez végül a legnagyobb szeparációhoz tartozó értéket rendeljük (Koh és Legras, 2002). A másik típusú alkalmazás, hogy az összes, kezdetben szomszédos részecskéhez képest figyeljük a szeparációt, de minden időpillanatban az adott részecskéhez tartozó szeparációk átlagát vesszük és, ha az átlagos szeparáció eléri a határtávolságot, akkor abból számítjuk a VMLE-t (Károlyi et al., 2010). A

PCA mind a két módszerből származó VMLE-t képes számítani, azonban megjegyezzük, hogy a VMLE struktúra lényegileg nem függ ettől, a különbség csak annyi, hogy az első esetben valamivel nagyobb VMLE értékeket, illetve kisebb  $\tau$ -t kapunk, és így adott idő alatt több részecskének van olyan szomszédja, amelyik elérte a határtávolságot. A háromdimenziós vizsgálat miatt mindazonáltal el kell térnem az előttem eddig használt négyszomszédos rendszertől. Jelen esetben egy tizenkét-pontos rendszerre való áttérés tűnt célszerűnek (39. ábra), de benne a pontok függőleges és vízszintes kiosztása nem triviális.



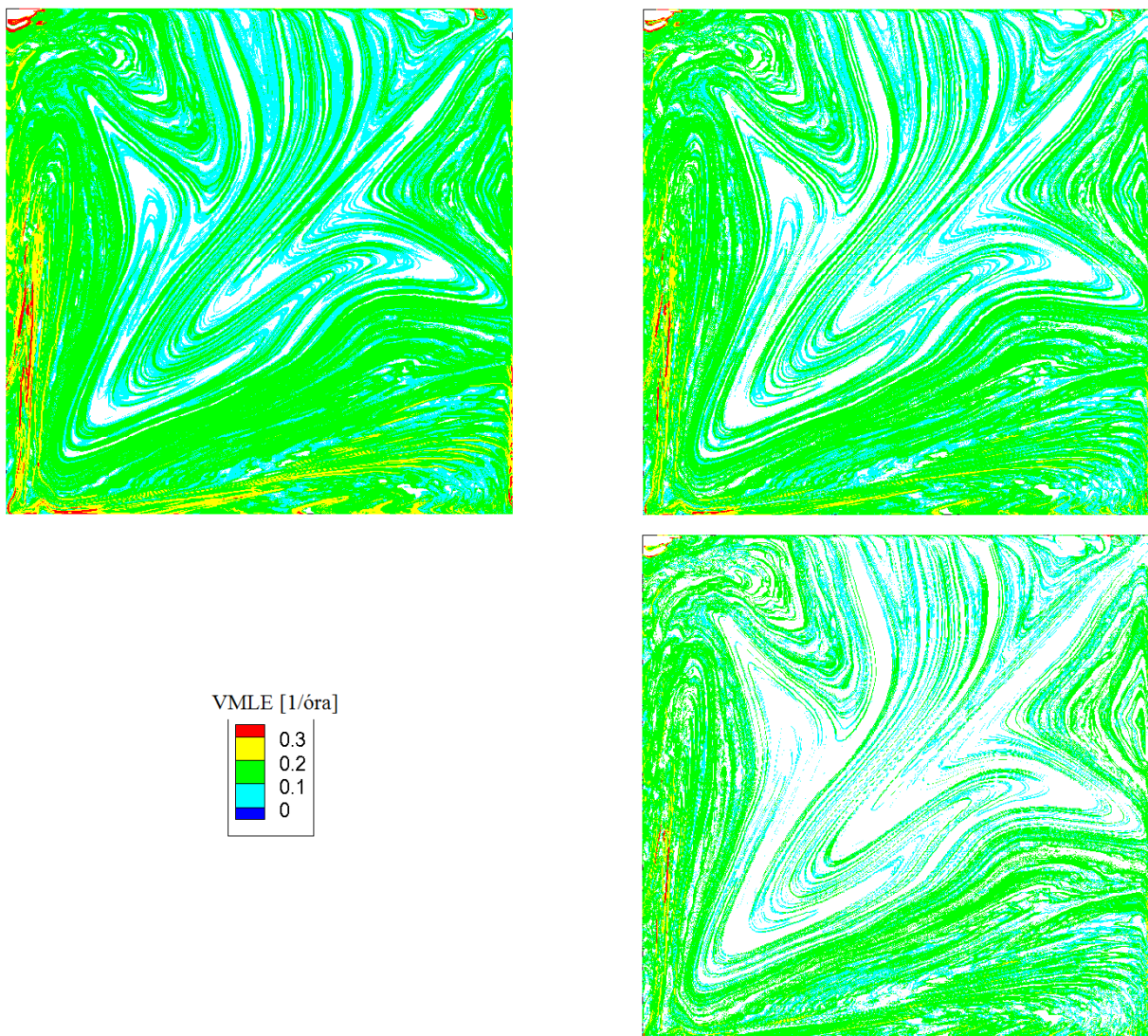
**39. ábra:** A tizenkét-pontos rendszer elvi sémája

Ezért dimenziómentesítem a problémát, melyet kétféleképpen is megtehetünk. Az egyik megoldás, hogy bevezetem a  $D$  karakterisztikus mélységet, melyen jelen esetben a tó átlagmélységét értem (2,25 m), illetve az  $L$  karakterisztikus horizontális méretet, amely a tó oldalhosszát jelenti (2000m). A  $K=D/L$  kifejezés, mely egy dimenziómentes szám, megadja, hogy egységnyi vízszintes pontkiosztáshoz mekkora függőleges pontkiosztás tartozik. A VMLE számításnál az átló menti szomszédokat vizsgáljuk, ezért  $K \sqrt{2}$ -vel való szorzására van szükség, és azért nem köbgyök kettőre, mert a téglatest függőleges mérete a valóságban elenyészően kicsi a vízszinteshez képest. Ez a megközelítés sekély, de hosszú tó esetén azonban túl torz megoldást adhat. A másik megoldás az, hogy felételezem, hogy a hidrodinamikai számításokhoz használt rácsháló pont kellő mértékben sűrű ahhoz, hogy az áramlást matematikai értelemben simán írja le. Így  $D$ -nek az átlagos függőleges rácsméretet (esetünkben 0,15 m),  $L$ -nek pedig az átlagos vízszintes rácsméretet (esetünkben 50 m) választom.

A gúla-tó VMLE számításához a 3m-es vízszintes részecsekiosztás tűnt elég sűrűnek ahhoz, hogy kellő részletességgel feltárja a benne rejlő struktúrát. Ehhez az első módszerrel kiszámított függőleges kiosztásra 4,7 mm-t kapok, míg a második módszerrel 12,7 mm-t.

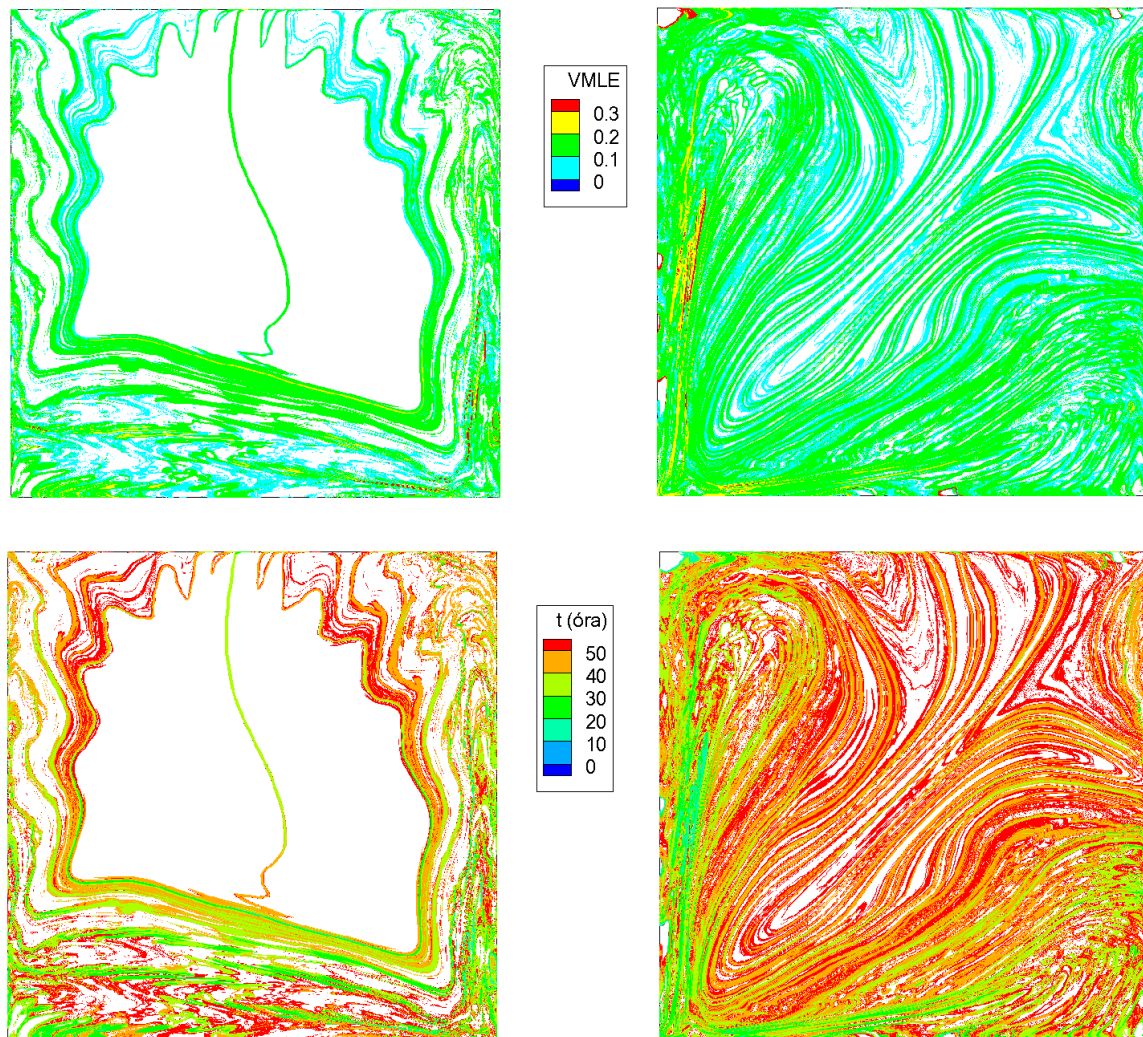
Vizsgálataimban ezek alapján a kettő között lévő 1 cm-es függőleges kezdőpontkiosztást, és az átlagos eltérésen alapuló VMLE számítási módszert alkalmaztam.

Az első vizsgálatot arra vonatkozóan végeztem, hogy a  $3\sqrt{2}$  m-es kezdeti deviációhoz mekkora határtávolságot rendeljek. Ennek eldöntése érdekében 400, 600 és 800m-es határtávolságra is végeztem a VMLE számításokat (39. ábra). A 400m határtávolságnál kapott VMLE eloszlás kevésbé részletgazdag, mint a 600 m-es mellett kapott eloszlás, a 800m-es esetben pedig túl kicsi vízszintesen a 3m-es felbontás ahhoz, hogy a szálak kirajzolódjanak. Ezek alapján a 600m-es alkalmazása mellett döntöttem. A vizsgálatból is jól látszik, ami alapvető tulajdonsága VMLE-nek, nevezetesen, hogy a szálak iránya nem függ  $\delta_f$  határtávolság megválasztásától.



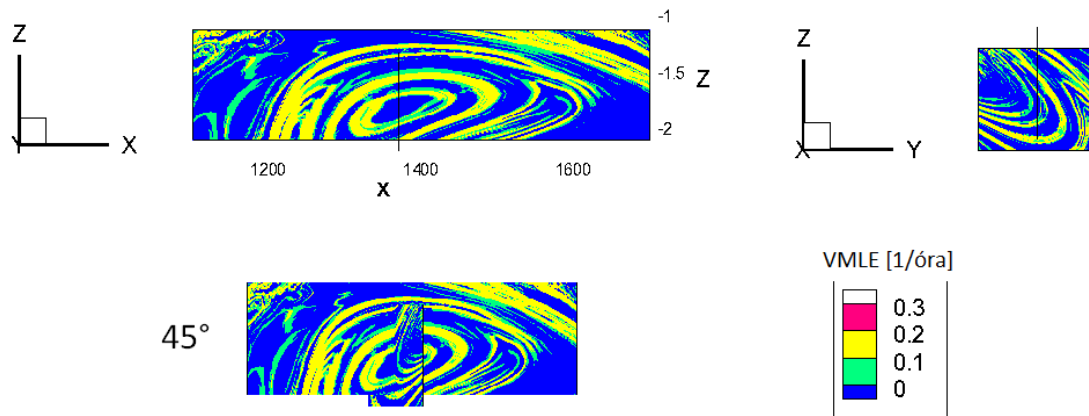
**39. ábra:** 400, 600 és 800m-es határtávolsághoz tartozó VMLE eloszlások a  $z=-1,9$ m síkban,  $T=8$  órás periódusidővel (440 ezer részecske/sík)

A VMLE ábrák különösen jól megmutatják, hogy egy áramlásban hol vannak jó és rossz keveredést eredményező részek (39-40. ábra). Nagy VMLE értékek azt jelzik, hogy nagyon erős a keveredése azon részecskéknek, amelyek abból a térrészből indultak, míg a kis VMLE értékű helyekről indulóknak gyenge lesz a keveredése. Nekünk mérnököknek talán közvetlenebbül értelmezést nyújtanak a  $\tau$  ábrák, melyek megmutatják, hogy mennyi időre van szüksége az adott helyről elindított részecskének, hogy a szomszédjaitól való átlagos távolság elérje a határtávolságot. Így ugyanúgy, mint a VMLE esetében, meg tudjuk állapítani, hogy hol vannak jó és rossz keveredésre kerülő kezdeti részek az áramlásban. A 4 órás (40. ábra) periódusidejű esetben láthatóan nagy egybefüggő, rossz keveredésre predesztinált részek alakulnak ki. A nagyobb 8 (39. ábra) illetve 12 órás periódusidejű (40. ábra) esetekben ilyen tartományok nem fedezhetők fel, ott nagyon közel esnek egymáshoz a jól és a rosszul keveredő tartományok.



**40. ábra:** 600 m-es határtávolsághoz tartozó VMLE (felül) és  $\tau$  a határtávolság eléréséhez szükséges idő (alul) eloszlása a  $z=-1,9\text{m}$  síkban,  $T=4$  óra (balra) és  $T=12$  óra esetén

A VMLE eloszlás teljes, térben való számításához 100 milliós nagyságrendű részecskeszámra lenne szükség, azonban ennek számítás és memóriaigénye olyan nagy, hogy jelen munka keretében nem tudtam megvalósítani. A térbeliség érzékeltetését azonban nélkülözhetetlennek tartottam, így két egymásra merőleges metszeten próbálom bemutatni, milyen geometriák alakulnak ki a térbeli VMLE eloszlásban (41. ábra). A  $T=8$  órás periódusidejű esetben az első metszet koordinátái:  $x=1100-1700$  m,  $y=1000$  m,  $z=-1,2 - 2,1$  m, illetve erre merőlegesen  $x=1370$  m koordinátánál vettem fel egy metszetet. A két metszet jól mutatja, hogy térben milyen összetett egyértékű VMLE felületek alakulnak ki, melyek nem is igazán felületek, hanem rétegek, merthogy láthatóan van vastagságuk. Ezek tehát térben összefüggő, leginkább ellipszoidhoz hasonló héjak. Részletes megismerésük még további kutatásokat igényel.

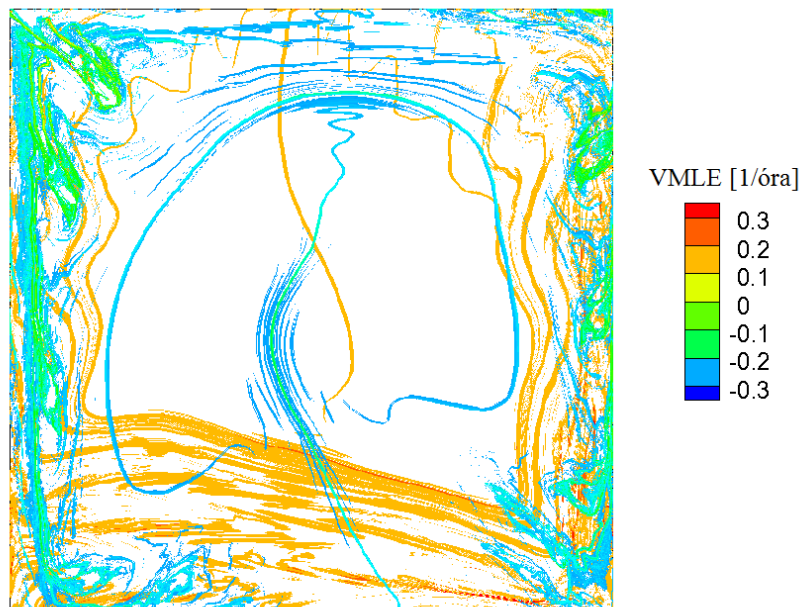


**41. ábra:** VMLE eloszlásmetszetek koordinátái:  $x=1100-1700$  m,  $y=1000$  m,  $z=-1,2 - 2,1$  m, illetve erre merőlegesen  $x=1370$  m.  $T=8$  órás áramlásban, határtávolság=600 m.

### Hiperbolikus pont és az inverz VMLE

A tavak kaotikus keveredési viszonyait alapvetően a Lagrange-féle hiperbolikus pontok és a hozzájuk tartozó stabil és instabil sokaságok határozzák meg, ezért fontos a pozíciójuk meghatározása, ha ilyen megvilágításban is értelmezni és jellemezni akarjuk a tó keveredési viszonyait (lásd pl. Pattantyús et al., 2008). A hiperbolikus pontokat a stabil és instabil sokaságok olyan metszéspontja adhatja meg, ahol azok közel derékszögben metszik egymást. A hiperbolikus pont stabil sokaságát VMLE, instabil sokaságát pedig az inverz VMLE alapján kapjuk. Az inverz VMLE számítása úgy történik, hogy az idő visszafelé halad, és részecskék visszafelé mozognak. Olyan ez, mintha egy filmet visszafelé játszanánk le, ahol az idő és a mozgás is visszafelé halad, így amelyik kezdő feltételből eddig a hiperbolikus pont

felé haladt a részecske és azt elérte, most az távolodni fog tőle, és ugyanez igaz fordítva is. Ahol ugyanazon hiperbolikus pont stabil és instabil sokasága metszi egymást, azt homoklinikus pontnak nevezzük. Ha egy rendszerben jelen vannak homoklinikus pontok, akkor a rendszer kaotikus, és mivel rendszerünkben találhatóak ilyen pontok, ezért ez újabb bizonyíték arra, hogy kaotikus. A hiperbolikus pont pontos koordinátáinak meghatározásához nagyon sok részecsketrajektóriát kéne vizsgálni, és megtalálni azt, amelynek pályája periódusonként önmagába záródik. Ettől most eltekintek és megelégszek azzal, hogy megjelenítettem ilyen jellegű pontokat (42. ábra), amiből látható, hogy a rendszernek több lehetséges hiperbolikus pontja is van, de annak eldöntése, hogy valójában melyik az, további vizsgálatokat igényel.



**42. ábra:** Időben előre és hátra végrehajtott VMLE számítás eredménye a  $T=4$  órás áramlás esetén a  $z=-1,9$  m-es síkon, határtávolság=600 m és Az ábra 0,1 abszolút értékű szűrő alkalmazása után mutatja a VMLE eloszlását, szűrő a 0,1 1/h-nál kisebb VMLE értékeket kiszűri.

## **5. Eredmények összefoglalása és további kutatási irányok vázolása**

Dolgozatom egyik fő célja egy 3D trajektóriaszámító előállítása volt, mely alkalmas nagy részecskeszámon alapuló Lagrange-szemléletű transzportvizsgálatok elvégzésére. Másik, hasonlóan fontos célja volt a program alkalmazása egy gúla-geometriájú teszt-tavon, szél keltett 3D áramlások kaotikus advekciójának vizsgálatán keresztül bemutatva az egyes módszereket és az azoktól várható eredményeket, rámutatni továbbá, hogy milyen különbségek rejlenek a 2D és 3D vizsgálatok között.

- I. Megalkottam a PCA modellt, melyet C++-ban beprogramoztam, majd ezek után sikeresen validáltam.
- II. 3D Lagrange-szemléletű, nagyszámú részecske követésén alapuló vizsgálatokat végeztem el a gúla-geometriájú, realisztikusan egyszerűsített tóra, amelyekkel bizonyítottam, hogy ilyen viszonyokra a tó áramlása okozta részecskeadvekció periodikusan időfüggő esetben kaotikus tulajdonságokat mutat, ezzel szemben a stacioner állapot nem kaotikus viselkedésű.
- III. Megmutattam, hogy a periódusidő növekedésével egyre inkább megerősödik az áramlás és így az advekció kaotikus jellege is. Továbbá rámutattam, hogy egy ilyen sekély tónál is erősen függ a kezdeti pozíció mélységétől a keveredés erőssége, mely alátámasztja a 3D elemzés szükségességét.
- IV. Kisebb periódusidő esetén nagyobb, térben egybefüggő, rosszul keveredő tartományokat lehet elkülöníteni, míg a periódusidő növekedésével ezek a tartományok szétesnek, és a térben kanyonos szerkezetet mutatnak.
- V. A kialakuló szálakban a part elérési idejének eloszlásában megmutattam, hogy a tranziens káosz elméletéből már ismert élettartam-eloszlások fedezhetők fel.
- VI. Pattantyús et al. (2008) és Károlyi et al. (2010) vizsgálataikat ugyan még 2D-ban végezték, de értékes eredményeik nagy segítséget nyújtottak számomra az káosz alapstruktúráinak megismerését illetően, azonban eredményeimből jól látszik, hogy a 3D vizsgálatok az eredményeiknek nem pusztán mennyiségi kiegészítése, hanem minőségileg új tudományos eredményekkel kecsegtet.

VII. Megmutattam, hogy keveredési struktúrák térbelisége annyira erős, hogy jelen vizsgálatok és folytatásuk jelentősen átformálhatják eddigi ismereteinket a sekély tavak szél keltette áramlásainak transzportfolyamatiról.

Néhány fontos további kutatási irány:

- A PCA szoftver párhuzamosítása és további fejlesztések: például nyomvonal-nyaláb módszer, lékben való tartózkodási idő számító modul beépítése
- A gúla-tó teljes körű, szisztematikus elemzése periodikus meghajtás mellett, a szél és az áramlás időben fizikailag korrekt leképezésével
- Változó periódusidejű meghajtás mellett kialakuló struktúrák vizsgálata
- A turbulens diffúzió hatásának vizsgálata a kaotikus advekcióból származó keveredési struktúrákra
- A bemutatott vizsgálatok elvégzése magyarországi sekély tavakon keveredési struktúráiknak feltárásához
- Az áramló folyadékkal nem együtt mozgó (felúszó, ülepedő) anyagok transzportjának vizsgálata

## Irodalomjegyzék

Aurell E., Bofetta G., Crisanti A., Paladin G., Vulpiani A. „Predictability in large: an extension of the concept of Lyapunov exponent” *Journal of Physics*, Volume 30, No 1, 1997, pp. 1-26.

Bofetta G., Cencini M., Espa S., Querzoli G. „Chaotic advection and relative dispersion in an experimental convective flow” *Physics of Fluids*, Volume 12, 2000, pp. 3160-3167.

Chen X.-Q. „Efficient particle tracking algorithm for two-phase flow in geometries using curvilinear coordinates. *Numerical Heat Transfer, Part A* 32, 1997, pp. 387-405.

Chen X.-Q., Pereira J.C.F., „A new particle-locating method accounting for source distribution and particle-field interpolation for hybrid modeling of strongly coupled two-phase flows in arbitrary coordinates” *Numerical Heat Transfer, Part B* 35, 1999, pp. 41-63.

Cheng H.-P., Cheng J.-R., Yeh G.-T., „A particle tracking technique for the lagrangian-eulerian finite element method in multi-dimensions” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 39, 1996, pp. 1115-1136.

Chordá R., Blasco J.A., Fueyo N. „An efficient particle-locating algorithm for application in arbitrary 2D and 3D grids” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 28, 2002, pp. 1565-1580.

d'Ovidio F., Fernández V., Hernández-García E., López C. „Mixing structures in the Mediterranean sea from finite-size Lyapunov exponents” *Geophysical Research Letters*, Volume 31, 2004.

García-Martínez R. „High precision algorithm for the Lagrangian modeling of passive pollutant transport” Instituto de Mecánica de Fluidos, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 1997.

Goode D.J. „Particle velocity interpolation in block-centered finite difference groundwater flow models” *Water Resources Research*, Volume 26, No 5, May 1990, pp. 925-940.

Gyüre B., Jánosi I., Szabó K. G., Tél T. „Környezeti áramlások. Szemelvények a Kármán Laboratórium kísérleteiből. 2. rész” *Léghő*, 51. évfolyam, 1. szám, 2006, 6-10.o.

Haegland H., Dahle H., Eigestad G.T., Lie K.-A., Aavatsmark I. „Improved streamlines and time-off-flight for streamline stimulation on irregular grids” *Advances in Water Resources*, 2006. doi:10.1016/j.advwatres.2006.09.002

Józsa J., Sekély tavak szél keltette cirkulációs áramlásai. 178 p. 2001. *MTA-Doktori Disszertáció*, MTA, Budapest.

Károlyi G., Pattantyús-Ábrahám M., Krámer T., Józsa J., Tél T. „Finite-size Lyapunov exponents: a new tool for lake-dynamics” *Engineering and Computational Mechanics*, Volume 163, Issue 4, 2010, pp. 251-259.

Kiss M. „Kétdimenziós áramlási struktúrák laboratóriumi mérése sekély áramlásokban” *TDK dolgozat*, BME, Budapest, 2009.

Koh T-Y., Legras B. „Hyperbolic lines and the stratospheric polar vortex” *Chaos*, Volume 12, No 2, 2002, pp. 382-394.

Kuang S.B., Yu A.B., Zou Z.S. „A new point-locating algorithm under three-dimensional hybrid meshes” *International Multiphase Flow*, Volume 34, Issue 11, 2008, pp. 1023-1030.

Lekien F., Coulliette C., Marino A.J., Ryan E.H., Shay L. K., Haller G., Mardsen J. „Pollution release tied to invariant manifolds: A case study for the coast of Florida” *Physica D*. 201, 2005, pp. 1-20.

Lee W. K. „Chaotic Mixing in Wavy-type Channels and Two-layer Shallow Flows” St Catherine's College, University of Oxford,

Lu N. „A semianalytical method of path line computation for transient finite-difference groundwater flow models” *Water Resources Research*, Volume 30, No 8, August 1994, pp. 2449-2459.

Napoli E. „Panormus User's Manual” *Dipartimento di Ingegneria Idraulica e Applicazioni Ambientali. Università di Palermo*, Palermo, Italy, 2010.

Ottino J. M. „The Kinematics of Mixing” *Cambridge University Press*, 1989

Pattantyús-Ábrahám M. „Tér- és időbeli struktúrák felszíni vizek légmozgás keltette folyamataiban” *Doktori Értekezés*, BME, Budapest, 2008.

Pattantyús-Ábrahám M., Tél T., Józsa J. „Mixing properties of a shallow basin due to wind-induced chaotic flow” *Advances in Water Resources*, Volume 31, 2008, pp. 525-534.

Pokrajac D., Lazic R. „An efficient algorithm for high accuracy particle tracking in finite elements” *Advances in Water Resources*, Volume 25, No 4, 2002, pp. 353-369.

Pollock D.W. „Semianalytical computation of path lines for finite-difference models” *Ground Water*, Volume 26, Issue 6, November 1988, pp. 743-750.

Sadarjoen A., von Walsum T., Hin A. J.S., Post F.H. „Particle tracing algorithms for 3D curvilinear grids”, Delf University of Technology Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1994.

Sadorjean A., Boer A.J.D., Post F.H., Mynett A.E. „Particle tracing in  $\sigma$ -transformed grids using tetrahedral 6-decomposition. *Proceedings of the Eurographics Workshop*, Blaubeuren, Germany, 1998, pp. 71-80.

Schneider J., Tél T. „Extracting flow structures from tracer data” *Ocean Dynamics*, Volume 53, No 2, 2003, pp. 64-72.

Szanyi S. „Szél keltette tavi áramlások térbeli struktúráinak vizsgálata” *TDK dolgozat*, BME, Budapest, 2010.

Tél T., Gruiz M., „Kaotikus Dinamika” *Nemzeti Tankönyvkiadó*, Budapest, 2002

Tuval I., Schneider J., Piro O., Tél T. „Opening up fractal structures of three dimensional flows via leaking” *Europhysics Letters*, Volume 65, 2004, pp. 633-639.

Zhou Q., Leschziner M.A. „Modelling particle dispersion in turbulent recirculationg flow with an anisotropy-resolving scheme” ASME, FEDSM97-3643, 1997.

Zhou Q., Leschziner M.A. „An improved particle-locating algorithm for Eulerian-Lagrangian computations of two-phase flows in general coordinates” *International Multiphase Flow*, Volume 25, Issue 5, 1999, pp. 813-825.

## I. függelék: Cheng-módszer: deriváltak levezetése a Jacobi-mátrix meghatározásához

$X, Y, Z$  a három tér koordináta,  $VX, VY, VZ$  pedig az adott irányba eső sebességvektor,  $Q$  indexel kilépési, míg  $P$  indexel a kezdeti ponthoz tartozó változókat jelöltem

$$X_Q = X_1N_1 + X_2N_2 + X_3N_3 + X_4N_4$$

$$Y_Q = Y_1N_1 + Y_2N_2 + Y_3N_3 + Y_4N_4$$

$$Z_Q = Z_1N_1 + Z_2N_2 + Z_3N_3 + Z_4N_4$$

$$VX_Q = VX_1N_1 + VX_2N_2 + VX_3N_3 + VX_4N_4$$

$$VY_Q = VY_1N_1 + VY_2N_2 + VY_3N_3 + VY_4N_4$$

$$VZ_Q = VZ_1N_1 + VZ_2N_2 + VZ_3N_3 + VZ_4N_4$$

Alak függvény:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \zeta)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \zeta)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \zeta)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \zeta)(1 + \eta)$$

Prediktor-Korrektor módszer esetén:

$$VX = 0.5 \cdot (VX_P + VX_1N_1 + VX_2N_2 + VX_3N_3 + VX_4N_4)$$

$$VY = 0.5 \cdot (VY_P + VY_1N_1 + VY_2N_2 + VY_3N_3 + VY_4N_4)$$

$$VZ = 0.5 \cdot (VZ_P + VZ_1N_1 + VZ_2N_2 + VZ_3N_3 + VZ_4N_4)$$

Megoldandó egyenletrendszer Newton-Raphson módszerrel:

$$f = (X_Q - X_P)(VX^2 + VY^2 + VZ^2)^{1/2} - [(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2]^{1/2} VX$$

$$g = (Y_Q - Y_P)(VX^2 + VY^2 + VZ^2)^{1/2} - [(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2]^{1/2} VY$$

Új változók bevezetése:

$$W(\zeta, \eta) = (VX^2 + VY^2 + VZ^2)^{1/2}$$

$$S(\zeta, \eta) = [(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2]^{1/2}$$

Így az  $f$  és  $g$ :

$$f = [X_Q(\zeta, \eta) - X_P] \cdot W(\zeta, \eta) - S(\zeta, \eta) \cdot VX(\zeta, \eta)$$

$$g = [Y_Q(\zeta, \eta) - Y_P] \cdot W(\zeta, \eta) - S(\zeta, \eta) \cdot VY(\zeta, \eta)$$

Newton-Raphson módszer:

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}_k - J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\zeta_k, \eta_k) \\ g(\zeta_k, \eta_k) \end{pmatrix}$$

kifejtve:

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}_k - \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\zeta_k, \eta_k) \\ g(\zeta_k, \eta_k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}_k - \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(\zeta_k, \eta_k) \\ g(\zeta_k, \eta_k) \end{pmatrix}$$

ahol:

$$J_{11} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}$$

$$J_{12} = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$J_{21} = \frac{\partial g}{\partial \zeta}$$

$$J_{22} = \frac{\partial g}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (X_Q(\zeta, \eta) \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (X_P \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (S(\zeta, \eta) \cdot VX(\zeta, \eta))$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (X_Q(\zeta, \eta) \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \eta} (X_P \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \eta} (S(\zeta, \eta) \cdot VX(\zeta, \eta))$$

A  $\frac{\partial g}{\partial \zeta}$  és  $\frac{\partial g}{\partial \eta}$  az előző kettővel egyező, csak X helyett Y és VX helyett VY helyettesítéssel.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} (X_Q(\zeta, \eta) \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (X_P \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (S(\zeta, \eta) \cdot VX(\zeta, \eta)) = \\ &= \frac{\partial(X_Q(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} \cdot W(\zeta, \eta) + X_Q(\zeta, \eta) \cdot \frac{\partial(W(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} - X_P \cdot \frac{\partial W(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial S(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} \cdot VX(\zeta, \eta) \\ &\quad - S(\zeta, \eta) \cdot \frac{\partial VX(\zeta, \eta)}{\partial \zeta}\end{aligned}$$

Ahol:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(X_Q(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} &= \frac{1}{4} \cdot [X_1(-1 + \eta) + X_2(1 - \eta) + X_3(1 + \eta) + X_4(-1 - \eta)] \\ \frac{\partial(Y_Q(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} &= \frac{1}{4} \cdot [Y_1(-1 + \eta) + Y_2(1 - \eta) + Y_3(1 + \eta) + Y_4(-1 - \eta)] \\ \frac{\partial(Z_Q(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} &= \frac{1}{4} \cdot [Z_1(-1 + \eta) + Z_2(1 - \eta) + Z_3(1 + \eta) + Z_4(-1 - \eta)] \\ \frac{\partial VX(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [VX_1(-1 + \eta) + VX_2(1 - \eta) + VX_3(1 + \eta) + VX_4(-1 - \eta)] \\ \frac{\partial VY(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [VY_1(-1 + \eta) + VY_2(1 - \eta) + VY_3(1 + \eta) + VY_4(-1 - \eta)] \\ \frac{\partial VZ(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [VZ_1(-1 + \eta) + VZ_2(1 - \eta) + VZ_3(1 + \eta) + VZ_4(-1 - \eta)] \\ \frac{\partial(W(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{(VX^2 + VY^2 + VZ^2)} \right]^{1/2} \\ &\quad \cdot \left\{ 2VX \cdot \frac{\partial VX(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} + 2VY \cdot \frac{\partial VY(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} + 2VZ \cdot \frac{\partial VZ(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} \right\} \\ \frac{\partial S(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2]^{1/2}} \\ &\quad \cdot \left\{ 2 \cdot (X_Q - X_P) \frac{\partial(X_Q(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} + 2 \cdot (Y_Q - Y_P) \frac{\partial(Y_Q(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} + 2 \cdot (Z_Q - Z_P) \frac{\partial(Z_Q(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} (X_Q(\zeta, \eta) \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \eta} (X_P \cdot W(\zeta, \eta)) - \frac{\partial}{\partial \eta} (S(\zeta, \eta) \cdot VX(\zeta, \eta)) = \\ &= \frac{\partial(X_Q(\zeta, \eta))}{\partial \eta} \cdot W(\zeta, \eta) + X_Q(\zeta, \eta) \cdot \frac{\partial(W(\zeta, \eta))}{\partial \eta} - X_P \cdot \frac{\partial W(\zeta, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial S(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \cdot VX(\zeta, \eta) \\ &\quad - S(\zeta, \eta) \cdot \frac{\partial VX(\zeta, \eta)}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Ahol:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(X_Q(\zeta, \eta))}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \cdot [X_1(-1 + \zeta) + X_2(-1 - \zeta) + X_3(1 + \zeta) + X_4(1 - \zeta)] \\ \frac{\partial(Y_Q(\zeta, \eta))}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \cdot [Y_1(-1 + \zeta) + Y_2((-1 - \zeta)) + Y_3(1 + \zeta) + Y_4(1 - \zeta)] \\ \frac{\partial(Z_Q(\zeta, \eta))}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \cdot [Z_1(-1 + \zeta) + Z_2((-1 - \zeta)) + Z_3(1 + \zeta) + Z_4(1 - \zeta)] \\ \frac{\partial VX(\zeta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [VX_1(-1 + \zeta) + VX_2((-1 - \zeta)) + VX_3(1 + \zeta) + VX_4(1 - \zeta)] \\ \frac{\partial VY(\zeta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [VY_1(-1 + \zeta) + VY_2((-1 - \zeta)) + VY_3(1 + \zeta) + VY_4(1 - \zeta)] \\ \frac{\partial VZ(\zeta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [VZ_1(-1 + \zeta) + VZ_2((-1 - \zeta)) + VZ_3(1 + \zeta) + VZ_4(1 - \zeta)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(W(\zeta, \eta))}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{(VX^2 + VY^2 + VZ^2)} \right]^{1/2} \\ &\quad \cdot \left\{ 2VX \cdot \frac{\partial VX(\zeta, \eta)}{\partial \eta} + 2VY \cdot \frac{\partial VY(\zeta, \eta)}{\partial \eta} + 2VZ \cdot \frac{\partial VZ(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(\zeta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 + (Z_Q - Z_P)^2]^{1/2}} \\ &\quad \cdot \left\{ 2 \cdot (X_Q - X_P) \frac{\partial(X_Q(\zeta, \eta))}{\partial \eta} + 2 \cdot (Y_Q - Y_P) \frac{\partial(Y_Q(\zeta, \eta))}{\partial \eta} + 2 \cdot (Z_Q \right. \\ &\quad \left. - Z) \frac{\partial(Z_Q(\zeta, \eta))}{\partial \eta} \right\}\end{aligned}$$

## II. függelék: A belső határréteg-fejlődés (IBL) és szél-csúsztatófeszültség összekapcsolt modellje

A belső határréteg fejlődés általános egyenletein és ismertetésükön (mely megtalálható Józsa, 2001) átlépve, ismertetem a belső határréteg fejlődés és szél-csúsztatófeszültség összekapcsolt modelljét, mellyel a modell bemeneti szél- és szél-csúsztatófeszültség mezője számítva volt. Az összekapcsolt modell (Józsa, 2001) célja volt egy olyan algoritmus előállítása, mellyel realiztikusan becsülni lehet a csúsztatófeszültség-vektor térbeli egyenlőtlenségeit.

Amennyiben a parton a szél  $z_a$  ún. anemométer-magasságban adott, akkor a terepi érdességmagasság ismeretében, a víz feletti érdességmagasság számításához szükséges 10 m-es magasságra a következők szerint transzformálunk:

$$W_{10}(0) = W_{z_a}(0) \frac{\ln \frac{10}{z_{0,1}}}{\ln \frac{z_a}{z_{0,1}}}$$

A fokozatos közelítés első lépéseként feltesszük, hogy az  $F$  meghajtási hosszánál, a tófelszín felett 10 m magasságban a szélesebbesség megegyezik az ugyanolyan magasságban érvényes terepi szélesebbességgel, vagyis

$$W'_{10}^{(1)}(F) = W_{10}(0)$$

ahol  $W'_{10}$  segédváltozó. Ennek alapján az általános  $i$ -ik iterációs lépésben a

$$W_*^{(i)2}(F) = W'_{10}^{(i)2}(F) \left( 0,8 + 0,065 W'_{10}^{(i)}(F) \right) \cdot 10^{-3}$$

csúsztatósebességen keresztül számítható a vízfelszín érdessége:

$$z_{0,2}^{(i)}(F) = \alpha \frac{W_*^{(i)2}(F)}{g}$$

majd ennek felhasználásával számítható a belső határréteg vastagsága:

$$\delta_b^{(i)}(F) = 0,75 z_{0,2}^{(i)}(F) \left[ \frac{F}{z_{0,2}^{(i)}(F)} \right]^{0,8}$$

Az egyenlet segítségével javítható a

$$W'_{10}^{(i+1)}(F) = W_{10}(0) \frac{\ln \frac{10}{z_{0,2}^{(i)}(F)} \ln \frac{\delta_b^{(i)}(F)}{z_{0,1}}}{\ln \frac{10}{z_{0,1}} \ln \frac{\delta_b^{(i)}(F)}{z_{0,2}^{(i)}(F)}}$$

10 m-nél vékonyabb belső határréteg esetén fiktív, egyébként tényleges, 10 m-es szélesség értéke. Mindez az eljárás addig folytatandó, míg a két, egymás utáni iterációs lépés eredménye közti eltérése a kívánt  $\varepsilon$  hibahatáron belülre nem kerül.

$$\left| W'_{10}^{(i+1)}(F) - W'_{10}^{(i)}(F) \right| < \varepsilon$$

Az így meghatározott értékek alapján most már számítható a végleges felszíni szélcsúsztatófeszültség:

$$\tau_f(F) = \rho_l W_*^2(F)$$

$$c_d(F) = \frac{W_*^2(F)}{W_{10}'^2(F)}$$

felszíni súrlódási tényező.

### III. függelék: 4 dimenziós tömb memória allokálása és feltöltése

```
//READ 4D ARRAY

void database::read4Darray(ifstream **inputfile, int isize, int jsize, int
ksize, int tsize, double *****dest)
{
    int i,j,k,t;
    char s[200];

    // Allocate 4D array

    *dest = new double***[isize];

    for(i=0; i<isize; i++)
    {
        (*dest)[i] = new double**[jsize];

        for(j=0; j<jsize; j++)
        {
            (*dest)[i][j] = new double*[ksize];

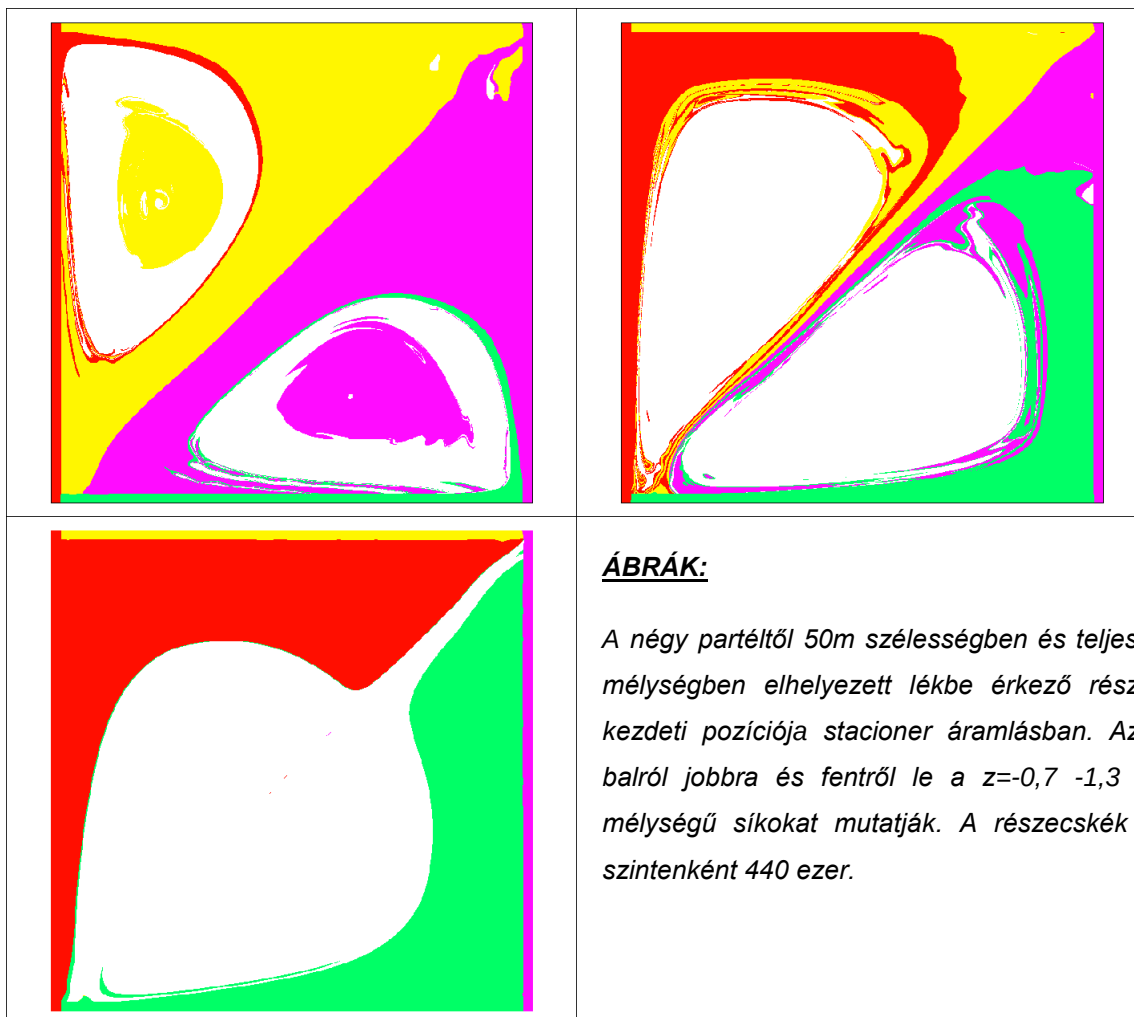
            for(k=0; k<ksize; k++)
            {
                (*dest)[i][j][k] = new double[tsize];
            }
        }
    }

    // Access array elements

    for(t=0; t<tsize; t++)
    {
        for(k=0; k<ksize; k++)
        {
            for(j=0; j<jsize; j++)
            {
                for(i=0; i<isize; i++)
                {
                    inputfile[t]->getline(s,200);
                    sscanf(s,"%lf",&(*dest)[i][j][k][t]);
                }
            }
        }
    }
}
```

## IV. függelék: Lékelés a gúla-tó stacioner áramlásában

Stacioner áramlás esetén szálas, kacsos mintázatot nem lehet felfedezni. A mintázat minden rétegben eléggé sima, mely arra utal, hogy a stacioner eset valóban nem kaotikus. Ugyanakkor érdekes megfigyelni, hogy a nyitott tóruszok külső peremén van egy vékony réteg, amely nem ahhoz a parthoz sodródik, mint a többi, ez kétdimenziós vizsgálat esetén lehetetlen lenne. A felsőbb rétegekben, mivel a víz széllal azonos irányban halad, az északi és a keleti partokat éri el először a részecskék, ezzel szemben az alsóbb rétegekben a széllal szembeni az áramlás főiránya, így azok a részecskék, amelyek alsóbb rétegekből indulnak, pont ellenkezőleg, a déli és a nyugati partot éri el először.



## V. függelék: Stabil és instabil sokaságok

A stabil és instabil sokaságok definíciója Pattantyús (2008) doktori értekezése nyomán:

A periodikus hiperbolikus pontokhoz ún. invariáns halmazok rendelhetőek, melyeket *stabil* ill. *instabil sokaságoknak* nevezünk. A  $P$  hiperbolikus ponthoz tartozó sokaságok:

$$\begin{aligned} S^s(\mathbf{P}) &= \{\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}^n : \Phi_t(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{P}, \text{ ha } t \rightarrow \infty\} \\ S^i(\mathbf{P}) &= \{\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}^n : \Phi_t(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{P}, \text{ ha } t \rightarrow -\infty\} \end{aligned}$$

ahol  $S^s$  jelenti a stabil sokaságot (az ebből az halmazból induló részecskék elérnek a hiperbolikus fixpontba),  $S^i$  pedig az instabil sokaságot (azon részecskék halmaza, amelyek a hiperbolikus fixpontból indultak ki, pontosabban az időben megfordított leképezés stabil sokasága). Ezeket a sokaságokat azért hívjuk invariáns görbéknek, mert a leképezés hatására önmagukra képződnek.