



Pannon Egyetem
Intézményi Tudományos Diákköri
Konferencia
2011



Kerékdinamikát figyelembe vevő
kiterjesztett járműmodell analízis

Készítette: Weisz Róbert

Témavezető: Dr. Fodor Dénes

Mechatronikai Mérnök MSc
Alkalmazott Gépészeti Tanszék
Mérnöki Kar

TARTALMI ÖSSZEFOGLALÓ

Manapság a járművek menetstabilitásának megőrzéséért számos elektronikus vezérlő egységeken (ECU) futó valós idejű szabályozó algoritmus felel, melyek többsége előzetes tesztvezetések mérési eredményeire támaszkodva meghatározott (modell) paramétereket használ. Egyik leggyakrabban alkalmazott járműipari modell az ún. *”Single Track Modell”* (egy nyomú járműmodell), mely sikerét egyszerűségének köszönheti, azonban olyan esetekben, amikor a mért eredményekhez paramétereiben nem illeszthető, a modell elhanyagolások korlátozásokat jelenthetnek. [1]

Ennek kiküszöbölésére fogalmazódott meg az igény egy bővített, részletesebb modellre. Mivel a jármű – a légellenállástól eltekintve – csupán a talajjal van állandó fizikai kapcsolatban, a *kerék dinamikai viselkedésének* vizsgálata és a járműmodellbe történő integrálása sarkalatos pontja a munkának. A legegyszerűbb – csak radiálisan deformálódó – *síkbeli kerékmodell* vizsgálatától indulva, elemezve azt dinamikailag az alakváltozás jelenségének leírasi pontossága kétséges. A részletesebb deformációk és pontos erőviszonyok meghatározásához érdemes a gumiabroncsot *rugós és csillapító*, valamint a kerék felnijét nagyságrendekkel szilárdabb tagokra bontani, mely egy rácsos tartóhoz hasonló szerkezetet eredményez. Álló helyzetben a jármű tömegének az adott kerékre eső terhelését a kerék tengelyére helyezve deformációs folyamatok zajlanak le mindaddig, míg a kerék pontjainak elmozdulásai zérussá nem válnak. A kerékmodell az így kialakult *erőket és deformációkat* képes leírni, valamint ezt követően a kerék hajtása során fellépő gördülési ellenállás értékét a csillapító tagok által elnyelt energiával próbálja közelíteni. [2]

Miután a négy keréken lezajló folyamatok leírása teljes, a talaj és gumiabroncs között ható erők ismertekké válnak, ezáltal a tér három tengelyének irányába eső komponenseivel leírt járműre ható *eredő erő és nyomaték* szintén meghatározható, s így a jármű mozgásállapotára pontosabb becslést adhat a kiterjesztett járműdinamikai modell.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	2
1.1. A Bicklimodell felépítése	2
1.2. A Bicklimodellben alkalmazott egyszerűsítések	3
1.2.1. A hosszirányú sebesség állandósága.....	3
1.2.2. Haladó és forgó sebességkomponensek.....	5
1.2.3. Szögfüggvények.....	6
1.3. Mérési hiba és modellhiba	7
2. Sugárirányban deformálódó kerékmodell	9
2.1. A kerékmodell viselkedése	9
2.2. Szlip figyelembe vétele.....	11
2.3. Kerékmodell kerületi pontjainak mozgása (állandó sebesség esetén)	12
2.4. Sugárirányban deformálódó kerékmodell vizsgálati eredményei.....	13
3. Dinamikus (rugós és csillapító tagokból felépülő) kerékmodell	17
3.1. Síkbeli modell szerkezeti kialakítása	19
3.2. Elemekre bontás, elemek vizsgálata	23
3.2.1. A θ szög kiküszöbölése	26
3.3. Elemek összevonása.....	28
3.3.1. Kényszerek hozzáadása a szerkezethez	30
3.4. Modell diszkretizálása	30
3.4.1. Iterációs lépések.....	31
3.5. Álló kerék deformációi az összetett kerékmodelben	33
3.6. Forgómozgást végző kerék a rugós-csillapító modelben	36
4. Konklúziók és távlati célok.....	38
Ábrajegyzék	38
Irodalomjegyzék.....	39

1. Bevezetés

E fejezetben az olvasó rövid betekintést nyerhet a járművek viselkedésének leírására széles körben használt Biciklimodell (Egynyomú járműdinamikai modell) szerkezetébe, egyes tulajdonságaiba, valamint megvilágítást nyernek a gyengepontjai. A fejezet egy a tesztvezetések során általánosan felmerülő kellemetlen jelenség rövid bemutatásával zárul. Az itt bemutatott hiányosságok kiküszöbölésére fogalmazódott meg a cél, egy részletesebb modell kidolgozására, melynek első lépése a kerék dinamikájának részletesebb megismerése, modellezése.

1.1. A Biciklimodell felépítése

A biciklimodell (STM: Single Track Model, egynyomú járműmodell) előnye az egyszerűségében rejlik, hogy csupán geometriai azonosságok felhasználásával képes a jármű mozgásait leírni az előírt tartományokon belül vizsgálódva, ezáltal nincs szükség anyagjellemzőkre, a jármű karosszériájának jellemző értékeire, és így tovább. [1,2] Csupán hat paramétert tartalmaz, melyek:

- az első (összevont) és hátsó kerék kúszási merevsége (C_e és C_h)
- az első és hátsó tengely távolsága a tömegközépponttól (l_e és l_h)
- a jármű tehetetlenségi nyomatéka (J_{gz})
- a jármű tömege (m)

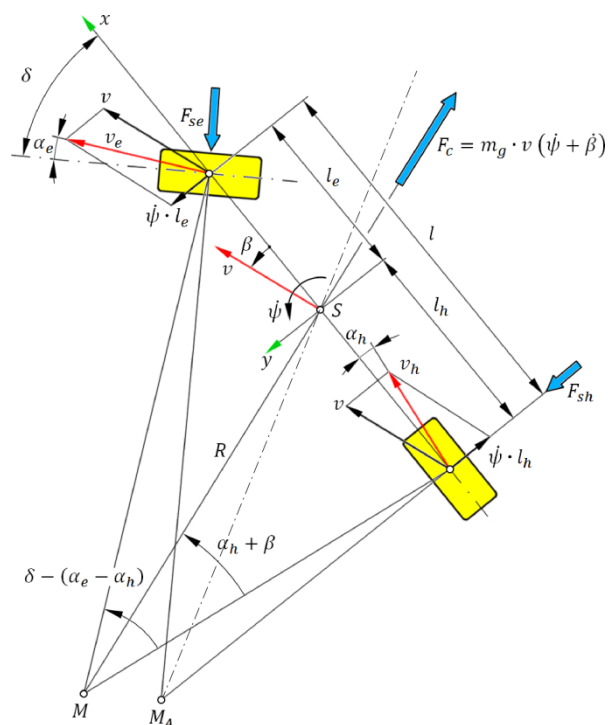
A modell az első kettő és hátsó két kereket a tengelyükön összevonva kétkerekű modellként kezeli az autót – feltételezi, hogy az azonos tengelyen lévő kerekre megegyező nagyságú és irányú oldalerők hatnak (Ez a gyakorlatban csupán egyenes menetben teljesül). Az összevonás után a tömegközépponton kívül a jármű első és hátsó tengelyén elhelyezkedő összevont kerek középpontjai (egy pont az első tengelyen, és egy pont a hátsó tengelyen) a kitüntetett pontok a modellben.

A Biciklimodell két mozgásegyenletből áll:

$$m_g \cdot v \cdot \dot{\beta} + \frac{1}{v} (m_g \cdot v^2 + C_e \cdot l_e - C_h \cdot l_h) \dot{\psi} + (C_e + C_h) \beta - C_e \cdot \delta = 0 \quad (1.1)$$

$$J_{gz} \cdot \ddot{\psi} + \frac{1}{v} (C_e \cdot l_e^2 + C_h \cdot l_h^2) \dot{\psi} + (C_e \cdot l_e - C_h \cdot l_h) \beta - C_e \cdot l_e \cdot \delta = 0 \quad (1.2)$$

Ezen egyenletek tartalmazzák a már említett 6 paramétert, a két állapotváltozót és deriváltjait, a β úszási szöget és $\dot{\psi}$ perdülési szögsebességet, valamint a Biciklimodell bemeneteit képviselik a δ kormányaszög és a v sebesség.



1.1. ábra: a Biciklimodell felépítése (az indexelés: h - hátsó; e - első; s - súrlódási; c - centrifugális; A - Ackermann-szöghöz tartozó) [1]

Az **1.1. ábrán** a β -val az úszási szög (side slip angle) van jelölve, amely a jármű valódi, éppen aktuális haladási iránya és a hossz tengelye által bezárt szöget jelöli. A perdülési szögsebesség (yawrate) jele $\dot{\psi}$, amely szintén megtalálható az **1.1. ábrán**; a fizikai definíciója pedig a jármű tömegközéppont körüli forgási szögsebessége. Habár a jármű sebességének nagyságára a Biciklimodell megalkotói kikötésként megfogalmazták annak állandóságát (nincs hosszirányú gyorsulás), ez a gyakorlati alkalmazása során nem teljesül.

1.2. A Biciklimodellben alkalmazott egyszerűsítések

A helyzet igen figyelemre méltó, hiszen a modell előnyeiből származnak az alkalmazhatósága során megvilágítást nyert hiányosságai. A modell által használt ilyen egyszerűsítések kerülnek bemutatásra a következő három alfejezetben.

1.2.1. A hosszirányú sebesség állandósága

A Biciklimodell a hosszirányú erőket elhanyagolja, értéküket nullának veszi, csupán oldalirányú (laterális) erők jelenlétét feltételezi. Ezáltal a tömegközéppont **sebességvektora nagyságában nem változhat**, csupán irányában. Ilyen helyzet csak nagyon speciális esetben fordul elő, szinte mindig van egy hosszirányú – pontosabban az aktuális sebességvek-

tor irányára párhuzamos – erőkomponense a tömegközéppontba redukált eredő erőnek, amely hol csökkenti, hol növeli a súlypont sebességét.

A Biciklimodell felépítését mutató **1.1. ábrán** látható, hogy az α_e és α_h betűkkel jelölt kúszási szögekkel térnek el a kerekek v_e és v_h (eredő) sebességei a kerekek középsíkjaiktól. Ez definíció értékűen kimondható, hogy a kerek az oldalerők által okozott abrasz-deformációk miatt nem a középsíkjukon gördülnek le, hanem attól α szöggel eltérően (amely bizonyos tartományban lineáris összefüggésben van az oldalerővel). Így a sebességvektorokra – ideértve a tömegközéppontét is – merőleges egyenest állítva ezek egy pontban metszik egymást, amely a kanyar középpontját jelöli (jelölné). Ez az állítás a jármű tetszőleges pontjainak eredő sebességvektorára állított egyenesekre igaz, hogy egy pontban (amely pont az ábrán M -el van jelölve) fogják metszeni egymást. Továbbra is az **1.1. ábrából** kiindulva a két kerék oldalerejét összegezve az M_A pontban a **pontvonallal ábrázolt egyenes lesz az eredő erő hatásvonala**. Ez az irodalom által használt és az ábrán F_c -vel jelölt centrifugális erő hatásvonalával nem párhuzamos, és ezáltal a tömegközéppont sebességvektorára nem merőleges (az irodalom által használt F_c viszont merőleges), amiből következik, hogy van egy erre a sebességvektorra vett párhuzamos komponense az oldalerők eredőjének. **Ez a komponens pedig már megváltoztatja a sebesség nagyságát**, így értéke nem lehet állandó.

Ha azonban egy olyan esetet vizsgálunk, ahol a két oldalerő eredője merőleges a v sebességvektorra, akkor ezen eredő erő hatásvonala az M pontot és a tömegközéppontot összekötő egyenessel (amely mindig merőleges a v sebességvektorra) párhuzamos lesz. Elméletben az **1.1. ábrára** vetítve ezt az új pontvonalat, az S tömegközépponttól a hátsó kerék-középpont felé fog elhelyezkedni, hiszen az M_A ponton áthalad. Az irodalomban tévesen használják a centrifugális erőt, hiszen ez a járműven belül jelentkező belső erő (mint minden nem mező által gyorsuló rendszer esetén), **nem külső erő**. A körmozgás esetén nincs erőegyensúly, hiszen a centripetális erő hozza létre magát a körmozgást, és ezzel nem tart, nem tarthat egyensúlyt más külső erő. Az eredő erő tehát a valóságban az **1.1. ábrán** (tévesen, mert a szakirodalom így használja) jelölt F_c -vel ellentétes irányú, és a hatásvonala áthalad az M_A ponton. Ebben a „elméleti kísérletben” mivel a tömegközéppontot nem érinti a hatásvonal, erre ez az oldalerők eredőjéből képzett centrifugális forgató nyomatékot fejt ki, méghozzá a kanyar ívéről kifelé sodorva a járművet. Ha a centrifugális erővel történne ugyanezen a gondolat végigvezetése ellentétes irányú eredő forgatónyomaték adódna a járműre, amely hibás működést eredményezne.

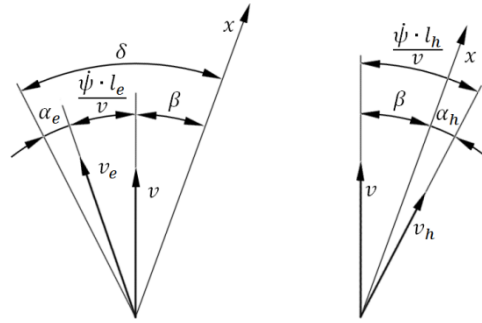
Magából a Biciklimodell elrendezéséből kiindulva tehát látható, hogy – speciális eseteket – leszámítva a hosszirányú sebesség nagyságának értéke változik.

Az egyensúlyi állapot, a konstans köríven tartás állandó nagyságú sebességen más jelenségek figyelembe vételével nyilvánvalóan leírható, azonban ez a konstans köríven tartás a valóságban csupán pillanatszerűen fordul elő, hiszen a vezető valamilyen mértékben mindig korrigál a kormánykeréken vagy gázt ad/vesz vissza, így az M és M_A pontok helyzetei (a járműhöz viszonyítva is) időben változnak.

Az **1.1. ábrán** látható α szögek a kúszási szögek (slip angle), melyek keletkezésének oka, hogy az oldalerők hatására a kerekek nem a középsíkjukon gördülnek le, hanem attól α szöggel eltérve.

1.2.2. Haladó és forgó sebességkomponensek

A három kitüntetett pontból csupán a tömegközéppont sebességvektora áll egy (haladó) komponensből, a másik két pontnál két komponensből tevődik össze. Ezek a haladó mozgásból és a (tömegközéppont körüli) forgómozgásból származó tagok. A Biciklimodell szerint a két komponens derékszögű háromszöget alkot, amely a valóságban csak ritkán teljesül. A modell érvelése szerint kis szögek esetén mégis helyes eredményt ad ez az egyszerűsítés.



1.2. ábra: a Biciklimodell első és hátsó kerekén lévő szögek viszonyai

Az **1.1. ábrán** az első keréknél a v (haladó mozgás), a $\dot{\psi} \cdot l_e$ (forgási mozgás) és a v_e vektorok által alkotott háromszög, és a hátsó keréknél a v (haladó mozgás), a $\dot{\psi} \cdot l_h$ (forgási mozgás) és a v_h vektorok által alkotott háromszög nem derékszögű. A modell mégis a

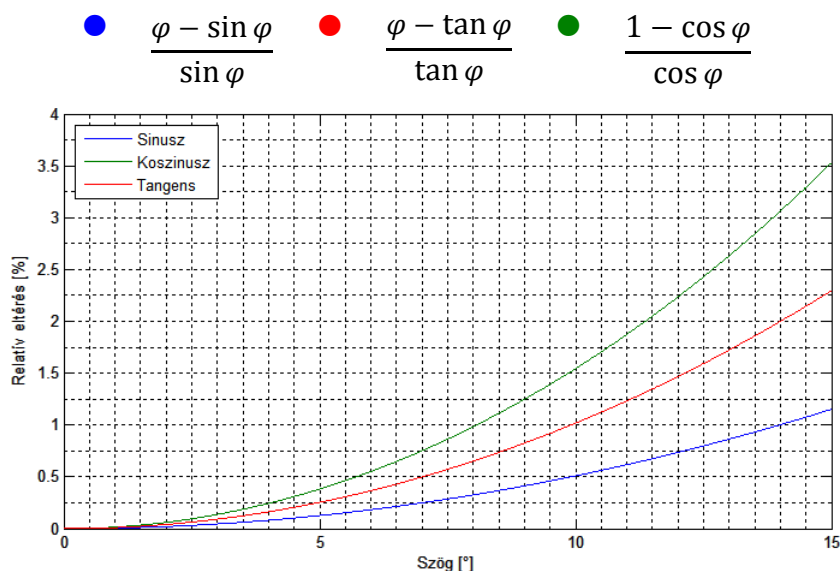
$$\frac{\dot{\psi} \cdot l_e}{v} \approx \tan \frac{\dot{\psi} \cdot l_e}{v} = \varphi_e \qquad \frac{\dot{\psi} \cdot l_h}{v} \approx \tan \frac{\dot{\psi} \cdot l_h}{v} = \varphi_h \qquad (1.3)$$

összefüggésekkel és él. A következő **1.2.3.-as** pontban ismertetett egyszerűsítéssel a Biciklimodell a radiánban meghatározott értékeivel helyettesíti a tangens függvények értékeit,

amely kellően jó pontossággal megtehető. Ha azonban a két vektorok által meghatározott háromszög alakja erősen eltér a derékszögű háromszögtől, akkor a φ_e és φ_h szögek értékeire hamis értékek adódnak és számítási hibát okozhatnak. Az **1.2. ábrán** a tangens szögfüggvény elhagyásával a φ_e és φ_h szögek argumentumai – az (1.3) egyenlet alapján – láthatók, s ezek felhasználásával építi fel a Biciklimodell a mozgásegyenleteit.

1.2.3. Szögfüggvények

Talán a legkisebb jelentőséggel bír, hogy a Biciklimodell a szögfüggvények helyett egyszerűsített értékeket használ, a $\sin$ és $\tan$ függvények helyett radiánban vett értéküket, míg $\cos$ függvéynél azokat 1-el helyettesíti. Az alábbi **1.3. ábrán** látható hogyan alakul a szögfüggvény értékéhez viszonyítva a használt egyszerűsítés.



1.3. ábra: Szögfüggvények „relatív” hibái

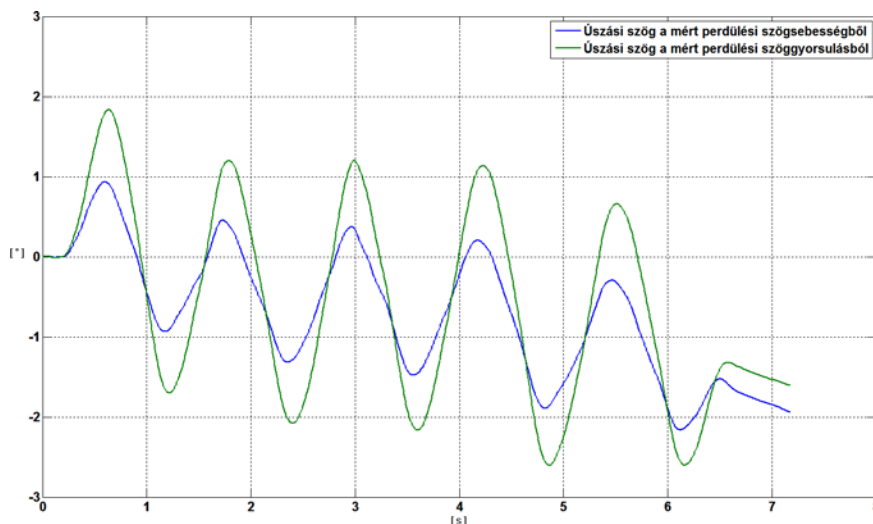
A **1.3. ábrából** könnyen belátható, hogy 10° esetén is 0,5-1,5% hibát követ el a modell, ha nem a szögfüggvények értékeivel számol, hanem radiánban vett értékükkel (illetve koszinusz esetén 1-el). A szögtartományt tovább növelve 30°-ig, 4-16% közé esik az így elkövetett számítási hiba, azonban ilyen esetek ritkán fordulnak elő átlagos vezetési manőverek esetén. Például az α görög betűvel jelölt kúszási szögek értékei a kerekeken csak igen extrém esetben (balesetveszély) érhetik el a 10-12°-os nagyságot, felett a gumi tapadása már szinte megszűnik és az autó kisodródik.

1.3. Mérési hiba és modellhiba

E a fejezet célja egy meghatározott tesztvezetési manőver (szlalom) során regisztrált, szenzorosan mért értékek alapján történő Biciklimodell-identifikáció során felmerülő bizonytalanságokra való rávilágítás. [3,4]

Az **1.1. ábráról** leolvasható β úszási szög (side slip angle) és a $\dot{\psi}$ perdülési szögsebesség (yawrate) értékeit a Biciklimodell előállítja, hiszen e két fizikai mennyiség a modell állapotváltozója. A mért értékek során e két mennyiségre tehát feltétlenül szükség van a modell paramétereinek identifikálásához.

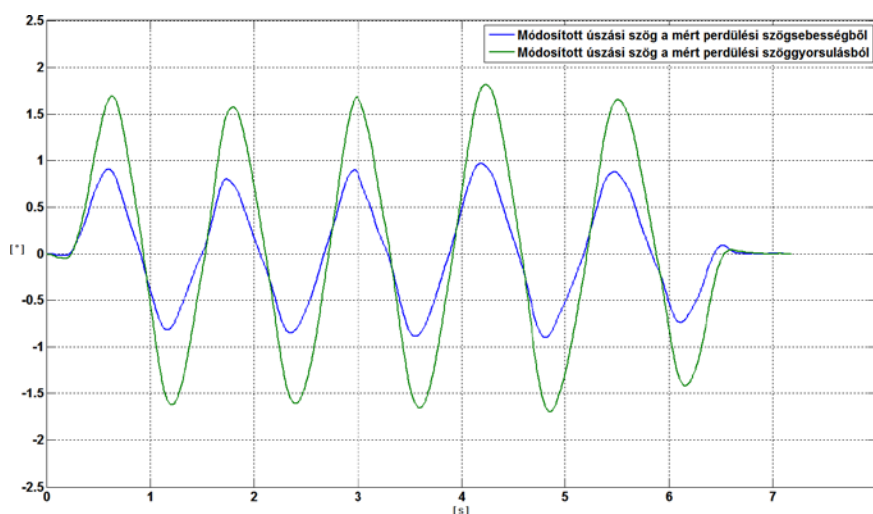
A tesztvezetések során a járművekben elhelyezett érzékelők száma jelentősen meghaladhatja a normál üzem során használt érzékelők számát. E szenzorok általában nem képesek közvetlenül mérni az összes szükséges fizikai mennyiségeket. A elektronikailag jól felszerelt járművekben jellemzően gyorsulásérzékelők és elfordulás érzékelők (kormánykerék elfordulás, illetve a 4 kerék forgási szögsebessége, melyből a jármű haladási sebessége elméletileg számolható) állnak rendelkezésre. Természetesen más érzékelők is elhelyezkedhetnek a járműveken belül, de a Biciklimodell szempontjából ezek a kiemelten fontosak. Ezek alapján kijelenthető, hogy a modell paraméterbecsléséhez szükséges két állapotváltozó értékét egy érzékelő sem méri közvetlenül.



1.4. ábra: Úszási szög számítása az jármű elektronikus egységeinek jeleiből.

Akkor hogyan végzik el a mérnökök a modell-identifikációt? A válasz egyszerűnek tűnik, mely szerint a mért értékekből visszaszámolható a két állapotváltozó értéke. Az **1.4. ábrán** az úszási szög számolt értéke látható két fizikai mennyiségből. A perdülési szögsebesség és szöggyorsulás a járműven belül található elektronikai vezérlő egységek számolt értékei, melyek többlépcsős hibaszűrésen estek át. Az úszási szög ezekből a megfelelő fizikai ösz-

szefüggésekből számolható. Az **1.4. ábrán** azonban egy szembetűnő jelenség figyelhető meg, miszerint a számolások során egy hibaérték szuperponálódik az úszási szög értékére. Ez a hiba csakis a szenzorok és a jármű vezetékezésének zajterheltségeiből, illetve mérési pontatlanságokból következhetnek, és annak ellenére észrevehető, hogy a felhasználás előtt átestek zajszűrésen a perdülesi szög és szögsebesség értékek. Egy eljárás segítségével – melynek részletes leírását nem tartalmazza a dolgozat – a hibaérték eltávolítható az úszási szögről, és így az adott tesztvezetésnél kiértékelésénél az **1.5. ábra** értékei kerülhetnek felhasználásra.



1.5. ábra: A számítógépes jelkondicionálással kapott úszási szög függvényei

Azonban egy fontos kérdés még mindenképp tisztázatlan: melyik érték legyen az elfogadott, hiszen ugyanazt a fizikai mennyiséget jelöli mindkét görbe, csupán a függvények pontjai más eljárással lettek kiszámolva. Mivel e kérdés máig nincs megválaszolva, így a bizonytalanság miatt jelenleg az identifikálások során csupán a perdülesi szögsebesség értékeire támaszkodnak a mérnökök, az úszási szög.

A Biciklimodell paramétereinek hangolása során gyakran a modellből számolt úszási szög értékei jelentős eltérést mutatnak mindkét mért értéktől, amelyre egy új, kellően pontos járműmodell megoldást jelenthet, és akár választ adhat arra is, hogy melyik számítási mód a helyes az úszási szög kifejezésére. Innen látható, hogy a modell bizonytalansága mellett erősen meghatározó lehet a mérési bizonytalanság, így egy pontosabb modell önmagában még nem orvosolja az összes felmerülő problémát, de csökkentheti azok mértékét.

A jármű eredő erőinek meghatározásának sarkalatos pontja ezen erők keletkezési helye, amely a talaj és gumiabroncsok érintkezési felületén található, így a járműmodell kezdeti lépése egy kellően pontos kerékmodell kell hogy legyen.

2. Sugárirányban deformálódó kerékmodell

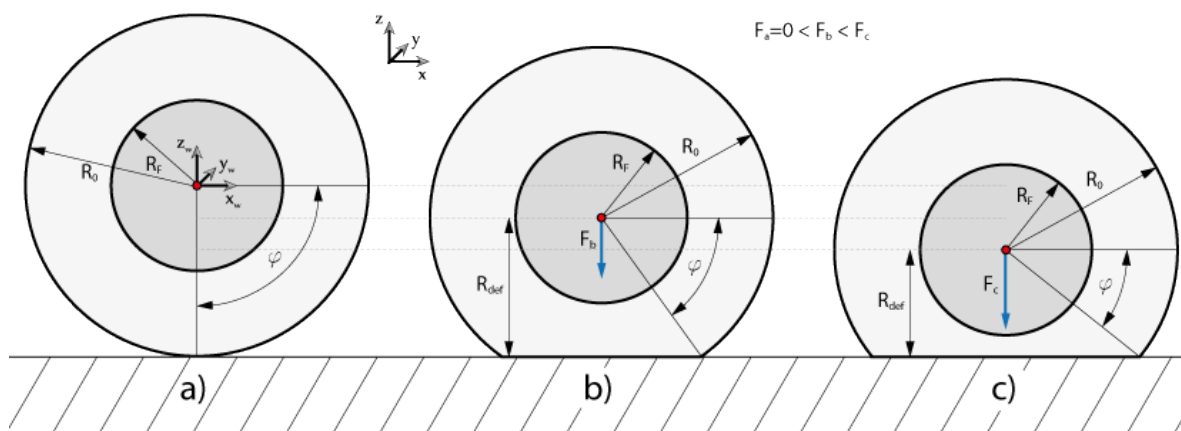
A járművet merev testként kezelve a rá ható erők térbeli összegezése eredményül egy eredő erőt és egy eredő nyomatékot ad, ahol az eredő erő a tér mindhárom irányába rendelkezhet komponenssel, valamint a nyomaték is a tér mindhárom tengelyére fejthet ki forgató hatást, és a kitüntetett pont a jármű tömegközéppontja.

Az eredő erő meghatározásához feltétlenül ismerni kell a járműre ható külső erők és a motor által leadott az áttéteken a keréktengelyekhez eljutó (mint hajtás), illetve a fékek által kifejtett (mint fékezés) forgatónyomatékokat, melyek megfelelően átszarmaztatva a négy kerék talajjal érintkező felületén fejtik ki hatásukat.

Ahogy a repülőgépek esetén a szélcsatornás kísérletek jelentősen megkönnyítették az aerodinamikai vizsgálatokat, úgy a gumibroncsok vizsgálatánál is használatos egy futószalaghoz hasonlítható berendezés, melyet a kerekek dinamikájának vizsgálatához használnak a mérnökök, és általa mellőzhető a jármű mozgásához szükséges pálya. Ilyen vizsgálatok során a kereket a berendezéshez rögzítik, amely képes adott fordulatszámon meghajtani, valamint a kormányzásból adódó kerékelfordulást is meg tudja valósítani. A fizika érvelése szerint, mindegy hogy a levegőt fújja egy berendezés a szárnyra, vagy az álló levegőben halad előre egy repülőgép. Ez az analógia a kerékvizsgálatra is átvihető, azonban az alábbi vizsgálatok esetében érdemesnek tartom az elrugaszkodást ettől a szemléletmódtól.

2.1. A kerékmodell viselkedése

Az kerék alakváltozásait legegyszerűbben leíró kerékmodell csupán sugár irányban szenved deformációkat, ahogyan ez a fejezet első, **2.1. ábrájáról** látható.



2.1. ábra: Álló kerekek különböző terhelése a kerékmodellben

A kerékmodell síkbeli, közepén a sötétebb, szabályos kör alakú rész a felni (jelölése r : rim, a felni angol megfelelője), amely – anyagjellemzőiből következően – nem deformálódik, valamint a gumiabroncs körívként öleli körbe a felnit, amely deformálódásra képes. Az **a)** részlet egy olyan kereket mutat, amelynek pontosan egy érintkezés pontja van a talaj felületével, ekkor még nincs semmilyen deformáció. A **b)** esetben már egy „közepesen” terhelt kerék látható, valamint a **c)** részleten egy „erősen” terhelt. Mivel a modellben a felni deformációra nem képes, alakját megőrzi, így R_{def} minimális értéke R_r lesz (r : rim). R_{def} a kerék deformálódott sugara, amely a kerék középpontja (pirossal kiemelve) és a talaj közötti távolságot jelenti. A kerék mozgása során a gumiabroncs egy tetszőleges pontját kiválasztva egyértelműen beazonosítható/nyomon követhető a ponttól a kerékközépponthoz húzott sugár és az x -tengely által bezárt θ szöggel.

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (2.1)$$

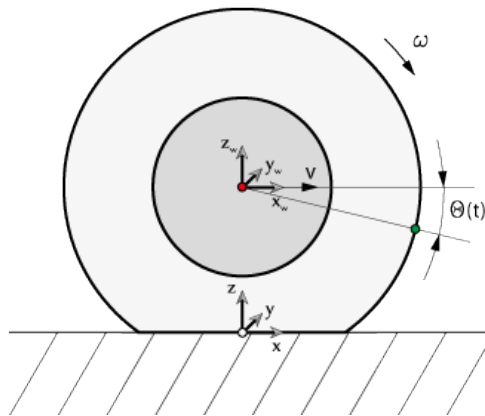
ahol θ_0 a nulla időpillanatban a vizsgált ponthoz húzott sugár és az x -tengely által bezárt szög.

A modell egyik fő hiányossága, hogy a gumiabroncs kerületének deformációját csak a talajjal való érintkezésnél veszi figyelembe, nem törődve azzal, hogy a kerék ilyenkor az x -tengely irányában – a járműhez képest a kerékközéppontjával egy vonalban előre és hátrafelé – megnyúlik, így enyhén „elliptikus” formát vesz fel. A kerék kerületi pontjai két csoportra bonthatók, a talajjal érintkezőkre,

$$\pi + \varphi < \theta(t) < 2\pi - \varphi \quad (2.2)$$

valamint a talajjal nem érintkezőkre:

$$-\varphi < \theta(t) < \pi + \varphi \quad (2.3)$$



2.2. ábra: Forgásban lévő kerék a modellben

A φ szög a kerékterheléstől függ. Minimális, azaz nulla terhelés (önsúly sincs) lesz a maximális az értéke, ami 90° . Maximális terhelésnél, amikor elméletben a felni érinti a talajt, akkor a φ szög minimális, értéke pedig R_r -től felni sugarától és a terheletlen gumiabroncs-sugárból számítható.

$$\varphi_{min} = \sin^{-1} \frac{R_r}{R_0} \quad (2.4)$$

A két szélsőérték között pedig az alábbiak szerint alakul értéke.

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{R_{def}}{R_0} \quad (2.5)$$

2.2. Szlip figyelembe vétele

A kerékmodellben a gumiabroncs forgása következtében létrejövő deformációkat (például hajtásnál a gumiabroncs enyhén feltorlódik a talajon mielőtt a talajjal érintkezne) szintén elhanyagolva két sebességértékkel jellemezhető a kerék pontjainak mozgása. Az első a kerékközéppont talajjal párhuzamos haladó mozgása, a másik a kerék forgási mozgása. Természetesen, mint egyetlen egy pont a térben a kerékközéppont végez tisztán haladó mozgást v sebességgel (kerék és talaj relatív sebessége), és a tőle különböző pontok forgási és haladó mozgást is végeznek, így ezen pontok mozgása a kettő szuperpozíciójából határozható meg. A két sebesség között a χ -val jelölt szlip mennyiség teremt kapcsolatot. A szlip sokféleképp definiálható (hajtási, fékezési...), azonban a modell által használt kifejezés:

$$\chi = \frac{R_{din} \cdot \omega - v}{v} \quad (2.6)$$

ahol R_{din} a kerék dinamikus sugara, amely a deformálódott alakból számolható.

$$R_{din} = \frac{\text{deformálódott kerület}}{2\pi} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot 2R_0\pi + 2 \cdot \sqrt{R_0^2 - R_{def}^2}}{2\pi} \quad (2.7)$$

Az egyszerűsítések után és a φ szögre kapott kifejezést behelyettesítve:

$$R_{din} = \frac{\frac{\pi}{2} + \varphi + \cos \varphi}{\pi} R_0 \quad (2.8)$$

Deformálódástól mentes kerék esetén φ értéke $\frac{\pi}{2}$ lesz, ezt behelyettesítve $R_{din} = R_0$, ami helyes érték.

2.3. Kerékmodell kerületi pontjainak mozgása (állandó sebesség esetén)

A keréktengely ω szögsebességével együtt forog a felni, amely alakváltozást nem szenved a mozgás során, így a gumiabroncs felnire felfekvő pontjai szintén ω szögsebességgel végeznek forgást a kerékközéppont körül. A modell nem részletezi, nem írja le a gumiabroncs belső pontjaiban kialakuló deformációkat, hanem feltételezi, hogy ezek sugár irányúak. Ez azt jelenti, hogy a gumiabroncs egy kiválasztott kerületi pontja a talajjal való érintkezésnél kialakuló deformációk során a hozzá a kerékközéppontból húzott sugáron mozdulhat el. Így a gumiabroncs kerületén elhelyezkedő pontok két csoportra oszthatók, amelyek nem érintkeznek a talajjal –(2.2) egyenlet –, és amelyek érintkeznek –(2.3) egyenlet. Érdekes a tetszőlegesen kiválasztott kerületi pont (a 2.2. ábrán zöld színnel) forgási mozgásánál külön választani az x -tengely és a z -tengely irányába eső mozgásokat. Ebből a z -tengely irányába eső komponens:

$$s_z = \begin{cases} R_0 \cdot \sin \theta & \text{ha } -\varphi < \theta(t) < \pi + \varphi \\ -R_{def} & \text{ha } \pi + \varphi < \theta(t) < 2\pi - \varphi \end{cases} \quad (2.9)$$

Az x -tengely irányába eső komponense:

$$s_x = \begin{cases} R_0 \cdot \cos \theta & \text{ha } -\varphi < \theta(t) < \pi + \varphi \\ -R_{def} \cdot \operatorname{ctg} \theta & \text{ha } \pi + \varphi < \theta(t) < 2\pi - \varphi \end{cases} \quad (2.10)$$

Mivel a kerék középpontja (wheelcenter) rendelkezik egy a **talajjal párhuzamos állandó nagyságú v sebességgel** – mivel a kerék nem pörög ki, azaz nem egy helyben áll –, így az előző x komponenshez hozzá kell adni az ebből a sebességből adódó megtett utat.

$$s_{wc}(t) = v \cdot t \quad (2.11)$$

Így a módosult x -tengely irányú komponensek:

$$s_x = \begin{cases} v \cdot t + R_0 \cdot \cos \theta & \text{ha } -\varphi < \theta(t) < \pi + \varphi \\ v \cdot t - R_{def} \cdot \operatorname{ctg} \theta & \text{ha } \pi + \varphi < \theta(t) < 2\pi - \varphi \end{cases} \quad (2.12)$$

Emellett érdemes a z -tengely irányába eső komponensekhez hozzáadni R_{din} -t, így a talaj síkján lesz az origója a koordinátarendszernek.

$$s_z = \begin{cases} R_0 \cdot \sin \theta + R_{def} & \text{ha } -\varphi < \theta(t) < \pi + \varphi \\ 0 & \text{ha } \pi + \varphi < \theta(t) < 2\pi - \varphi \end{cases} \quad (2.13)$$

Ellenőrzésképpen behelyettesíthetők az intervallumok határai, és belátható, hogy mindkét irányú komponens esetén folytonos az átmenet. Ezáltal a kerékmodell képes leírni a kerületi pontok mozgását, melyek részletesen a következő fejezetben vannak kifejtve.

2.4. Sugárirányban deformálódó kerékmodell vizsgálati eredményei

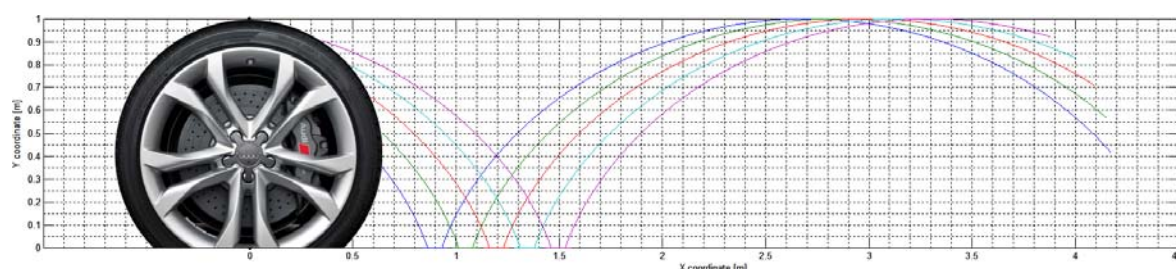
A kerék kerületi pontjai által végzett mozgások megjelenítéséhez a megismert függvényeken kívül szükség van a kerék geometriai paramétereire. Ezek legyenek az alábbiak:

A 2.4. fejezetben látható vizsgálatoknál használt geometriai paramétere a keréknek:			
$R_0 = 0.5858m$	$R_{def} = 0.4142m$	$R_{din} = 0.5712m$	$\varphi = 45^\circ$

A kerületi pontok egy térbeli, három koordinátatengellyel rendelkező rendszerben ábrázolható (x , y és t , mint az idő), de az átláthatóság érdekében célszerű csupán az x és y tengelyek külön vizsgálata. Így kapható meg a 2.3. **ábra**. A kerék középpontjának haladási sebessége legyen állandó, $v = 1 \frac{m}{s}$ nagysággal, valamint ne legyen csúszás, azaz a szlip értéke $\chi = 0$. Ekor az alábbi táblázatba foglaltak jellemzik a kerékmodellt:

A kerék összmagassága deformálódás után	$R_0 + R_{def} =$	$1m$
Deformálódás előtti átmérő	$2R_0 =$	$1.1716m$
A kerék kerülete deformálódás előtt	$2\pi R_0^2 =$	$1.078m$
A kerék kerülete deformálódás után	$2\pi R_{din}^2 =$	$1.025m$
A kerék forgási szögsebessége (állandó)	$\omega(\chi = 0) = v/R_{din}$	$1.75 \frac{rad}{s} = 100,3 \frac{^\circ}{s}$

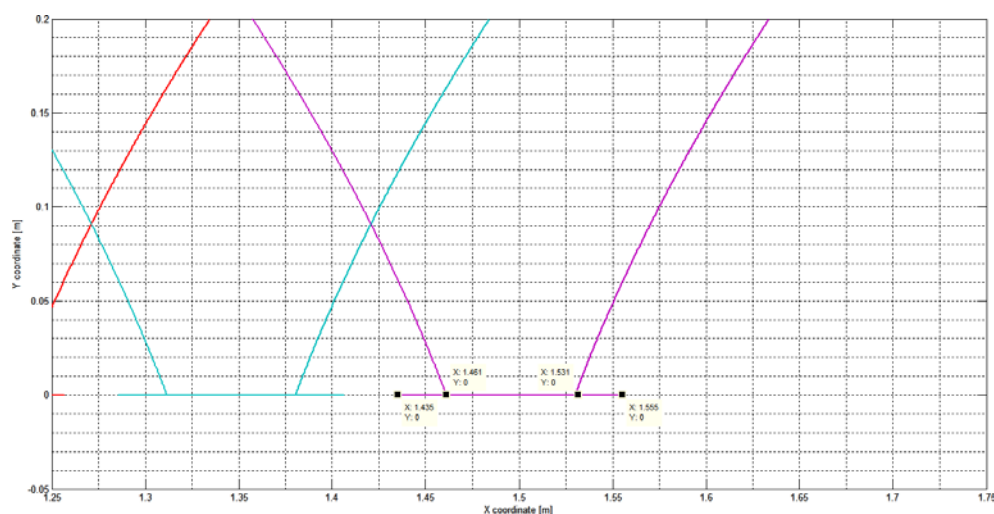
A 2.3. **ábrán** látható az 5 kerékabroncs kerületi pontjának mozgása 5 különböző színű függvénnyel. A legfelső kerületi pont mozgási pályája –, amely a legkésőbb éri el a talajt – magenta színnel van ábrázolva, mely görbét követve egy érdekes jelenség figyelhető meg, miszerint a talajt érintve a talaj elhagyásáig az x tengelyen csúsznak előre felé a kerületi pontok.



2.3. **ábra:** Kerékabroncs kerületi pontjainak mozgása – X-Y koordinátáson

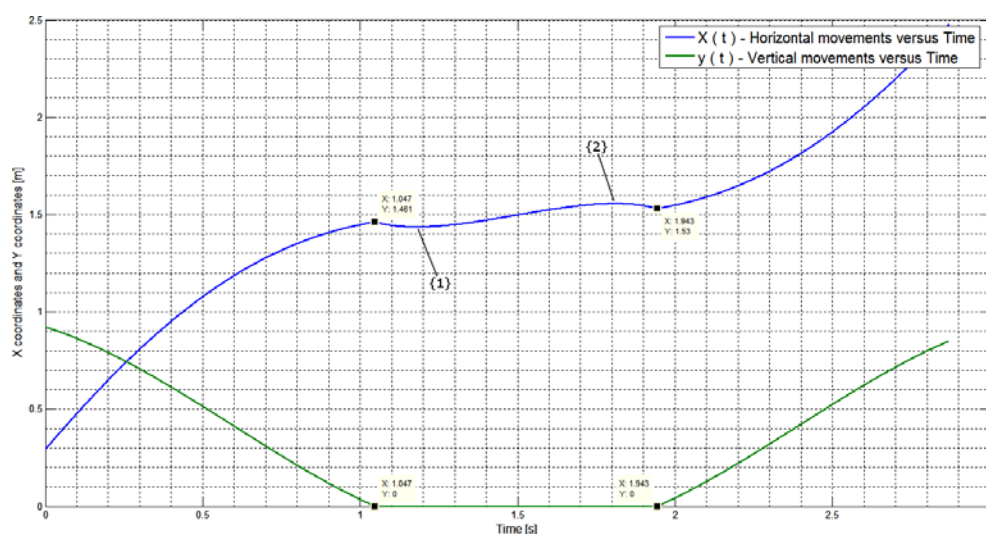
A 2.4. **ábra** mutatja ezt az x tengelyen 1,5 méternél megfigyelhető jelenséget kinagyítva. Látható, hogy a kerék kerületi pontja visszafelé csúszik a talajt érintve, majd előre felé, és

egy kicsit megint vissza (negatív irányba), mielőtt elhagyná a talajt. A talajjal érintkező kerületi pont tehát a talaj elhagyásáig nem marad ugyanazon a pontban, annak ellenére, hogy a magyarul csúszásnak fordítható szlip fizikai mennyiség értéke 0.



2.4. ábra: Kerékabroncs kerületi pontjainak mozgása – X-Y koordinátáson

A 2.5. ábrát megfigyelve látható, hogy a talajt 1,047 másodpercnél érinti és 1,943 másodpercnél hagyja el a vizsgált kerületi pont. A talajt érintve nyilvánvalóan a vertikális elmozdulása a pontnak nulla, ez látható a zöld színű függvényről, valamint a kékszínű függvényen a már említett talajon csúszás jelensége figyelhető meg. Az „x koordináták és y koordináták” tengelyen a kék függvény értékei folyamatosan növekednek, azaz x irányban gördül előre a kerék, majd az 1,047 másodpercnél érinti a talajt. Ezt követően enyhén csökkennek az x irányú koordináta értékek (visszacsúszás) egészen az {1}-es pontig, majd



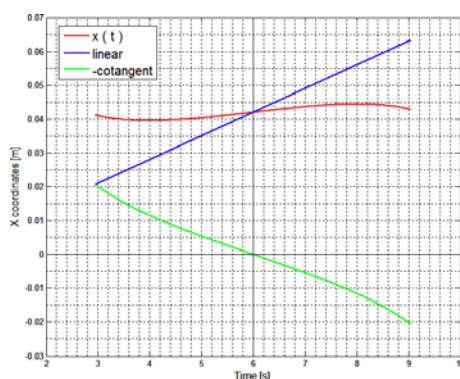
2.5. ábra: Kerékabroncs kerületi pontjainak elmozdulása $x(t)$ [kék] és $y(t)$ [zöld] függvényekkel időben külön bontva.

növekednek (előre csúszás) egészen a {2}-es pontig, ezt követően a talaj elhagyásáig (1,943 másodpercig) ismételt csökkennek az x koordináta értékek (visszafelé csúszás).

A 2.5. ábrán látható kékszínű $x(t)$ függvény alakja a (2.12) egyenlet második felének segítségével értelmezhető, mely szerint ez egy lineáris és egy kotangens függvény összege.

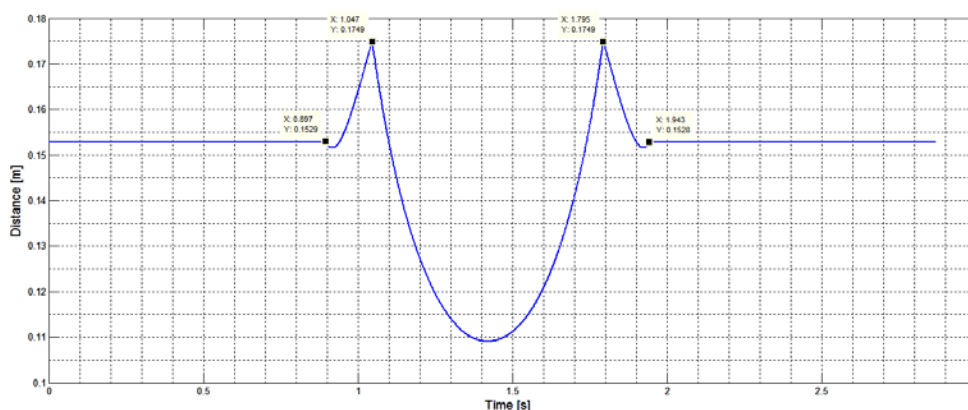
$$x(t)|_{\pi+\varphi < \omega t < -\varphi} = v \cdot t - R_{din} \cdot \text{ctg } \omega t \quad (2.14)$$

A 2.6. ábrán szereplő piros színű függvény a 2.5. ábrán szereplő kék függvény egy részlete, amikor a kerületi pont érinti a talajt. Az időtengelyen és a függőleges tengelyen a skálázás nem egyezik meg a két ábrán, de jellegre ugyanaz a két görbe.



2.6. ábra: A (2.14) egyenlet grafikusán megjelenítve, $\text{red} = \text{blue} + \text{green}$

A kerék forgatása közben a kerületén lévő két szomszédos pontot vizsgálva az előbbi talajon csúszás jelensége mellett a gumi összehúzódásáról és megnyúlásairól is kapható kép. A gördülő kerék két szomszédos kerületi pontjának egymástól való távolságának időbeli függvénye látható a 2.7. ábrán. A 2.5. ábráról leolvashatóak ugyanazon időértékek, a talaj érintésének és elhagyásának időpontjai (1,047 és 1,943 másodperc). Amíg egy vízszintes



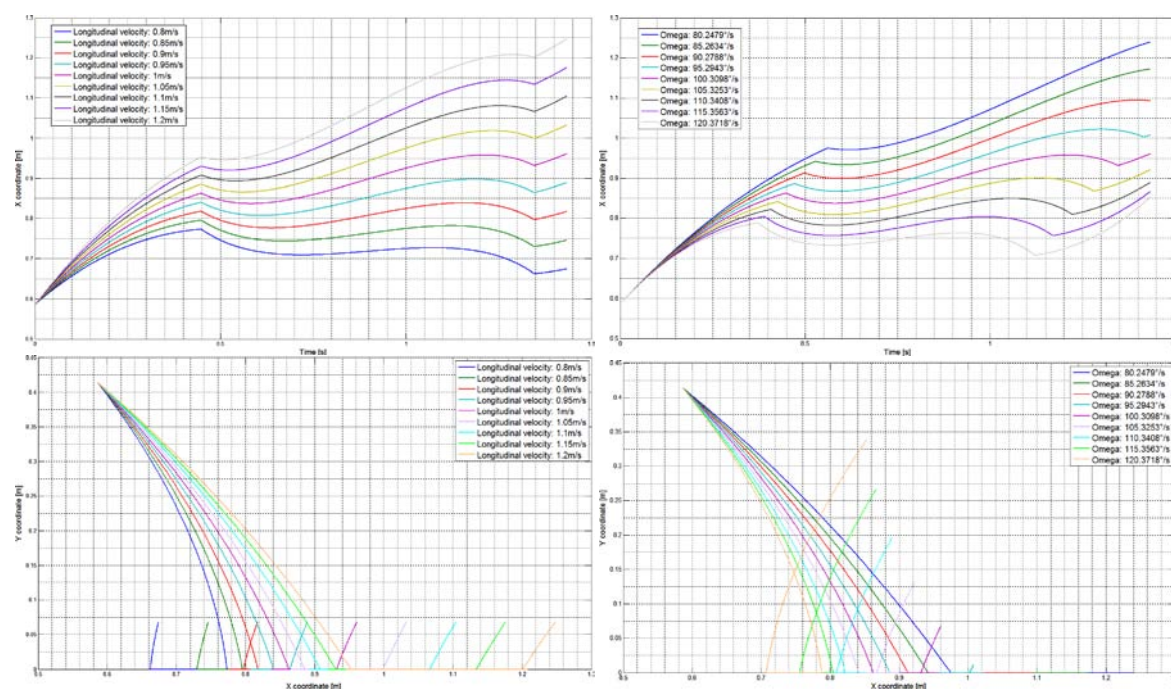
2.7. ábra: Két szomszédos kerületi pont távolságának abszolút értéke (kezdeti távolsága 15,35 cm)

egyenes a függvény, addig a két kerületi pont távolsága állandó, azaz egyik sem érinti a talajt. Két pont távolságán az összekötő egyenesük hossza értendő. A jövőben érdemes olyan vizsgálatot lefolytatni, ahol az abroncs kerülete mentén van definiálva a távolság.

Amikor a talajt érinti az első („előrébb járó”) kerületi pont, a távolság minimálisan csökken, majd növekszik, egészen addig, amíg a második pont is eléri a talajt, a gumi tágul. Majd az összeszűkülés fázisa az idő kb. 1/3-át öleli fel (középső parabola alakú függvényrészlet első fele). Ezen rész alatt a két pont ~ 11 cm-re közelíti meg egymást, majd ez előző események időben szimmetrikusan következnek.

Egy nyilvánvalóan felmerülő kérdés még tisztázatlan. Hogyan viselkedik a modell, ha a szlip értéke nem nulla? Az alábbi táblázatba foglalt két sora 9-9 esetet mutat be, melyek jellegre olyan görbéket adnak, mint a $\chi = 0$ eset. Ezek a 2.8. ábrán láthatók összefoglalva.

χ [%]	-20%	-15	-10	-5	0	+5	+10	+15	+20
v	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20
ω	80.2	85.3	90.3	95.3	100.3	105.3	110.3	115.4	120.4



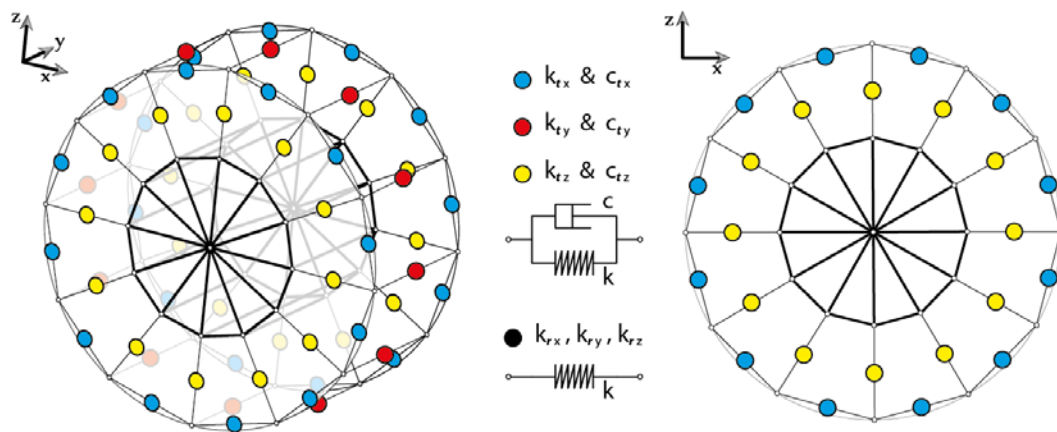
2.8. ábra: 1 kerületi pont mozgási pályája. 1. oszlop: szögsebesség állandó, és a v változó. 2. oszlop: a v állandó, és ω változó.

Vajon ez a jelenség a valóságban is lezajlik? A gumiabroncs alakjában elszenvedett deformációja mennyire tér el a sugárirányban deformálódó kerékmodellétől? Ezekre a kérdésekre keresi a választ a következő fejezet, mely a deformálódott alak meghatározására egy pontosabb közelítést igyekszik adni.

3. Dinamikus (rugós és csillapító tagokból felépülő) kerékmodell

[5] [6] Az előzőekben ismertetett kerékmodell fő hiányossága, hogy a normálerőkből adódó x -tengely irányába kialakuló abroncs-deformációt elhanyagolja, valamint hogy a kerületen megoszló erők a körív szabályosságát megtörik. Vajon érdemes figyelembe venni, hogy a gumiabroncs kerülete nem csak a talajjal való érintkezési felületen változik? Erre is keres választ a részletesebb kerékmodell. Ehhez azonban már szükség van valamilyen formában a gumiabroncs belsejében ébredő erőkre.

A következőkben ismertetett modell megalkotásánál a cél az volt, hogy a felni és gumiabroncs valós anyagjellemzőinek ismerete nélkül, egy a paraméterek megfelelő megválasztásával/hangolásával a modellből kapott deformációk megfeleljenek a valóságosnak.

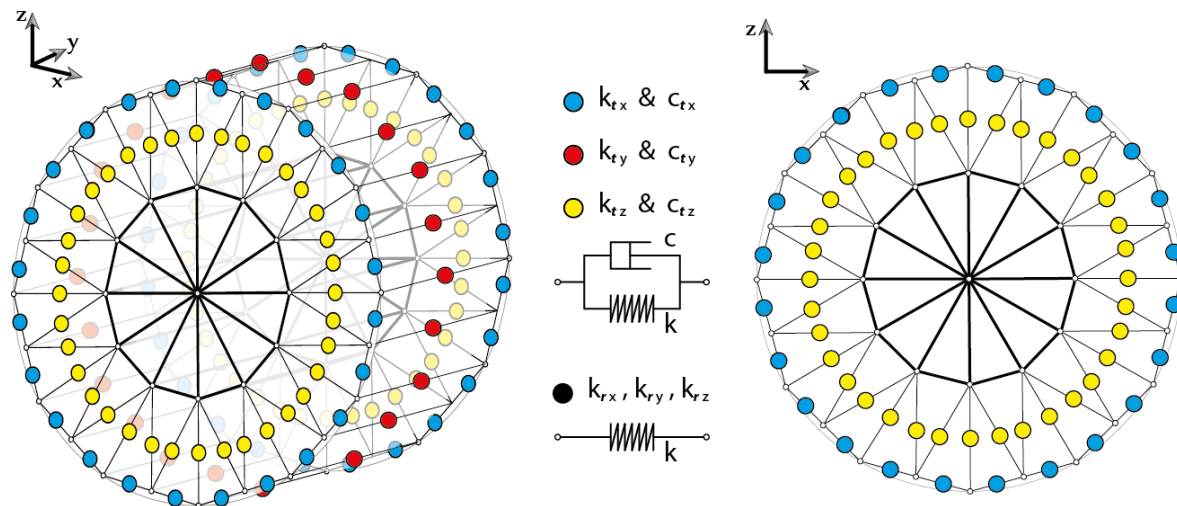


3.1. ábra: Térbeli, illetve síkbeli álló kerék modelljének kezdeti elképzelése

Kezdetben a kerék álló esetben kialakuló deformációit érdemes vizsgálni, majd ezt követően a forgásban lévő. Első lépés a síkbeli kerék felbontása belső (sugár irányú) és a kerületen elhelyezkedő tagokra. A felni esetében ezek valamilyen anyagjellemzővel bíró, elhanyagolhatóan kicsi rugalmas alakváltozást szenvedő kis elemi „rudak”, míg a gumiabroncs esetén kicsi elemi rugós és csillapító tagok. A modell legegyszerűbb formája egy csúcsára állított négyszög, majd kettesével növelve a csúcsok számát egyre finomabban megközelíti az alakzat a szabályos kört.

Az 3.1. ábrán egy 12 szöges közelítés látható. Az összes elemet csuklók kötik össze, melyekre a kerékmodell a mechanikában meghatározott csukló fogalmát alkalmazza. A sárga (sugárirányú = belső) és piros (oldalirányú) színnel jelölt tagok hossza deformálódás mentesen ismert, míg a kék színű kerületi tagok a szögosztás egyre kisebbre vételével egyre inkább rövidülnek. A szögosztás finomításával természetesen a felnit alkotó, az abroncsnál nagyságrendekkel szilárdabb elemei is sokszorozódnak, melyeknél szintén a belső (sugár-

irányú) tagok hossza állandó és a kerület mentiek hossza fokozatosan csökken. Tulajdonképpen az előző fejezetben ismertetett kerékmodellből kiindulva próbálja ez a megközelítés a valóságban deformálódott alakot megközelíteni, és az előzőekhez hasonlóan a kereket forgás közben is vizsgálni.



3.2. ábra: Rúdelemekből felépülő kerékmodell végleges formája. Bal oldalon a térbeli, jobb oldalon a síkbeli kerékmodell. A k a rugós, a c a csillapító tagok paraméterei. A felni-elemek vastag vonallal.

A hosszas eredménytelen vizsgálatok – melyek leírását nem tartalmazza a munka – végkövetkeztetése szerint a **3.1. ábrán** szereplő modell abroncselemei, amelyeket két kék (sugár irányú - balső) egy sárga (abroncs kerületi) és egy fekete (felni kerületi) elem alkot, instabil. Ez a kis alakzat – melyet a négy elem fog közre – egy trapéz, deformálódás során pedig egy általános négyszög alakját veszi fel. Ezen elemeket a stabilitás érdekében egyenként 3 kisebb elemre, 3 háromszögre osztva megkapható az elemek végleges elrendeződése, a kerékmodell szerkezete, mely a **3.2. ábrán** látható.

A keréksokszög középpontjába helyezve a nehézségi erőből egy kerékre jutó terhelést a deformációt időben követi a modell, amíg el nem éri az állandósult állapotot. Csak ezt követően lesz képes a kereket forgás közben vizsgálni a modell. Amikor álló helyzetben a súlyt fokozatosan a kerékre helyezi a modell, kezdetben csak egyetlen egy (térbeli esetben két darab) ponton érintkezik az abroncs a talajjal. Ahogy fokozatosan csökken az ehhez a ponthoz tartozó sugárirányú és a pont melletti kerületen elhelyezkedő tagok, egy kis idő múlva a mellette lévő belső (vagy sugár irányú) tagok is leérnek a talajra, majd a terheléstől elszenvedett deformáció a egyre több pontot „kényszerít” a talajára. Ezek természetesen a z-tengely irányában nem hatolhatnak be a talajba. A deformáció befejeztével a kerékmodell képes lesz visszaadni a talajérintkezési felületen a normálerők megoszlását.

3.1. Síkbeli modell szerkezeti kialakítása

A rácsos tartók rúdelemekből, kapcsolódási pontokból megtámasztásokból, kényszerekből és külső erőkből álló szerkezetek. [7,8,12] A kapcsolódási pontok idealizált csuklók, melyek nem képesek nyomatékot átadni, csupán erőket, amelyekről feltételezzük – az egyszerűbb tárgyalásmód érdekében –, hogy mindig rúdirányúak, és a rudak szimmetriatengelyén van a hatásvonaluk. Ezáltal csak húzó-, illetve nyomóerők ébredhetnek a szerkezeten belül, azaz nincs nyíró, csavaró és hajlító igénybevétel, valamint kizárt a kihajlás jelensége.



3.3. ábra: Példák rácsos tartókra, és olyan mérnöki szerkezetre, amely rácsos tartóként modellezhető. [9,10,11]

A szerkezet önsúlyának figyelmen kívül hagyásával nem keletkezik számottevő hiba, így ez is megtehető. A klasszikus mechanikai rácsos tartós példákban a tartóelemek alakváltozásai rugalmasak, mivel a rúdelemekben ébredő belső erők nagyságáról ki van kötve, hogy az elemek deformációjának mértéke a rugalmassági határaikon belül maradnak, ezáltal az elemekre érvényes a Hooke-törvény:

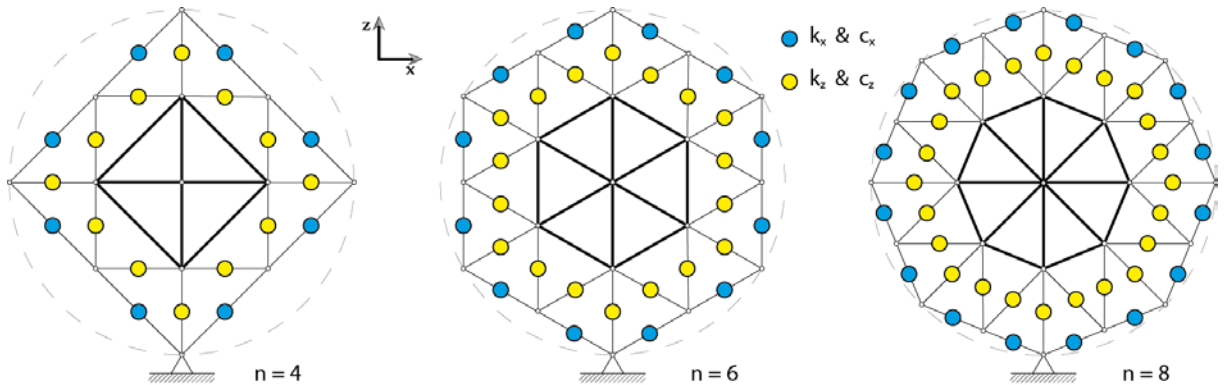
$$\vec{F} = k \cdot \vec{x} \quad (3.1)$$

ahol k a rugalmassági tényező és $\vec{x}$ iránya egybeesik a tetszőlegesen kiválasztott rúdelem szimmetriatengelyével. A kerékmodell szerkezeti elemeinek megismerése előtt egy fontos kérdés tisztázása elengedhetetlen: vajon a szerkezet statikailag határozott, vagy határozatlan? A két esetben eltérő szemléletmód szükséges, és e statikai tulajdonság kijelöli a szerkezet elemzéséül szolgáló eljárást, eljárásokat. Ha egy szerkezet statikailag határozott, akkor a szerkezet kialakítása, azaz pusztán a geometriai kényszerek egyértelműen meghatározzák az adott terhelésekkel és kényszerekkel ellátott tartó elemeiben ébredő belső erőket. A c_s csomópontból, r_s rúdelemből álló szerkezetnél, ahol a külső kényszerek foka száma¹ k_s , a következő három eset lehetséges:

¹ Például a talajon egy pontban van megtámasztva és ezáltal nem tud vertikálisan mozogni, akkor ez egy kényszert ad, ha oldalra sem tud elmozdulni ennél a megtámasztásnál, akkor már 2 kényszert jelent.

$2c_s < k_s + r_s$	statikailag határozatlan	elégsges, de nem szükséges feltétel
$2c_s = k_s + r_s$	statikailag határozott	szükséges de nem elégsges feltétel
$2c_s > k_s + r_s$	statikailag túlhatározott	elégsges, de nem szükséges feltétel

Ha a 2. kifejezés –, az egyenlőség – teljesül, és felírható $2c_s$ darab független egyenlet, akkor a szerkezet statikailag határozott, és alkalmazható a csomóponti módszer, vagy az átmetsző módszer. Statikai túlhatározottság esetén használhatók a határozott szerkezeteknél is alkalmazható módszerek. Ha a 3 kifejezésből a felső egyenlőtlenség teljesül, akkor ez elégsges, de nem szükséges feltétele a szerkezet statikailag határozatlanságának. Ez annyit jelent, hogy vannak olyan esetek, amikor a szerkezet statikailag határozatlan, de teljesül a $2c_s \geq k_s + r_s$ kifejezés. Statikai határozatlan tartók esetén általánosan alkalmazott eljárás az elmozdulás-módszer (vagy potenciális energia minimuma elv). Ilyen szerkezeteknél már nem csupán az elrendezés határozza meg a kialakuló belső erőket, így a megoldáshoz szükség van további kinematikai egyenletek felírására. Ez az eset áll fenn a kerékmodell szerkezeténél is. [13]



3.4. ábra: Az n sokszög jelképezi a kereket, és minél finomabb a szögosztás ($n \rightarrow \infty$), annál pontosabban közelíti a modell a valóságos kerék alakját.

A **3.4. ábrán** látható a három legegyszerűbb kialakítás – természetesen az n növelésével a modell finomítható. A kerékmodellre kis deformációk estén igaz (amíg egy kerületi pont érinti a talajt):

$$c_s = 3n + 1 \qquad r_s = 7n \qquad k_s = 2 \qquad (3.2)$$

A k_s – kényszerek számának – értéke azért 2, mert a megtámasztásnál 2 tengely irányába (x és z) ébredhet erő. A későbbiekben célkitűzés, hogy a talaj súrlódását is figyelembe vegye a modell, ekkor egy részleges kényszer adódik a rendszerhez, a talajjal érintkező

pontok az ott ható normálerőktől függően vagy tapadnak, vagy csúsznak majd, és horizontálisan (x tengely irányába, és térbeli esetről y irányba) is ébrednek erők.

A c_s , r_s és k_s értékből egy statikailag határozatlan szerkezet szükséges, de nem elégséges feltétele adódik.

A modell megalkotásának kezdetekor a **3.1. ábrán** szereplő elrendezés volt a modell szerkezetének kialakítása, és erre $c_s = 2n + 1$, $r_s = 4n$, $k_s = 2$ számok adódtak, amelyek teljesítik a statikai határozottság szükséges de nem elégséges feltételét. Ezáltal elkerülhetetlen volt a szerkezet behatóbb elemzése és a csomóponti módszer alkalmazása. A $4n + 2$ db egyenletet felírva és az egyenletrendszert rendezve a levont következtés szerint nem áll elő kellő számú független egyenlet, így a csomóponti módszerrel nem adhatók meg a kerékmodell szerkezetében ébredő belső erők. A kerékmodell tehát mindkét esetben statikailag határozatlan. A későbbiekben csak a **3.2. ábrán** látható szerkezeti kialakítás elemzése kerül bemutatásra.

Az elmozdulás-módszernél a csomópontok elmozdulásából határozhatók meg a rúdszerkezetben ébredő belső erők. Egy elemen belül ébredő belső erő legyen $P^{(e)}$, mely rugós és csillapító taggal rendelkező rúdelemnél:

$$P^{(e)} = k \cdot \delta + c \cdot \dot{\delta} \quad (3.3)$$

ahol δ a rúd megnyúlásának mértéke. Ha nem rendelkezik csillapító taggal az elem, akkor $c = 0$. A külső és belső erők egyensúlyban vannak a rúdszerkezet egészére nézve, és rész-elemeket kiemelve az elvágási pontoknál a megfelelő belső erőkkel kiegészítve a rész-elemek is egyensúlyban lesznek. Egy tetszőlegesen kiválasztott rúdelem végein lévő csomópontokban ható külső erőket az $\underline{f}^{(e)}$ oszlopvektor tartalmazza. Az $\underline{f}^{(e)}$ a **3.4. ábra** globális (ortogonális) koordinátarendszerében értelmezett komponenseit tartalmazza (részletesen a **3.5. ábrán**), míg $P^{(e)}$ az adott elem lokális koordinátarendszerében van értelmezve, iránya mindig rúdirányú. Ezért szükség van $\underline{M}$ oszlopvektorra, amely a lokális és globális koordinátarendszerek közötti átváltást teszi lehetővé. Így a következő összefüggés igaz a kerékmodell szerkezeti elemeire.

$$\sum \underline{f}^{(e)} = \sum \underline{M} \cdot P^{(e)} \quad (3.4)$$

A valóságban a felni szerkezetét tekintve az anyaga tömör, így a modellben a felnit alkotó rúdelemek vastagsága (A) és az anyagi jellemzőjük (E) fiktív értéket képviselnek, azonban ez nem jelent problémát, hiszen a vizsgált tartományon belül a felni elemei csupán

rugalmas alakváltozásokat szenvednek, s deformációjuk mértéke kisebb az *mm*-es nagyságrendnél. A felni rugalmasságát jelölje (*r*: rim, a felni angol megnevezése):

$$k_r = \frac{AE}{L} \quad (3.5)$$

ahol az *A* a rúdelem keresztmetszete, *E* a rugalmassági modulusa és *L* a hosszúsága. Az *AE* szorzat megválasztásánál egy fontos szempont van, hogy a későbbi vizsgálatoknál alkalmazott terhelések mellett a felni alakváltozása elhanyagolható legyen.

A felnit alkotó elemek – síkbeli esetben – a hosszúságuk alapján két különböző csoportba sorolhatók, melyekből a sugárirányú (vagy belső) elemek (*z*) hossza változatlan marad,

$$k_{r_z} = \frac{AE}{L_z} = \frac{AE}{R_r} \quad (3.6)$$

míg a kerületi elemek (*x*) rövidülnek a szögosztás sűrítésével.

$$k_{r_x} = \frac{AE}{L_x} = \frac{AE}{R_r \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \varphi)}} \cdot k_{r_z} = p_\varphi \cdot k_{r_z} \quad (3.7)$$

A φ két szomszédos (felnit alkotó) sugárirányú rúdelem által bezárt szög a deformálódásmentes állapotban, amely állandónak tekinthető a deformációk során is (a felni nem torzul). A φ legnagyobb értéke $\frac{\pi}{2}$, azaz 90° , mely esetben a kerékmodell két egymásba helyezett csúcsára állított négyszög. A kereket reprezentáló sokszög oldalainak száma (azaz a szögosztás) *n*, amellyel kifejezhető a φ szög:

$$\varphi = \frac{2\pi}{n} [\text{rad}] = \frac{360}{n} [^\circ] \quad (3.8)$$

A **3.4. ábrán** a kis háromszög a megtámasztást jelentik, azaz a talajt. A felni és a teljes kerék sugarának arányától függően bizonyos *n* érték felett (a **3.4. ábrán** $n \geq 6$, és ez függ a felni valamint a teljes kerék sugarának arányától) a fokozatosan növekvő terheléstől bekövetkező deformálódás újabb kényszereket vihet be a rendszerbe, hiszen az érintkezési pont szomszédos kerületi pontjai is elérhetik a talaj vonalát, s mivel abba nem hatolhatnak bele, megtámasztja őket a talaj. Kicsi *n* értékekre a felni előbb „megakasztaná” a kereket. Ez olyan szélsőséges esetben fordulhat elő, amikor a jármű nagy sebességgel belehajt egy kátyúba, és a gumi annyira összepréselődik, hogy a felni is deformálódást szenved. Ilyen esetekkel nem foglalkozik a kerékmodell.

A felni elemei egy-egy rugalmas taggal jellemezhetők, míg a gumiabroncs elemei már kettő darab: egy rugalmas/rugó, valamint egy csillapító taggal jellemezhetők (*t*: tire, a gumi-

abroncs angol megfelelője) mind a belső (z), mind a kerületen (x) elhelyezkedő tagokra külön:

$$k_{t_x} \& c_{t_x} \qquad k_{t_z} \& c_{t_z} (k_{t_{z1}} \& c_{t_{z1}} \text{ valamint } k_{t_{z2}} \& c_{t_{z2}}) \qquad (3.9)$$

A felni és a kerék teljes sugarának arányában két különböző hosszúságú abroncs (tire) elem adódhat. A **3.4. ábrán** látható példákban a kerék sugarának fele a felnié. Ebben – és csak ebben – az esetben lesz az összes abroncs elem hossza megegyező. Ettől eltérve a kérsugárra eső ($k_{t_{z1}} \& c_{t_{z1}}$) és az arra nem eső ($k_{t_{z2}} \& c_{t_{z2}}$) tagok eltérőek lehetnek. Ez a kellemetlenség megfelelően nagy n érték választásakor eltűnik, hiszen ekkor a két hossz csak minimálisan tér majd el ($<0,1\%$).

A tagokat ennél jobban nem érdemes tovább bontani, csupán abban az esetben, ha a későbbi vizsgálatok során kiderül, hogy a tényezők függnének az elemek deformálódás során bekövetkező hosszváltozástól (például ha összenyomásra keményedő tulajdonsággal rendelkezik a gumi).

A gumiabroncsot alkotó elemek deformációja – ahogy a felni elemeinek is – rugalmas, mely szerint a terhelő külső erők megszűnésével a kerék alakja visszanyeri eredeti alakját. Ezek szerint egy álló kerék esetén (nincs hajítás) az alakváltozás időbeli lezajlásában van, azonban a végleges deformálódott alaknál nincs szerepe a c csillapító tagoknak. Forgó/forgatott kerék esetén ez már nem mondható el, hiszen a kerékmodell gumiabroncs pontjainak deformációi időben nem állandó nagyságúak, csupán állandósult terhelés (külső erők) esetén vehető periodikusan ismétlődőnek.

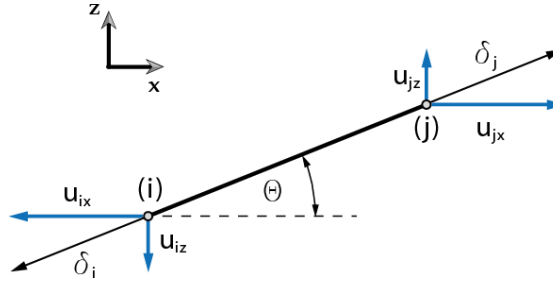
3.2. Elemekre bontás, elemek vizsgálata

Egy tetszőleges alakú rácsos tartó bármely elemére –, így a kerékmodell elemeire is – igaz, hogy két csomópont fogja közre, melyeket a **3.5. ábrán** az i és a j jelű pontok jelölnek. Mivel két tetszőlegesen kiválasztott csomópont között vagy szerepel pontosan 1 darab elem, vagy nincs köztük összeköttetés, ezáltal a csomópontok segítségével egyértelműen azonosítható a szerkezet összes eleme. [12,14,15]

A csomópontok elmozdulását jelölje u , az alsó indexe tartalmazza, hogy melyik csomópontra vonatkozik, valamint, hogy az elmozdulás melyik tengely irányába esik. Az ij csomópontok által közrefogott elem hosszváltozása legyen δ , mely a csomópontok megnyúlásaival felírva:

$$\delta_{i,j} = -\delta_i + \delta_j = -(u_{i_x} \cos \theta + u_{i_z} \sin \theta) + (u_{j_x} \cos \theta + u_{j_z} \sin \theta) \qquad (3.10)$$

A θ szög a vizsgált rúdelem és az x tengely által bezárt szöget jelöli. (Térbeli modell esetén három szögértékkel jellemezhető minden egyes elem: ebből az xz síkra vett vetület és az x tengely által bezárt szög a θ_x , az yx síkra vett vetületnél θ_y , valamint zy síknál a θ_z szög). A továbbiak a felső indexben szereplő (e) jelentése, hogy a kiválasztott elemre vonatkozik a kifejezés, a példában az ij csomópontok által meghatározott elemre.



3.5. ábra: Általános esetben két csomópont által közrefogott elem elmozdulásai [14]

Az rúd megnyúlására kapott összefüggés mátrixos alakja a

$$s = \sin \theta \quad c = \cos \theta \quad \underline{u}^{(e)} = [u_{ix} \quad u_{iz} \quad u_{jx} \quad u_{jz}]^T \quad (\underline{M}^{(e)})^T = [-c \quad -s \quad c \quad s] \quad (3.11)$$

rövidítésekkel:

$$\delta_{i,j} = (\underline{M}^{(e)})^T \cdot \underline{u}^{(e)} \quad (3.12)$$

Az $\underline{M}$ a korábban említett oszlopvektor, amely a kiválasztott rúdelem lokális koordináta-rendszeréből vált át globális koordináta-rendszerbe (ez a **3.5. ábrán** az xz tengelyek által meghatározott koordináta-rendszer).

Abban az esetben, ha a vizsgált elem rendelkezik c^2 csillapítási tényezővel, akkor nem csupán az elemet határoló csomópontok elmozdulás-függvényei játszanak szerepet a deformációk/hosszváltozások időbeli lezajlásában, hanem azok derivált-függvényei is, azaz a csomópontok (elmozdulási) sebességfüggvényei:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{i,j} = & (\dot{u}_{jx} \cos \theta + \dot{u}_{jz} \sin \theta) - (\dot{u}_{ix} \cos \theta + \dot{u}_{iz} \sin \theta) + \\ & + (-u_{jx} \sin \theta \cdot \dot{\theta} + u_{jz} \cos \theta \cdot \dot{\theta}) - (-u_{ix} \sin \theta \cdot \dot{\theta} + u_{iz} \cos \theta \cdot \dot{\theta}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ezt is mátrixos formában érdemes felírni:

$$\dot{\delta}_{i,j} = (\underline{M}^{(e)})^T \cdot \dot{\underline{u}}^{(e)} + \dot{\theta}^{(e)} \cdot (\underline{N}^{(e)})^T \cdot \underline{u}^{(e)} \quad (3.14)$$

ahol $(\underline{N}^{(e)})^T = [s \quad -c \quad -s \quad c]$ igen hasonló az $\underline{M}$ -hez.

² Itt nem $\cos \theta$ -t jelent, valamint a mátrixon kívüli szorzásnál a c mindig csillapítási tényezőt jelöl.

A csupán k rugalmas tagot tartalmazó elemekre ható erő függvényében a megnyúlásuk:

$$P_k = k \cdot \delta \quad (3.15)$$

Az $\underline{f}$ oszlopvektor által tartalmazott külső erők egyensúlyt tartanak (3.6. ábra) az elemen belül ébredő belső erőkkel, s mivel a rúd önsúlya zérusnak vehető (elhanyagolható), a belső erők nagysága az elem két végénél megegyező nagyságú (és rúdirányú). Ezek alapján a (3.16) egyensúlyi egyenlet írható fel:

$$\underline{f}^{(e)} = \underline{M}^{(e)} \cdot P_k = k \cdot \underline{M}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad (3.16)$$

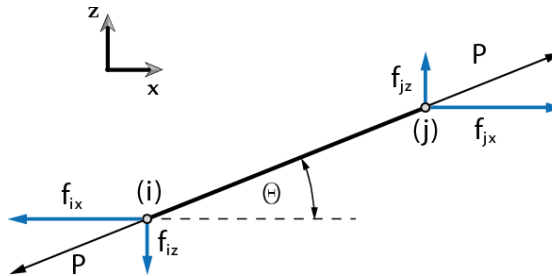
amely kifejezésben

$$\underline{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iz} \\ f_{jx} \\ f_{jz} \end{bmatrix}; \quad \underline{M}^{(e)} = \underline{M}^{(e)} \cdot (\underline{M}^{(e)})^T = \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A $\underline{K}^{(e)} = k \cdot \underline{M}^{(e)}$ tagot az adott elem merevségi mátrixának is szokás nevezni, mely összevonás alkalmazása az

$$\underline{f}^{(e)} = \underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} \quad (3.18)$$

alakra vezet, amely hasonlít a Hooke-törvény skaláris alakjára.



3.6. ábra: A vizsgált elem két végpontján ható külső és belső erők [14]

Az $\underline{f}$ oszlopvektor a külső erőket, azaz a terheléseket reprezentálja, külön sorban az x és a z komponenseket (térbeli modellnél az y komponenssel bővül).

A rugalmas és csillapító tagot is tartalmazó elemekre ható erő függvénye lesz a megnyúlásnak és a megnyúlás sebességének:

$$P_{k,c}^{(e)} = k \cdot \delta + c \cdot \dot{\delta} \quad (3.19)$$

Így a tisztán rugalmas elemekkel szemben (az előző összevonások alkalmazásával) nem csupán a megnyúlás szerepel a (3.20) egyenletben:

$$\underline{f}^{(e)} = \underline{M}^{(e)} \cdot \underline{P}_{k,c}^{(e)} = \underline{K}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} + c \cdot \dot{\theta}^{(e)} \cdot \underline{N}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} + c \cdot \underline{M}^{(e)} \cdot \underline{\dot{u}}^{(e)} \quad (3.20)$$

ahol

$$\underline{N}^{(e)} = \underline{M}^{(e)} \cdot (\underline{N}^{(e)})^T = \begin{bmatrix} sc & -c^2 & -sc & c^2 \\ s^2 & -cs & -s^2 & cs \\ -sc & c^2 & sc & -c^2 \\ -s^2 & cs & s^2 & -cs \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.2.1. A θ szög kiküszöbölése

Az $\underline{M}$ és $\underline{N}$ mátrixok számítási műveletei jelentősen egyszerűsödnek a szinusz és koszinusz függvények mellőzésével, ha a $\theta^{(e)}$ adott ij csomópontok által közrefogott elemre vonatkozó szög (az előzőekben csak θ -val jelölve) a csomópontok helyzetével van felírva. A csomópontok koordinátái legyenek:

$$p_i = (x_i, z_i) \quad p_j = (x_j, z_j) \quad (3.22)$$

Így a $\theta (= \theta^{(e)} = \theta_{i,j})$ szög:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{z_j - z_i}{x_j - x_i} \quad (3.23)$$

Az alábbi két azonosság alkalmazásával

$$\sin(\tan^{-1} \xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad \cos(\tan^{-1} \xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (3.24)$$

átírhatók a mátrixok elemi:

$$\underline{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & -1 & -\xi \\ \xi & \xi^2 & -\xi & -\xi^2 \\ -1 & -\xi & 1 & \xi \\ -\xi & -\xi^2 & \xi & \xi^2 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \xi^2} \quad \underline{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} \xi & -1 & -\xi & 1 \\ \xi^2 & -\xi & -\xi^2 & \xi \\ -\xi & 1 & \xi & -1 \\ -\xi^2 & \xi & \xi^2 & -\xi \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \xi^2} \quad (3.25)$$

ahol

$$\xi = \frac{z_j - z_i}{x_j - x_i} \quad (3.26)$$

Mivel a θ szög számításánál a tangens szögfüggvény inverze szerepel, ezt kiváltva a fenti hányados az $x_j = x_i$ esetben végtelent ad. Ekkor a két vizsgált i és j csomópont egymás „felett” van, x koordinátáikban megegyeznek. Ez azonban nem ad értelmezhetetlen elemeket a mátrixok esetén, hiszen az alábbi három elem (+ és – értékei) fordulhat elő:

$$\frac{1}{1+\xi^2}\Big|_{\xi \rightarrow \infty} = 0 \quad \frac{\xi}{1+\xi^2}\Big|_{\xi \rightarrow \infty} = 0 \quad \frac{\xi^2}{1+\xi^2}\Big|_{\xi \rightarrow \infty} = 1 \quad (3.27)$$

Az értékek behelyettesítésével az olyan speciális esetekben, amikor a két csomópont által közrefogott elem merőleges az x tengelyre, a két mátrix az alábbiak szerint változik.

$$\underline{\underline{M}}^{(e)}\Big|_{\xi \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{N}}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

A mátrixok számolásánál tehát figyelembe kell venni az osztás előtt a ξ nevezőjét, hogy ne lehessen nulla. Ha mégis, az osztást nem elvégezve a mátrixok elemei a fenti „speciális” értékeket fogják tartalmazni.

Már csupán a $\dot{\theta}$ szögváltozás számításához kell a θ szög értékét felhasználni, azonban ez is kifejezhető másképpen:

$$\dot{\theta}^{(e)} = \frac{d(\tan^{-1} \xi)}{dt} = \frac{1}{1+\xi^2} \dot{\xi} = \frac{(\dot{z}_j - \dot{z}_i)(x_j - x_i) - (\dot{x}_j - \dot{x}_i)(z_j - z_i)}{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.29)$$

Megfigyelve az előzőeket és a **3.5. ábrát**, felismerhető, hogy egy tetszőleges kiválasztott i csomópont x koordinátájának megváltozása ($\dot{x}_i$) egyenlő $\dot{u}_{i_x}$ -el, z koordinátájának megváltozása ($\dot{z}_i$) pedig egyenlő $\dot{u}_{i_z}$ -el.

$$\underline{\dot{u}}^{(e)} = [\dot{x}_i \quad \dot{z}_i \quad \dot{x}_j \quad \dot{z}_j]^T \quad \underline{q} = \frac{[z_j - z_i \quad -(x_j - x_i) \quad -(z_j - z_i) \quad x_j - x_i]}{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.30)$$

Így a $\dot{\theta}$ értéke egy sor és egy oszlopvektor szorzata, ami skalárt ad:

$$\dot{\theta}^{(e)} = \underline{q} \cdot \underline{\dot{u}}^{(e)} \quad (3.31)$$

E felírással nem szükséges a θ szög kiszámítása és elkerülhető a trigonometrikus függvények alkalmazása.

$$\underline{\underline{C}}_M^{(e)} = c \cdot \underline{\underline{M}}^{(e)} \quad \underline{\underline{C}}_N^{(e)} = c \cdot \underline{\underline{N}}^{(e)} \quad (3.32)$$

összevonásokkal:

$$\underline{f}^{(e)} = \underline{\underline{K}}^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)} + \underline{\underline{C}}_M^{(e)} \cdot (\underline{q} \cdot \underline{\dot{u}}^{(e)}) \cdot \underline{u}^{(e)} + \underline{\underline{C}}_N^{(e)} \cdot \underline{\dot{u}}^{(e)} \quad (3.33)$$

a kerékmodell egy elemének differenciál-egyenletrendszerében már csak a megnyúlások és azok deriváltjai szerepelnek. Mivel így már rendelkezésre állnak a rendszer részegységeit leíró összefüggések, így ezek összevonásával megalkotható a teljes kerékmodell rendszere.

3.3. Elemek összevonása

A kerékmodell szerkezetileg az alábbi elemekből épül fel:

- A gumibroncs külsejét $2n$ db kerületi abroncs elem valósítja meg, melyek mindegyike rendelkezik egy rugós (k_{t_x}) és egy csillapító (c_{t_x}) taggal.
- A gumibroncs belsejét és oldalsó felszínét reprezentálja a $3n$ db belső elem, melyek mindegyike rendelkezik rugós és csillapító taggal.
- A felni kerületi ívét n db k_{r_z} merevségű elem hivatott modellezi.
- A felni belsejét és az oldalsó felszínének leírásáért n db sugárirányú (belső) k_{r_z} merevségű elem felelős.

Ez összesen $7n$ db elemet jelent. A szerkezet csomópontjainak száma:

$$3n + 1 \quad (3.34)$$

A síkbeli modell esetén minden csomópontnak x és z irányba is lehet elmozdulása, így a teljes szerkezet 3 oszlopvektorral ($\underline{f}$, $\underline{u}$ és $\underline{\dot{u}}$) és 3 darab négyzetes mátrixszal ($\underline{K}$, $\underline{C}_M'$ és $\underline{C}_N$), valamint a kényszerek hozzá vételével írható le. A mátrixok mérete:

$$(6n + 2) \times (6n + 2) \quad (3.35)$$

Ez azt jelenti, hogy $n = 4$ esetén 26 sorral és oszloppal rendelkeznek a mátrixok, valamint az oszlopvektorok 26 elem hosszúak, és a (3.36) differenciál-egyenletrendszer adja majd a kerékmodell megoldását:

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{u} + \underline{C}_M' \cdot \underline{u} + \underline{C}_N \cdot \underline{\dot{u}} \quad (3.36)$$

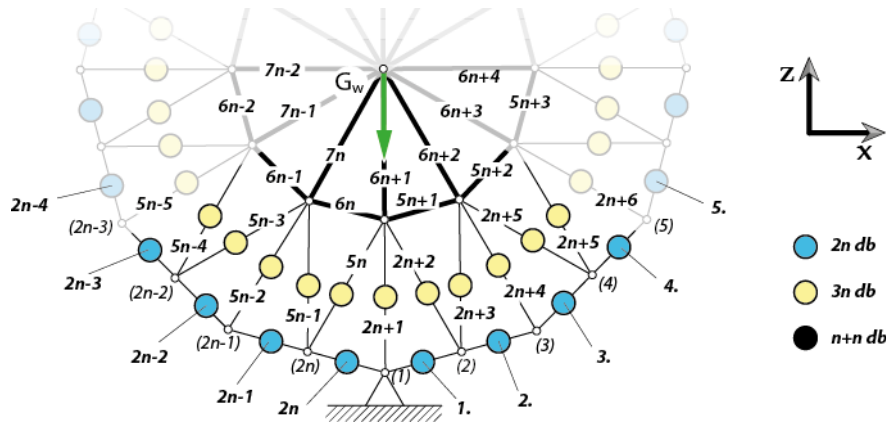
A csomópontok jelölésénél célszerű egy általánosan alkalmazható (n nagyságától független) számozási rendszert bevezetni. A kezdeti elem legyen a deformálódatlan alak esetén a legalacsonyabban lévő (azaz a talajjal érintkező egyetlen) pont, és a számozás történjen a pozitív irányba (óra mutató járásával ellentétesen), valamint spirálisan szűküljön a kerék középpontja felé.

csomópontok	számozás
Abroncs kerületi pontjai	$1, \dots, 2n$
Felni kerületi pontjai	$2n + 1, \dots, 3n$
Kerékközéppont	$3n + 1$

Az abroncs kerületi csomópontjaihoz váltakozva 3 és 4 darab elem, a felni kerületi pontjaihoz pedig mindig 6 darab elem, illetve a kerék középpontjához n darabszámú elem csatlakozik. Ezek alapján:

$$(4n + 3n) + 6n + n = 14n \quad (3.37)$$

elem-egyensúlyi egyenlet írható fel. Természetesen ezek nem mindegyike független, hiszen minden elem két csomópontnál szerepel, és a cél a független csomóponti egyenletek felírása. A közös rúdelemek esetén a megfelelő egyenleteket összeadva $6n + 2$ egyenletté egyszerűsödik a modellt leíró differenciál-egyenletrendszer.



3.7. ábra: Négyszög alakú kerékmodell számozása, jelölései.

elemek	számozás	hozzájuk tartozó csomópontok
Gumiabroncs kerületi elemei	1, ..., 2n	Az abroncskerületi pontok közötti elemek
Gumiabroncs sugárirányú (vagy belső) elemei	2n + 1, ..., 5n	Az abroncs kerületi pontok és a velük sugárirányba elhelyezkedő felni kerületi pontok közötti elemek
Felni kerületi elemei	5n + 1, ..., 6n	A felni kerületi pontjai között elhelyezkedő elemek
Felni sugár irányú (belső) elemei	6n + 1, ..., 7n	A felni kerületi pontjai és a kerék középpontja által közrefogott elemek

Az oszlopvektorok sorai hasonlóak egymáshoz, ugyanazon csomópont, ugyanazon tengely irányába eső komponensei tartalmazzák, így a csomópontba ható külső erők alapján az $\underline{u}$ és $\underline{\dot{u}}$ elemeinek elhelyezkedése is egyértelmű:

$$\underline{f} = [f_{1_x} \ f_{1_z} \ f_{2_x} \ f_{2_z} \ \dots \ f_{6n+2_x} \ f_{6n+2_z}]^T \quad (3.38)$$

A mátrixok pedig négyzetes elrendezésűek, $6n + 2$ sorral és ugyanennyi oszloppal. Ha a csomópontoknál a 3.7. ábrán látható számozás van alkalmazva, valamint pontok elmozdulásainak x és z komponensei felváltva követik egymást, a kapott mátrixok deformálódás előtti állapotra és a kerék z tengelyére szimmetrikus alakváltozások esetén szimmetrikusak. A mátrixok felhasználása előtt azonban figyelembe kell venni a szerkezet kényszereit, melyek nélkül a modell nem adna megoldást.

3.3.1. Kényszerek hozzáadása a szerkezethez

A kényszerek hozzáadásával bizonyos csomópontok elmozdulásainak korlátozottságai vehetők figyelembe. Ilyen például kiinduló esetben a talajt érintő egyetlen pont x és z irányú elmozdulása. Továbbá szükség van egy harmadik kényszerre is, mely azért szükséges, hogy a rendszermátrix invertálható legyen. A rendszermátrix ugyanis az előbb említett egyetlen pontra alkalmazott két kényszerrel nem lesz invertálható, ugyanis a mátrix ekkor még tartalmazza azokat az eseteket is, amikor a szerkezet „eldől”, elfordul a talajjal való rögzítési pontja körül. Ez instabilitást jelent, így ezen eset kizárása nélkül a mátrix egyenletei nem lesznek függetlenek, és az így létrejövő mozgás leírására további egyenletekre lenne szükség. A harmadik kényszer megválasztására legalkalmasabb a kerék középpontjának x irányú elmozdulásának korlátozása, mellyel összesen 3 kényszert tartalmaz a szerkezet, és a rendszermátrix mindig invertálható lesz, egyértelmű megoldást ad a csomópontok elmozdulásaira.

Megjegyzésképp, az első elrendezési forma, a **3.1. ábra** alapján a 3 kényszerrel sem lenne stabil, hiszen a négyszögek instabilitása miatt az n számának növelésével újabb és újabb kényszerek hozzáadására lenne szükség.

A deformációk során folyamatosan figyelnie kell a kerékmodellnek, hogy van-e újabb csomópont, amely elérte a talaj szintét, mert ekkor ezekre dinamikusan újabb korlátozásokat kell felvennie. Így a kényszerek száma a deformáció lezajlása során bővíthet, terhelés csökkentése esetén pedig csökkenhet a kényszerek szám, egyes pontok elemelkedhetnek a talajtól. A kényszerekkel kiesett egyenletekbe a kiszámolt elmozdulás-értékeket visszahelyettesítve megkaphatók az adott irányba ébredő külső erők (például: támaszerők).

3.4. Modell diszkretizálása

A számítógép által használt megoldó algoritmus mindenképp valamilyen numerikus közelítést használ, azonban a módszer összetettsége jelentősen lelassítaná a számítás folyamatát, ezért a legegyszerűbb numerikus differenciálszámítás kerül alkalmazásra. A folytonos modell diszkrét alakítása:

$$\dot{\underline{u}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{u}(t) - \underline{u}(t - \Delta t)}{\Delta t} \approx \dot{\underline{u}}[k] = \frac{1}{h} (\underline{u}[k] - \underline{u}[k - 1]) \quad (3.39)$$

Ahol h a mintavételezési idő nagysága, és a k mintavételi pontokban lesz kiértékelve az egyenletrendszer megoldása.

Egy elem differencia-egyenletrendszere:

(3.40)

$$\underline{u}^{(e)}[k] = \left(\underline{K}^{(e)} - \frac{1}{h} \cdot \underline{C}_M^{(e)} \cdot \underline{\dot{\theta}}^{(e)}[k-1] + \frac{1}{h} \cdot \underline{C}_N^{(e)} \right)^{-1} \cdot \left(\underline{f}^{(e)} + \frac{1}{h} \cdot \underline{C}_N^{(e)} \cdot \underline{u}^{(e)}[k-1] \right)$$

ahol habár kis hibát vétve a $\underline{\dot{\theta}}^{(e)}[k]$ helyett $\underline{\dot{\theta}}^{(e)}[k-1] = \underline{q}^{(e)}[k] \cdot (\underline{u}^{(e)}[k-1] - \underline{u}^{(e)}[k-2])$ helyettesítést fogja alkalmazni a modell, hiszen az előbbiben szereplő $(\underline{u}^{(e)}[k] - \underline{u}^{(e)}[k-1])$ taggal nem rendezhető át a **(3.40)** egyenletrendszer, hiszen az $\underline{u}^{(e)}[k]$ ekkor nem emelhető ki.

A teljes rendszer differencia-egyenletrendszere:

$$\underline{u}[k] = \left(\underline{K}[k-1] + \underline{C}_M'[k-1] + \underline{C}_N'[k-1] \right)^{-1} \left(\underline{f}[k] + \underline{f}_*[k-1] \right) \quad (3.41)$$

Amíg a szerkezet deformálódik, azaz vannak mozgások és így elmozdulások, minden mintavételezési időpillanatban változnak az egyes elemek helyzetei, és így a lokális koordináta-rendszerük is. Ezért van szükség minden $\underline{u}[k]$ -nál a $\underline{K}$ és $\underline{C}$ mátrixok újraszámítására. Tömören fogalmazva a merevségi és csillapítási mátrixok időben változnak, a rendszer (paramétereiben) idővariáns. A diszkrét alakítás nagy előnye, hogy csupán az előző két iterációból kapott elmozdulások értékei kerülnek felhasználásra a számolásoknál, és a h csökkentésével a modell szintén finomítható. Az elmozdulások kezdeti értéke $\underline{0}$ nullvektor. Álló (nem forgó) keréknél és deformálódatlan alak esetén a külső erők oszlopvektorának elemei mindegyike zérus, deformálódás során a középpontban hat egy tisztán csak z komponenssel rendelkező a kerékre eső nehézségi erő, a G_w , illetve ekkor a talajjal érintkező pontok esetén a kialakuló z irányú erők ismeretlenek. Kezdetben csupán az (1)-es csomópont érinti a talajt. A következő táblázatban olvashatók a lépések, amelyeken a kerékmódel végigmegy minden egyes iteráció során.

3.4.1. Iterációs lépések

1. lépés: Az előző iterációból kapott értékek (vagy kezdeti értékek) felhasználásával az összes elemre egyenként az alpontok végigszámítása. Természetesen a mátrixok és oszlopvektorok is idővariánsak, azonban az átláthatóság érdekében nincs kiírva a $[k]$ érték.

1.a. lépés: ξ érték számítása ($3n + 4n + n = 8n$ darab különböző érték)

$$\xi^{(e)} = \frac{z_j[k-1] - z_i[k-1]}{x_j[k-1] - x_i[k-1]} \quad \underline{\xi}_M^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & \xi^{(e)} \\ \xi^{(e)} & \xi^{(e)^2} \end{bmatrix} \quad \underline{\xi}_N^{(e)} = \begin{bmatrix} \xi^{(e)} & -1 \\ \xi^{(e)^2} & -\xi^{(e)} \end{bmatrix}$$

1.b. lépés: $\underline{\underline{M}}^{(e)}$ és $\underline{\underline{N}}^{(e)}$ mátrixok számítása ($2 \cdot 8n$ darab mátrix) $\underline{\underline{M}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\xi}}_M^{(e)} & -\underline{\underline{\xi}}_M^{(e)} \\ -\underline{\underline{\xi}}_M^{(e)} & \underline{\underline{\xi}}_M^{(e)} \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \xi^2}$ $\underline{\underline{N}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\xi}}_N^{(e)} & -\underline{\underline{\xi}}_N^{(e)} \\ -\underline{\underline{\xi}}_N^{(e)} & \underline{\underline{\xi}}_N^{(e)} \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \xi^2}$	
1.c. lépés: Az alábbi értékek számítása $\underline{\underline{K}}^{(e)} = k^{(e)} \cdot \underline{\underline{M}}^{(e)}$ $\frac{1}{h} \cdot \underline{\underline{C}}_M^{(e)} = \frac{1}{h} \cdot c^{(e)} \cdot \underline{\underline{M}}^{(e)}$ $\frac{1}{h} \cdot \underline{\underline{C}}_N^{(e)} = \frac{1}{h} \cdot c^{(e)} \cdot \underline{\underline{N}}^{(e)}$ $f_*^{(e)} = \frac{1}{h} \cdot \underline{\underline{C}}_N^{(e)} \cdot \underline{\underline{u}}^{(e)}[k-1]$	
1.d. lépés: $\underline{\underline{\dot{\theta}}}^{(e)}$ kiszámítása $q_1 = z_j[k-1] - z_i[k-1]$ $q_2 = x_j[k-1] - x_i[k-1]$ $\underline{\underline{q}}^{(e)}[k-1] = \frac{[q_1 \quad -q_2 \quad -q_1 \quad q_2]}{q_2^2 + q_1^2}$ $\underline{\underline{\dot{\theta}}}^{(e)}[k-1] = \underline{\underline{q}}^{(e)}[k-1] \cdot (\underline{\underline{u}}^{(e)}[k-1] - \underline{\underline{u}}^{(e)}[k-2])$	
2.a lépés: Az 1.c. és 1.d. lépéseknél kapott eredményekből a teljes szerkezet 3 mátrixának kialakítása, ahol figyelembe kell venni hogy az egyes elemek mely csomópontokhoz tartoznak, itt jön számításba a szerkezet elemeinek kapcsolódása (sarkalatos pont). $\underline{\underline{K}}^{(e)} \Rightarrow \underline{\underline{K}}$ $\frac{1}{h} \cdot \underline{\underline{C}}_M^{(e)} \Rightarrow \underline{\underline{C}}_M'$ $\frac{1}{h} \cdot \underline{\underline{C}}_N^{(e)} \cdot \underline{\underline{\dot{\theta}}}^{(e)}[k-1] \Rightarrow \underline{\underline{C}}_N'$	
2.b lépés: A kényszerek figyelembe vétele. Azon pontok, amelyek a talajt érintik, nem mozdulhatnak el vertikálisan, így ezen elmozdulás-értékekhez tartozó sorok és oszlopok kivétele a mátrixokból és oszlopvektorokból ($\underline{\underline{f}}$ és $\underline{\underline{f}}_*$).	
3. lépés: A három mátrix összegének invertálása, majd ennek szorzása jobbról az erők módosított oszlopvektorával $\underline{\underline{u}} = (\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{C}}_M' + \underline{\underline{C}}_N')^{-1} (\underline{\underline{f}} + \underline{\underline{f}}_*)$	
4.a. lépés: Az elmozdulásokból az elemekben ébredő belső erők számolása.	
4.b. lépés: Az elmozdulások felhasználásával a kényszerrel ellátott csomópontokhoz tartozó külső erők meghatározása, azaz hogy milyen külső erők ébrednek a kényszer irányába.	
4.c. lépés: A csomópontok koordinátáinak értékeihez az elmozdulásokat hozzáadva megkapható a következő iterációban használt koordinátaértékek (illetve a kerékmodell rajzolásához).	

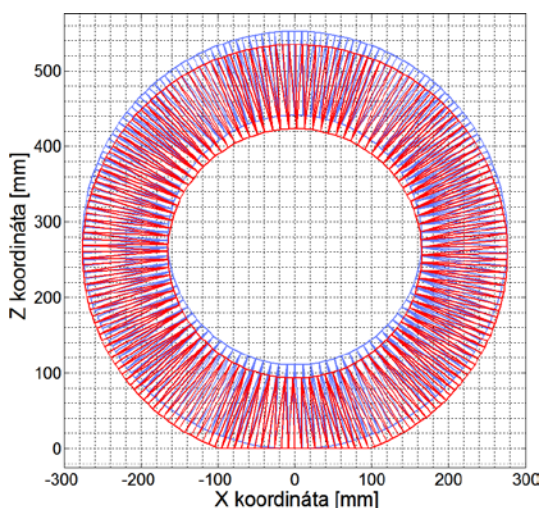
3.5. Álló kerék deformációi az összetett kerékmodellben

A rugós és csillapítós tagokból felépülő kerékmodell álló helyzetben végbemenő deformációit egy konkrét eseten célszerű bemutatni, így a **3.8. ábrán** látható 180/60R14-es kerék geometriai méreteivel rendelkező kerék segítségével fog történni a modell ismertetése. A gumiabroncs típusa szerint a felni átmérője $\sim 35,56$ cm, míg a teljes keréké $\sim 57,17$ cm. Az alkalmazott felosztás sűrűsége $n = 100$. A modellnél használt geometriai értékek:

$$\begin{aligned} R_0 = R_{tire} &= 0.572m \\ R_{rim} &= 0.356m \end{aligned} \quad (3.42)$$

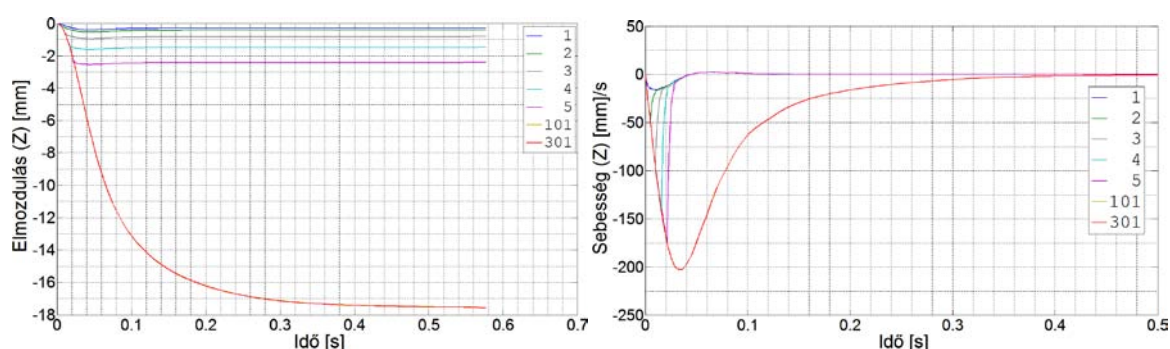
A vizsgálatnál alkalmazott kerékelem paramétereit sűrűségekkel célszerű megadni, azaz a belső elemek esetén egységnyi szögosztásra és hosszúságra vetítve. Az alábbi táblázatban az elemre átszámolt értékek láthatók, amelyek az aktuális példánál kerültek felhasználásra. A sűrűségek megadással az egyes elemek rugalmas és csillapítási tagjai az n szögosztás függvényei lesznek, azonban a tapasztalatok alapján közel azonosan viselkedik a paramétereiben sűrűséggel megadott és különböző n értékekkel lefuttatott kerékmodell.

Felni rugalmas tagok	Abroncs rugós tagok	Abroncs csillapító tagok
$k_{r_z} = 2.18 \cdot 10^7$	$k_{t_z} = 1.62 \cdot 10^4$	$c_{t_z} = 1.62 \cdot 10^3$
$k_{r_x} = 3.47 \cdot 10^8$	$k_{t_x} = 2.08 \cdot 10^5$	$c_{t_x} = 2.08 \cdot 10^4$



3.8. ábra: Rugós-csillapító tagokból álló kerékmodell alakváltozása (pirossal).
(150 iteráció $\sim 0,6$ másodperc után eredménye)

A mérésnél használt mintavételezési idő nagysága sarkalatos pontja a modellnek, az eddigi tapasztalatok alapján értékét célszerű folyamatosan változtatni, hiszen kezdetben az elmozdulások igen gyorsak, 10^{-4} másodperces tartományban is számottevőek, ugyanis a talajhoz közel helyezkednek el a csomópontok. A keréktengelyre helyezett terhelés pedig 400 kg. A vizsgált időtartomány 0,6 másodperc, amely során a modell 150 darab iterációt végzett. Az alakváltozást megfigyelve észrevehető, hogy a talajhoz közeli kerületi pontok igen enyhén távolodnak a kerék z tengellyel párhuzamos szimmetriatengelyétől, és ebben az eltávolodott helyzetben érnek földet. A kerék formája egyre inkább elliptikussá válik, az oldalsó pontjai a szimmetriatengelytől szintén távolodnak, mialatt a felni megközelítően megtartja alakját.



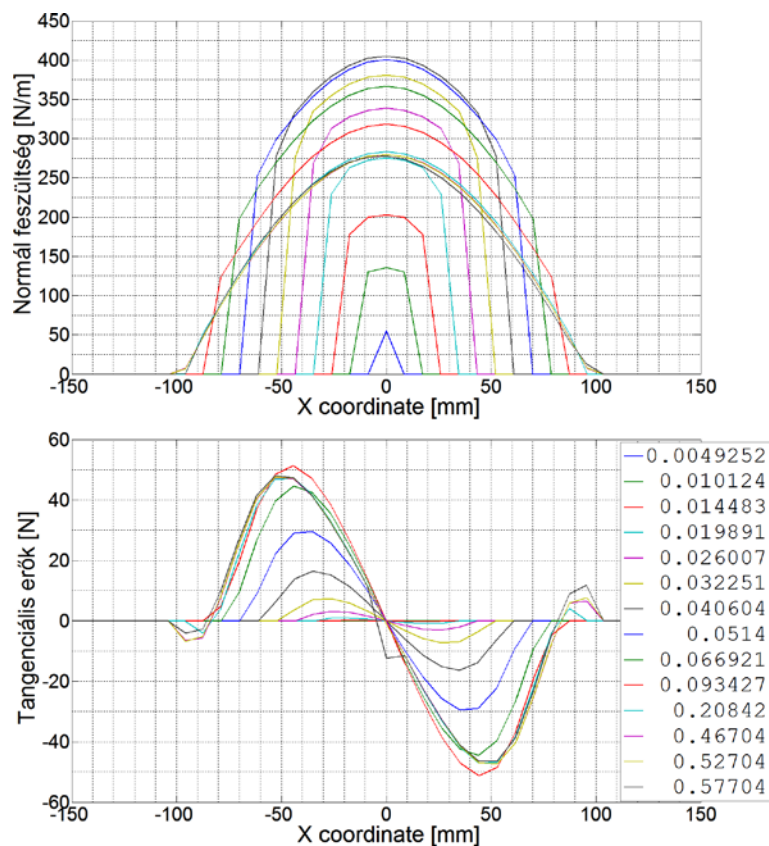
3.9. ábra: Balra az elmozdulás-, míg jobbra a sebesség-idő –függvények láthatók.

A kerület mentén a függőleges tengelytől az első 5, valamint a legmagasabban elhelyezkedő 101, és a kerékközéppont a 301-essel ($3N+1$) látható.

A **3.8. ábrán** bemutatott eredmények több hónap folyamatos programozás eredményei, és az alkalmazott algoritmus forráskódja folyamatos fejlesztés és finomítás alatt van, így a mostani formája koránt sem végleges. A **3.9. ábráról** látható, hogy a fenti paraméterekkel a rendszer túlszállított másodrendű rendszerként viselkedik. Az 1-5 számozású kerületi pontok addig végeznek mozgást, amíg a talajt el nem érik, utána enyhén fel, majd lefelé mozognak (rugózás). A jobboldali sebesség ábrán e jelenség jobban kivehető az első ~ 25 ms-ban. A 101-es pont és a 301-es pontok elmozdulásai azonosak, ezért az előbbi nem különíthető el a méretbeli ábrázolásnál.

A **3.10. ábrán** látható, hogy a talajérintési szakasz ~ 20 cm nagyságú az állandósult állapotban. A normálerők eloszlása időben növekvő amplitúdójú, és ahogy egyre több pont éri el a talajt egyre inkább szétterül, majd egy maximumot elérve az amplitúdó elkezd csökkenni, és ellaposodik. A tangenciális (felületre párhuzamos) irányú erők ezzel szem-

ben végig növekednek, és alakjuk hasonló marad, csupán az amplitúdójuk, és maximum helyeik változnak (a függőleges tengelytől távolodnak).



3.10. ábra: Felül a normál irányú erők, míg alul a tangenciális irányú erők időben való eloszlása látható. A feliratban a görbék időbeli értékei láthatók másodpercben.

3.6. Forgómozgást végző kerék a rugós-csillapítós modellben

Ahogy az előző fejezetekben bemutatásra került az álló helyzetben deformálódó kerékmodell, és az alkotóelemek elrendezése valamint funkciója fokozatosan megismerhetővé válik, úgy tovább lépve a forgásban lévő kerék vizsgálata kerül a figyelem középpontjába.

A kerékmodell elemei két fő csoportba sorolhatók a merevségük szerint:

- Deformálódásra csak szélsőségesen nagy erők hatására képes elemek, ide tartoznak a felni alkotó „rúdelemek”.
- A gumibroncsot alkotó sugár és kerületi (valamint térbeli modell esetén oldalirányú) elemek, melyek alakváltozása meghatározó a modell szempontjából.

Mindkét csoport elemeit csuklók kötik össze, amelyek elméletben nem képesek nyomaték átadására. Ez akadályt jelenthet, hiszen a hajtott kerekek keréktengelyén forgatónyomaték adódik át, amely a valóságban hajtja a kereket, és kényszeríti mozgásra/mozgásállapot változásra a kereket és ezáltal a járművet. Mivel a felni elemei normál körülmények között deformálódásra nem képesek, így a keréktengely nyomatéka átszármaztatható a felni kerületi pontjaira tett erőpárokkal, F_{mot} . Ezért is fontos a kerékmodellen belül a *páros csúcs-számú sokszögre* való felbontása a keréknek.

A motor által leadott nyomaték értéke természetesen nem csupán pozitív irányú lehet, ilyen esetek például a tolatás, motorfék – gázadás és kuplungpedál benyomása nélküli gurulás.

$$F_{mot} = \frac{M_{mot}}{2R_{rim}n} \quad (3.43)$$

Ilyen negatív irányú nyomatékot ad még az előremenetben való fékezés (illetve ha a járműben található valamilyen energia-visszanyerő rendszer, amely a fékezésnél hővé alakuló teljesítményt igyekszik hasznosítani egy generátor meghajtásával).

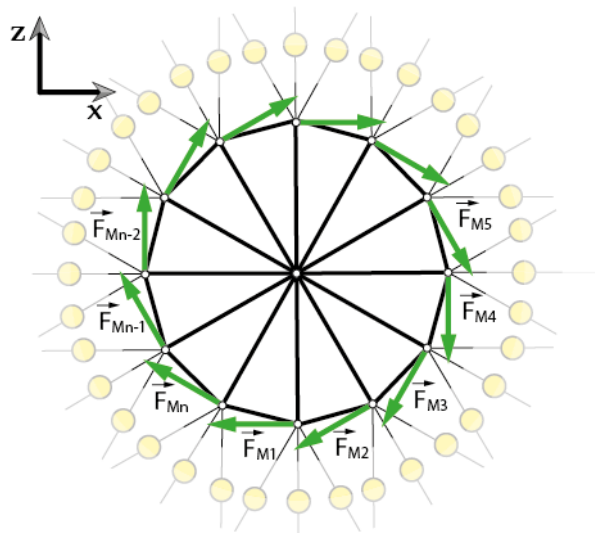
$$F_{break} = \frac{F_b \cdot R_b}{2R_{rim}n} \quad (3.44)$$

ahol F_b a fékpofák által együttesen kifejtett erő, R_b a fékpofák távolsága a kerék tengelyétől. Az F_b számítása annak függvényében változhat, hogy a jármű fékrendszerének milyen felépítése (tárcsafék, dobfék) valamint milyen üzemi paraméterekkel rendelkezik (kopottság, hőmérséklet), azonban a modell abból indul ki, hogy az F_b értéke a fékpedál helyzetének függvényében ismert.

A két átszarmaztatott F_{mot} és F_{break} erő különbségét kell a felni kerületére helyezni párosával, a **3.11. ábrán** feltüntetett elrendezés szerint.

Ezek alapján kifejezve az átszarmaztatott „nyomatéki” erőre a **(3.45)** egyenlet adódik

$$F_{M_i} = \frac{M_{mot} - F_b \cdot R_b}{2R_{rim}n} \quad (3.45)$$



3.11. ábra: A hajtás és fékezésből adódó nyomaték átszarmaztatása a felni kerületi pontjaira.

Mivel a felni a teljes vizsgálati tartományon merevnek tekinthető, így az F_M „nyomatéki” erő iránya minden felni kerületi pontban a hozzá húzott keréksugárra merőleges, azaz a felni kerületére érintő irányú (követi a felni elfordulását), és a nyomaték függvényében az erő nagysága változhat az időbeli vizsgálatok során.

A rugós-csillapítós modell fejlesztése e befejezetlen, **3.6.** fejezetben leírtak alapján a kerekmodell bővítésével történne. A távlati célok szerint a forgási mozgások során a csillapító tagokban elnyelt energiával modellezhető a kerék alak-deformációjához szükséges energia bevitelnél fellépő, a szakirodalomban gördülési ellenállásnak nevezett fizikai jellemző.

4. Konklúziók és távlati célok

A pusztán sugár irányú deformációkat eszközölő kerékmodell és a rugós-csillapítós tagokat tartalmazó kerékmodell által adott deformációs alakok számottevő mértékben nem térnek el, így kis terhelések esetén elhanyagolhatóan kicsi hibát követ el a kerékmodell, ha az egyszerűbb modellt használja.

A bonyolultabb modell előnye erősen terhelt, lapos (alacsonyabb nyomású) és lágyabb (alakváltozásra hajlamosabb) abroncsok esetén bontakozhat ki, amikor a tapadási felület számottevő mértékben eltér az egyszerűbb sugárirányú deformációkat figyelembe vevő kerékmodelltől.

A rugós-csillapítós kerékmodellnél meghatározott elmozdulásokból a rúdírányú erők igen egyszerűen visszaszámolhatók, így ismertekké válnak a gumiabroncsot modellező elemekben ébredő belső erők, valamint a kényszerek által kiejtett egyenletekbe szintén behelyettesítve az elmozdulások értékét, a talajon ébredő normálerők is meghatározhatók.

Ha az n osztás kellően finom, a normálerők eloszlásából és a talaj minőségi jellemzőiből a talajt érintő adott pontok csúszására, tapadására is lehet becslést adni, ezáltal a sugárirányú kerékmodellnél tapasztalt jelenség (2.4. fejezet) igazolást nyerhet.

Ha a kerékfelületén ébredő erők a kerékmodellekből ismertekké válnak, akkor ezekből a talaj síkjába eső horizontális erők és a vertikális erők értékei, és így a járműre ható eredő erők és nyomatékok értékei is kinyerhetők. Ezáltal a Biciklimodellhez hasonló síkbeli egy-nyomú, vagy négykerekű, esetleg térbeli járműmodell megalkotásának első alapköve lehelyezésre kerül.

ÁBRAJEGYZÉK

1.1. ábra: a Biciklimodell felépítése (az indexelés: h - hátsó; e - első; s - súrlódási; c - centrifugális; A - Ackermann-szöghöz tartozó) [1]	3
1.2. ábra: a Biciklimodell első és hátsó kerekén lévő szögek viszonyai.....	5
1.3. ábra: Szögfüggvények „relatív” hibái.....	6
1.4. ábra: Úszási szög számítása az jármű elektronikus egységeinek jeleiből.	7
1.5. ábra: A számítógépes jelkondicionálással kapott úszási szög függvényei	8
2.1. ábra: Álló kerekek különböző terhelése a kerékmodellben	9
2.2. ábra: Forgásban lévő kerék a modellben	10
2.3. ábra: Kerékabroncs kerületi pontjainak mozgása – X-Y koordinátasíkon	13
2.4. ábra: Kerékabroncs kerületi pontjainak mozgása – X-Y koordinátasíkon	14
2.5. ábra: Kerékabroncs kerületi pontjainak elmozdulása $x(t)$ [kék] és $y(t)$ [zöld] függvényekkel időben külön bontva.	14
2.6. ábra: A (2.14) egyenlet grafikusán megjelenítve, $\bullet = \bullet + \bullet$	15
2.7. ábra: Két szomszédos kerületi pont távolságának abszolút értéke (kezdeti távolsága 15,35 cm).....	15
2.8. ábra: 1 kerületi pont mozgási pályája. 1. oszlop: szögsebesség állandó, és a v változó. 2. oszlop: a v állandó, és ω változó.....	16
3.1. ábra: Térbeli, illetve síkbeli álló kerék modelljének kezdeti elképzelése.....	17
3.2. ábra: Rúdelemekből felépülő kerékmodell végleges formája. Bal oldalon a térbeli, jobb oldalon a síkbeli kerékmodell. A k a rugós, a c a csillapító tagok paraméterei. A felni-elemek vastag vonallal.	18
3.3. ábra: Példák rácsos tartókra, és olyan mérnöki szerkezetre, amely rácsos tartóként modellezhető. [9,10,11].....	19
3.4. ábra: Az n sokszög jelképezi a kereket, és minél finomabb a szögosztás ($n \rightarrow \infty$), annál pontosabban közelíti a modellt a valóságos kerék alakját.	20
3.5. ábra: Általános esetben két csomópont által közrefogott elem elmozdulásai [14].....	24
3.6. ábra: A vizsgált elem két végpontján ható külső és belső erők [14].....	25
3.7. ábra: Négyszög alakú kerékmodell számozása, jelölései.	29
3.8. ábra: Rugós-csillapító tagokból álló kerékmodell alakváltozása (pirossal). (150 iteráció $\sim 0,6$ másodperc után eredménye).....	33

3.9. ábra: Balra az elmozdulás-, míg jobbra a sebesség-idő –függvények láthatók. A kerület mentén a függőleges tengelytől az első 5, valamint a legmagasabban elhelyezkedő 101, és a kerékközéppont a 301-essel (3N+1) látható.....	34
3.10. ábra: Felül a normál irányú erők, míg alul a tangenciális irányú erők időben való eloszlása látható. A feliratban a görbék időbeli értékei láthatók másodpercben.	35
3.11. ábra: A hajtás és fékezésből adódó nyomaték átszármaztatása a felni kerületi pontjaira.....	37

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] **Zomotor, Ádám.** *Gépjármű menetdinamika.* Budapest : Maróti Könyvkereskedés és Könyvkiadó Kft., 2006.
- [2] **Dr. Peter Rieth, Stefan A. Drumm, Michael Harnischfeger.** *Electronic Stability Program.* Stuttgart 2002
- [3] **Hangos, Katalin és Szederkényi, Gábor.** *Dinamikus rendszerek paramétereinek becslése.* Veszprém : Veszprémi Egyetemi Kiadó, 1999.
- [4] **Csendes, Tibor.** Az optimalizálás alkalmazásai (előkészületben). *Szegedi Tudományi Egyetem - Informatikai Tanszékcsoport.* [Online] 2006. [Hivatkozva: 2011.10.20.] http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/oktatas_hu.html.
- [5] **Ramajani, Rajes.** *Vehicle Dynamics and Control.* University of Minnesota, USA : Springer, 2006. ISBN 0-387-26396-9, e-ISBN 0-387-28823-6.
- [6] **Reza N. Jazar.** *Vehicle Dynamics.* Dept. of Mechanical Engineering, Manhattan College, Riverdale, NY 10471, 2008
- [7] **Vable, Madhukar.** *Mechanics of Materials.* Oxford University Press, Oxford, 2002
- [8] **Roylance, David.** *Trusses.* Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (MA 02139). June 8, 2000.
- [9] **Made-in-China.com™.** *Curve Aluminium Truss* [Online] [Hivatkozva: 2011.10.13.] <http://www.made-in-china.com/showroom/gardenindustry/offer-detailKqmQoMPxgDhe/Sell-Curve-Aluminium-Truss.html>
- [10] **Monster Market Place®.** *BLMA-2003 Single Track Truss Bridge Black* [Online] [Hivatkozva: 2011.10.13.] <http://www.monstermarketplace.com/model-trains-and-accessories/blma-2003-single-track-truss-bridge-black-200-brass-n-scale>
- [11] **TEXBRICK.** *Arched Through-Truss Bridge* [Online] [Hivatkozva: 2011.10.13.] http://www.texbrick.com/model_10ftbridge/
- [12] **Ressler, J. Stephen.** *Designing and building file-folder bridges.* United States Military Academy, West Point, new York, 2001

- [13] **Tóth, Krisztina, Domokos Gábor és Gáspár, Zsolt.** *Statikailag határozott rácsos tartók geometriai érzékenysége (Építés – Építészettudomány 37 (3–4) 225–240).* Budapest, 2009
- [14] **Roylance, David.** *Finite Element Analysis.* Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (MA 02139). February 28, 2001.
- [15] **Seshu, P. .** *Finite Element Analysis.* Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, June, 2006