

## **OTDK-DOLGOZAT**

**Györkös Rita**

**2013**

**GYÁRTÓSOR KONFIGURÁCIÓK ELEMZÉSE GYÁRTÓSOR-  
KIEGYENLÍTÉSI MODELLEKKEL EGY ALKATRÉSZ  
ÖSSZESZERELŐ ÜZEM PÉLDÁJÁN**

**ANALYSIS OF ASSEMBLY LINE CONFIGURATIONS WITH  
ASSEMBLY LINE BALANCING MODELS IN CASE OF A PART  
MANUFACTURER**

**Györkös Rita**

Kézirat lezárva: 2011. november 29.

## Tartalmi kivonat

A gyártósor kiegyenlítés egyik alapfeladatának célja a műveleteket végző munkaállomások számának minimalizálása. A ciklusidőből, a térbeli sajátosságokból, tevékenységek logikai kapcsolatából és más technológiai követelményekből adódó korlátozó feltételek nehezíthetik a műveletek munkahelyek közötti szétosztását. A gyártósor kiegyenlítés NP-teljes probléma; emiatt a kutatások középpontjában sokáig a korlátozó feltételek és változók számának a csökkentése állt, illetve olyan algoritmusok készítésére helyezték a hangsúlyt, melyekkel elfogadható időn belül el lehetett jutni az optimális, vagy kielégítően jó megoldáshoz.

A számítástechnika fejlődésének következtében és a magas színvonalú matematikai programozási szoftverek megjelenésének köszönhetően a számítási idő olyan mértékben lecsökkent, hogy az eredmények felhasználhatók a gyártósorokkal kapcsolatos mindennapi problémák megoldásánál. Ezért a gyártósor kiegyenlítési kutatás fókuszát érdemes a jövőben a számítási szempontokról a gyakorlati kérdésekre helyezni.

A dolgozatomban egy külső vezérlésű egymotoros emelő készülék példáján keresztül bemutatom, hogy a gyártósor kiegyenlítési modellek által szolgáltatott információk hogyan tudják támogatni a termelési mennyiségekkel összefüggő gyártósor kialakítási döntéseket. Azért, hogy az eredményekkel további számítások könnyen elvégezhetők legyenek, a modell bemenő és kimenő adatait MS Excel környezetben jelenítem meg, de a számításokat egy korszerű optimalizáló program végzi.

**KULCSSZAVAK:** gyártósor kiegyenlítés, gyártósor konfigurációk, termelésmenedzsment, matematikai programozás

## **Abstract**

**One of the many objectives of assembly line balancing (ALB) is to minimize the number of workstations organized to perform tasks with precedence constraints. Cycle time constraints, zoning conditions, and other technological requirements may complicate the assignment of tasks to workstations. The ALB problem is NP hard; therefore a considerable amount of research was dedicated in the past to reduce the number of variable and constraints of the models and to construct special algorithms to get optimal solution in an acceptable time frame.**

**As a consequence of the development of computer technology and of the appearance of advanced mathematical programming software the results can be used even for daily operation of assembly lines. Therefore the focus of ALB research may shift in the future from computational aspects to application questions.**

**In this paper I show how information provided by assembly line balancing models can be used to support production quantity related line reconfiguration decisions. The illustration is based on the real example of the assembly process of a single drive with external control. The input and output data of the model is organized in an MS Excel environment to support the application of results in further calculations.**

**KEYWORDS: assembly line balancing, assembly line configurations, production management, mathematical programming**

## TARTALOMJEGYZÉK

|                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. BEVEZETÉS .....</b>                                                               | <b>1</b>  |
| <b>2. PHOENIX MECANO KECSKEMÉT KFT. (PMK) .....</b>                                     | <b>3</b>  |
| 2.1. MINŐSÉGPOLITIKA .....                                                              | 6         |
| 2.2. GAZDÁLKODÁS .....                                                                  | 6         |
| 2.3. TERMELÉSI TERÜLETEK .....                                                          | 6         |
| <b>3. DEWERT PROFITCENTERBELI TERMELÉS ALAKULÁSA .....</b>                              | <b>9</b>  |
| <b>4. A GYÁRTÓSOR-KIEGYENLÍTÉS ALAPFOGALMAI ÉS MÓDSZERE .....</b>                       | <b>14</b> |
| 4.1. A PROBLÉMA MEGFOGALMAZÁSA, ALAPFOGALMAK .....                                      | 14        |
| 4.2. A GYÁRTÓSOR-KIEGYENLÍTÉSI FELADAT MEGOLDÁSA MATEMATIKAI<br>PROGRAMOZÁSSAL .....    | 19        |
| 4.2.1. <i>A munkahelyek számának minimalizálása (SALBP-1)</i> .....                     | 20        |
| 4.2.2. <i>A gyártott mennyiség maximalizálása (SALBP-2)</i> .....                       | 23        |
| <b>5. AZ SALBP FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK BEMUTATÁSA A MEGAMAT 2<br/>    PÉLDÁJÁN .....</b> | <b>26</b> |
| 5.1. MEGAMAT 2 SIMA KÉSZÜLÉK .....                                                      | 26        |
| 5.2. AZ SALBP-1 FELADAT MEGOLDÁSA HÉT MUNKAHELYRE .....                                 | 31        |
| 5.3. AZ SALBP-2 FELADAT MEGOLDÁSA HÉT MUNKAHELYRE .....                                 | 39        |
| 5.4. AZ SALBP-2 FELADAT MEGOLDÁSA NÉGY MUNKAHELYRE .....                                | 50        |
| 5.5. HOZZÁRENDELÉS HATÉKONYSÁGA .....                                                   | 54        |
| <b>6. ÖSSZEFOGLALÁS .....</b>                                                           | <b>57</b> |
| <b>IRODALOMJEGYZÉK .....</b>                                                            | <b>60</b> |
| <b>MELLÉKLETEK .....</b>                                                                | <b>I</b>  |
| 1. STANDARD MEGAMAT 2 SZERELÉSI SORREND .....                                           | II        |
| 2. MŰVELET HOZZÁRENDELÉSEK ÉS EZEK HATÁSAI 7 MUNKAHELY ESETÉN .....                     | IV        |

## TÁBLÁZATJEGYZÉK

|                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. táblázat: <i>Megamat 2 sima</i> készülék összeszerelése U-cella és szigetszerű gyártás esetén .....                                     | 27 |
| 2. táblázat: <i>Megamat 2 sima</i> készülék műveleteinek leírása, műveleti idők és közvetlenül megelőző műveletek .....                    | 30 |
| 3. táblázat: Idő- és mennyiségi adatokat összefoglaló táblázat (SALBP-1).....                                                              | 32 |
| 4. táblázat: A munkahelyek számát és a ciklusidő elméleti alsó- és felső korlátját összefoglaló táblázat (SALBP-2) .....                   | 40 |
| 5. táblázat: Idő- és mennyiségi adatokat összefoglaló táblázat (SALBP-2).....                                                              | 45 |
| 6. táblázat: A dolgozatban használt egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálótérkép csomópontjainak felépítése.....                       | 47 |
| 7. táblázat: A munkahelyek számát és a ciklusidő elméleti alsó- és felső korlátját összefoglaló táblázat 4 munkahely esetén (SALBP-2)..... | 50 |
| 8. táblázat: Idő- és mennyiségi adatokat összefoglaló táblázat (SALBP-2).....                                                              | 51 |
| 9. táblázat: A 4-es és 7-es elrendezés összehasonlítása.....                                                                               | 53 |
| 10. táblázat: Normatáblázat <i>Megamat 2 sima</i> készülék esetén .....                                                                    | 54 |
| 11. táblázat: A munkahelyek számának optimális értéke a mennyiség függvényében ( $N_{opt}(Q)$ ).....                                       | 55 |
| 12. táblázat: Az egyes dolgozók feladata 7 munkaállomásos U-cella esetén.....                                                              | II |
| 13. táblázat: A dolgozatban használt egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálótérkép csomópontjainak felépítése.....                      | IV |

## ÁBRAJEGYZÉK

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. ábra: A Phoenix Mecano Kecskemét Kft. beruházásainak alakulása.....           | 3  |
| 2. ábra: A Phoenix Mecano Kecskemét Kft. alkalmazotti létszámának alakulása..... | 4  |
| 3. ábra: A PMK értékesítésének alakulása Milliárd EUR-ban .....                  | 4  |
| 4. ábra: Értékesítés területi megoszlás szerint 2009-ben.....                    | 5  |
| 5. ábra: A Phoenix Mecano Kecskemét Kft. fejlődése.....                          | 5  |
| 6. ábra: A beszerzések régiónkénti megoszlása 2009-ben .....                     | 6  |
| 7. ábra: <i>Megamat 2 sima</i> készülék.....                                     | 26 |

|                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 8. ábra: A tanulási görbe eltérő tanulási ráták esetén .....                                                                           | 29 |
| 9. ábra: A <i>Megamat 2 sima</i> készülék összeszerelési műveleteinek idejét és logikai kapcsolatát szemléltető precedencia-gráf ..... | 31 |
| 10. ábra: Megelőzési mátrix, műveleti idők .....                                                                                       | 31 |
| 11. ábra: Az SALBP-1 célfüggvénye .....                                                                                                | 35 |
| 12. ábra: Az egyes munkahelyek összes idejére vonatkozó ciklusidő-korlátok.....                                                        | 35 |
| 13. ábra: Valamennyi művelet elvégzésének feltételei.....                                                                              | 35 |
| 14. ábra: A megelőzési kapcsolatok előírása.....                                                                                       | 36 |
| 15. ábra: Az $LJ_i$ és $UJ_i$ értékek összefoglalása .....                                                                             | 37 |
| 16. ábra: Döntési változók mátrixa SALBP-1 esetén .....                                                                                | 38 |
| 17. ábra: Lingoval megoldott SALBP-1 feladat eredményei .....                                                                          | 38 |
| 18. ábra: A gyártósor-kiegyenlítési feladat egy optimális megoldása SALBP-1 esetén ....                                                | 39 |
| 19. ábra: Megelőzési mátrix .....                                                                                                      | 40 |
| 20. ábra: Az egyes munkahelyek összes idejére vonatkozó ciklusidő-korlátok.....                                                        | 40 |
| 21. ábra: Valamennyi művelet elvégzésének feltételei.....                                                                              | 41 |
| 22. ábra A megelőzési kapcsolatok előírása .....                                                                                       | 41 |
| 23. ábra: Az összes megelőző művelet mátrixa, illetve $LJ_i$ értékek SALBP-2 esetén .....                                              | 42 |
| 24. ábra: Az összes követő művelet mátrixa, illetve az $UJ_i$ értékek SALBP-2 esetén.....                                              | 43 |
| 25. ábra: Megengedett megoldások mátrixa SALBP-2 esetén .....                                                                          | 43 |
| 26. ábra: Döntési változók mátrixa SALBP-2 esetén .....                                                                                | 44 |
| 27. ábra: Eredmények mátrixa SALBP-2 esetén .....                                                                                      | 44 |
| 28. ábra: A gyártósor-kiegyenlítési feladat egy optimális megoldása SALBP-2 esetén ....                                                | 45 |
| 29. ábra: Művelet hozzárendelések 7 munkahelyre különböző $T_{c,max,elm}$ értékek esetén (SALBP-2).....                                | 47 |
| 30. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén ....                                         | 48 |
| 31. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén.....                                                                          | 48 |
| 32. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 90$ mp esetén .....                                          | 48 |
| 33. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 90$ mp esetén .....                                                                           | 49 |
| 34. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén .....                                                             | 49 |
| 35. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 90$ mp esetén .....                                                               | 50 |
| 36. ábra: Megelőzési mátrix .....                                                                                                      | 51 |
| 37. ábra: Kapott eredmények összevetése 4 munkahelyes elrendezésnél SALBP-2 esetén .....                                               | 52 |

|                                                                                                                                          |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 38. ábra: A hozzárendelés hatékonyságának ( $HH$ ) változása a munkahely szám ( $N$ ) és a gyártandó mennyiség ( $Q$ ) függvényében..... | 54   |
| 39. ábra: Művelet hozzárendelések 7 munkahelyre különböző $T_{c,max,elm}$ értékek esetén (SALBP-2).....                                  | IV   |
| 40. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén .....                                          | V    |
| 41. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén.....                                                                            | V    |
| 42. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén .....                                                               | VI   |
| 43. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 87$ mp esetén .....                                            | VI   |
| 44. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén.....                                                                            | VI   |
| 45. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 85,2$ mp esetén .....                                                               | VII  |
| 46. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 90$ mp esetén .....                                            | VII  |
| 47. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 90$ mp esetén.....                                                                              | VII  |
| 48. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 90$ mp esetén .....                                                                 | VIII |
| 49. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 100$ mp esetén ..                                              | VIII |
| 50. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 100$ mp esetén.....                                                                             | VIII |
| 51. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 100$ mp esetén .....                                                                | IX   |
| 52. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 140$ mp esetén .....                                           | IX   |
| 53. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 140$ mp esetén.....                                                                             | IX   |
| 54. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 140$ mp esetén .....                                                                | X    |
| 55. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 350$ mp esetén .....                                           | X    |
| 56. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 350$ mp esetén.....                                                                             | X    |
| 57. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 350$ mp esetén .....                                                                | XI   |
| 58. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv $T_{c,max,elm} = 444$ mp esetén .....                                           | XI   |
| 59. ábra: Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 444$ mp esetén.....                                                                             | XI   |
| 60. ábra: Kinagyított Gantt-diagram $T_{c,max,elm} = 444$ mp esetén .....                                                                | XII  |

## 1. BEVEZETÉS

Olyankor beszélünk gyártósor-kiegyenlítési problémákról (assembly line balancing = ALB), mikor számos oszthatatlan tevékenységet (műveletet) kell csoportokba rendezve munkaállomásokhoz rendelni egy folyamatos gyártást végző gyártósornál. Erőforrás-felhasználás szempontjából optimális hozzárendelés esetén a szükséges dolgozók száma és ezen keresztül a működési költségek a lehető legkisebbek. A gyártósor-kiegyenlítési problémák tipikus példája az autóipar és az elektronikai ipar (hűtőgépek, televízió készülékek összeszerelése stb.), de sok szolgáltató rendszer folyamata is hasonló a gyártósorok szerelési műveleteihez (Boysen et al., 2008).

A műveleteket nem lehet tetszőlegesen munkaállomásokhoz rendelni. Figyelembe kell venni ugyanis a ciklusidőre vonatkozó megkötéseket, a műveletek megelőzési kapcsolatait, a területi sajátosságokat, a technológiai és logikai feltételeket. Még ezen korlátozó feltételek figyelembe vételével is sok lehetséges megoldás adódhat. Az optimalizáló modellek segítenek, hogy megtaláljuk ezek közül a legkedvezőbbet. A számítógépes és információs technológia fejlődése lehetővé tette, hogy nagyméretű ALB problémákat is meg lehessen oldani elfogadható időn belül (Koltai-Tatay, 2010).

A korai kutatások középpontjában az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési problémák (simple assembly line balancing problem = SALBP) álltak (Scholl-Becker, 2006). Az SALBP kiterjesztett változatai már tekintetbe veszik az U-alakú gyártósorok, párhuzamosan dolgozó munkahelyek és sztochasztikus műveleti idők lehetőségét is. Ezeket a modelleket az irodalom általános gyártósor-kiegyenlítési problémaként (general assembly line balancing problem = GALBP) tartja számon. Noha a GALBP-k közelebb állnak a gyakorlati problémákhoz, a megoldási eljárásaik a legtöbb esetben SALBP algoritmusokon alapulnak (Becker-Scholl, 2006).

A menedzsment céljaitól függően a gyártósor-kiegyenlítési feladatok két leggyakoribb változata a következő (Koltai-Tatay, 2010):

- Amikor a cél a működési költségek csökkentése, akkor az ALB modell adott ciklusidő mellett minimalizálja a szükséges munkahelyek (dolgozók) számát. Az ehhez kapcsolódó feladatok az irodalomban SALBP-1 jelöléssel szerepelnek.

- Amikor a menedzsment cél a gyártási mennyiséghez kötődik, akkor az ALB modell a ciklusidőt minimalizálja adott számú munkaállomás esetén. Az irodalom az ilyen típusú feladatokat SALBP-2 rövidítéssel jelöli.

Az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési problémák megfogalmazhatók matematikai programozási modellekként. Az ALB első analitikus leírását Bryton adta, míg az első lineáris programozási probléma, amelynek az osztott tevékenységek miatt lehetnek nem-megengedett megoldásai Salveson nevéhez köthető (Baybars, 1986). Bowman két különböző egész értékű programozási (integer programming = IP) modellt fogalmazott meg az ALB feladatok megoldására (Bowman, 1960). White módosította Bowman második IP modelljét és 0-1 döntési változókat definiált a probléma megoldásához (White, 1961). Mivel az ALB modellek nem-determinisztikus polinomiális teljes problémák (NP hard) a kutatás középpontjába a változók és korlátozó feltételek számának csökkentése került (Baybars, 1986; Patterson-Albracht, 1975).

Manapság az optimalizáló szoftverek lehetővé teszik a gyakorlati méretű ALB problémák matematikai programozási modelljeinek hatékony megoldását. Ezért a kutatás fókuszát gyakorlatvezérelt modellek alkotására és új alkalmazási területek kutatására kellene helyezni (Boysen et al., 2008).

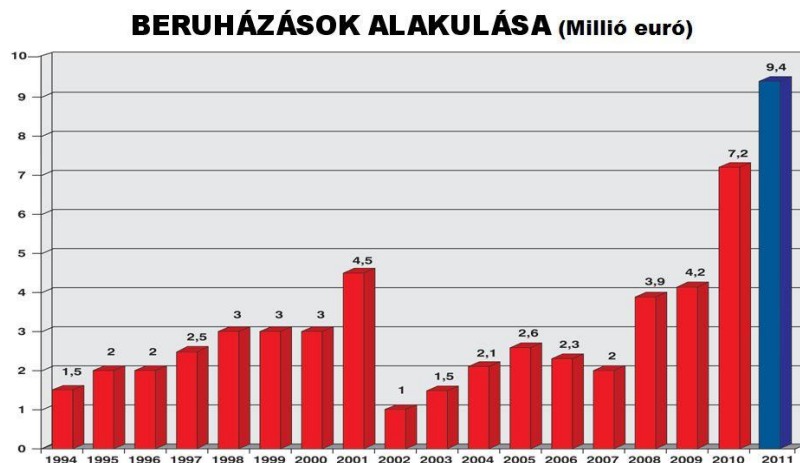
A dolgozat az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési probléma gyakorlati alkalmazását a Phoenix Mecano Kecskemét Kft. Dewert profitcenteréhez tartozó egyik termékének szerelésén keresztül mutatja be. A gyakorlati alkalmazás rávilágít néhány, a kutatások szempontjából érdekes problémára is.

A dolgozat felépítése a következő. Először bemutatom a *Phoenix Mecano Kecskemét Kft*-t (PMK), majd a *Dewert* nevű profitcenterét, ahol az általam vizsgált termék (*Megamat 2*) összeszerelése történik. Ezután ismertetem a gyártósor-kiegyenlítés alapfogalmait és módszereit. Végezetül bemutatom az SALBP feladatok megoldását a *Megamat 2* készülék példáján keresztül.

## 2. PHOENIX MECANO KECSKEMÉT KFT. (PMK)

„A Phoenix Mecano AG svájci központú multinacionális cégcsoport, világszerte több gyártóbázissal és az egész világot átfogó értékesítési hálózattal rendelkezik. A cégcsoport 1993-ban 100%-os tulajdonosként megalapította legjelentősebb leányvállalatát, a Phoenix Mecano Kecskemét Kft-t.” (Phoenix-Mecano)

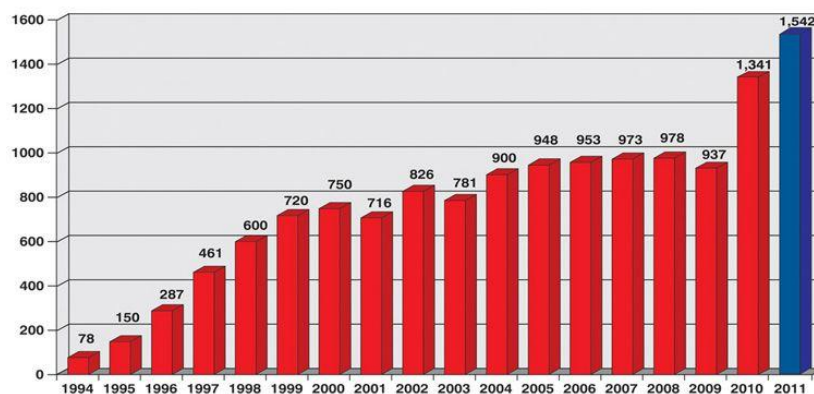
A vállalat különböző ipari ágazatok beszállítójaként műanyag-, alumínium- és poliészterházakat, mozgatóstechnológiai berendezéseket és vezérléseket, emelő-berendezéseket, műanyag alkatrészeket valamint lineáris egységeket és védőrács-rendszereket gyárt. Emellett vezérlések és szabályozott hajtások összeszerelését is végzi. A termelés 6 profitcenterben – Dewert, Műanyag-fröccsöntő, Motor/Trafó, Kundisch, Rose/Bopla, Rose+Krieger – folyik, az ISO 9001:2000 minőségirányítási és az ISO 14001:2004 környezetirányítási rendszereknek megfelelően. Termékeik magyarországi és közép-kelet-európai forgalmazását értékesítési részlegük végzi. A nagy ívű beruházások és fejlesztések eredményeként az elmúlt években a vállalat megsokszorozta forgalmát és dolgozói létszámát is, így jelenleg több mint 1500 főt foglalkoztat (Phoenix-Mecano) – ezzel a vállalat Kecskemét város és a Dél-Alföldi Régió meghatározó munkaadója (Phoenix Magazin, 4.o.).



1. ábra: A Phoenix Mecano Kecskemét Kft. beruházásainak alakulása

*Forrás: Phoenix Magazin*

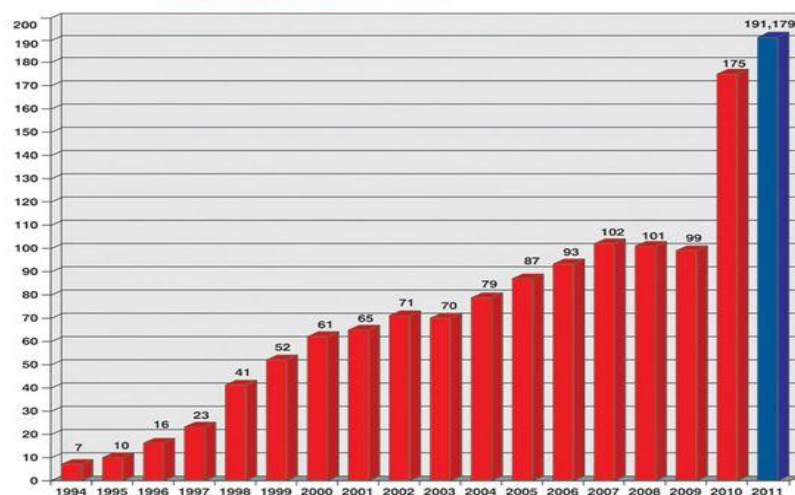
## ALKALMAZOTTI LÉTSZÁM



2. ábra: A Phoenix Mecano Kecskemét Kft. alkalmazotti létszámának alakulása

*Forrás: [www.phoenix-mecano.hu](http://www.phoenix-mecano.hu), Phoenix Magazin*

## ÉRTÉKESÍTÉS (Millió EUR)



3. ábra: A PMK értékesítésének alakulása Millió EUR-ban

*Forrás: [www.phoenix-mecano.hu](http://www.phoenix-mecano.hu), Phoenix Magazin*

„A cég lépcsőről-lépésre fejlődött azzá, amit ma megtestesít: egy erősen fejlődő ipari cégcsoport legfontosabb termelési egységévé vált, melynek világszerte elért tavalyi árbevétele meghaladja az 500 millió eurót. Ma termékeik nagy többségét részben vagy egészben Kecskeméten gyártják, melyeket innen juttatnak el célpiacaik felé, nemcsak Európába, hanem egyre jelentősebb mértékben Amerikába és Ázsiába is.” (Phoenix Magazin, 1.o.)

### ÉRTÉKESÍTÉS (Millió EUR)

|                 |             |
|-----------------|-------------|
| Németország     | 92,0        |
| Svájc           | 1,7         |
| USA             | 0,9         |
| Magyarország    | 3,0         |
| Egyéb           | 1,4         |
| <b>Összesen</b> | <b>99,0</b> |

4. ábra: Értékesítés területi megoszlás szerint 2009-ben

Forrás: [www.phoenix-mecano.hu](http://www.phoenix-mecano.hu)

„Az újtó szellemű, sikeres nemzetközi társaság, a Phoenix Mecano AG magyar leányvállalata, a Phoenix Mecano Kecskemét Kft. felavatta fennállása óta legnagyobb beruházását. A gyártási és logisztikai kapacitások bővítésével új, hazánkban eddig nem alkalmazott technológiák honosulnak meg. Az új üzemépületben ötszázan fognak dolgozni az elmúlt évek során 1500 főre növekedett alkalmazotti állományból.” (Phoenix Magazin, 1.o.)

|                          | 1997                  | 2007                  | 2008                  | 2010                  |
|--------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| <b>Terület</b>           | 31.000 m <sup>2</sup> | 81.000 m <sup>2</sup> | 81.000 m <sup>2</sup> | 81.000 m <sup>2</sup> |
| <b>Termelési terület</b> | 13.000 m <sup>2</sup> | 23.000 m <sup>2</sup> | 25.000 m <sup>2</sup> | 35.000 m <sup>2</sup> |

5. ábra: A Phoenix Mecano Kecskemét Kft. fejlődése

Forrás: Angeli Attila előadása

A magas foglalkoztatási hatású projektek komplex támogatása című GOP – 2009 2.1.3 pályázat segítségével megvalósuló új gyártóegység egy árurakodóból, egy kétszintes termelőrészből és egy 23 méter magas, teljesen automata magas-raktárból áll. Az új csarnokban a legmodernebb gyártási technológiákat alkalmazva tudja növelni a vállalat a hatékonyságot és a termelés volumenét. Robotokkal, automatikus pályákkal, liftekkel szinte fizikai megterhelés nélkül gyártják termékeiket (Phoenix Magazin, 2.o.).

Az első 15 évben a cég elsősorban a gépipar, a bútoripar valamint az ápolási szektor részére gyártott termékeket, majd 3 évvel ezelőtt egy újabb lépést tettek a továbbfejlődés irányába. 2008 márciusa óta a jövő piacát jelentő napelem-rendszerek inverterébe gyártanak komponenseket, főként csillapítókercseket és toroid transzformátorokat. A kezdeti

időszakban elsősorban hagyományos technológiát alkalmaztak, majd termelési volumenük örvendetes növekedése lehetővé tette egy új beruházás megvalósítását, amely révén a legmodernebb technológiák alkalmazásával, versenyképes árakon történik a gyártás (Phoenix Magazin, 3.o.).

## 2.1. MINŐSÉGPOLITIKA

A vállalat legfontosabb célja vevői elégedettségének növelése úgy, hogy emellett a Phoenix Mecano Kecskemét Kft. minden mai üzemgazdasági, minőségi, szociális, környezetvédelmi követelménynek megfeleljen (Phoenix-Mecano).

A megfelelő szabályozások betartása mellett a cég rendelkezik az ISO 9001:2008 és ISO 14001:2004 minősítésekkel (Phoenix-Mecano).

## 2.2. GAZDÁLKODÁS

A Phoenix Mecano Kecskemét Kft. gazdálkodását a stabilitás és a hosszú távú, pontos, tervezés jellemzi. A termelési kapacitás bővítésével a vállalat alkalmazotti létszáma is folyamatosan növekszik. A hazai és a közép-európai értékesítésük évről-évre emelkedő tendenciát mutat, az elmúlt években pedig erősödtek tengerentúli kapcsolataik is. Beszerzéseik során európai partnereik mellett ázsiai és amerikai beszállítókkal is együttműködnek (Phoenix-Mecano).

### **BESZERZÉS** (Millió EUR)

|                 |             |
|-----------------|-------------|
| Németország     | 44.0        |
| Hollandia       | 0.7         |
| Magyarország    | 7.0         |
| Olaszország     | 5.5         |
| Románia         | 6.0         |
| Ázsia           | 4.0         |
| USA             | 0.2         |
| Egyéb           | 3.4         |
| <b>Összesen</b> | <b>70.8</b> |

6. ábra: A beszerzések régiónkénti megoszlása 2009-ben

Forrás: [www.phoenix-mecano.hu](http://www.phoenix-mecano.hu)

## 2.3. TERMELÉSI TERÜLETEK

A cég az elektromechanikai alkatrészek széles skáláján belül a különböző műszerdobozok, sorkapcsok, mérőtűk, vezérlő pultok nemzetközileg elismert gyártója. A gépészet számára

alumínium profilrendszert, komplett mozgatástechnikát, elektromos ágyemelő készülékeket kínál (Phoenix-Mecano).

A termelési terület ma 81000 m<sup>2</sup>. A gyártás 6, ún. profitcenterben folyik (Phoenix-Mecano; Lieli, 2011):

- a **DEWERT profitcenter** egy- és kétmotoros ágy- és egyéb bútormozgató emelőket, vezérlőegységeket, kézikapcsolókat gyárt az egészségügy (kórházak), otthoni ápolás, illetve a bútoripar részére;
- a **Műanyag-fröccsöntő profitcenter** széles körű termékválasztékával elsősorban a többi részleget szolgálja ki, számukra állít elő alkatrészeket;
- a **KUNDISCH profitcenter** széles körű felhasználási területre gyárt frontfóliákat, fóliaszatúrákat;
- a **ROSE + KRIEGER profitcenter** specialitása BLOCAN alumínium profilrendszerek, mozgatástechnikai alkatrészek, lineáris komponensek, csökötő elemek, elektromotorok gyártása;
- a **ROSE/BOPLA profitcenter** munkájának eredményeképpen fém és műanyag műszerdobozok, tokozatok, sorkapocsdobozok, asztali, fali, kézi műszerdobozok, hordozórendszerek jönnek létre, legtöbb esetben „vevőspecifikus” egyedi elképzeléseknek megfelelően;
- a **MOTOR/TRAFÓ/DATATEL profitcenter** kis villamos motorok, hajtóművek, kis és közepes motorok hajtóművel vagy anélkül, kis-, közepes és nagyteljesítményű transzformátorok gyártására specializálódott. Említésre méltó a szolártechnika számára készülő egyenirányító egységek gyártása. E termékvonallal igen dinamikus fejlődésének következtében egy új gyártó-csarnok került a közelmúltban átadásra.

A profitcenterek közül a dolgozat szempontjából a *Dewert profitcenter* a meghatározó, amely a német Dewert Antriebs- und Systemtechnik GmbH legjelentősebb gyártóegysége, 300 főt foglalkoztat, és széles választékban állít elő ágymozgató berendezéseket (Phoenix-Mecano).

#### **A Dewert profitcenter termékei (Phoenix-Mecano)**

- Egymotoros emelők külső vezérléssel: Megamat 1, Megamat 2
- Kétmotoros emelők belső vezérléssel: Duomat 1, 5, 6, 7

- Vezérlőegységek
- Kézi kapcsolók

A gyártott termékek elsődlegesen az ápolási- illetve kórházszektorban alkalmazhatók, emellett beépíthetők a legkülönbözőbb bútor-applikációkba is (Phoenix-Mecano).

### 3. DEWERT PROFITCENTERBELI TERMELÉS ALAKULÁSA

A **DEWERT profitcenter**ben egy- és kétmotoros ágy- és egyéb bútormozgató emelőket, vezérlőegységeket, kézikapcsolókat gyártanak az egészségügy (kórházak), otthoni ápolás, illetve a bútoripar számára.

A szerelés kézzel, segédeszközökkel és a termékek előállításához kialakított célszerszámokkal történik. A termékek előállítása munkaintenzív folyamat, nagy az emberi munka tartalma. Ennek megfelelően, mikor egy új terméket vezetnek be, vagy nagyobb módosításokat hajtanak végre egy terméken, a gyártás felfutási szakaszában megfigyelhető a tanulási hatás érvényesülése, a gyártási mennyiség növekedésével járó fajlagos gyártási idő csökkenése. Ugyanez igaz akkor is, ha egy új dolgozó kerül valamelyik gyártószalaghoz.

Mivel az általam vizsgált készülékeket már több éve gyártják, a műveleti idők állandósultak, stacionáriusak. Ezért a kutatásom során a gyártósor-kiegyenlítés gyakorlati megvalósításának elméleti modellel való összehasonlítására helyeztem a hangsúlyt.

A gyártósorok kialakítása az évek során változott.

**2003-ban** a gyártás még *hosszú sorokon* történt. Az 5 asztalból kialakított 10 méteres szalagsoron 12 ember dolgozott, egy soron csak egyfajta terméket szereltek. A nagy pufferelés (50 db / munkaállomás) miatt jelentős volt a tárolási veszteség és a túltermelés. További hátránya ennek a típusú gyártásnak, hogy az esetleges hibák csak későn derülnek ki, hiba esetén több a selejt.

**2006-ban** a hosszú szalagról átálltak a *szigetszerű* gyártásra. Ennek elsődleges célja nem a termelékenységnövekedés volt, hanem a flexibilitás. A *Megamat* termékcsoporthoz 8 gyártószigetet alakítottak ki, azaz párhuzamosan akár nyolcfajta terméket is tudtak gyártani. Ez egyrészt a vevői igények jobb kiszolgálását eredményezte, másrészt az átalakítás az átlagos szériaszámok csökkenését is lehetővé tette.

**2008-ban** a *Dewert*ben a gyártósziget optimalizálására helyezték a hangsúlyt. A célok között szerepelt az 5S<sup>1</sup> bevezetése, a folyamatos anyagáramlás, és az anyagáramlásban rendszerrel történő szabályozása. A fejlesztés után már hatosával áramlottak a termékek a szerelősoron. Ezekkel az átalakításokkal 6%-os termelésnövekedést értek el. A termelékenység növelésével csökkentek a költségek. Emellett a puffer méretének jelentős

---

<sup>1</sup> 5S: Az 5S egy lean eszköz, amelyet elsősorban a vállalati munkahelyek rendezett kialakításának érdekében alkalmaznak. Célja a hatékony, biztonságos és minőségi munkavégzésre alkalmas munkakörnyezet kialakítása és fenntartása. *Forrás:* <http://hu.wikipedia.org/wiki/5S>

csökkenése miatt az esetleges hibák is sokkal hamarabb kiderültek. Ennek hatásaként javult a minőség, és növekedett a vevői elégedettség.

A változtatások után újra felmérték a ciklusidőket, és kiegyenlítették a gyártószigeteket. A három munkahelyes elrendezésről kiderült, hogy nem optimális, így átálltak a négyes elrendezésre. Ezáltal a standard készülék gyártásának ciklusideje 2,2 percre csökkent.

Az 5S bevezetésének eredményeképpen a gyártórendszert átépítették, standardizálták, bevezették a kanban vezérlést, a FIFO-rendszert, a kisegítő eszközök, segédanyagok, fontos beépülő alkatrészek saját, definiált helyet kaptak, a rendszer rendezettebb lett, a vevői elégedettség nőtt. A felfutási tervben havi 2%-os termelésnövekedést terveztek, melyet sikerült is teljesíteni.

**2010-ben** megjelent a tervekben az új (U-)cella koncepció, melyben hét munkaállomást alakítottak ki. Ez továbbra is olyan gyártórendszer, ahol nem automatikusan mozognak a darabok, hanem a dolgozók adják azokat a következő munkahelyre. Ebben a rendszerben az anyag kívülről befelé áramlik, a dolgozók a gyártórendszeren belül dolgoznak, ezáltal úgy kapják az anyagot, hogy nem kell 180 fokot forogniuk. Ez csökkenti a fölösleges mozdulatokból adódó veszteségeket. Ennek a kialakításnak a további előnye a *one piece flow*, azaz a darabonkénti anyagáramlás, amivel a minőségi kockázat még tovább csökken, hiszen a követő munkahely már az első darabnál észreveszi a hibát. A produktivitás növelését a csapatmunka, az egymásnak való besegítések is elősegítették.

A 2010-es U-szalag koncepciónak 2 célja volt. Egyrészt a nullhiba koncepció, amely arra törekszik, hogy ha egy rendszerben egyszer elkövettem már egy hibát, akkor megteremtsem annak a lehetőségét, hogy még egyszer ugyanez a hiba már ne fordulhasson elő. Ez a *one piece flow*-val kombinálva megteremti a legjobb minőség elérésének lehetőségét. Az oktatások és a visszajelzések, reklamációk kiértékelésével párhuzamosan a poka yoke<sup>2</sup> („hibaelkerülés”) elvnek megfelelően a szerelőszalagon „helyes/helytelen” fotópárokkal segítették a műveletek helyes elvégzését.

Hat százalékos termelésnövekedést tűztek ki célul. A folyamatos fejlesztést, tökéletesítést (Kaizen) egy 10-12 főből álló csapat végezte, mely termelésirányítók, üzemszervezők és minőségmenedzserekből tevődött össze. A program során összehasonlították a gyártórendszereket (hosszú automata szalag, szigetszerű gyártás, U-cell), egy

---

<sup>2</sup> **Poka-yoke:** A poka-yoke japán kifejezés, jelentése hibaelkerülés. Az elnevezés egy módszert takar, amely a lean vállalatstruktúrák filozófiája egyik eleme, a hibák elkerülésének módszere a termék vagy a folyamat kialakításának, befolyásolásának segítségével. *Forrás:* <http://hu.wikipedia.org/wiki/Pokajoke>

pro-kontra mátrixba összegyűjtötték az egyes gyártórendszerek mellett és ellen szóló érveket. Például helyszükséglet tekintetében a hosszú szalag a legkedvezőtlenebb, a szigetszerű és az U-cella gyártásnak ugyanis jóval kisebb a helyigénye. Flexibilitás szempontjából is az utóbbi kettő az előnyösebb. Noha a hosszúszalag-gyártásnál kell a legkisebb időt és költséget fordítani a betanításra, a várakozási és javítási költségek itt a legmagasabbak. Míg az U-cella kialakításban megvalósul a *one piece flow*, azaz az anyagáramlás folytonos, a termékeket egyesével továbbítják, addig a szigetszerű gyártásban csak hatósával adják tovább a munkadarabokat a következő munkahelyre, azaz puffer képződik.

A pro-kontra mátrixban összegyűjtött szempontokat egy napig vizsgálták az üzemben, majd megint összeültek, és a dolgozók, valamint a 12 fős csoport tagjainak javaslatai alapján intézkedési tervet dolgoztak ki. Ebben egy, a gyártósor átépítésére vonatkozó 120 pontos, PDCA-ciklus<sup>3</sup> szemléletű feladatlista szerepelt.

A főleges és hasznos anyagáramlásokról, mozdulatokról spaghetti-diagramot készítettek. A szigetszerű gyártást és U-cella elrendezést különböző mérőszámok mentén hasonlították össze. Ezek közül a legjelentősebbek:

- Négyzetméter:
  - a gyártósor hány négyzetmétert foglal el, illetve hány darab készül el időegységre (egy műszak, egy óra) és négyzetméterre vetítve az adott szerelősoron.
  - egy dolgozónak mennyi a helyigénye ( $m^2/\text{dolgozó}$ ) az adott soron (pl. az elrendezésből adódóan kell-e forognia, lépnie a művelet elvégzéséhez).
  - egy darab előállításának a helyigénye ( $m^2/\text{db}$ ).
- Produktivitás: jó db / dolgozó / óra, illetve ez hány embert igényel (produktív és kisegítő személyzet összesen).

A kritikus pontok feltárását folyamat-FMEA<sup>4</sup>-val végezték szerelési folyamatára alapján.

---

<sup>3</sup> **PDCA-ciklus:** Plan-Do-Check-Act. Termékfejlesztési megközelítés. A PDCA bármilyen műveletre, tevékenységre, folyamatra, rendszerre, működtetésre, koncepcióra, elgondolásra vonatkoztatható, zárt hatásláncú, folytonosan ismétlődő körfolyamat-elv. A PDCA-ciklus jelentése: P - Tervezd meg!, D - Valósítsd meg!, C - Ellenőrizd az eredményeket!, A - Intézkedj az eredmények alapján!, Ismételd a PDCA-t ! *Forrás:* [www.web.axelero.hu/siriusbt/pdca.html](http://www.web.axelero.hu/siriusbt/pdca.html)

<sup>4</sup> **FMEA:** Failor Mode and Effects Analysis. Az FMEA egy olyan szisztematikus módszer, melynek segítségével felismerhetjük, azonosíthatjuk, elemezhetjük, értékelhetjük és megelőzhetjük az összes lehetséges hibamódot és hibatípust. Hibamódnak tekinthetjük azokat a hibákat, melyek az előírt paraméterektől, elvárásoktól eltérnek. Az FMEA a még be nem következett hibákkal foglalkozik, amelyeket a becstült kockázatok alapján rangsorol. *Forrás:* [www.mibi.hu](http://www.mibi.hu)

A 12 fős csoportból három munkacsoport alakult. Az első munkacsoport a ciklus-időket, elrendezést, térbeosztást, folyamatokat vizsgálta. A második munkacsoport az 5S-ért, a munkahelyek kialakításáért és az anyagellátásért volt felelős. A harmadik munkacsoport a minőséget, poka yoke-t, készülékeket, tesztelő berendezéseket, szerelő rendszerben lévő információs rendszert tanulmányozta. Mérőszámok mentén felmérték a szalag állapotát.

Ezután megkezdődött a *muda*-vadászat (=veszteségvadászat): vizsgálták a túltermelést, a fölösleges mozgásokat, selejtgtyártást, javítási munkákat. Ezeket kiszűrték, és javító intézkedéseket valósítottak meg, mellyel közelebb kerültek a kitűzött célokhoz.

A gyártórendszereket folyamatosan mérik, felülvizsgálják:

- Minőség mérése: figyelik a kieső készülékek és az összes készülék arányát (adatfelvétel). A minőségügyi osztály elemzi, hogy miért ekkora a kiesés (kiértékelés). A problémák megoldására felelősöket és határidőket jelölnek ki.
- Vizsgálják a termelékenységet és a célértékek kapcsolatát. Az eltéréseket úgyszintén kiértékelik.
- Minden gyártósor mellett található egy kommunikációs felületként szolgáló „*problématabla*”. Ezen a dolgozók megjelölik a kieső időket, és a kiesés okait. Ezeket összegzik, és intézkedési tervet készítenek a javításukra, megoldásukra.

Az összes intézkedés a dolgozók bevonásával történik. Ez két szempontból is fontos. Egyrészt a dolgozók ismerik legjobban gyakorlati oldalról, mindennapi feladatok szintjén a gyártási folyamatot, így sokat tudnak segíteni ezek javításában is. Másrészt változásmenedzsment szempontból is nagyon fontos a bevonásuk. Elengedhetetlen, hogy a dolgozók megismerjék az intézkedések főbb, kiváltó okait, előnyeit, tudják, hogy a fejlesztések nem járnak számukra hátránnyal. Ha ez nem történik meg, az ellenállást válthat ki belőlük, ami a gyártási eredményeket (minőségi és mennyiségi teljesítmény) negatívan befolyásolja. Fontos, hogy a dolgozók is tudják, hogy a cél mindig az optimalizálás, folyamatos fejlesztés, nincs dolgozói létszámcsökkentés. Ennek a tisztázása mindig megtörténik, hogy a dolgozók ne hátráltassák a projektet, hanem lássák, hogy továbbra is szükség lesz rájuk, mert a fejlesztések által keletkező többletkapacitást a vállalat piac- és termékbővítésre használja.

A projekt eddigi eredményei:

- A tervezett 182 intézkedésből a projekt közepéig 118-at bevezettek.

- A minőség javítására irányuló tervezett 10 oktatásból mind a 10 megvalósult.
- Az előírányzott 33 PDCA minőségi körből 30-at már megcsináltak.
- A termelékenység egyértelműen nőtt: 10% fölötti teljesítményjavulást értek el a kitűzött 6%-hoz képest.
- A költségcsökkentő és terület-kihasználást javító intézkedések eredményeképpen az egységnyi terület-kihasználás (db/m<sup>2</sup>–ben mérve) a háromszorosára nőtt: míg a hosszú szalagon csak 4db/ m<sup>2</sup> készült el, addig az U-cellában már 12db/ m<sup>2</sup>.

A már beállt szerelőrendszernél folyamatos termelékenységekövetés történik a normaidők alapján. +/- 10%-os tartós eltérésnél felülvizsgálják a normaidőket. A szerelőrendszer fejlesztésénél mindig történik normaidő-igazítás. A cél mindkét esetben a reális, tartható norma beállítása. Fejlesztésnél, új gyártórendszer kialakításnál készítenek egy felfutási tervet. A cél elérésének érdekében nyomon követik a felfutási időszakot (is). Eltérés esetén felülvizsgálják a tervet, megkeresik a különbségek okait, kiértékelik a kapott eredményeket.

Minden év végén készül beruházási és megtérülési terv a következő évre vonatkozóan. A terveket többek között a már fentebb említett mérőszámok alapján is értékelik: négyzetméter, produktivitás, valamint bérköltség.

A *Dewert profitcenter*ben folyamatos a fejlesztői munka. A jelenleg is megvalósítás alatt álló terv szerint 2012-re (a Duomat szalagok kivételével) minden szerelőszalagot átépítenek az U-cella koncepció szerint.

Láthattuk, hogy a vállalat nagy hangsúlyt fektet a folyamatos fejlesztésre, termelékenységének javítására. A gyártósor-kiegyenlítési modellek megoldásával optimalizálható az erőforrás-felhasználás és maximalizálható a kibocsátás. Az ilyen modellek alkalmazása ezért jól támogathatja a folyamatos javításra való törekvést.

A következőkben ismertetem a gyártósor-kiegyenlítés alapmodelljeit, a hozzájuk tartozó alapfogalmakat és a gyakorlati alkalmazást segítő összefüggéseket.

## 4. A GYÁRTÓSOR-KIEGYENLÍTÉS ALAPFOGALMAI ÉS MÓDSZERE

A 4. fejezet Koltai Tamás 2003-ban megjelent Termelésmenedzsment alapjai II. c. könyvének 2.7. fejezete alapján készült.

### 4.1. A PROBLÉMA MEGFOGALMAZÁSA, ALAPFOGALMAK

A gyártósor olyan termelőrendszer, amely nagy mennyiségben gyárt azonos, vagy csak kismértékben eltérő termékeket viszonylag hosszú időn keresztül. A gyártási tevékenység során a gyártási műveleteket egymást követő munkahelyeknél végzik el. Így a termék készültségi foka munkahelyről munkahelyre haladva fokozatosan növekszik, míg az utolsó munkahelynél teljesen el nem készül.

A művelet olyan, a termék elkészítéséhez szükséges tevékenység, amely technológiai vagy menedzsment szempontból oszthatatlan, ezért azt egyetlen munkahelyen kell elvégezni.

A műveletek sorszámát  $i$ -vel jelöljük. A fajlagos műveleti idő ( $t_i$ ) a művelet végrehajtásának idejét jelöli egyetlen termék készítésekor. A műveletek között logikai kapcsolat van. Egy művelet végrehajtását csak akkor lehet elkezdeni, ha az összes azt megelőző művelet befejeződött.

A gyártósoron egymás után elkészült két termék befejezési ideje közötti különbséget ciklusidőnek ( $T_c$ ) nevezzük. A ciklusidőt a rendszer szűk keresztmetszete határozza meg, vagyis az a munkahely, amelynél a termék a legtovább tartózkodik.

A műveletek az egyes munkahelyekhez többféleképpen is hozzárendelhetők. Azt, hogy melyik hozzárendelés a legkedvezőbb a hozzárendelés célfüggvénye határozza meg.

A gyártósor-kiegyenlítés két klasszikus feladatában az alábbi két, a feladatok célfüggvényeit is meghatározó menedzsment szempont tükröződik:

1. *Adott idő alatt meghatározott mennyiségű terméket kell legyártani oly módon, hogy a lehető legkevesebb munkahelyre legyen szükség.* A munkahelyek számának minimalizálása ugyanis csökkenti a munkaerőigényt és ezen keresztül a gyártás bérköltségét. Az operációkutatásban ezt a feladatot SALBP-1 (Simple Assembly Line Balancing Problem 1 = egyszerű gyártósor-kiegyenlítési probléma 1) rövidítéssel jelölik.

2. *Adott számú munkahelyen kell előállítani a lehető legnagyobb mennyiségű terméket. Ehhez a ciklusidő minimalizálására van szükség.* Ebben az erőforrások hatékony kihasználására való törekvés fogalmazódik meg. E feladatot az operációkutatásban SALBP-

2 (Simple Assembly Line Balancing Problem 2 = egyszerű gyártósor-kiegyenlítési probléma 2) rövidítéssel jelölik.

A következőkben összefoglalom a gyártósor-kiegyenlítési alapeladatokat megoldásához szükséges legfontosabb alapfogalmakat.

A dolgozatban használt jelöléseket az alábbi lista tartalmazza.

**Indexek:**

- $i$  – műveletek indexe (sorszáma)
- $j$  – munkahelyek indexe (sorszáma)
- $k$  – a műveletek egy részhalmazának indexe

**Paraméterek:**

- $Q$  – gyártósoron gyártandó mennyiség
- $T$  – gyártáshoz rendelkezésre álló idő
- $t_i$  – az  $i$  tevékenység fajlagos végrehajtási ideje
- $\sum t_i$  – egy darab termék előállításához szükséges összes idő
- $s_j$  – a  $j$  munkahely műveleti ideje (a  $j$  munkahelyhez rendelt tevékenységek összes ideje)
- $m$  – tevékenységek száma
- $n$  – munkahelyek feltételezett száma a modell felírásakor
- $r$  – közvetlen megelőzési kapcsolatok száma
- $N$  – munkahelyek tényleges száma
- $N^{\text{Min}}$  – minimálisan szükséges munkahelyek száma
- $N^{\text{Max}}$  – a munkahelyek számának lehető legnagyobb értéke
- $T_c$  – ciklusidő
- $T_c^{\text{Min}}$  – a ciklusidő minimumának becsült értéke
- $T_c^{\text{Max}}$  – a lehető legnagyobb ciklusidő
- $LJ_i$  – a legelső olyan munkahely, amelyhez az  $i$  tevékenység hozzárendelhető
- $UJ_i$  – a legutolsó olyan munkahely, amelyhez az  $i$  tevékenység hozzárendelhető
- $HH$  – hozzárendelés hatékonysága
- $Q^{\text{Max}}$  – a gyártósoron elkészíthető maximális mennyiség
- $Q_j^{\text{Max}}$  – a  $j$  munkahelyen elkészíthető maximális mennyiség

**Halmazok:**

- $R$  – a közvetlen megelőzési kapcsolatok halmaza
- $L$  – az utolsó munkahelyek halmaza
- $P_i$  – az  $i$  tevékenységet megelőző összes tevékenység halmaza
- $S_i$  – az  $i$  tevékenységet követő összes tevékenység halmaza

**Változók:**

- $x_{ij}$  – 0-1 értékű döntési változó;  $x_{ij}$  értéke 1, ha az  $i$  tevékenységet a  $j$  munkahelyen végezzük el; minden más esetben  $x_{ij}$  értéke 0.

*A feladat elvégzéséhez szükséges műveletek meghatározott logikai kapcsolat szerint követik egymást.* Egy gyártási vagy szerelési folyamatnál a technológia meghatározza a műveletek logikai kapcsolatát. A tevékenységek logikai kapcsolata a *feltétlenül megelőző* műveletek táblázatával vagy ennek grafikus ábrázolásával, a precedencia gráffal írható le.

Egy  $i$  feladat tevékenységének *végrehajtási idejét* jelölje  $t_i$  ( $i=1,...,m$ ). Egy feladat akkor van készen, ha a hozzá tartozó összes művelet elkészült. A feladat elvégzéséhez szükséges összes idő ( $\sum t$ ) az (1) képlettel számolható:

$$\sum t = \sum_{i=1}^m t_i . \quad (1)$$

Jelöljük a munkahelyek indexeit  $j$ -vel. Egy  $j$  munkahelyhez rendelt tevékenységek összes ideje a *munkahely műveleti ideje* (állomásidő), jele  $s_j$  ( $j=1,...,N$ ).

Egy  $j$  munkahelyhez rendelt feladatok összes ideje ( $s_j$ ) nem haladhatja meg a gyártósor *ciklusidejét* ( $T_c$ ), vagyis  $s_j \leq T_c$ .

A rendelkezésre álló idő ( $T$ ) és az elvégzendő feladatmennyiség ( $Q$ ) hányadosa a ciklusidő ( $T_c$ ), amely azt mutatja meg, hogy átlagosan mennyi időnként kell elkészülnie egy feladatnak. A ciklusidő tehát a következőképpen számolható:

$$T_c = \frac{T}{Q} . \quad (2)$$

$T$  értéke a munkarendtől függ és a kapacitásszámítás alapösszefüggéseinek segítségével számítható.

SALBP-1 feladat esetén a menedzsment a gyártandó mennyiség ( $Q$ ) meghatározásán keresztül írja elő a ciklusidőt ( $T_c$ ), SALBP-2 feladat esetén pedig a munkahelyek száma ( $N$ ) adott és  $T_c$  a döntési változó.

A ciklusidő alsó korlátját a leghosszabb műveleti idejű tevékenység határozza meg. Ha ugyanis egy munkahely kizárólag a leghosszabb idejű tevékenységet végzi, és ez a munkahely a szűk keresztmetszet, akkor a ciklusidő nem csökkenthető tovább, tehát

$$T_c^{\text{Min}} = \max_i t_i. \quad (3)$$

A ciklusidő felső korlátja a műveleti idők összege. A ciklusidő maximális értékét az adja, ha minden műveletet ugyanazon a munkahelyen végeznek el, tehát

$$T_c^{\text{Max}} = \sum_{i=1}^m t_i. \quad (4)$$

$\sum t$  idejű feladatot kell tehát  $Q$  alkalommal elvégezni, úgy, hogy két feladat befejezése között  $T_c$  időnél több ne teljen el. Ideális esetben a  $\sum t$  idő szétosztható a munkahelyekre úgy, hogy minden munkahely éppen  $T_c$  ideig dolgozzon a feladaton. A szükséges munkahelyek számának ezért az elméleti (ideális esetben lehetséges) alsó korlátja, azaz a *munkahelyek minimálisan szükséges száma* ( $N^{\text{Min}}$ ):

$$N^{\text{Min}} = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{T_c}. \quad (5)$$

A gyakorlatban ez ritkán valósítható meg, mert vagy a műveletek logikai kapcsolata nem teszi lehetővé, hogy olyan műveleteket rendeljünk egy erőforráshoz, amelyek idejének összege éppen megegyezik a ciklusidővel, vagy a műveleteknek nincs is olyan rész-halmaza, amelyhez tartozó műveleti idők összege  $T_c$ .

A *munkahelyek maximális számát* ( $N^{\text{Max}}$ ) az összes elvégzendő művelet száma határozza meg. A legrosszabb esetben minden műveletet külön munkahelyen végeznek el, így

$$N^{\text{Max}} = m. \quad (6)$$

Egy adott kialakításhoz tartozó maximálisan gyártható mennyiség a gyártósor szűk keresztmetszetében lévő  $j$  munkahelyhez rendelt műveletek végrehajtási idejének összege ( $s_j$ ) alapján a következőképpen határozható meg:

$$Q^{\text{Max}} = \frac{T}{\max_{j=1,\dots,N} s_j}. \quad (7)$$

A  $j$  munkahely kapacitáskihasználása a (8) összefüggés szerint számolható:

$$KK_j = \frac{Q}{Q_j^{\text{Max}}} = \frac{Q}{\frac{T}{s_j}} = \frac{s_j}{T} = \frac{s_j}{T_c}. \quad (8)$$

A gyártósor-kiegyenlítési feladatra kapott tényleges megoldás és az elméletileg optimális megoldás viszonyát a hozzárendelés hatékonysága ( $HH$ ) fejezi ki, amely a következő képlettel számolható:

$$HH = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{N \cdot T_c}, \quad (9)$$

ahol  $N$  a gyártósor-kiegyenlítés eredményeként kapott munkahelyek száma. A hozzárendelés hatékonyságának legkedvezőbb (maximális) értéke 1. Ez csak akkor érhető el, ha a számítás eredményeként pontosan  $N^{\text{Min}}$  számú munkahelyre van szükség. Mivel  $N^{\text{Min}}$  értéke rendszerint nem egész szám, ezért az ideális  $HH = 1$  érték a gyakorlatban csak ritkán fordul elő. A hozzárendelés hatékonysága egyben a gyártósor hatékonyságának is a legfontosabb jellemzője.

A különböző számú munkahelyekhez tartozó optimális elrendezések meghatározásával kapjuk meg a hozzárendelési hatékonyság és a gyártandó mennyiség közötti kapcsolatot leíró függvényt, amely a termelésmenedzsment fontos eszköze. Az összefüggés a következőképpen írható le:

$$HH = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{N \cdot T_c} = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{N \cdot \frac{T}{Q}} = Q \cdot \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{N \cdot T}. \quad (10)$$

Látható, hogy a hozzárendelés hatékonysága ( $HH$ ) a gyártási mennyiség ( $Q$ ) lineáris függvénye. Egy adott munkahelyszám ( $N$ ) mellett azonban nem gyártható akármekkora mennyiség,  $Q$  maximális értékét ( $Q^{\text{Max}}$ ) a szűk keresztmetszet műveleteinek összes ideje határozza meg. Ezért a  $HH(Q)$  függvény csak a független változó 0 és  $Q^{\text{Max}}$  közötti tartományán értelmezhető. Tehát  $0 \leq Q \leq Q^{\text{Max}}$ .

Azt is látjuk, hogy ha megváltozik a munkahelyek száma ( $N$ ), akkor a hozzárendelés hatékonysága is változik. Több munkahelynél alacsonyabb hatékonyságot – és ennek megfelelően az egyes munkahelyeken többnyire alacsonyabb kapacitáskihasználást – kapunk.  $N$  változásakor általában  $Q^{\text{Max}}$  értéke is megváltozik. Kevesebb munkahelynél több művelet kerül egy munkahelyre, tehát megnő a munkahelyek műveleti ideje, így lecsökken a gyártható maximális mennyiség. Több munkahely esetén viszont jobban szétoszthatók a műveletek a munkahelyek között, így többnyire csökken a munkahelyek műveleti ideje, és ennek megfelelően nő a gyártható maximális mennyiség. A feltételes mód használata azért indokolt, mert előfordulhat, hogy a munkahelyek számának változása nem változtatja meg a szűk keresztmetszet műveleti idejét.

#### 4.2. A GYÁRTÓSOR-KIEGYENLÍTÉSI FELADAT MEGOLDÁSA MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSSAL

A gyártósor-kiegyenlítési feladat eredménye a műveleteknek – a használt célfüggvény szempontjából – optimális munkahelyekhez rendelése. A feladatok leggyakoribb felírása 0-1 értékű matematikai programozási modellhez vezet, melynek döntési változója ( $x_{ij}$ ) meghatározza, hogy mely tevékenységet mely munkahelyhez rendeljük. Legyen az  $x_{ij}$  döntési változó értéke 1, ha az  $i$  műveletet a  $j$  munkahelyhez rendeljük, tehát

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha a } j \text{ munkahelyen végezzük az } i \text{ műveletet,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (11)$$

A modell felírásakor a munkahelyeket úgy sorszámozzuk, hogy a logikailag korábban végzendő tevékenységek munkahelyének sorszáma (indexe) mindig kisebb vagy egyenlő a logikailag később végezhető tevékenységek munkahelyének sorszámánál (indexénél).

A következőkben tekintsük először a munkahelyek számát minimalizáló SALBP-1, majd ezt követően a ciklusidőt minimalizáló SALBP-2 feladatot.

#### 4.2.1. A munkahelyek számának minimalizálása (SALBP-1)

Az SALBP-1 esetében meghatározott idő ( $T$ ) alatt adott mennyiség ( $Q$ ) legyártása a feladat a lehető legkevesebb munkahely felhasználása mellett. A munkahelyek számának minimalizálása a szükséges munkások számának minimalizálását és egyben a gyártási költségek csökkentését is jelenti.

Ha egy termékből egy gyártósoron  $T$  idő alatt kell  $Q$  mennyiséget legyártani, akkor átlagosan  $T/Q$  idő alatt kell, hogy elkészüljön egy termék, így a gyártósor előírt ciklusideje

$$T_c = \frac{T}{Q}. \quad (12)$$

A tevékenységek munkahelyhez rendelésekor a műveleti idők összege nem haladhatja meg a ciklusidőt egyetlen munkahelynél sem, így

$$\sum_{i=1}^m t_i x_{ij} \leq T_c \quad j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

A feladat felírásakor még nem tudjuk, hogy hány munkahelyre lesz szükség, ezért megbecsüljük a szükséges munkahelyek számának felső korlátját ( $n$ ). A ténylegesen használt munkahely számot pedig  $N$  jelöli.

A (14) képlet azt jelöli, hogy minden műveletet végre kell hajtani valamelyik munkahelynél és egy művelet csak egyetlen munkahelynél hajtható végre.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m. \quad (14)$$

A műveletek végrehajtásakor figyelembe kell venni a műveletek logikai kapcsolatát. A megelőzési (precedencia) kapcsolatokat a (15) – minden egyes közvetlen megelőzési kapcsolathoz felírt – egyenlőtlenségekkel fejezhetjük ki:

$$x_{qk} \leq \sum_{j=1}^k x_{pj} \quad k = 1, \dots, n; \quad (p, q) \in R, \quad (15)$$

ahol  $R = \{(p, q) \mid \text{tevékenység } p \text{ közvetlenül megelőzi tevékenység } q\}$ .

Ha  $n$  munkahelyet és  $r$  darab közvetlen megelőzési kapcsolatot feltételezünk, akkor  $n \cdot r$  megelőzési feltétel felírása szükséges. A megelőzési kapcsolatok matematikai sajátosságai miatt azonban elegendő a következő  $r$  darab egyenlőtlenség felírása:

$$\sum_{j=1}^n j \cdot x_{qj} - x_{pj} \geq 0 \quad (p, q) \in R. \quad (16)$$

Mivel  $x_{qj}$  és  $x_{pj}$  értéke csak 0 vagy 1 lehet, így különbségük értéke csak -1, 0, vagy 1 lehet minden munkahely esetében. (-1, ha  $p$  műveletet a  $j$  munkahelyen végezzük, de  $q$ -t nem; 0, ha mind  $p$ , mind  $q$  műveletet a  $j$  munkahelyen végezzük; és 1, ha  $q$ -t a  $j$  munkahelyen végezzük, de  $p$ -t nem.) Mivel mindegyik műveletet csak egyetlen munkahelyen lehet elvégezni, ezért ha  $p$  művelet megelőzi  $q$  műveletet, akkor a munkahely sorszámával ( $j$ ) súlyozott  $x_{qj} - x_{pj}$  különbségek összege mindig nagyobb vagy egyenlő, mint nulla. Így a megelőzési feltételek  $r$  darab egyenlőtlenséggel leírhatók (Koltai-Tatay, 2010).

A munkahelyek számát a következő feltétel segítségével lehet minimalizálni:

$$N \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad i \in L, \quad (17)$$

ahol  $L = \{i \mid \text{az } i \text{ tevékenység nem előz meg egyetlen más tevékenységet sem}\}$ .

$L$  az utolsó munkahelyek halmaza, vagyis azoké, amelyek nem előznek meg egyetlen más munkahelyet sem. Ezeknél a munkahelyeknél készülnek el a termékek. Ha a termék több változatban készül, akkor lehet több „utolsó munkahely” is úgy, hogy mindegyiknél a termék egy külön változatát fejezik be. Mivel az  $x_{ij}$  változó értéke csak egyetlen munkahely indexénél 1, ezért a (17) feltétel jobb oldalának eredménye ( $\sum x_{ij}$ ) az utolsó munkahelyek sorszámát adja ( $j$ ). Az egyenlőtlenségből látható, hogy az utolsó munkahelyek sorszámának kisebbnek kell lenniük  $N$  értékénél. Így, ha minimalizáljuk  $N$  értékét, akkor egyben az utolsó munkahelyek sorszámát és a szükséges munkahelyek számát is minimalizáljuk.

Összefoglalva feltételeinket az SALBP-1 feladat tehát a következőképpen írható fel:

$$\text{Min } N \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m t_i x_{ij} \leq T_c \quad j = 1, \dots, n \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^n j \cdot x_{qj} - x_{pj} \geq 0 \quad (p, q) \in R \quad (21)$$

$$N \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad i \in L \quad (22)$$

Az (18)-(22) modellnél a döntési változók száma  $n \cdot m$ . A döntési változók csökkentésével gyorsítható a megoldás. Mivel minden művelet csak egy munkahelyre kerülhet, és a műveletek sorrendjét logikai kapcsolat határozza meg, ezért a műveletek szétoztásánál a munkahelyek egy része, ahova az adott művelet biztosan nem kerülhet, kizárható. Vagyis minden művelethez meghatározható a munkahelyeknek egy olyan tartománya, ahová a művelet kerülhet. Ezt a megengedett tartományt a legkorábbi használható munkahely ( $LJ_i$ ) és legkésőbbi használható munkahely ( $UJ_i$ ) jelöli ki a (23) összefüggés szerint:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ha } j < LJ_i \text{ és } j > UJ_i \\ 1 & , \text{ha } j \geq LJ_i \text{ és } j \leq UJ_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, I. \quad (23)$$

A (23) feltétel szerint a döntési változók értéke 1, ha megengedett hozzárendeléshez vezetnek, egyébként 0.

A legkorábbi használható munkahelyek ( $LJ_i$ ) értékeit a következőképpen számoljuk:

$$LJ_i = \left\lceil \frac{t_i + \sum_{k \in P_i} t_k}{T_c} \right\rceil, \quad (24)$$

ahol  $P_i$  az  $i$  tevékenységet megelőző összes tevékenység halmaza,  $\lceil x \rceil$  pedig felfelé kerekítést jelent.

Ha az  $i$  tevékenység, és az azt megelőző összes tevékenység együttes idejét elosztjuk a ciklusidővel, akkor (nem egész szám esetén felfelé kerekítéssel) megkapjuk az első olyan munkahely indexét, amelyhez az  $i$  tevékenység hozzárendelhető.

Az legkésőbbi használható munkahelyek ( $UJ_i$ ) értékei a (25) képlet megoldásával adódnak:

$$UJ_i = \left\lfloor \frac{t_i + \sum_{k \in S_i} t_k}{T_c} \right\rfloor + 1, \quad (25)$$

ahol  $S_i$  az  $i$  tevékenységet követő összes tevékenység halmaza,  $\lceil \bar{x} \rceil$  pedig itt is felfelé kerekítést jelent.

Ha az  $i$  tevékenység idejét, és az azt követő összes tevékenység együttes idejét elosztjuk a ciklusidővel, akkor (nem egész szám esetén felfelé kerekítéssel) megkapjuk az elfoglalt munkahelyek számát. Ezt a maximális munkahelyek eggyel megnövelt számából  $(J+1)$  levonva megkapjuk azt az utolsó munkahelyet, amelyhez az  $i$  művelet még hozzárendelhető.

A döntési változók száma tovább csökkenthető, ha a munkahelyek számának induláskor feltételezett értékét ( $n$ ) ügyesen választjuk meg. A minimálisan szükséges munkahelyek száma ( $N^{\text{Min}}$ ) a műveleti idők összegének és a ciklusidőnek a hányadosából adódik. A munkahelyek maximális számát ( $N^{\text{Max}}$ ) az elvégzendő műveletek száma ( $m$ ) határozza meg. A szükséges munkahelyek száma a két érték közé esik:  $N^{\text{Min}} \leq N \leq N^{\text{Max}}$ . Általában egy vagy több munkahely több műveletet is el tud végezni, ezért az optimális megoldásnál a műveletek számánál kevesebb munkahelyre van szükség. Így a biztosan szükséges munkahelyek számára  $N^{\text{Max}}$ -nál kisebb felső korlát is megadható, mellyel jelentősen csökken a bináris változók száma.

#### 4.2.2. A gyártott mennyiség maximalizálása (SALBP-2)

Az SALBP-2 esetében adott munkahely szám ( $N$ ) mellett kell a lehető legnagyobb mennyiséget ( $Q$ ) legyártani. Az SALBP-2 feladatnál a cél a ciklusidő minimalizálása. A  $T_c = T/Q$  képletből adódik ugyanis, hogyha a ciklusidőt minimalizáljuk, az egyben a gyártott mennyiség maximalizálását is jelenti.

A tevékenységeket oly módon kell munkahelyhez rendelni, hogy a műveleti idők összege egyetlen munkahelynél sem haladhatja meg a ciklusidőt, tehát

$$\sum_{i=1}^m t_i x_{ij} \leq T_c \quad j = 1, \dots, N. \quad (26)$$

Ennél a modellnél a munkahelyek száma ( $N$ ) ismert, a ciklusidő értéke ( $T_c$ ) döntési változó.

Minden műveletet valamelyik munkahelynél végre kell hajtani, és minden művelet csak egyetlen munkahelyhez rendelhető hozzá, tehát

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m. \quad (27)$$

A műveletek végrehajtásakor továbbra is figyelembe kell venni a műveletek logikai kapcsolatát, tehát

$$\sum_{j=1}^n j \cdot \mathbf{C}_{qj} - x_{pj} \geq 0, \quad (p, q) \in R. \quad (28)$$

Összefoglalva a szükséges feltételeket az SALBP-2 feladat tehát a következőképpen írható fel:

$$\text{Min } \mathbf{C}_c \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^m t_i x_{ij} \leq T_c \quad j = 1, \dots, N \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^n j \cdot \mathbf{C}_{qj} - x_{pj} \geq 0, \quad (p, q) \in R \quad (32)$$

A (29)-(32) modellnél a döntési változók száma  $m \cdot N$ . Az optimumkeresést itt is lehet gyorsítani, ha csökkentjük a döntési változók számát, azaz minden művelethez meghatározzuk a munkahelyek azon tartományát, ahová a művelet kerülhet. Mivel a műveletek megelőzési kapcsolatai miatt a megelőző műveletek elfoglalják az első munkahelyek egy részét, és a követő műveletek elfoglalják az utolsó munkahelyeknek szintén egy részét, így a megengedett tartomány szűkebb lesz a munkahelyek számánál. Ezt a tartományt a legkorábbi használható munkahely ( $LJ_i$ ) és legkésőbbi használható munkahely ( $UJ_i$ ) jelöli ki a következőképpen:

$$x_{ij} = 0 \quad j < LJ_i \text{ és } j > UJ_i \quad i = 1, \dots, I. \quad (33)$$

A (33) feltétel szerint a döntési változó azon értékei, amelyek biztosan nem vezetnek megengedett hozzárendeléshez, zérók. Az  $LJ_i$  értékeket a következőképpen számoljuk :

$$LJ_i = \left\lceil \frac{t_i + \sum_{k \in P_i} t_k}{T_c^{\text{Max}}} \right\rceil, \quad (34)$$

ahol  $P_i$  az  $i$  tevékenységet megelőző összes tevékenység halmaza,  $\lceil x \rceil$  pedig felfelé kerekítést jelent.

Ha az  $i$  tevékenység, valamint az azt megelőző összes tevékenység együttes idejét elosztjuk a ciklusidő becsült felső korlátjával, akkor megkapjuk a minimálisan szükséges munkahelyek számát e műveletek elvégzéséhez. Ha nem egész számot kapunk, akkor felfelé kerekítéssel adódik az első olyan munkahely, amelyhez az  $i$  tevékenység hozzárendelhető.

Az  $UJ_i$  értékeket a következőképpen számoljuk:

$$UJ_i = \lceil \frac{t_i + \sum_{k \in S_i} t_k}{T_c^{\text{Max}}} \rceil, \quad (35)$$

ahol  $S_i$  az  $i$  tevékenységet követő összes tevékenység halmaza,  $\lceil x \rceil$  pedig felfelé kerekítést jelent.

Ha az  $i$  tevékenység, valamint az azt követő összes tevékenység együttes idejét elosztjuk a ciklusidő becsült felső korlátjával, akkor megkapjuk a minimálisan szükséges munkahelyek számát, az  $i$  műveletek elvégzéséhez. Ha nem egész számot kapunk, akkor felfelé kerekítéssel adódik az elfoglalt munkahelyek száma. Ezt levonva a maximális munkahelyek eggyel megnövelt számából  $(J+1)$  kapjuk meg azt az utolsó munkahelyet, amelyhez az  $i$  művelet még hozzárendelhető.

Mivel ennél a feladatnál a cél a ciklusidő minimalizálása, ezért azt kell megbecsülni, hogy ez a minimum milyen értéknél lesz biztosan kisebb (a minimum felső korlátja). Minél alacsonyabb ez a felső korlát, annál több munkahelyet foglalnak el a műveletet megelőző és követő tevékenységek. Ezáltal csökken a művelet számára szóba jöhető munkahelyek tartománya, ezzel együtt pedig a változók száma is. A becslésre általános módszer nincs.  $T_c^{\text{Max}}$  a műveleti idők összegénél biztosan kisebb lesz, de figyelembe véve bizonyos gyakorlati szempontokat, ennél jobb közelítés is található.

## 5. AZ SALBP FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK BEMUTATÁSA A MEGAMAT 2 PÉLDÁJÁN

A következőkben az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési feladatok optimális megoldását a *Megamat 2 sima* készülék szerelési példáján keresztül szemléltetem.

### 5.1. MEGAMAT 2 SIMA KÉSZÜLÉK



7. ábra: *Megamat 2 sima* készülék

Forrás: [http://www.dewert.de/site/en/single-drives/products/12\\_megamat-2/datasheet](http://www.dewert.de/site/en/single-drives/products/12_megamat-2/datasheet)

Az általam vizsgált *Megamat 2 sima* egymotoros emelő készüléket jelenleg kétféle gyártósoron gyártják párhuzamosan a Phoenix Mecano Kecskemét Kft. *Dewert profitcenterében*: négy munkahelyes szigetszerű gyártásban és hét munkahelyes U-cella elrendezésben. A kettő között különbség van a gyártósorok térbeli elrendezésében, kialakításában, a munkahelyek számában, illetve az anyagáramlásban: a szigetek esetén hatosával továbbítják a munkadarabokat a követő munkahelyre, az U-cellában egyesével.

A készülékek összeszerelését az 1. táblázatban leírtak szerint valósítják meg az egyes elrendezésekben:

1. táblázat: Megamat 2 sima készülék összeszerelése U-cella és szigetszerű gyártás esetén

| <b><u>U-cella esetén (7 dolgozó):</u></b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b><u>Sziget esetén (4 dolgozó):</u></b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1a Orsószerelés (BGS = Baugruppe Spindel = csoportszerelt orsó)</p> <p>1b Csoportszerelt orsó (BGS) zsírzóba helyezése</p> <p>2a Csoportszerelt orsó (BGS) zsírzása</p> <p>2b Vezetőprofil (Flanschführung) szerelése</p> <p>3a Hajtóműház szerelés</p> <p>3b Hajtómű villafej szerelés/betekerés (GGK = Getriebegabelkopf)</p> <p>4a Kábelszerelés (csatlakozó kábel)</p> <p>4b Motor csatlakozó kábelek fűzése, csatlakoztatása, kábelleszorító behelyezés</p> <p>5a Motor beszerelés/rögzítés</p> <p>5b Emelőprofil (Hubrohr) betekerés + hajtóműház kupak felhelyezés</p> <p>6a Tesztelés, címkék felragasztása</p> <p>6b Motorkupak rögzítése</p> <p>7a Besegítés a tesztelőnek</p> <p>7b Csomagolás</p> | <p>Az 1 és 2 műveleteket (előkészítés) a műszak első 2-3 órájában 2 dolgozó, majd 1 dolgozó végzi (a másik átmegy a végszerelés oldalra).</p> <p>A 3-7 műveleteket a fentiek értelmében a műszak kezdetén 2 majd 3 dolgozó végzi.</p> <p>Itt munkaállomás/dolgozó felállás annyira nem kötött, mint az U cellában.</p> <p>Pl. az előkészítő oldalról "érkező" harmadik ember ott segít be, ahol szűk a keresztmetszet (pl. csomagolás, kábelcsatlakoztatás).</p> |

A szalagon dolgozó minden dolgozó el tudja végezni a szalagon lévő összes műveletet, így bármelyik munkahelyhez hozzárendelhetők.

Az U-cellára történő átállás egyik előnye, hogy adott idő alatt többet tudnak gyártani, mint amennyit a négy dolgozóról hét dolgozóra történő váltás arányosan jelentene. A gyártható mennyiségnek ez a növekedése a tanulási hatással magyarázható.

A tanulási hatás a gyártási mennyiség növekedésével járó fajlagos gyártási idő csökkenését eredményező jelenség. A *tanulási görbe* a következő matematikai függvénnel írható le (Yelle, 1979; Conway-Schultz, 1959; Koltai, 2006):

$$Y_Q = a \cdot Q^b \quad b \leq 0, \quad (36)$$

ahol:

$Q$  – az elvégzett feladat mennyisége (például legyártott termékek száma, feldolgozott ügyiratok száma, kiszolgált vevők száma stb.),

$Y_Q$  – a feladat  $Q$ -adik végrehajtásához szükséges idő,

$a$  – a feladat első végrehajtásához szükséges idő, vagyis  $a = Y_1$ . Emiatt  $a$  és  $Y_1$  ugyanazt jelenti.

$$b = \frac{\log L}{\log 2} = \frac{\ln L}{\ln 2} - \text{tanulási index, a végrehajtott feladatok számának növekedésével}$$

összefüggő időcsökkenést leíró paraméter,

$L$  – tanulási ráta,

$(1-L)$  – javulási arány.

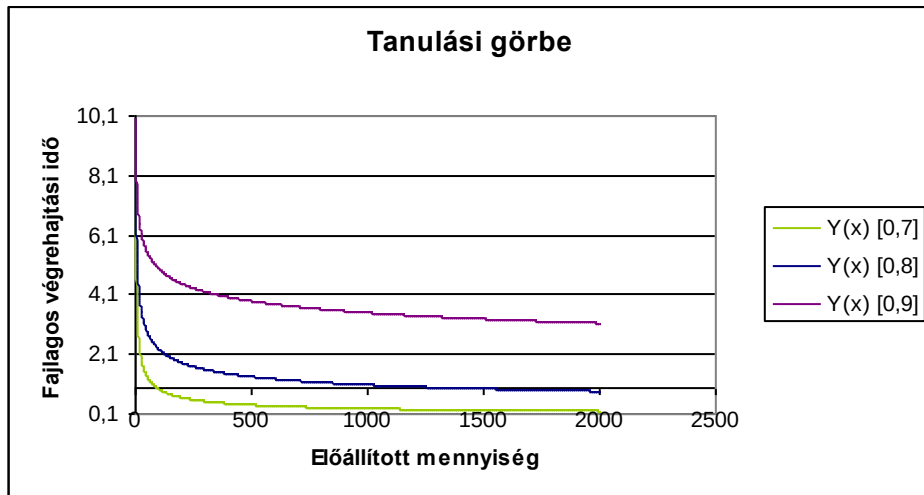
A gyakorlati életben inkább a tanulási ráta használata terjedt el, amely azt fejezi ki, hogy megduplázva a végrehajtott feladatok számát, hányad részére csökken a fajlagos végrehajtási idő. A tanulási ráta a következő összefüggés alapján számolható (Koltai, 2006):

$$L = \frac{Y_{2Q}}{Y_Q} = \frac{a \cdot [2Q]^b}{a \cdot [Q]^b} = 2^b. \quad (37)$$

A tanulási ráta segítségével a tanulási hatás 0 és 1 között mérhető, illetve szokás megadni százalékos formában is.

A 8. ábrán három tanulási görbét látunk. A hozzájuk tartozó tanulási hatás rendre 70%, 80%, illetve 90%. Mindhárom esetben az első darab elkészítéséhez szükséges idő 10 időegység volt.

Megfigyelhető, hogy 70%-os tanulási ráta esetén a fajlagos időszükséglet nagyobb ütemben csökken, mint 90%-os tanulási ráta esetén, vagyis nagyobb mértékű a tanulás.



8. ábra: A tanulási görbe eltérő tanulási ráták esetén

Ebből következően, ha kevesebb műveletet ismételgetünk egymás után, vagyis kevesebb műveletet kell az adott munkahelyen elvégezni, akkor adott idő alatt többször tudjuk végrehajtani a tevékenységsorozatot, vagyis a fajlagos gyártási idő csökkenése hamarabb következik be.

A két gyártósor között a korábban említetteken túl eltérés van még abban is, hogy egy dolgozó mennyi időt tölt egy munkahelyen. A szigetszerű soron ugyanis hetente cserélnek, míg az U-cella esetében kétóránként mennek a dolgozók másik munkahelyre – kivéve a tesztelő munkaállomást, ahol egész héten ugyanaz a munkás dolgozik.

A kétóránkénti váltás a tanulási hatásból származó előnyök szempontjából kevésbé kedvező, ugyanakkor szükség van rá, mert a gyártósoron vannak olyan munkahelyek, műveletcsoportok, amelyek fizikailag megterhelőbbek a többinél, ezért pusztán ezeket a műveleteket nem lehetne napi nyolc órán keresztül folyamatosan végezni. Számításba kell venni továbbá azt is, hogyha nagyon kevés műveletet végzünk egy munkahelyen, az túlzatosan monoton, ami a figyelem csökkenésével, így a hibázás kockázatának növekedésével jár. Vagyis a műszakonkénti többszöri munkahely-váltás több szempontból is indokolt lehet.

A fajlagos gyártási idő nem csökkenhet a végtelenségig, egy idő után eléri a stacionárius állapotot, amikor már nem csökken tovább. Mivel a *Megamat 2* készülék gyártása már évek óta zajlik, így a műveleti idők elérték ezt az állandósult állapotot. A tanulási hatás eredményezte napi, két órás sávokon belüli fajlagos időcsökkenéstől a számításainkban eltekintünk, a műveleti időket állandónak és adottnak vesszük.

A szerelősorokon a *Megamat 2*-t többféle változatban készítik a megrendelő igényei szerint („sima”, „1 panelos”, „2 panelos”, „sima, kuplungos”, „régí Kappe-s”, „új Kappe-s” változatokban). Az egyes változatokhoz külön meghatározták a ciklusidőket, így műszakonkénti normamennyiségeket is.

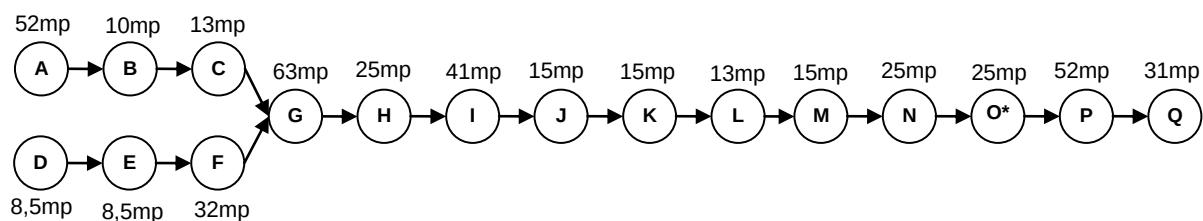
A *Dewert*ben két műszakban dolgoznak. Egy műszak esetén a nettó munkaidő 440 perc. Egy műszak során két (másik változatra való) átállás bele van kalkulálva az időbe, a harmadiktól kezdve 5-5 percet kapnak a szerelősorok minden átállásra.

A *Megamat 2 sima* készülékhez tartozó műveleteket, a hozzájuk tartozó időadatokat, valamint a műveleteket közvetlenül megelőző műveletek listáját az 2. táblázat foglalja össze.

2. táblázat: *Megamat 2 sima* készülék műveleteinek leírása, műveleti idők és közvetlenül megelőző műveletek

| Műv. sorsz. | Műv. kód | Műveletek leírása                                                                             | Műv.idők (mp) | Közvetlenül megelőző művelet(ek) |
|-------------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|----------------------------------|
| 1           | A        | Spindel szerelés (alátét, csapágy, csigakerék, stift)                                         | 52            | -                                |
| 2           | B        | Spindelt zsírzógépbe tesz                                                                     | 10            | A                                |
| 3           | C        | Spindel zsírzás (típusfüggő)                                                                  | 13            | B                                |
| 4           | D        | Kappét FL-re kézzel rányom, befogóba betesz                                                   | 8,5           | -                                |
| 5           | E        | Kappét présel                                                                                 | 8,5           | D                                |
| 6           | F        | Kappét csavaroz, zsíroz, E-Leistét behelyez                                                   | 32            | E                                |
| 7           | G        | Gehäuse+BGS+GGK                                                                               | 63            | C, F                             |
| 8           | H        | Kábelszerelés (csatlakozó kábel)                                                              | 25            | G                                |
| 9           | I        | Motor csatlakozó kábelek fűzése, csatlakoztatása, kábelleszorító behelyezés                   | 41            | H                                |
| 10          | J        | Motort zsíroz, házba tesz                                                                     | 15            | I                                |
| 11          | K        | Motort csavaroz                                                                               | 15            | J                                |
| 12          | L        | Rögzítőcsavart fúr, csavaroz                                                                  | 13            | K                                |
| 13          | M        | Motorkupak+Hubrohr betekérés                                                                  | 15            | L                                |
| 14          | N        | Készüléket tesztelőre felrak                                                                  | 25            | M                                |
| 15          | O*       | Tesztidő (gépidő! 30-120sec, típusfüggő, 2 hely van a tesztgépen -> feltevés: $50/2 = 25$ ) * | 25            | N                                |
| 16          | P        | Levesz, meghúz, dugóz, címkéz                                                                 | 52            | O                                |
| 17          | Q        | Takarít és kartonba tesz                                                                      | 31            | P                                |

A műveletek logikai kapcsolatát a 9. ábrán látható precedencia-gráf szemlélteti.



9. ábra: A Megamat 2 sima készülék összeszerelési műveleteinek idejét és logikai kapcsolatát szemléltető precedencia-gráf

## 5.2. AZ SALBP-1 FELADAT MEGOLDÁSA HÉT MUNKAHELYRE

Tegyük fel, hogy egy műszakban (nettó 440 perc) 310 db készüléket szeretnénk gyártani. Ehhez először meg kell határozni az SALBP-1 feladat segítségével a minimálisan szükséges munkahelyek számát. Feltételezésünk szerint minden munkahelyen egyetlen munkás végzi el a munkahelyhez rendelt műveleteket, és a munkahelyek sorban, egymás után követik egymást.

A 10. ábra a *Megelőzési mátrixot* (a precedencia gráf mátrixos leírását), valamint a műveletekhez tartozó, másodpercben mért műveleti időket mutatja. A megelőzési mátrixban egy cella értéke 1, ha a cella sorában lévő művelet közvetlenül megelőzi a cella oszlopában lévő műveletet; minden más esetben 0.

| Megelőzési mátrix |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   | Összes idő [mp]: 444 |     |     |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----------------------|-----|-----|
| Műv               | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O* | P | Q                    | Műv | idő |
| A                 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | A   | 52  |
| B                 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | B   | 10  |
| C                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | C   | 13  |
| D                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | D   | 8,5 |
| E                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | E   | 8,5 |
| F                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | F   | 32  |
| G                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | G   | 63  |
| H                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | H   | 25  |
| I                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | I   | 41  |
| J                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | J   | 15  |
| K                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | K   | 15  |
| L                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0  | 0 | 0                    | L   | 13  |
| M                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0  | 0 | 0                    | M   | 15  |
| N                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1  | 0 | 0                    | N   | 25  |
| O*                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 1 | 0                    | O*  | 25  |
| P                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 1                    | P   | 52  |
| Q                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                    | Q   | 31  |

10. ábra: Megelőzési mátrix, műveleti idők

A ciklusidő a rendelkezésre álló idő és a gyártandó mennyiség hányadosaként számolható:

$$T_c = \frac{T}{Q} = \frac{440 \cdot 60}{310} = 85,2 \text{ mp/db.} \quad (38)$$

Műszakonkénti 310 darab termék egyenletes ütemben történő elkészítéséhez 85,2 másodpercenként egy *Megamat 2 sima* készülék összeszerelését be kell fejezni. Egyetlen készülék elkészítésének összes ideje a 2. táblázat adatai alapján:

$$\sum t = \sum_{i=1}^m t_i = 444 \text{ mp/db.} \quad (39)$$

Ha egy termék 85,2 másodpercenként készül el, akkor a minimálisan szükséges munkahelyek száma a következőképpen alakul:

$$N^{\text{Min}} = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{T_c} = \frac{444}{85,2} = 5,2. \quad (40)$$

A kapott eredmény azt jelenti, hogy legalább *hat* munkahelyre, azaz hat munkásra van szükség ahhoz, hogy a kitűzött mennyiséget le tudjuk gyártani. Ez csak abban az ideális esetben lenne elérhető, hogyha a műveleteket úgy lehetne szétosztani, hogy minden munkahely azonos idő alatt végezni tudjon a hozzárendelt műveletekkel. Ezt azonban a műveletek logikai kapcsolata és a műveleti idők szórása nem biztos, hogy lehetővé teszi.

Legrosszabb esetben minden műveletet külön munkahelyen kell elvégezni. Vagyis a munkahelyek maximális számát a műveletek száma adja. Ez esetünkben 17. ( $N^{\text{Max}}=m=17$ ).

A fentebbi adatokat a 3. táblázat foglalja össze:

3. táblázat: Idő- és mennyiségi adatokat összefoglaló táblázat (SALBP-1)

|                               |             |
|-------------------------------|-------------|
| Rendelkezésre álló idő (mp)   | 26400       |
| Gyártandó mennyiség (db)      | 310         |
| <b>Ciklusidő (mp/db)</b>      | <b>85,2</b> |
| Munkahelyek elméleti minimuma | 6           |
| Munkahelyek elméleti maximuma | 17          |

Az SALBP-1 feladat célfüggvénye a munkahelyek számának minimalizálását írja elő, tehát a (41) szerint alakul (a kifejtést részletesen a 11. ábra mutatja):

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n \mathbf{Q} \cdot x_{17,j} \quad (41)$$

Egy termék akkor készül el teljesen, hogyha a legyártásához szükséges összes műveletet elvégezték rajta. Vagyis minden műveletet hozzá kell rendelni egy (és csak egy) munkahelyhez. Így az utolsó műveletet is ( $x_{17}$ ). Mivel egy műveletet csak egy helyen lehet elvégezni, ezért a  $x_{17,j}$  változók közül csak egynek lesz 1 az értéke. Ez az a munkahely ( $j$ ), amelynél az utolsó (**Q**) műveletet elvégezzük. Mivel esetünkben csak egy utolsó művelet van, ezért az a munkahely, ahol **Q**-t elvégezzük egyben az utolsó munkahely sorszáma is. Így a  $j \cdot x_{17,j}$  szorzatok összege megadja az utolsó (és egyben összes) munkahely számát. Ennek minimalizálásával a szükséges munkahelyek számát ( $N$ ) is minimalizáljuk.

A feladat korlátozó feltételeit a 12., 13., 14. és 15. ábrák mutatják.

A 12. ábra a ciklusidő korlátokat tartalmazza a feladatban a megoldás kezdetekor feltételezett 17 munkahelyre. Ezek a korlátok azt fejezik ki, hogy egyetlen munkahelynél sem haladhatja meg a munkahelyhez rendelt műveletek elvégzéséhez szükséges összes idő a ciklusidőt. (Képlettel:  $\sum_{i=1}^m t_i x_{ij} \leq T_c$ , ahol  $j = 1, \dots, n$ )

A termék elkészítéséhez valamennyi műveletet el kell végezni, és minden művelet csak egy munkahelyhez rendelhető hozzá. Így minden művelet változója csakis egy munkahelynél egyenlő eggyel. Az 13. ábra feltételei ezt írják elő. (Képlettel:  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ , ahol  $i = 1, \dots, m$ )

A 14. ábra egyenletei a tevékenységek logikai, megelőzési kapcsolatát írják elő. (Képlettel:  $\sum_{j=1}^n j \cdot \mathbf{Q}_{qj} - x_{pj} \geq 0$ , ahol  $(p, q) \in R$ )

A 15. ábra a (34) és (35) összefüggésekkel számolt *legkorábbi* ( $LJ_i$ ) és *legkésőbbi* lehetséges munkahelyek ( $UJ_i$ ) értékeket foglalják össze. Az értékek mellett az  $i$  tevékenységet megelőző és követő összes tevékenységeket tartalmazó mátrix látható. Például a **G** tevékenységet megelőzik az **A, B, C, D, E** és **F** tevékenységek, ezért az legkorábban a  $(63+1 \cdot 52+1 \cdot 10+1 \cdot 13+1 \cdot 8,5+1 \cdot 8,5+1 \cdot 32) / 85,2 = 2,19$  felfelé kerekített értékéhez, vagyis a harmadik munkahelyhez rendelhető, tehát  $LJ_7 = 3$ . Ugyanakkor a **G** tevékenységet a **H, I, J, K, L, M, N, O\*, P** és **Q** tevékenységek követik, amelyek együttes ideje az **G** tevékenységgel együtt 257 másodperc. Ehhez az előírt ciklusidő miatt (85,2 mp.) legalább 3,02,

azaz 4 munkahely szükséges, így  $UJ_7 = 17 - 4 = 14$ . Tehát, ha 17 munkahelyet feltételezünk, akkor a **G** tevékenységet legkésőbb a 14-es munkahelyen el kell kezdeni, hogy a **G**-t követő összes tevékenység időben el tudjon kezdődni és be tudjon fejeződni.

$$\text{Min } (x_{17,1} + 2x_{17,2} + 3x_{17,3} + 4x_{17,4} + 5x_{17,5} + 6x_{17,6} + 7x_{17,7} + 8x_{17,8} + 9x_{17,9} + 10x_{17,10} + 11x_{17,11} + 12x_{17,12} + 13x_{17,13} + 14x_{17,14} + 15x_{17,15} + 16x_{17,16} + 17x_{17,17})$$

11. ábra: Az SALBP-1 célfüggvénye

$$\begin{array}{l|l} 1. & 52x_{1,1} + 10x_{2,1} + 8,5x_{3,1} + 8,5x_{4,1} + 13x_{5,1} + 32x_{6,1} + 63x_{7,1} + 25x_{8,1} + 41x_{9,1} + 15x_{10,1} + 15x_{11,1} + 13x_{12,1} + 15x_{13,1} + 25x_{14,1} + 25x_{15,1} + 52x_{16,1} + 31x_{17,1} \leq 85,2 \\ 2. & 52x_{1,2} + 10x_{2,2} + 8,5x_{3,2} + 8,5x_{4,2} + 13x_{5,2} + 32x_{6,2} + 63x_{7,2} + 25x_{8,2} + 41x_{9,2} + 15x_{10,2} + 15x_{11,2} + 13x_{12,2} + 15x_{13,2} + 25x_{14,2} + 25x_{15,2} + 52x_{16,2} + 31x_{17,2} \leq 85,2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \leq 85,2 \\ 17. & 52x_{1,17} + 10x_{2,17} + 8,5x_{3,17} + 8,5x_{4,17} + 13x_{5,17} + 32x_{6,17} + 63x_{7,17} + 25x_{8,17} + 41x_{9,17} + 15x_{10,17} + 15x_{11,17} + 13x_{12,17} + 15x_{13,17} + 25x_{14,17} + 25x_{15,17} + 52x_{16,17} + 31x_{17,17} \leq 85,2 \end{array}$$

12. ábra: Az egyes munkahelyek összes idejére vonatkozó ciklusidő-korlátok

$$\begin{array}{l|l} A(1) & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{1,6} + x_{1,7} + x_{1,8} + x_{1,9} + x_{1,10} + x_{1,11} + x_{1,12} + x_{1,13} + x_{1,14} + x_{1,15} + x_{1,16} + x_{1,17} = 1 \\ B(2) & x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{2,6} + x_{2,7} + x_{2,8} + x_{2,9} + x_{2,10} + x_{2,11} + x_{2,12} + x_{2,13} + x_{2,14} + x_{2,15} + x_{2,16} + x_{2,17} = 1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots = 1 \\ Q(17) & x_{17,1} + x_{17,2} + x_{17,3} + x_{17,4} + x_{17,5} + x_{17,6} + x_{17,7} + x_{17,8} + x_{17,9} + x_{17,10} + x_{17,11} + x_{17,12} + x_{17,13} + x_{17,14} + x_{17,15} + x_{17,16} + x_{17,17} = 1 \end{array}$$

13. ábra: Valamennyi művelet elvégzésének feltételei

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (A - B) kapcsolat(1;2)   | $  \begin{aligned}  &1 \cdot \textcircled{2,1} - x_{1,1} \quad \frown \quad 2 \cdot \textcircled{2,2} - x_{1,2} \quad \frown \quad 3 \cdot \textcircled{2,3} - x_{1,3} \quad \frown \quad 4 \cdot \textcircled{2,4} - x_{1,4} \quad \frown \quad 5 \cdot \textcircled{2,5} - x_{1,5} \quad \frown \quad 6 \cdot \textcircled{2,6} - x_{1,6} \quad \frown \\  &7 \cdot \textcircled{2,7} - x_{1,7} \quad \frown \quad 8 \cdot \textcircled{2,8} - x_{1,8} \quad \frown \quad 9 \cdot \textcircled{2,9} - x_{1,9} \quad \frown \quad 10 \cdot \textcircled{2,10} - x_{1,10} \quad \frown \quad 11 \cdot \textcircled{2,11} - x_{1,11} \quad \frown \quad 12 \cdot \textcircled{2,12} - x_{1,12} \quad \frown \\  &13 \cdot \textcircled{2,13} - x_{1,13} \quad \frown \quad 14 \cdot \textcircled{2,14} - x_{1,14} \quad \frown \quad 15 \cdot \textcircled{2,15} - x_{1,15} \quad \frown \quad 16 \cdot \textcircled{2,16} - x_{1,16} \quad \frown \quad 17 \cdot \textcircled{2,17} - x_{1,17} \quad \frown  \end{aligned}  \geq 0  $ |
| (D - E) kapcsolat(4;5)   | $  \begin{aligned}  &1 \cdot \textcircled{5,1} - x_{4,1} \quad \frown \quad 2 \cdot \textcircled{5,2} - x_{4,2} \quad \frown \quad 3 \cdot \textcircled{5,3} - x_{4,3} \quad \frown \quad 4 \cdot \textcircled{5,4} - x_{4,4} \quad \frown \quad 5 \cdot \textcircled{5,5} - x_{4,5} \quad \frown \quad 6 \cdot \textcircled{5,6} - x_{4,6} \quad \frown \\  &7 \cdot \textcircled{5,7} - x_{4,7} \quad \frown \quad 8 \cdot \textcircled{5,8} - x_{4,8} \quad \frown \quad 9 \cdot \textcircled{5,9} - x_{4,9} \quad \frown \quad 10 \cdot \textcircled{5,10} - x_{4,10} \quad \frown \quad 11 \cdot \textcircled{5,11} - x_{4,11} \quad \frown \quad 12 \cdot \textcircled{5,12} - x_{4,12} \quad \frown \\  &13 \cdot \textcircled{5,13} - x_{4,13} \quad \frown \quad 14 \cdot \textcircled{5,14} - x_{4,14} \quad \frown \quad 15 \cdot \textcircled{5,15} - x_{4,15} \quad \frown \quad 16 \cdot \textcircled{5,16} - x_{4,16} \quad \frown \quad 17 \cdot \textcircled{5,17} - x_{4,17} \quad \frown  \end{aligned}  \geq 0  $ |
| ⋮                        | ⋮ ⋮                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| (P - Q) kapcsolat(16;17) | $  \begin{aligned}  &1 \cdot \textcircled{5,1} - x_{4,1} \quad \frown \quad 2 \cdot \textcircled{5,2} - x_{4,2} \quad \frown \quad 3 \cdot \textcircled{5,3} - x_{4,3} \quad \frown \quad 4 \cdot \textcircled{5,4} - x_{4,4} \quad \frown \quad 5 \cdot \textcircled{5,5} - x_{4,5} \quad \frown \quad 6 \cdot \textcircled{5,6} - x_{4,6} \quad \frown \\  &7 \cdot \textcircled{5,7} - x_{4,7} \quad \frown \quad 8 \cdot \textcircled{5,8} - x_{4,8} \quad \frown \quad 9 \cdot \textcircled{5,9} - x_{4,9} \quad \frown \quad 10 \cdot \textcircled{5,10} - x_{4,10} \quad \frown \quad 11 \cdot \textcircled{5,11} - x_{4,11} \quad \frown \quad 12 \cdot \textcircled{5,12} - x_{4,12} \quad \frown \\  &13 \cdot \textcircled{5,13} - x_{4,13} \quad \frown \quad 14 \cdot \textcircled{5,14} - x_{4,14} \quad \frown \quad 15 \cdot \textcircled{5,15} - x_{4,15} \quad \frown \quad 16 \cdot \textcircled{5,16} - x_{4,16} \quad \frown \quad 17 \cdot \textcircled{5,17} - x_{4,17} \quad \frown  \end{aligned}  \geq 0  $ |

14. ábra: A megelőzési kapcsolatok előírása

**Összes megelőző művelet**

| Műv | A  | B  | C  | D   | E   | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O* | P  | Q  | $LJ_i$ |
|-----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------|
| A   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1      |
| B   | 1  |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1      |
| C   | 1  | 1  |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1      |
| D   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1      |
| E   |    |    |    | 1   |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1      |
| F   |    |    |    | 1   | 1   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1      |
| G   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 3      |
| H   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 3      |
| I   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 3      |
| J   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    | 4      |
| K   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    | 4      |
| L   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    | 4      |
| M   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    | 4      |
| N   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    | 4      |
| O*  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    | 5      |
| P   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    | 5      |
| Q   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    | 6      |
| Idő | 52 | 10 | 13 | 8,5 | 8,5 | 32 | 63 | 25 | 41 | 15 | 15 | 13 | 15 | 25 | 25 | 52 | 31 |        |

**Összes követő művelet**

| Műv | A  | B  | C  | D   | E   | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O* | P  | Q  | $UJ_i$ |
|-----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------|
| A   |    | 1  | 1  |     |     |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 13     |
| B   |    |    | 1  |     |     |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 13     |
| C   |    |    |    |     |     |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 14     |
| D   |    |    |    |     | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 13     |
| E   |    |    |    |     |     | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 13     |
| F   |    |    |    |     |     |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 13     |
| G   |    |    |    |     |     |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 14     |
| H   |    |    |    |     |     |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 14     |
| I   |    |    |    |     |     |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 15     |
| J   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 15     |
| K   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 15     |
| L   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 16     |
| M   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 16     |
| N   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 16     |
| O*  |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 16     |
| P   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 17     |
| Q   |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 17     |
| Idő | 52 | 10 | 13 | 8,5 | 8,5 | 32 | 63 | 25 | 41 | 15 | 15 | 13 | 15 | 25 | 25 | 52 | 31 |        |

15. ábra: Az  $LJ_i$  és  $UJ_i$  értékek összefoglalása

A *Döntési változók mátrixa* (16. ábra) a döntési változók optimális értékét tartalmazza, tehát azt mutatja meg, hogy mely művelet melyik munkahelyre kerül az SALBP-1 feladat optimális megoldásában. A mátrix legfelső sorában a *célfüggvény-együtthatók* láthatók, amelyek a munkahelyek sorszámait jelentik. Látható, hogy *hét* munkahely szükséges a termelési feladat végrehajtásához. Ez eggyel több, mint a lehető legjobb megoldás értéke, ugyanis  $N_{\min} = 6$ . A mátrixban a szürkével besatírozott rész a megelőző és követő műveletek miatt biztosan kizárt döntési változókat jelöli ki.

Döntési változók mátrixa

| Műv\Mh | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A      | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| B      | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| C      | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| D      | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| E      | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| F      | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| G      | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| H      | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| I      | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| J      | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| K      | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| L      | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| M      | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| N      | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| O*     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| P      | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| Q      | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |

16. ábra: Döntési változók mátrixa SALBP-1 esetén

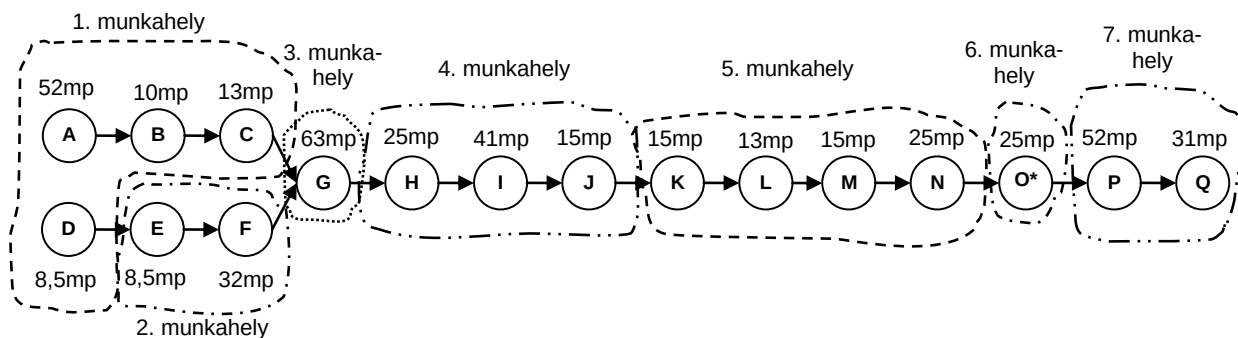
A 17. ábra *Eredmények* első része az egyes munkahelyekhez rendelt műveleteket és azok idejét mutatja. Az  $s_j$  sor az egyes munkahelyekhez rendelt műveletek összes idejét ( $s_j$ ) jelöli. A munkahelyek kapacitáskihasználását  $KK_j$ , a hozzárendelés hatékonyságát pedig a  $HH$  sor tartalmazza.

Eredmények

| Mh\Műv | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A      | 52    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| B      | 10    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| C      | 13    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| D      | 8,5   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| E      | 0     | 8,5   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| F      | 0     | 32    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| G      | 0     | 0     | 63    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| H      | 0     | 0     | 0     | 25    | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| I      | 0     | 0     | 0     | 41    | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| J      | 0     | 0     | 0     | 15    | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| K      | 0     | 0     | 0     | 0     | 15    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| L      | 0     | 0     | 0     | 0     | 13    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| M      | 0     | 0     | 0     | 0     | 15    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| N      | 0     | 0     | 0     | 0     | 25    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| O*     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 25    | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| P      | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 52    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| Q      | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 31    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| $s_j$  | 83,5  | 40,5  | 63    | 81    | 68    | 25    | 83    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| $KK_j$ | 0,980 | 0,476 | 0,740 | 0,951 | 0,798 | 0,294 | 0,975 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| $HH$   | 0,745 |       |       |       |       |       |       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

17. ábra: Lingoval megoldott SALBP-1 feladat eredményei

A kapott megoldást grafikusan a 18. ábra szemlélteti, amely a 16. ábra döntési változó mátrixa, illetve a 17. ábra eredmények mátrixa alapján készült.



18. ábra: A gyártósor-kiegyenlítési feladat egy optimális megoldása SALBP-1 esetén

Fontos megjegyezni, hogy a program megáll az első olyan megoldásnál, ami optimális. Tehát a kapott eredmény egy lehetséges optimális megoldást jelent. Sok esetben ugyanis több olyan elrendezés is létezik, melyek mindegyike kielégíti a korlátozó feltételeket, és célfüggvény-értékük is azonos (alternatív optimum). Például a fentebbi elrendezés helyett a műveletek alábbi szétosztása is optimális megoldást ad a célfüggvény szempontjából:

- 1. munkahely: **A-B-C**  $\rightarrow 52+10+13 = 75 \text{ mp} \leq 85,2 \text{ mp}$
- 2. munkahely: **D-E-F**  $\rightarrow 8,5+8,5+32 = 59 \text{ mp} \leq 85,2 \text{ mp}$
- 3. munkahely: **G**  $\rightarrow 63 \text{ mp} \leq 85,2 \text{ mp}$
- 4. munkahely: **H-I-J**  $\rightarrow 25+41+15 = 81 \text{ mp} \leq 85,2 \text{ mp}$
- 5. munkahely: **K-L-M**  $\rightarrow 15+13+15 = 43 \text{ mp} \leq 85,2 \text{ mp}$
- 6. munkahely: **N-O\***  $\rightarrow 25+25 = 50 \text{ mp} \leq 85,2 \text{ mp}$
- 7. munkahely: **P-Q**  $\rightarrow 52+31 = 83 \text{ mp} \leq 85,2 \text{ mp}$

Az, hogy a célfüggvény szempontjából optimális megoldások közül melyik a legkedvezőbb elrendezés, mindig az adott gyártósor sajátosságaitól függ, illetve a másodlagos szempontok döntenek el.

### 5.3. AZ SALBP-2 FELADAT MEGOLDÁSA HÉT MUNKAHELYRE

Most határozzuk meg a gyártható maximális mennyiséget, ha előre ismert, hogy 7 munkahelyből áll a gyártósor. Vagyis a ciklusidő minimális értékét keressük  $N = 7$  munkahely esetén ( $\text{Min}(T_c)$ ).

A munkahelyek számára, illetve a ciklusidő elméleti alsó- és felső korlátjára vonatkozó adatokat a 4. táblázat foglalja össze:

|                                                                   |        |
|-------------------------------------------------------------------|--------|
| Munkahelyek száma ( $N$ )                                         | 7 hely |
| Minimálisan szükséges munkahely ( $N_{\min}$ )                    | 6 hely |
| Ciklusidő elméleti minimuma ( $T_{c,\min}=\text{Max}(t_i)$ )      | 63 mp  |
| Ciklusidő elméleti maximuma ( $T_{c,\max,\text{elm}}$ ) (SALBP-1) | 85 mp  |

[illegible]

A 20. ábra a ciklusidő-korlátot írja elő a feladatban megadott 7 munkahelyre. A jobb érthetőség kedvéért - a matematikai programozási feladatoknál alkalmazott szokásos jelöléstől eltérően - a  $T_c$  változó értékét az egyenlőtlenségek jobb oldalán tüntetjük fel.

[illegible]

40

Az alábbi, 21. ábrán látható egyenletcsoport előírja, hogy minden műveletet el kell végezni, mégpedig úgy, hogy minden művelet csak egy munkahelyhez rendelhető hozzá. Ilyen módon minden művelet változója csak egyetlen munkahelynél egyenlő eggyel.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{A (1)} & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,6} + x_{1,6} + x_{1,7} = 1 \\
 \text{B (2)} & x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} + x_{2,6} + x_{2,7} = 1 \\
 \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots = 1 \\
 \text{Q (17)} & x_{17,1} + x_{17,2} + x_{17,3} + x_{17,4} + x_{17,5} + x_{17,6} + x_{17,7} = 1
 \end{array}$$

21. ábra: Valamennyi művelet elvégzésének feltételei

A 22. ábra egyenletei a tevékenységek logikai, megelőzési kapcsolatát írják elő az SALBP-1 esetén már ismertett módon, csak kevesebb (7 darab) munkahelyre.

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                      |          |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| (A - B) kapcsolat(1;2)   | $1 \cdot \zeta_{2,1} - x_{1,1} \rhd 2 \cdot \zeta_{2,2} - x_{1,2} \rhd 3 \cdot \zeta_{2,3} - x_{1,3} \rhd 4 \cdot \zeta_{2,4} - x_{1,4} \rhd 5 \cdot \zeta_{2,5} - x_{1,5} \rhd 6 \cdot \zeta_{2,6} - x_{1,6} \rhd 7 \cdot \zeta_{2,7} - x_{1,7} \rhd$               | $\geq 0$ |
| (D - E) kapcsolat(4;5)   | $1 \cdot \zeta_{5,1} - x_{4,1} \rhd 2 \cdot \zeta_{5,2} - x_{4,2} \rhd 3 \cdot \zeta_{5,3} - x_{4,3} \rhd 4 \cdot \zeta_{5,4} - x_{4,4} \rhd 5 \cdot \zeta_{5,5} - x_{4,5} \rhd 6 \cdot \zeta_{5,6} - x_{4,6} \rhd 7 \cdot \zeta_{5,7} - x_{4,7} \rhd$               | $\geq 0$ |
| $\vdots$                 | $\vdots$                                                                                                                                                                                                                                                             | $\vdots$ |
| (P - Q) kapcsolat(16;17) | $1 \cdot \zeta_{17,1} - x_{16,1} \rhd 2 \cdot \zeta_{17,2} - x_{16,2} \rhd 3 \cdot \zeta_{17,3} - x_{16,3} \rhd 4 \cdot \zeta_{17,4} - x_{16,4} \rhd 5 \cdot \zeta_{17,5} - x_{16,5} \rhd 6 \cdot \zeta_{17,6} - x_{16,6} \rhd 7 \cdot \zeta_{17,7} - x_{16,7} \rhd$ | $\geq 0$ |

22. ábra A megelőzési kapcsolatok előírása

A 23. ábra a (34) összefüggésekkel számolt  $LJ_i$  és  $UJ_i$  értékeket foglalja össze, ha a maximális ciklusidőt az SALBP-1-es feladatban kapott értékre becsüljük, azaz  $T_c^{\text{Max}} = 85,2$  mp. Az  $LJ_i$  értékek mellett, az ábra bal oldalán az  $i$  tevékenységet megelőző összes tevékenységet tartalmazó mátrix látható. Például a **G** tevékenységet megelőzik az **A**, **B**, **C**, **D**, **E** és **F** tevékenységek, ezért az legkorábban a  $(63+1 \cdot 52+1 \cdot 10+1 \cdot 13+1 \cdot 8,5+1 \cdot 8,5+1 \cdot 32) / 85,2 = 2,19$  felfelé kerekített értékéhez, vagyis a harmadik munkahelyhez rendelhető hozzá, tehát  $LJ_7 = 3$ .

Összes megelőző művelet

| Műv   | A  | B  | C  | D | E | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O* | P  | Q  | LJ <sub>i</sub> |
|-------|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|
| A     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1               |
| B     | 1  |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1               |
| C     | 1  | 1  |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1               |
| D     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1               |
| E     |    |    |    | 1 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1               |
| F     |    |    |    | 1 | 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1               |
| G     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 3               |
| H     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 3               |
| I     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    | 3               |
| J     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    |    | 4               |
| K     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    |    | 4               |
| L     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    |    | 4               |
| M     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    |    | 4               |
| N     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    |    | 4               |
| O*    | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    |    | 5               |
| P     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |    | 5               |
| Q     | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 6               |
| $t_i$ | 52 | 10 | 13 | 9 | 9 | 32 | 63 | 25 | 41 | 15 | 15 | 13 | 15 | 25 | 25 | 52 | 31 |                 |

23. ábra: Az összes megelőző művelet mátrixa, illetve  $LJ_i$  értékek SALBP-2 esetén

A 24. ábra a (35) összefüggéssel számolt  $UJ_i$  értékeket foglalja össze, ugyancsak  $T_c^{\text{Max}} = 85,2$  mp esetén. Az  $UJ_i$  értékek mellett, az ábra bal oldalán az  $i$  tevékenységet követő összes tevékenységet tartalmazó mátrix látható. Például a **G** tevékenységet a **H**, **I**, **J**, **K**, **L**, **M**, **N**, **O\***, **P** és **Q** tevékenységek követik, amelyek együttes ideje az **G** tevékenységgel együtt 257 másodperc. Ehhez a feltételezett (SALBP-1-ben kapott) ciklusidő miatt (85,2 mp.) legalább 3,02, azaz felfelé kerekítve 4 munkahely szükséges, tehát  $UJ_7 = 7+1-4 = 4$ . Vagyis, ha 7 munkahelyet írunk elő, akkor a **G** tevékenységet legkésőbb a 4-es munkahelyen el kell kezdeni, hogy a **G**-t követő összes tevékenység is még időben el tudjon kezdődni és be tudjon fejeződni.

**Összes követő művelet**

| Műv   | A  | B  | C  | D | E | F  | G  | H  | I  | J  | K  | L  | M  | N  | O* | P  | Q  | $UJ_i$ |
|-------|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------|
| A     |    | 1  | 1  |   |   |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 3      |
| B     |    |    | 1  |   |   |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 3      |
| C     |    |    |    |   |   |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 4      |
| D     |    |    |    |   | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 3      |
| E     |    |    |    |   |   | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 3      |
| F     |    |    |    |   |   |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 3      |
| G     |    |    |    |   |   |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 4      |
| H     |    |    |    |   |   |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 4      |
| I     |    |    |    |   |   |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 5      |
| J     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 5      |
| K     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 5      |
| L     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 6      |
| M     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 1  | 6      |
| N     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 1  | 6      |
| O*    |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 1  | 6      |
| P     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  | 7      |
| Q     |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | 7      |
| $t_i$ | 52 | 10 | 13 | 9 | 9 | 32 | 63 | 25 | 41 | 15 | 15 | 13 | 15 | 25 | 25 | 52 | 31 |        |

24. ábra: Az összes követő művelet mátrixa, illetve az  $UJ_i$  értékek SALBP-2 esetén

Azt, hogy a műveleteket melyik munkahelyekhez lehet rendelni, a fentebbiek alapján, az  $LJ_i$  és  $UJ_i$  értékeket figyelembe véve a megengedett megoldások mátrixa foglalja össze (25. ábra). A cella értéke 1, ha  $LJ_i \leq J_i \leq UJ_i$ , minden más esetben 0.

**Megengedett megoldások** (1, ha megengedett; 0 egyébként)

| Műv\Mh | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A      | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| B      | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| C      | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| D      | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| E      | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| F      | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| G      | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| H      | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| I      | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| J      | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| K      | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| L      | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| M      | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| N      | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| O*     | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| P      | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| Q      | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |

25. ábra: Megengedett megoldások mátrixa SALBP-2 esetén

A 25. és 27. ábra a feladat Lingoval történt megoldását foglalják össze  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén. Miután hét munkahelyből áll a gyártósor, a döntési változók mátrixa az 8. oszloptól (munkahelytől) kezdődően nem tartalmaz értékeket (szürkével besatírozott rész), ugyanis ezekre a munkahelyekre biztosan nem kerülhet művelet.

Döntési változók mátrixa

| Műv\Mhely | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A         | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| B         | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| C         | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| D         | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| E         | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| F         | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| G         | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| H         | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| I         | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| J         | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| K         | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| L         | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| M         | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| N         | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| O*        | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| P         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Q         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |

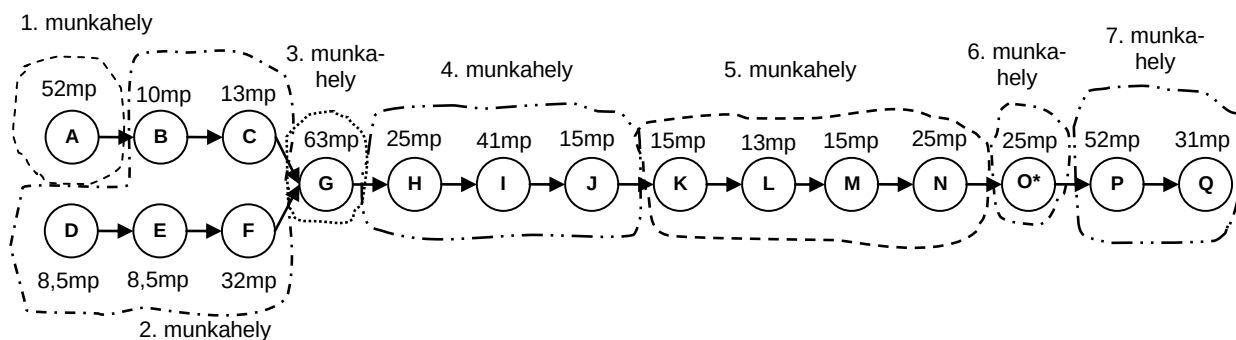
26. ábra: Döntési változók mátrixa SALBP-2 esetén

Eredmények

| Műv\Mhely  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A          | 52    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| B          | 0     | 10    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| C          | 0     | 13    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| D          | 0     | 8,5   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| E          | 0     | 8,5   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| F          | 0     | 32    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| G          | 0     | 0     | 63    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| H          | 0     | 0     | 0     | 25    | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| I          | 0     | 0     | 0     | 41    | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| J          | 0     | 0     | 0     | 15    | 0     | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| K          | 0     | 0     | 0     | 0     | 15    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| L          | 0     | 0     | 0     | 0     | 13    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| M          | 0     | 0     | 0     | 0     | 15    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| N          | 0     | 0     | 0     | 0     | 25    | 0     | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| O*         | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 25    | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| P          | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 52    | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| Q          | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 31    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| <i>sj</i>  | 52    | 72    | 63    | 81    | 68    | 77    | 31    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| <i>KKj</i> | 0,642 | 0,889 | 0,778 | 1,000 | 0,840 | 0,951 | 0,383 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| <i>HH</i>  | 0,783 |       |       |       |       |       |       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

27. ábra: Eredmények mátrixa SALBP-2 esetén

A kapott megoldást grafikusán a 28. ábra szemlélteti, amely a 26. ábra döntési változók mátrixa, illetve a 27. ábra eredmények mátrixa alapján készült.



28. ábra: A gyártósor-kiegyenlítési feladat egy optimális megoldása SALBP-2 esetén

A 26. és 27. ábrákon az is látható, hogy eredményként eltérő tevékenység-hozzárendelést kaptuk, mint a SALBP-1 megoldásakor. Ugyan 7 munkahelyet feltételeztünk, ami az SALBP-1 optimális megoldása, és a legnagyobb műveleti idejű tevékenység (**G**) már az SALBP-1 megoldásakor is egyedül foglalt el egy munkahelyet, de nem ez határozta meg az SALBP-1 megoldás ciklusidejét ( $T_{c,SALBP1} = 85,2 \text{ mp} > t_G = 63 \text{ mp}$ ). Emiatt elképzelhető, hogy a ciklusidőt minimalizáló SALBP-2 megoldásakor a ciklusidő ennél alacsonyabb érték. Ennél a feladatnál is ez történt, ugyanis – mint ahogy az 5. táblázat is mutatja - az optimális ciklusidő  $T_{c,opt} = 81 \text{ mp}$ . Az 5. táblázatban az is látható, hogy ilyen ciklusidő mellett a gyártható maximális mennyiség  $Q_{max} = 325,93 \text{ db}$ . Ez azt jelenti, hogy ezzel a 7 munkahelyes elrendezéssel többet tudunk gyártani az SALBP-1-ben tervezett 310 darabnál.

5. táblázat: Idő- és mennyiségi adatokat összefoglaló táblázat (SALBP-2)

|                                                        |              |
|--------------------------------------------------------|--------------|
| Rendelkezésre álló idő ( $T[\text{mp}]$ )              | 26400        |
| Műveleti idők összege ( $\text{sum}(t_j)[\text{mp}]$ ) | 444          |
| Optimális ciklusidő ( $T_{c,opt}[\text{mp}]$ )         | 81           |
| Gyártható mennyiség ( $Q_{max}[\text{db}]$ )           | 325,93       |
| Hozzárendelés hatékonysága ( $HH(N=7)$ )               | <b>0,783</b> |

Tehát, mint ahogy a fenti példában is láttuk az SALBP-1 és SALBP-2 feladatok hozzárendelése nem biztos, hogy azonosak. Ez függhet például a munkahelyek kapacitáskihasználásának egyenetlenségétől is, vagyis attól, hogy mennyire sikerül műveleti idők szempontjából egyenletesen szétosztani a műveleteket a munkahelyek között.

A Lingo nevű program az *elágazás és korlátozás* algoritmust használja optimumkeresés során. „A módszer angol neve *branch-and-bound*. Olyan esetekben szokták alkalmazni, amikor a megoldandó feladat természetes módon vezet egy óriási gyökeres irányított fa teljes, vagy részleges bejárásához. A fát gyakran nevezik a feladat fázisterének. A fa általában olyan hatalmas, hogy nem érdemes (olykor nem is lehetne) minden csúcsát tárolni. Vannak viszont szabályok, amivel egy csúcs leszármazottait elő tudjuk állítani. Ezt szokásos kifejezéssel generálásnak nevezzük. A feladat általában azt követeli, hogy a fa igen sok csúcsáról rendelkezünk információval. Az elágazás és korlátozás módszere ezt az információgyűjtést igyekszik gazdaságosan megszervezni. [...] Az elágazás azt jelenti, hogy generáljuk az éppen vizsgált csúcs fiait, bizonyos esetekben korlátos mélységig a további leszármazottait is. A generált csúcsok vizsgálata alapján döntjük el, hogy merre menjünk tovább lefelé a fában. Ebben fontos szerepet játszanak a korlátozó heurisztikák. Ezek a feladat tulajdonságaiból eredő megfontolások, amelyekkel igyekszünk minél több csúcsot és egyszerre azok leszármazottait is kizárni a további keresésből. [...] A korlátozó heurisztikák alkalmazásával ágakat tudunk levágni a fáról, és csak az esélyes, túlélő irányokkal foglalkozunk tovább.” (<http://delfin.klte.hu/~szucsga/html/algoritmusk.html>)

Ez esetünkben azért érdekes, mert ha a ciklusidő elméleti maximumára ( $T_{c,max,elm}$ ) különböző értékeket adunk (praktikusan az SALBP-1-ben kapott érték és a műveleti idők összege közé esőt), akkor ez különböző fákat jelent, aminek a bejárásával az optimális megoldást keressük. A program megáll az első olyan megoldásnál, ami optimális. Ezekből következik, hogy eltérő fák esetén más optimális megoldást talál meg először, és ezt adja vissza kimeneti értéként. Fontos megjegyezni, hogy az optimális megoldás a célfüggvény szempontjából értendő. Ez SALBP-2 esetén a ciklusidő minimalizálását jelenti. Másodlagos szempontokat a program nem vesz figyelembe, ha ezeket nem kapja meg feltételként.

A 29. ábra az eltérő művelet hozzárendeléseket tartalmazza 7 munkahelyre különböző  $T_{c,max,elm}$  értékek mellett. Látható, hogy a **G** művelet utáni műveletek szétosztása minden esetben azonos. A munkahelyekhez tartozó műveleti idők összegeinek ( $s_j$ ) átlaga, a ciklusidőkhöz hasonlóan minden elrendezés esetén megegyezik. Amiben eltérés van, az az  $s_j$  értékek szórása, illetve az egyes elrendezések melletti teljes átfutási idők. Megfigyelhető, hogy nem a legkisebb szórású elrendezéshez tartozik a legalacsonyabb átfutási idő. Ez azt jelenti, hogy noha a munkahelyek kiegyenlítettek a hozzájuk rendelt műveletek végrehajtási idejének tekintetében, a logikai kapcsolatok miatt nem biztos, hogy ez az elrendezés adja a legalacsonyabb átfutási időt. Ennek oka lehet, hogy a megelőzési kapcsolatok

miatt a rendszerbe várakozási idők is kerülnek. Ebből következik, hogy a műveletek munkahelyekre történő szétosztásánál nem csak a kapacitáskihasználások kiegyenlítését kell szem előtt tartani, hanem fontos figyelembe venni a logikai kapcsolatokat, és a kettő együttes hatását az átfutási időre is.

| $T_c$ elméleti maximuma [mp]: |               | $T_{c,max,elm}=85,2$ |     | $T_{c,max,elm}=87$ |     | $T_{c,max,elm}=90$ |      | $T_{c,max,elm}=100$ |    | $T_{c,max,elm}=140$ |    | $T_{c,max,elm}=350$ |    | $T_{c,max,elm}=444$ |    |
|-------------------------------|---------------|----------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|------|---------------------|----|---------------------|----|---------------------|----|---------------------|----|
| Művelet                       | Műv.idők [mp] | N = 7                |     | N = 7              |     | N = 7              |      | N = 7               |    | N = 7               |    | N = 7               |    | N = 7               |    |
| A                             | 52            | 52                   | 52  | 52                 | 75  | 52                 | 52   | 52                  | 52 | 52                  | 52 | 52                  | 52 | 52                  | 62 |
| B                             | 10            | 10                   | 10  | 10                 | 10  | 10                 | 10   | 10                  | 10 | 10                  | 10 | 10                  | 10 | 10                  | 10 |
| C                             | 13            | 13                   | 13  | 13                 | 13  | 13                 | 13   | 13                  | 13 | 13                  | 13 | 13                  | 13 | 13                  | 13 |
| D                             | 8,5           | 8,5                  | 72  | 8,5                | 49  | 8,5                | 60,5 | 8,5                 | 79 | 8,5                 | 69 | 8,5                 | 49 | 8,5                 | 49 |
| E                             | 8,5           | 8,5                  | 8,5 | 8,5                | 8,5 | 8,5                | 63,5 | 8,5                 | 32 | 8,5                 | 32 | 8,5                 | 32 | 8,5                 | 32 |
| F                             | 32            | 32                   | 32  | 32                 | 32  | 32                 | 32   | 32                  | 45 | 32                  | 55 | 32                  | 32 | 32                  | 32 |
| G                             | 63            | 63                   | 63  | 63                 | 63  | 63                 | 63   | 63                  | 63 | 63                  | 63 | 63                  | 63 | 63                  | 76 |
| H                             | 25            | 25                   | 25  | 25                 | 81  | 25                 | 81   | 25                  | 81 | 25                  | 81 | 25                  | 81 | 25                  | 81 |
| I                             | 41            | 41                   | 81  | 41                 | 81  | 41                 | 81   | 41                  | 81 | 41                  | 81 | 41                  | 81 | 41                  | 81 |
| J                             | 15            | 15                   | 15  | 15                 | 15  | 15                 | 15   | 15                  | 15 | 15                  | 15 | 15                  | 15 | 15                  | 15 |
| K                             | 15            | 15                   | 15  | 15                 | 15  | 15                 | 15   | 15                  | 15 | 15                  | 15 | 15                  | 15 | 15                  | 15 |
| L                             | 13            | 13                   | 13  | 13                 | 68  | 13                 | 68   | 13                  | 68 | 13                  | 68 | 13                  | 68 | 13                  | 68 |
| M                             | 15            | 15                   | 15  | 15                 | 15  | 15                 | 15   | 15                  | 15 | 15                  | 15 | 15                  | 15 | 15                  | 15 |
| N                             | 25            | 25                   | 25  | 25                 | 25  | 25                 | 25   | 25                  | 25 | 25                  | 25 | 25                  | 25 | 25                  | 25 |
| O*                            | 25            | 25                   | 77  | 25                 | 77  | 25                 | 77   | 25                  | 77 | 25                  | 77 | 25                  | 77 | 25                  | 77 |
| P                             | 52            | 52                   | 52  | 52                 | 52  | 52                 | 52   | 52                  | 52 | 52                  | 52 | 52                  | 52 | 52                  | 52 |
| Q                             | 31            | 31                   | 31  | 31                 | 31  | 31                 | 31   | 31                  | 31 | 31                  | 31 | 31                  | 31 | 31                  | 31 |

|                            |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Átlag( $s_j$ ):            | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 |
| Szórás( $s_j$ ):           | 17,17 | 17,83 | 16,20 | 18,92 | 16,67 | 17,83 | 17,95 | 17,95 |
| Max( $s_j$ ) = $T_c$ :     | 81    | 81    | 81    | 81    | 81    | 81    | 81    | 81    |
| Teljes átfutási idő (TPT): | 395   | 395   | 404   | 412   | 412   | 395   | 395   | 395   |

29. ábra: Művelet hozzárendelések 7 munkahelyre különböző  $T_{c,max,elm}$  értékek esetén (SALBP-2)

A fentebbi megállapítások szemléltetéseként két kiválasztott elrendezésre bemutatom az adott elrendezés egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálótervét, illetve Gantt-diagramját. (A további elrendezésekre az ábrák megtalálhatók a Mellékletben.)

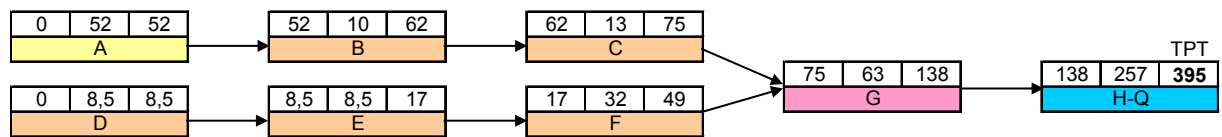
A csomópontok felépítését a 6. táblázat szemlélteti.

6. táblázat: A dolgozatban használt egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálótér csomópontjainak felépítése

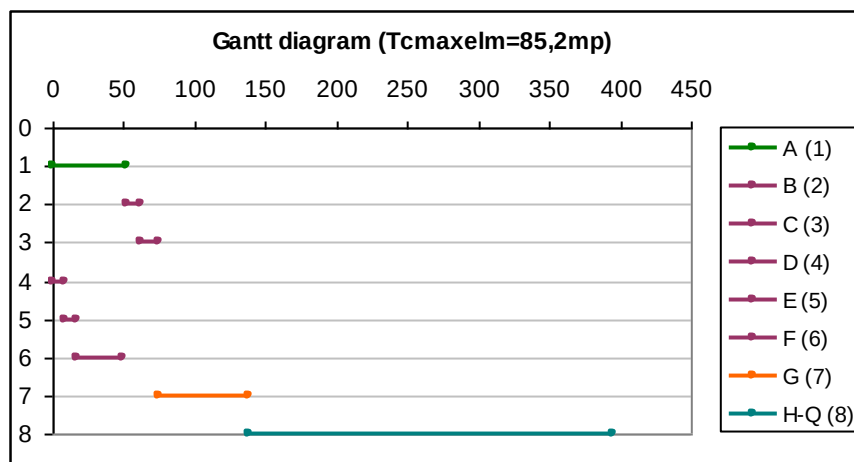
|                                  |                                             |                                                   |
|----------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Legkorábbi kezdés<br>( $EST_i$ ) | Tevékenység végrehajtási<br>ideje ( $D_i$ ) | Legkorábbi befejezés<br>( $EFT_i = EST_i + D_i$ ) |
| Tevékenység betűkódja            |                                             |                                                   |

Mivel **H**-tól **Q**-ig minden esetben ugyanazt az elrendezést kaptuk, ezért ezeket a műveleteket összevontan kezeljük. Ennek az eltérések illusztrálása szempontjából nincs jelentősége.

$T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén az egyszerűsített hálóterv és a Gantt-diagram a 30. ábra szerint alakul:



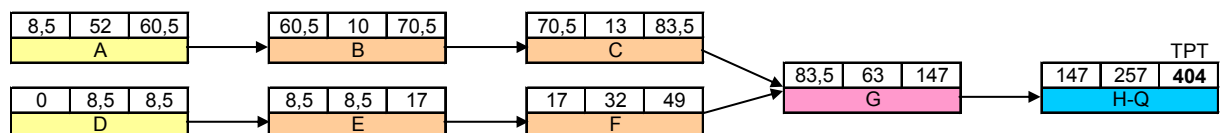
30. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén



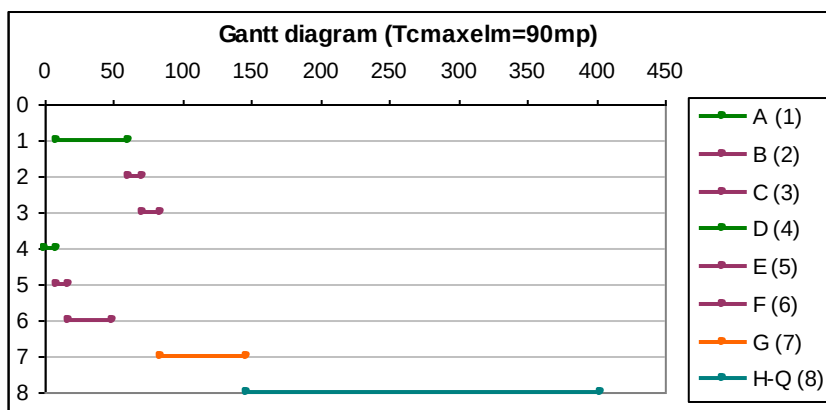
31. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén

Látható, hogy a 2. munkahelynek akkor is várnia kell 3 másodpercet, hogy el tudja kezdeni az **F** művelet után a **B** műveletet – melynek a közvetlenül megelőző műveletét (**A**) az 1. munkahellyel együtt kezdi el a **D** művelet végrehajtását.

$T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén az egyszerűsített hálóterv és a Gantt-diagram a 32. ábra szerint alakul:



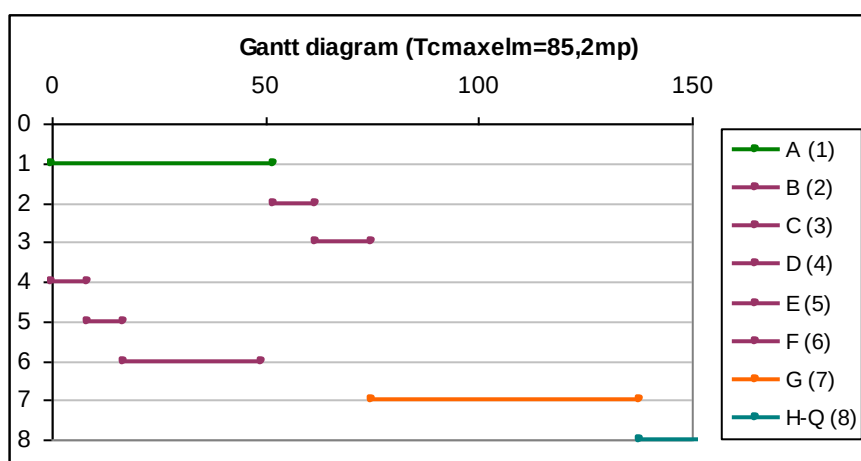
32. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv  $T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén



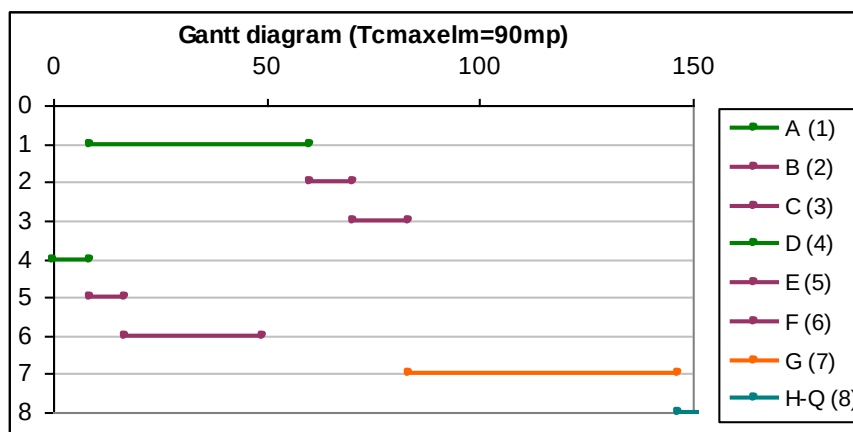
33. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén

Ennél az elrendezésnél az  $s_j$  értékek szórása az összes elrendezés közül a legalacsonyabb. A műveletek szétosztásának és a logikai kapcsolatok együttes hatásának következtében azonban a 2. munkahelynek  $60,5 - 49 = 11,5$  másodpercet várnia kell arra, hogy a **B** műveletet el tudja kezdeni az **F** után. Ez természetesen az átfutási időt is megnöveli.

A kinagyított Gantt-diagramok esetén jobban látszik a két elrendezés közötti különbség. Látható, hogy míg a  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp-es elrendezés esetében a 2. munkahely közel folyamatosan tud dolgozni, addig  $T_{c,max,elm} = 90$  mp-es esetben a 2. dolgozónak hosszabb várakozási idő szakítja meg a munkáját.



34. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén



35. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén

Az ábrákból is levonható a korábbi következtetés, miszerint a logikai kapcsolatoknak meghatározó jelentőségük van az átfutási idő szempontjából.

#### 5.4. AZ SALBP-2 FELADAT MEGOLDÁSA NÉGY MUNKAHELYRE

Határozzuk meg a következőkben a gyártható maximális mennyiséget, ha előre ismert, hogy 4 munkahelyből áll a gyártósor és a munkadarabokat hatósával továbbítják a következő munkahelyre. A ciklusidő minimális értékét keressük tehát  $N = 4$  munkahelynél ( $\text{Min}(T_c)$ ).

A munkahelyek számára, illetve a ciklusidő elméleti alsó- és felső korlátjára vonatkozó adatokat az 7. táblázat foglalja össze:

7. táblázat: A munkahelyek számát és a ciklusidő elméleti alsó- és felső korlátját összefoglaló táblázat 4 munkahely esetén (SALBP-2)

|                                                                       |         |
|-----------------------------------------------------------------------|---------|
| Munkahelyek száma ( $N$ )                                             | 4 hely  |
| Ciklusidő elméleti minimuma ( $T_{c,min} = \text{Max}(t_i)$ )         | 378 mp  |
| Ciklusidő elméleti maximuma ( $T_{c,max,elm}$ ) ( $\text{sum}(t_i)$ ) | 2664 mp |

A műveletek logikai kapcsolatát a megelőzési mátrix mutatja (ld. 36. ábra). A 36. ábra jobb oldalán a műveleti idők, illetve ezek hatszorosa látható.

| Megelőzési mátrix |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   | szum( $t_j$ ) [mp] = 2664 |     |       |     |  |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---------------------------|-----|-------|-----|--|
| Műv\Műv           | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O* | P | Q                         | Műv | idő*6 | idő |  |
| A                 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | A   | 312   | 52  |  |
| B                 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | B   | 60    | 10  |  |
| C                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | C   | 78    | 13  |  |
| D                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | D   | 51    | 8,5 |  |
| E                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | E   | 51    | 8,5 |  |
| F                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | F   | 192   | 32  |  |
| G                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | G   | 378   | 63  |  |
| H                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | H   | 150   | 25  |  |
| I                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | I   | 246   | 41  |  |
| J                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | J   | 90    | 15  |  |
| K                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | K   | 90    | 15  |  |
| L                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0  | 0 | 0                         | L   | 78    | 13  |  |
| M                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0  | 0 | 0                         | M   | 90    | 15  |  |
| N                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1  | 0 | 0                         | N   | 150   | 25  |  |
| O*                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 1 | 0                         | O*  | 150   | 25  |  |
| P                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 1                         | P   | 312   | 52  |  |
| Q                 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0                         | Q   | 186   | 31  |  |

36. ábra: Megelőzési mátrix

Mivel a feladat megoldásának menete a 7 munkahelyes SALBP-2 feladathoz hasonló (5.3. fejezet), ezért ebben a fejezetben csak az eredményeket ismertetem.

A 8. táblázat 3. sorában látható, hogy négy munkahelyes elrendezésnél (szigetszerű gyártás) az optimális ciklusidő 744 másodperc. Ennyi időnként készül el hat darab készűlék. Ezt az időt egyik munkahelyen sem haladhatja meg a munkahelyhez rendelt műveletek végrehajtási idejének összege.

A 8. táblázat 4. sorában látható, hogy négy munkahelyes elrendezésnél az egy műszak alatt maximálisan gyártható mennyiség 212,9 darab.

A 8. táblázat 5. sorában látható, hogy a hozzárendelés hatékonyságára kapott eredmény  $HH(N=4) = 0,895$ .

8. táblázat: Idő- és mennyiségi adatokat összefoglaló táblázat (SALBP-2)

|                                                          |              |
|----------------------------------------------------------|--------------|
| Rendelésre álló idő ( $T$ [mp]) (440*60)                 | 26400        |
| Műveleti idők összege ( $\text{szum}(t_j)$ [mp]) (444*6) | 2664         |
| Optimális ciklusidő ( $T_{c, \text{opt}}$ [mp]) (124*6)  | <b>744</b>   |
| Gyártható mennyiség ( $Q_{\text{max}}$ [db]) (35,48*6)   | <b>212,9</b> |
| Hozzárendelés hatékonysága ( $HH(N=4)$ )                 | <b>0,895</b> |

A 27. ábra a 4 munkahelyes elrendezésre kapott eredményeket foglalja össze. Látható, hogy a 3. és 4. munkahelyhez mindhárom esetben ugyanazok a műveletek tartoznak. Ez azért van, mert ha a 4. munkahelyhez rendelnénk az N műveletet is, akkor azzal az  $s_4 =$

648+150 = 798 mp lenne, ami már meghaladja a ciklusidő (744 mp) értékét. A 3. munkahelynél hasonló a helyzet: akár a **H**, akár az **O\*** műveletet rendeljük hozzá az eddigiek felül, az  $s_3$  érték mindkét esetben meghaladja a ciklusidő értékét. Ez abból is látszik, hogy a 3. munkahely kapacitáskihasználtsága éppen 1, tehát  $s_3 = T_c = 744$  mp. A 2. munkahely egyik esetben sem szűk keresztmetszet (ld. 27. ábra). Ugyanakkor a 3. munkahelytől még az első sem tudná átvenni az **I** tevékenységet, mert azzal az  $s_2$  értéke meghaladná a ciklusidőt. Ebből adódik, hogy a tevékenység-hozzárendelések csak az első és második munkahely esetében különböznek.

#### Eredmények

| $T_{c,max,elm} = 800\text{mp}$ |       |       |       |       | $T_{c,max,elm} = 1000\text{mp}$ |       |       |       |       | $T_{c,max,elm} = 1600\text{mp}$ |       |       |       |       |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Műv\Mh                         | 1     | 2     | 3     | 4     | Műv\Mh                          | 1     | 2     | 3     | 4     | Műv\Mh                          | 1     | 2     | 3     | 4     |
| A                              | 312   | 0     | 0     | 0     | A                               | 312   | 0     | 0     | 0     | A                               | 312   | 0     | 0     | 0     |
| B                              | 60    | 0     | 0     | 0     | B                               | 0     | 60    | 0     | 0     | B                               | 60    | 0     | 0     | 0     |
| C                              | 78    | 0     | 0     | 0     | C                               | 0     | 78    | 0     | 0     | C                               | 0     | 78    | 0     | 0     |
| D                              | 51    | 0     | 0     | 0     | D                               | 51    | 0     | 0     | 0     | D                               | 51    | 0     | 0     | 0     |
| E                              | 51    | 0     | 0     | 0     | E                               | 51    | 0     | 0     | 0     | E                               | 51    | 0     | 0     | 0     |
| F                              | 192   | 0     | 0     | 0     | F                               | 192   | 0     | 0     | 0     | F                               | 192   | 0     | 0     | 0     |
| G                              | 0     | 378   | 0     | 0     | G                               | 0     | 378   | 0     | 0     | G                               | 0     | 378   | 0     | 0     |
| H                              | 0     | 150   | 0     | 0     | H                               | 0     | 150   | 0     | 0     | H                               | 0     | 150   | 0     | 0     |
| I                              | 0     | 0     | 246   | 0     | I                               | 0     | 0     | 246   | 0     | I                               | 0     | 0     | 246   | 0     |
| J                              | 0     | 0     | 90    | 0     | J                               | 0     | 0     | 90    | 0     | J                               | 0     | 0     | 90    | 0     |
| K                              | 0     | 0     | 90    | 0     | K                               | 0     | 0     | 90    | 0     | K                               | 0     | 0     | 90    | 0     |
| L                              | 0     | 0     | 78    | 0     | L                               | 0     | 0     | 78    | 0     | L                               | 0     | 0     | 78    | 0     |
| M                              | 0     | 0     | 90    | 0     | M                               | 0     | 0     | 90    | 0     | M                               | 0     | 0     | 90    | 0     |
| N                              | 0     | 0     | 150   | 0     | N                               | 0     | 0     | 150   | 0     | N                               | 0     | 0     | 150   | 0     |
| O*                             | 0     | 0     | 0     | 150   | O*                              | 0     | 0     | 0     | 150   | O*                              | 0     | 0     | 0     | 150   |
| P                              | 0     | 0     | 0     | 312   | P                               | 0     | 0     | 0     | 312   | P                               | 0     | 0     | 0     | 312   |
| Q                              | 0     | 0     | 0     | 186   | Q                               | 0     | 0     | 0     | 186   | Q                               | 0     | 0     | 0     | 186   |
| <i>sj</i>                      | 744   | 528   | 744   | 648   | <i>sj</i>                       | 606   | 666   | 744   | 648   | <i>sj</i>                       | 666   | 606   | 744   | 648   |
| <i>KKj</i>                     | 1,000 | 0,710 | 1,000 | 0,871 | <i>KKj</i>                      | 0,815 | 0,895 | 1,000 | 0,871 | <i>KKj</i>                      | 0,895 | 0,815 | 1,000 | 0,871 |
| <i>HH</i>                      | 0,895 |       |       |       | <i>HH</i>                       | 0,895 |       |       |       | <i>HH</i>                       | 0,895 |       |       |       |

37. ábra: Kapott eredmények összevetése 4 munkahelyes elrendezésnél SALBP-2 esetén

A program a *branch-and-bound* algoritmussal határozza meg az optimális megoldást. Az algoritmus megáll az első (célfüggvény szempontjából) optimális megoldásnál. Ezért a  $T_{c,max,elm}$  értékek változtatásával, tehát újabb bejárando fák előállításával sem biztos, hogy az összes optimális szétosztást megkapjuk. Például a következő megoldás is kielégítené a feltételeket:

1. munkahely: **A-B-C-D-E** → 312+60+78+51+51 = 552 mp ≤ 744 mp
2. munkahely: **F-G-H** → 192+378+150 = 720 mp ≤ 744 mp
3. munkahely: **I-J-K-L-M-N** → 246+90+90+78+90+150 = 744 mp ≤ 744 mp
4. munkahely: **O\*-P-Q** → 150+312+186 = 648 mp ≤ 744 mp

Lehet azonban, hogy a 37. ábrán látható három változat közül az egyiket mindig előbb megtalálta, mint ezt.

Most vizsgáljuk meg a 4 és 7 munkahelyes gyártósor kialakítás közötti eltéréseket.

A 9. táblázat a 4 és 7 munkahelyes elrendezéseket hasonlítja össze a táblázatban feltüntetett adatok alapján.

9. táblázat: A 4-es és 7-es elrendezés összehasonlítása

|                                 | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>B/A</b> | <b>A/B</b> |
|---------------------------------|----------|----------|------------|------------|
| <b>Mhely (N) [db]</b>           | 4        | 7        | 1,75       | 0,57       |
| <b>T<sub>c,opt</sub> [mp]</b>   | 124      | 81       | 0,65       | 1,53       |
| <b>Q<sub>max</sub> [db]</b>     | 212,9    | 325,9    | 1,53       | 0,65       |
| <b>HH(N)</b>                    | 0,895    | 0,783    | 0,87       | 1,14       |
| <b>Q<sub>fajl</sub> [db/fő]</b> | 53,23    | 46,56    | 0,87       | 1,14       |

Látható, hogy a  $N = 4$ -es elrendezésnél az egy emberre vetített, fajlagosan gyártott mennyiség magasabb.

A hozzárendelési hatékonyság képletéből adódik (ld. (42) összefüggés), hogy ha egy adott  $Q$  mennyiség  $N$  és  $N'$  munkahely-szám esetén is legyártható, akkor – ha a tanulási hatást figyelmen kívül hagyjuk – adott mennyiség legyártása alacsonyabb  $N$  érték mellett hatékonyabb.

$$HH(Q) = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{N \cdot T_c} = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{N \cdot \frac{T}{Q}} = Q \cdot \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{N \cdot T} \quad (42)$$

A másik magyarázat, hogy a műveleti idők egyenetlensége miatt egyes elrendezésekkel a maximális gyártási mennyiségnél ( $Q_{\text{Max}}(N)$ ) csak alacsonyabb hozzárendelési hatékonyság érhető el. (Erről bővebben a következő, 5.5. fejezetben írok.)

Fontos megemlíteni továbbá, hogy a számításainknál figyelmen kívül hagytuk a tanulási hatást. A *Dewert profitcenter*-ben azonban (empirikus adatok alapján) számolnak vele, a normatáblázatokban is figyelembe veszik (ld. 10. táblázat). Látható, hogy egy műszak során többet gyártanak a 7 munkahelyes U-cellában, mint amit a 4-ről 7 emberre való átállás arányosan indokolna. Jól mutatja ezt mind a fajlagos mennyiségre vonatkozó adatpár, mind a táblázat B/A oszlopának első két sorának viszonya:  $1,91 > 1,75$ , tehát a 7-es

elrendezéssel gyártható maximális mennyiség meghaladja a 4-es elrendezésnél gyártott fajlagos mennyiség hétszeresét, azaz a  $57,5 \cdot 7 = 402,5$  darabot ( $440 > 402,5$ ).

10. táblázat: Normatáblázat *Megamat 2* sima készülék esetén

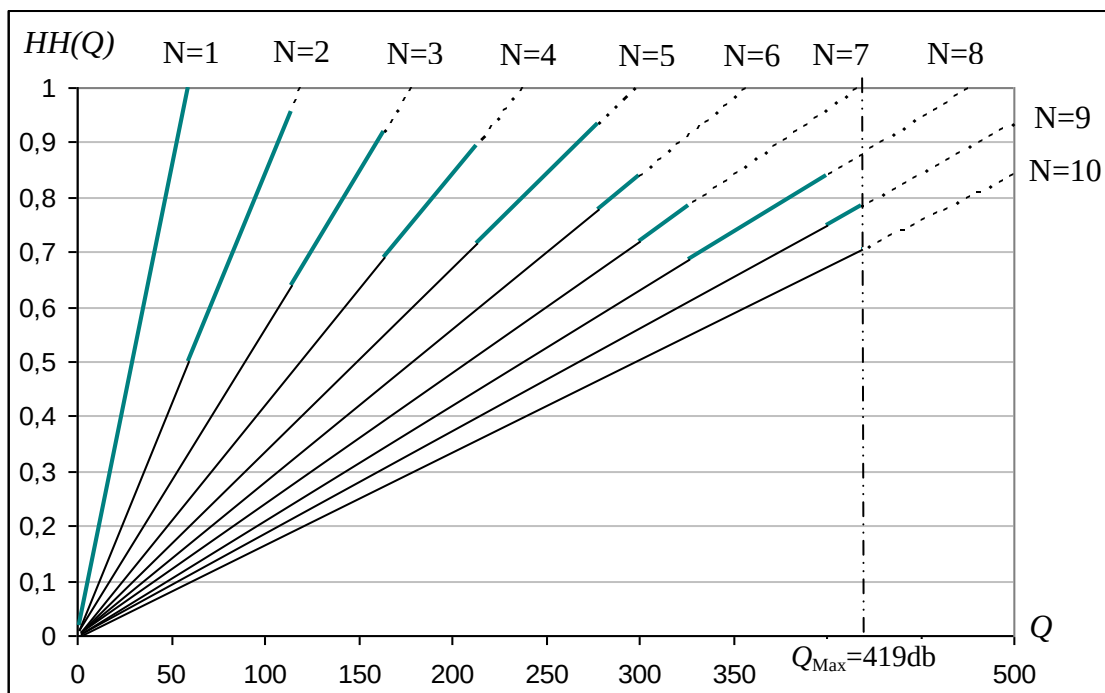
| Normatáblázat                         | A     | B     | B/A  |
|---------------------------------------|-------|-------|------|
| Munkahelyek száma (N) [db]            | 4     | 7     | 1,75 |
| Sima készülék normája/műszak [db]     | 230   | 440   | 1,91 |
| Fajlagos mennyiség $Q_{fajl}$ [db/fő] | 57,50 | 62,86 | 1,09 |

Ez is mutatja, hogy a tanulási hatás meghatározó a gyártósorok kialakításánál, mert hatással van a hatékonyságra.

### 5.5. HOZZÁRENDELÉS HATÉKONYSÁGA

A hozzárendelés hatékonyságának ( $HH(Q,N)$ ) alakulását az elvégzendő feladatmennyiség ( $Q$ ) és a munkahelyszám ( $N$ ) függvényében a 5.3. fejezetben ismertetett mintapéldánk adatait felhasználva a 38. ábra szemlélteti. Az ábra elkészítéséhez minden lehetséges  $N$  értékre meg kell oldani egy SALBP-2 modellt.

A  $HH = 1$  értéket csak akkor lehet elérni több munkahely esetén, ha a tevékenységek munkahelyhez rendelésekor a műveleti idők minden munkahelyen azonosak. A gyakorlati életben – mint ahogy a *Megamat 2* példáján is láthattuk – ez ritkán lehetséges.



38. ábra: A hozzárendelés hatékonyságának ( $HH$ ) változása a munkahely szám ( $N$ ) és a gyártandó mennyiség ( $Q$ ) függvényében

Ugyancsak a műveleti idők egyenetlensége miatt elképzelhető olyan eset, hogy nagyobb számú munkahely esetén a maximális gyártási mennyiségnél ( $Q_{\text{Max}}(N)$ ) nagyobb hatékonyság érhető el a gyártósoron, mint kisebb számú munkahely esetén. Ez akkor lehetséges, hogyha több munkahelyre egyenletesebben szét lehet osztani a műveleteket. A 38. ábrán ez  $N = 5$  és  $N = 3$ , illetve  $N = 4$  esetén figyelhető meg. Míg  $N = 5$  esetén 0,93 hatékonyság is elérhető, addig  $N = 4$  esetén csak 0,90,  $N = 3$  esetén pedig 0,92.

Ugyanakkor az is igaz, hogyha adott  $Q$  mennyiség a munkahelyek számát tekintve többféle elrendezésben is legyártható, akkor a kevesebb munkahelyes elrendezés nagyobb hozzárendelési hatékonyságú, és költségek szempontjából is előnyösebb megoldáshoz vezet. Emiatt akkor a legkedvezőbb a gyártósor kialakítása, ha  $Q$  mennyiség legyártásához annyi munkahelyet alakítunk ki, amennyivel a  $Q$  mennyiség még legyártható, de ennél kevesebb munkahellyel már nem lehetne legyártani a kívánt mennyiséget. Minden  $N$  munkahelyes elrendezéshez megadható egy olyan  $Q$  tartomány - érvényességi tartomány - amely a hozzárendelési hatékonyság, és így a költségek szempontjából is a legkedvezőbb. A mintapélda alapján a munkahelyekhez tartozó érvényességi tartományok a 38. ábrán kivastagítva, a 11. táblázatban pedig számszerűen láthatóak.

11. táblázat: A munkahelyek számának optimális értéke a mennyiség függvényében ( $N_{\text{opt}}(Q)$ )

| $N_{\text{opt}}(Q)$ | $Q$ [db]      |               |
|---------------------|---------------|---------------|
| $N$                 | alsó határ    | felső határ   |
| <b>1</b>            | 0,00          | 59,46         |
| <b>2</b>            | 59,46         | 113,79        |
| <b>3</b>            | 113,79        | 163,98        |
| <b>4</b>            | 163,98        | 212,90        |
| <b>5</b>            | 212,90        | 277,89        |
| <b>6</b>            | 277,89        | 300,00        |
| <b>7</b>            | <b>300,00</b> | <b>325,93</b> |
| <b>8</b>            | 325,93        | 400,00        |
| <b>9</b>            | 400,00        | 419,05        |
| <b>10</b>           | 419,05        | 419,05        |

A 11. táblázatból kiolvasható, hogy a vizsgált 7 munkahelyes kialakítás a  $300 \leq Q \leq 325$  tartományban optimális.

Mivel a ciklusidő értéke nem csökkenhet a legnagyobb műveleti idő alá ( $T_c \geq t_{i,\text{max}}$ ), ezért egy adott ponton túl a munkahelyek számának növelésével sem gyártható már nagyobb mennyiség (feltételezve, hogy nincsenek párhuzamos munkaállomások, mellyel a

szűk keresztmetszet is változ(hat)na). Ez a maximális  $Q$  érték a rendelkezésre álló idő és a legnagyobb műveleti idő hányadosaként állítható elő. Esetünkben ez a maximális mennyiség  $Q_{\max} = 419$  db.

$$Q_{\max} = \frac{T}{t_{i,\max}} = \frac{440 \cdot 60}{63} = 419,05 \text{ db.} \quad (43)$$

A 38. ábrán is látható, hogy 10 munkahelyes elrendezést már nem éri meg kialakítani, mert ilyen elrendezéssel is csak annyit tudnánk gyártani, mint 9 munkahely esetén, ráadásul alacsonyabb hatékonyság mellett.

A gyártósorok kialakításánál természetesen további szempontokat is figyelembe kell venni. Mindig az adott gyártósor sajátosságaitól, és más egyéb meghatározó körülményektől függ, hogy melyek ezek a másodlagos szempontok. Ezeknek a másodlagos szempontoknak a vizsgálatával a TDK dolgozatomban nem foglalkozom.

Emellett fontos azt is megemlíteni, hogy a valóságban a gyártósor egy csapatmunka. A dolgozók a munkahelyek közötti egyenetlenségeket egymást segítve hidalják át. A meghatározott normák miatt ez közös érdekük is. Itt is igaz tehát, hogy az elméleti kialakítás és a gyakorlati megvalósítás között eltérések vannak. Ezeknek az eltéréseknek a vizsgálata segíthet abban, hogy az elméleti modellekbe minél több gyakorlati szempontot be tudjunk vonni.

## 6. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozatban bemutatam a *Phoenix Mecano Kecskemét Kft.* egyik termékének (*Megamat 2 sima*) példáján keresztül, hogy hogyan lehet egyszerű gyártósor-kiegyenlítési modelleket 0-1 matematikai programozási feladatként felírni és megoldani. A megoldás során az alapadatok rögzítésére és az eredmény bemutatására az Excelt használtam, a számításokat a Lingo program segítségével végeztem el. Az Excel Solver bővítménye ugyanis csak viszonylag kisméretű gyártósor-kiegyenlítési feladatok megoldására képes. Ha a bináris változók száma jelentősen megnő, akkor az Excel Solvernél már hatékonyabb szoftver szükséges.

Az alkalmazott modellek megoldása előtt ismertettem az egyszerű gyártósor-kiegyenlítési problémák (SALBP) két klasszikus feladatát, az alapfogalmakat, és a gyártósor-kiegyenlítési feladatok matematikai programozással történő megoldását.

Ezután rátértem az SALBP feladatok megoldásának bemutatására a *Megamat 2 sima* készülék példáján. Mivel a *Dewert profitcenterben* a hét munkahelyes elrendezésű U-cellára állítják át a gyártósorokat, ezért a dolgozatomban erre az elrendezésre mutattam be részletesen a számításokat.

Az SALBP-2 feladatnál ismertettem, hogy a ciklusidő elméleti maximumának megválasztásától függően a program különböző elrendezéseket ad. A célfüggvény szempontjából ezek mindegyike optimális – mindegyik elrendezés a minimális ciklusidőt adja. Ezek közül kell kiválasztani a másodlagos szempontok alapján legkedvezőbbet.

A kutatásaim során két gyártósor-konfigurációt vizsgáltam. A négy munkahelyes szigetszerű elrendezést és a hét munkahelyes U-cella koncepciót a 5.4. fejezetben hasonlítottam össze.

A *Hozzárendelés hatékonysága* fejezetben bemutatam, hogy minden  $N$  munkahelyes elrendezéshez megadható egy olyan  $Q$  érvényességi tartomány, amely mellett az adott elrendezés költség- és hozzárendelési hatékonyság tekintetében a legjobb.

Néhány száz tevékenységet végrehajtó gyártósorok ma már optimalizálhatók a kereskedelmi forgalomban kapható matematikai programozási szoftverekkel. Ennél nagyobb feladatok esetében vagy heurisztikákat alkalmazó szoftverek használhatók vagy speciális optimalizáló algoritmusra van szükség.

A bemutatott SALBP-1 és SALBP-2 a gyártósor-kiegyenlítés legegyszerűbb feladatainak megoldására alkalmasak. A műveletek munkahelyekhez rendelésekor azonban

számos egyéb feltétel, másodlagos szempont fogalmazható meg. Ezek közül a legfontosabbak a következők:

- Munkaszervezési vagy minőségellenőrzési szempontok miatt szükség lehet arra, hogy bizonyos tevékenységeket egy csoportban tartsunk. Ezekre előírhatunk csoportosítási feltételeket.
- Elképzelhető, hogy bizonyos tevékenységeket szakmai okok miatt csak egy meghatározott munkahelyen lehet elvégezni. Például az adott tevékenységet csak egy speciális berendezésen lehet végrehajtani.
- A munkások képzettsége befolyásolja, hogy a munkahelyek és tevékenységek milyen módon rendelhetők egymáshoz. Például az előbbi speciális berendezést csak kevés vagy csak egy dolgozó tudja kezelni. A munkások egy része a termék összeszerelésének egész folyamatát ismeri, mások csak egy-egy műveletet.
- Előfordulhat, hogy munkások több munkahelyen is dolgoznak, illetve hogy egyes műveleteket közösen, megosztva végeznek, besegítenek egymásnak. U alakú gyártósoroknál például az U két szára között álló munkás az egymással szemben elhelyezkedő mindkét munkahely feladatait el tudja látni.
- Gyakran a műveleti idők ( $t_i$ ) valószínűségi változók, ezért sztochasztikus optimalizálási módszerek alkalmazása szükséges.
- Sokszor egy gyártósoron egyszerre többféle, bár technológiáját tekintve hasonló terméket készítenek. Ilyen esetekben figyelembe kell venni a műveletsort és a műveleti időket érintő eltéréseket. Szükség esetén a hozzárendelésen is változtatni kell, azt az egyes termékek sajátosságaihoz kell igazítani.

A felsorolt esetek egy része az SALBP-1 és SALBP-2 feltételeinek egyszerű kiegészítésével is könnyen kezelhető. A bonyolultabb esetek megoldásához azonban már összetettebb vizsgálat válik szükségessé, amellyel az *általános gyártósor-kiegyenlítés modelljei* (General Assembly Line Balancing Model = GALBM) foglalkoznak.

A fentebbi fejezetekben bemutatott két SALBP modellt gyakran alkalmazzák együtt. Adott feladat esetén először meghatározzák a minimálisan szükséges munkahelyek számát (SALBP-1), majd a kapott optimális munkahely-számhoz meghatározzák a ciklusidőt minimalizáló tevékenység-hozzárendelést (SALBP-2).

Végezetül megjegyezzük, hogy a folyamatok alapos és részletes megismerése, ismerete minden modell kialakításánál elengedhetetlenül fontos. Csak így biztosítható ugyanis, hogy a modell által szolgáltatott eredmények a gyakorlatban is használhatóak legyenek.

A kutatás további iránya a modellek másodlagos szempontok mentén történő továbbfejlesztése és gyakorlati megvalósíthatóságának vizsgálata. Tanulmányozni fogom a gyártósor-kiegyenlítési modelleknél a további feltételek figyelembe-vételének és a tanulási hatásnak a jelentőségét.

## IRODALOMJEGYZÉK

### Szakirodalom

- [1] **Baybars, Í.**, 1986, *A Survey of Exact Algorithms for the Simple Assembly Line Balancing Problem*, Management Science, 32 (8), pp. 909-932.
- [2] **Becker, C.** and **Scholl, A.**, 2006. *A Survey on Problems and Methods in Generalized Assembly Line Balancing*, European Journal of Operational Research, pp. 694-715.
- [3] **Bowman, E. H.**, 1960, *Assembly Line Balancing by Linear Programming*, Operations Research, 8, pp. 385-389.
- [4] **Boysen, N., Flidner, M.** and **Scholl, A.**, 2008, *Assembly Line Balancing: Which Model to Use When?*, International Journal of Production Economics, 111, pp. 509-528.
- [5] **Conway, R.** and **Schultz, A.**, 1959, *The Manufacturing Progress Function*, Journal of Industrial Engineering, Vol. 10, No.1, pp. 39-53.
- [6] **Lieli Gy.**, 2011, *Látogatás a PHOENIX MECANO Kft.-nél*, Elektrotechnika, 104. évfolyam, 2011/06, 26.o., [www.mee.hu/files/images/elektrotechnika-2011-06.pdf](http://www.mee.hu/files/images/elektrotechnika-2011-06.pdf).
- [7] **Koltai T.**, 2003, *Termelésmenedzsment alapjai II.* (2.7. fejezet: Ütemezés egyforma feladatok többszöri elvégzésekor (gyártósor-kiegyenlítés), 114-125.o.) Műegyetemi kiadó, Budapest
- [8] **Koltai T.**, 2006, *Termelésmenedzsment*, Typotex kiadó, Budapest
- [9] **Koltai, T., Tatay, V.**, 2010, *Application of Simple Assembly Line Balancing Models to Support Production Quantity Related Decisions*, 16th International Working Seminar on Production Economics, Innsbruck, Ausztria, Vol. 1, pp. 285-296.
- [10] **Patterson, J. H.** and **Albracht, J. J.**, 1975, *Assembly-Line Balancing: Zero-One Programming with Fibonacci Search*, Operations Research, 23, pp. 166-174.
- [11] **Scholl, A.** and **Becker, C.**, 2006, *State-of-art Exact and Heuristic Solution Procedures for Simple Assembly Line Balancing*, European Journal of Operational Research, pp. 666-693.

- [12] **White, W. W.**, 1961, *Comments on a Paper by Bowman, Operations Reserach*, 9, pp. 274-276.
- [13] **Yelle, Louis E.**, 1979, University of Lowell, Education, *The Learning Curve: Historical Review and Comprehensive Survey, Decision Sciences*, Vol.10., pp. 302-328.

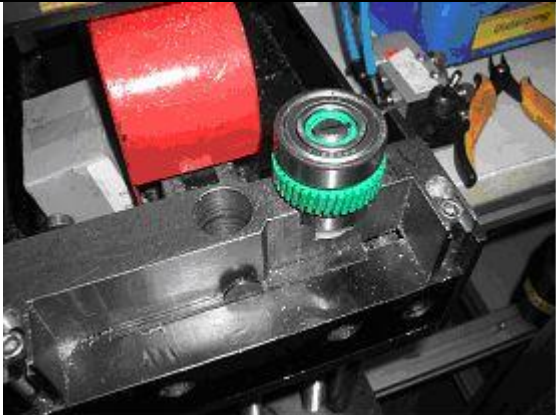
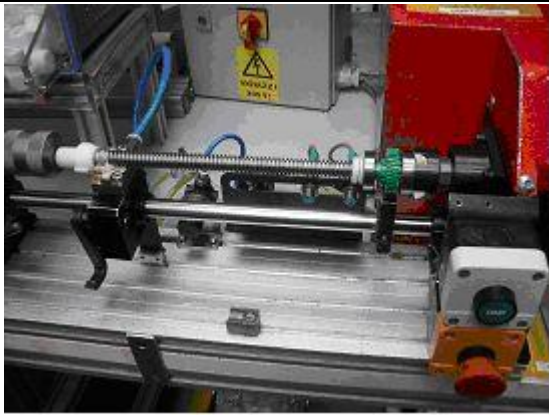
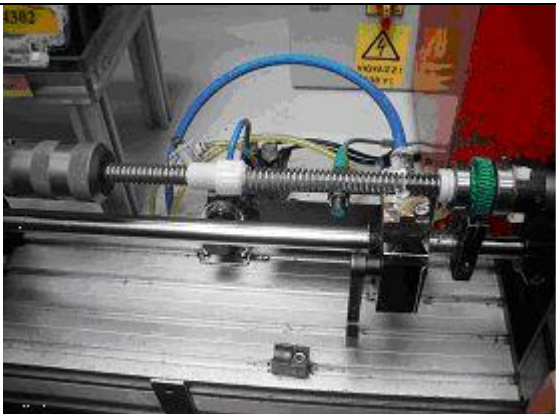
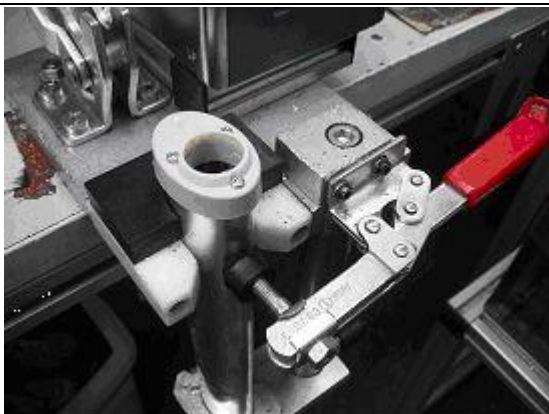
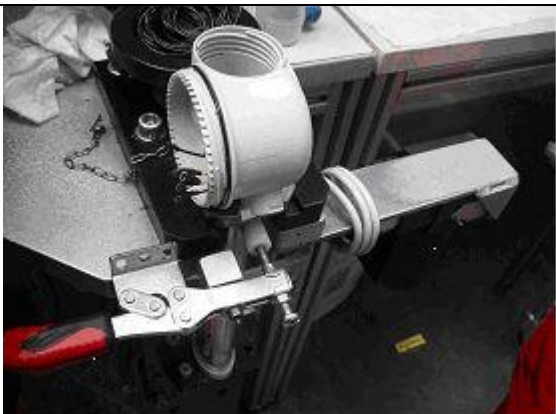
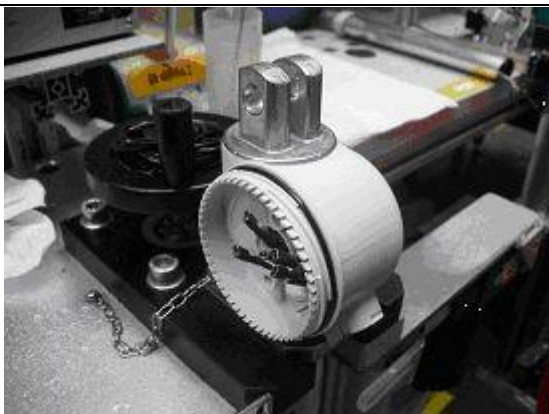
### **Internetes források**

- [1] Phoenix magazin, 2011.június.9., [http://www.phoenix-mecano.hu/UserFiles/File/magazin/pm\\_magazin\\_2011\\_2.pdf](http://www.phoenix-mecano.hu/UserFiles/File/magazin/pm_magazin_2011_2.pdf)
- [2] Phoenix-Mecano: [www.phoenix-mecano.hu](http://www.phoenix-mecano.hu) – Phoenix Mecano Kecskemét Kft. (PMK) honlapja (2011.10.28.)
- [3] Szűcs Gábor – Algoritmusok: <http://delfin.klte.hu/~szucsga/html/algoritmusok.html> (2011.10.28.)

## **MELLÉKLETEK**

## 1. STANDARD MEGAMAT 2 SZERELÉSI SORREND

12. táblázat: Az egyes dolgozók feladata 7 munkaállomásos U-cella esetén

| 1. dolgozó feladata                                                                 |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    |
| BGS szerelés                                                                        | BGS-t zsírzóba behelyez                                                              |
| 2. dolgozó feladata                                                                 |                                                                                      |
|   |   |
| BGS zsírzás                                                                         | Flanschführung szerelés                                                              |
| 3. dolgozó feladata                                                                 |                                                                                      |
|  |  |
| Házszerelés                                                                         | Getriebe Gabelkopf betekerés                                                         |

#### 4. dolgozó feladata

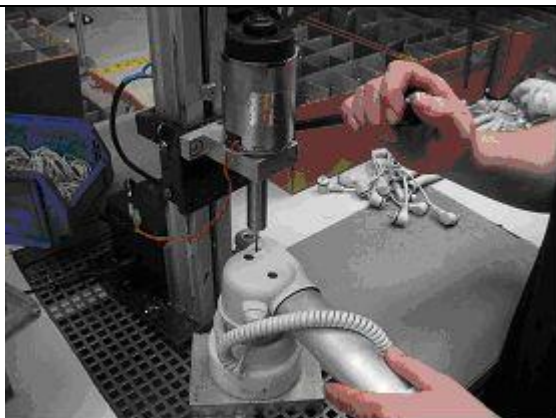


Spirálkabel befűzése



Motorkábel fűzése, kábelleszorító  
behelyezése

#### 5. dolgozó feladata



Motor beszerelés



Hubrohr betekerés, kupak rátekerés

#### 6. dolgozó feladata

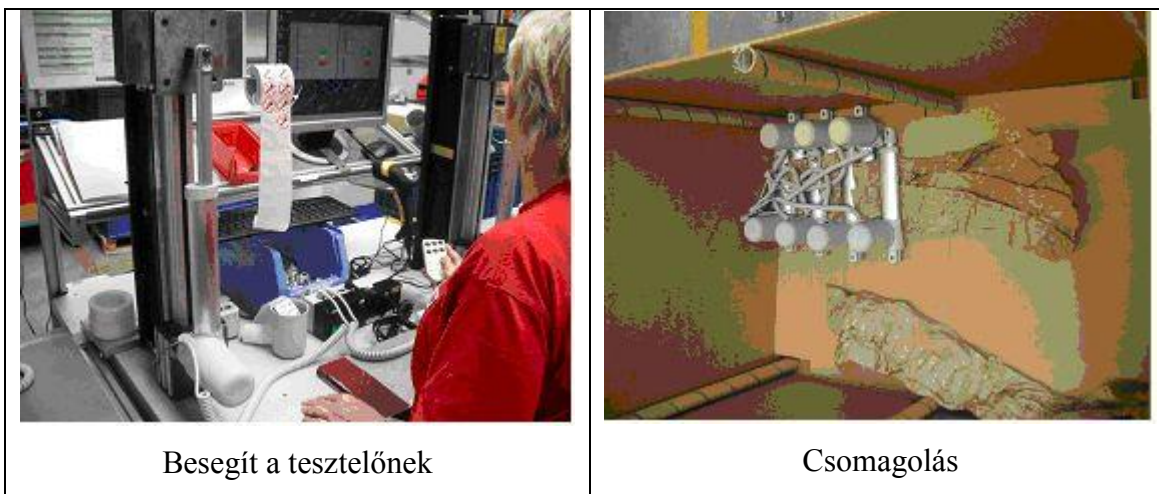


Tesztelés, címkézés



Motorkupak rögzítése

#### 7. dolgozó feladata



## 2. MŰVELET HOZZÁRENDELÉSEK ÉS EZEK HATÁSAI 7 MUNKAHELY ESETÉN

| $T_c$ elméleti maximuma [mp] | $T_{c,max,elm}=85,2$ | $T_{c,max,elm}=87$ | $T_{c,max,elm}=90$ | $T_{c,max,elm}=100$ | $T_{c,max,elm}=140$ | $T_{c,max,elm}=350$ | $T_{c,max,elm}=444$ |
|------------------------------|----------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Művelet                      | Műv.idők [mp]        | N = 7              | N = 7              | N = 7               | N = 7               | N = 7               | N = 7               |
| A                            | 52                   | 52                 | 52                 | 52                  | 52                  | 52                  | 52                  |
| B                            | 10                   | 10                 | 10                 | 10                  | 10                  | 10                  | 10                  |
| C                            | 13                   | 13                 | 13                 | 13                  | 13                  | 13                  | 13                  |
| D                            | 8,5                  | 8,5                | 8,5                | 8,5                 | 8,5                 | 8,5                 | 8,5                 |
| E                            | 8,5                  | 8,5                | 8,5                | 8,5                 | 8,5                 | 8,5                 | 8,5                 |
| F                            | 32                   | 32                 | 32                 | 32                  | 32                  | 32                  | 32                  |
| G                            | 63                   | 63                 | 63                 | 63                  | 63                  | 63                  | 63                  |
| H                            | 25                   | 25                 | 25                 | 25                  | 25                  | 25                  | 25                  |
| I                            | 41                   | 41                 | 41                 | 41                  | 41                  | 41                  | 41                  |
| J                            | 15                   | 15                 | 15                 | 15                  | 15                  | 15                  | 15                  |
| K                            | 15                   | 15                 | 15                 | 15                  | 15                  | 15                  | 15                  |
| L                            | 13                   | 13                 | 13                 | 13                  | 13                  | 13                  | 13                  |
| M                            | 15                   | 15                 | 15                 | 15                  | 15                  | 15                  | 15                  |
| N                            | 25                   | 25                 | 25                 | 25                  | 25                  | 25                  | 25                  |
| O*                           | 25                   | 25                 | 25                 | 25                  | 25                  | 25                  | 25                  |
| P                            | 52                   | 52                 | 52                 | 52                  | 52                  | 52                  | 52                  |
| Q                            | 31                   | 31                 | 31                 | 31                  | 31                  | 31                  | 31                  |

|                            |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Átlag( $s_j$ ):            | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 | 63,43 |
| Szórás( $s_j$ ):           | 17,17 | 17,83 | 16,20 | 18,92 | 16,67 | 17,83 | 17,95 |
| Max( $s_j$ ) = $T_c$ :     | 81    | 81    | 81    | 81    | 81    | 81    | 81    |
| Teljes átfutási idő (TPT): | 395   | 395   | 404   | 412   | 412   | 395   | 395   |

39. ábra: Művelet hozzárendelések 7 munkahelyre különböző  $T_{c,max,elm}$  értékek esetén (SALBP-2)

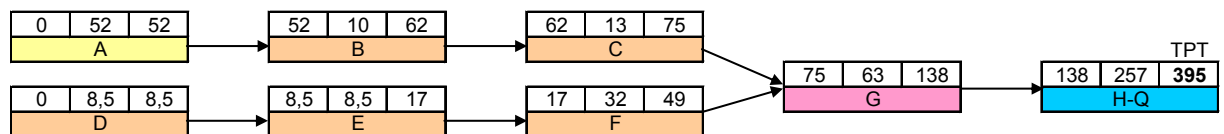
13. táblázat: A dolgozatban használt egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálótér csomópontjainak felépítése

|                                  |                                             |                                                   |
|----------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Legkorábbi kezdés<br>( $EST_i$ ) | Tevékenység végrehajtási<br>ideje ( $D_i$ ) | Legkorábbi befejezés<br>( $EFT_i = EST_i + D_i$ ) |
| Tevékenység betűkódja            |                                             |                                                   |

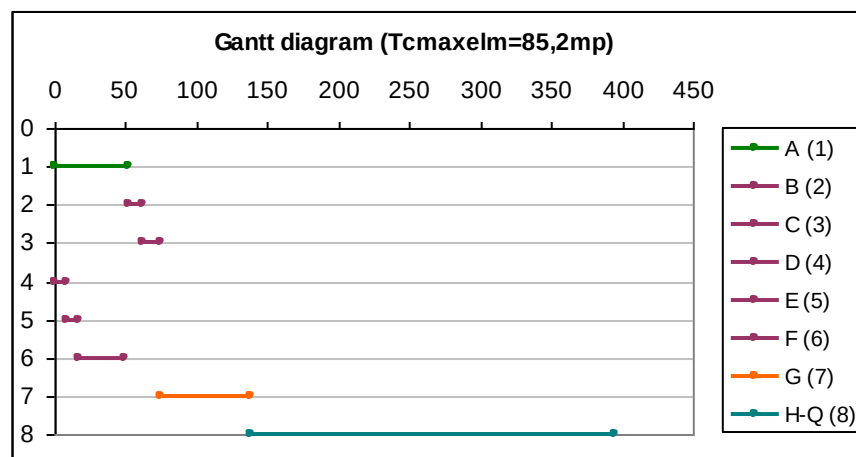
Mivel **H**-tól **Q**-ig minden esetben ugyanazt az elrendezést kaptuk, ezért ezeket a műveleteket összevontan kezeljük. Ennek az eltérések illusztrálása szempontjából nincs jelentősége.

- $T_{c,max,elm} = 85,2 \text{ mp}$

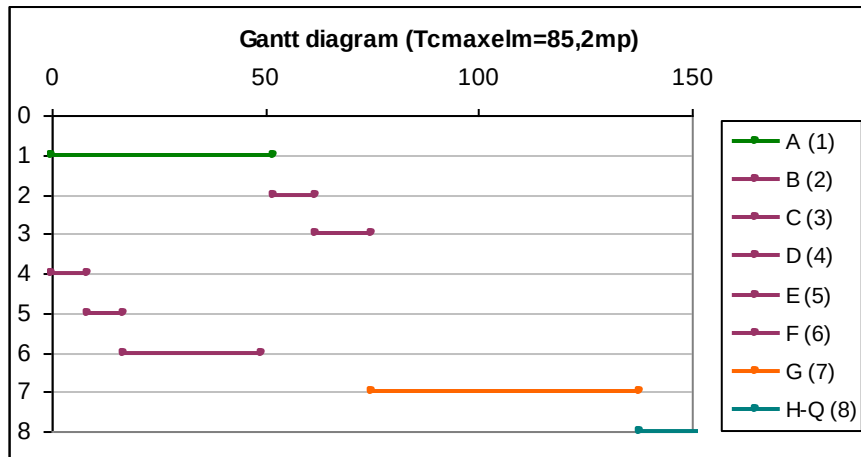
$T_{c,max,elm} = 85,2 \text{ mp}$  esetén az egyszerűsített hálóterv és a Gantt-diagram az 40. ábra szerint alakul:



40. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv  $T_{c,max,elm} = 85,2 \text{ mp}$  esetén



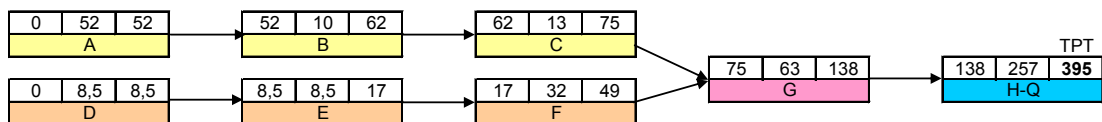
41. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 85,2 \text{ mp}$  esetén



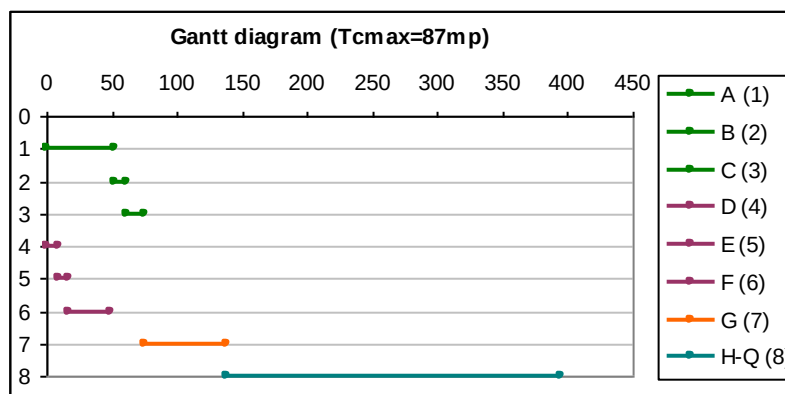
42. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén

Látható, hogy a 2. munkahelynek akkor is várnia kell 3 másodpercet, hogy el tudja kezdeni a **B** műveletet – melynek a közvetlenül megelőző műveletét (**A**) az 1. munkahely végzi – az **F** művelet után, még akkor is, hogyha az 1. munkahellyel együtt kezdi el a **D** művelet végrehajtását.

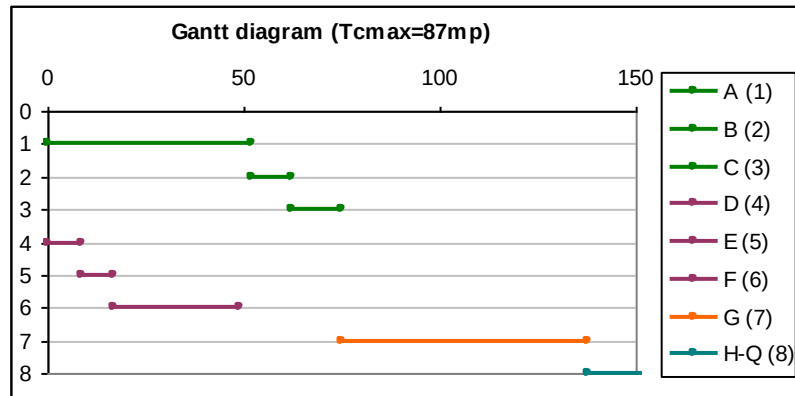
- $T_{c,max,elm} = 87$  mp



43. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv  $T_{c,max,elm} = 87$  mp esetén



44. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén

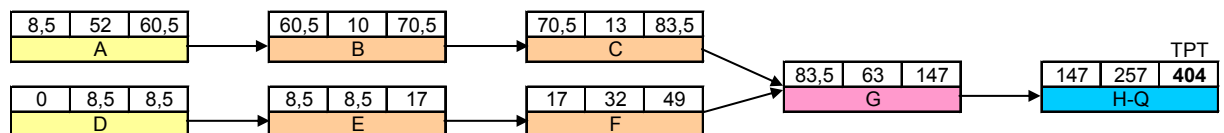


45. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp esetén

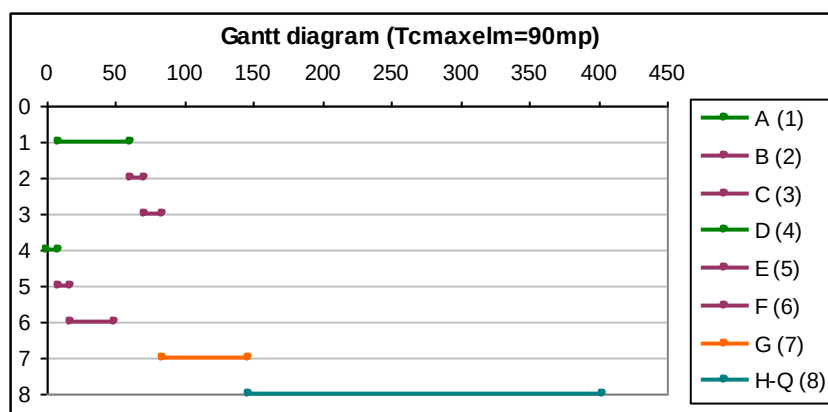
Látható, hogy ennél az elrendezésnél az 1-es és 2-es munkahely is várakozás nélkül, folytatólagosan tudja végezni a hozzájuk tartozó műveleteket.

- $T_{c,max,elm} = 90$  mp

$T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén az egyszerűsített hálóterv és a Gantt-diagram a 46. ábra szerint alakul:

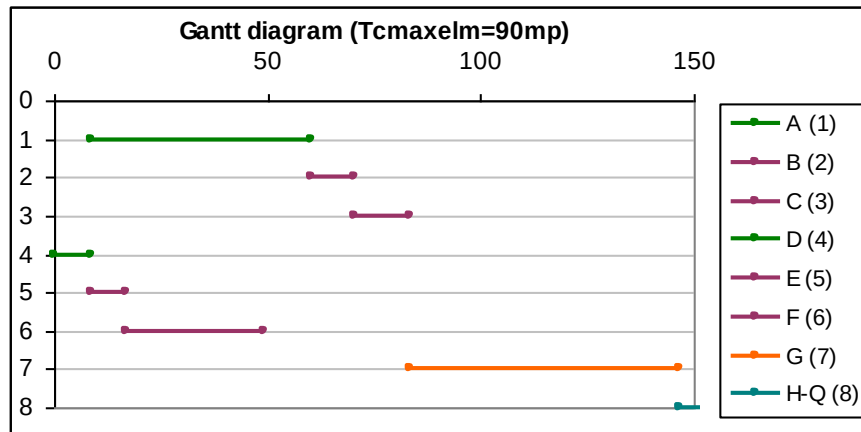


46. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv  $T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén



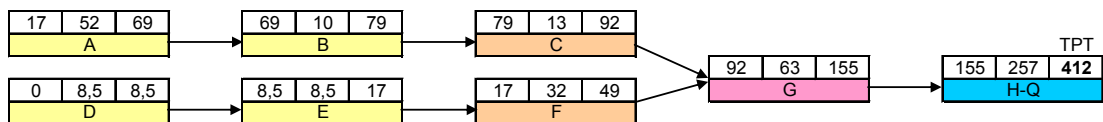
47. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén

Emlékezzünk csak, ez az elrendezés az, amelynél az  $s_j$  értékek szórása az összes elrendezés közül a legalacsonyabb. A műveletek szétosztásának és a logikai kapcsolatok együttes hatásának következtében azonban a 2. munkahelynek  $60,5-49 = 11,5$  másodpercet várnia kell arra, hogy a **B** műveletet el tudja kezdeni az **F** után. Ez természetesen az átfutási időt is megnöveli.

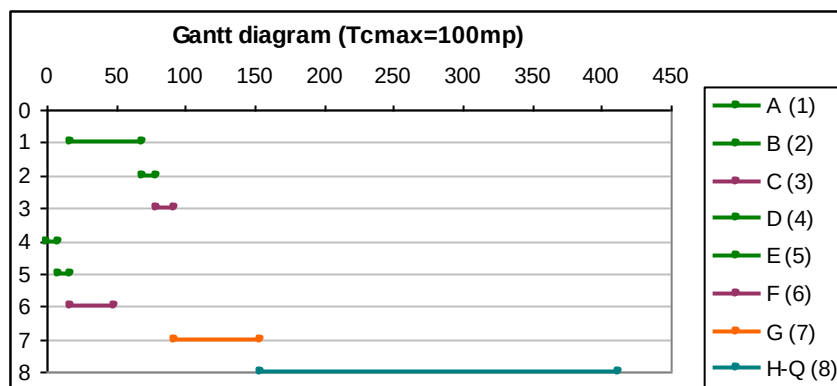


48. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 90$  mp esetén

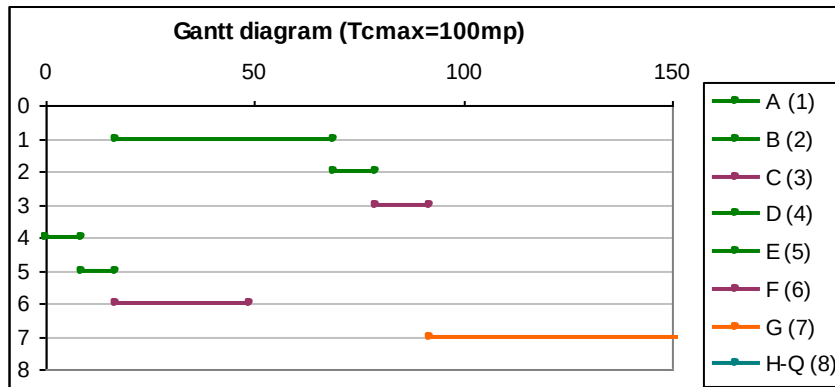
- $T_{c,max,elm} = 100$  mp



49. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálótér  $T_{c,max,elm} = 100$  mp esetén



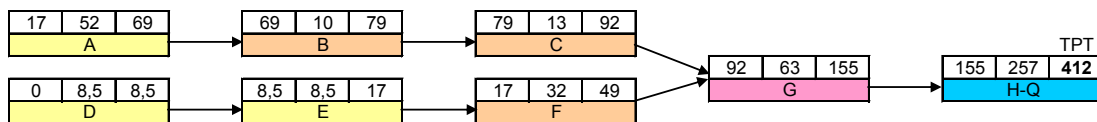
50. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 100$  mp esetén



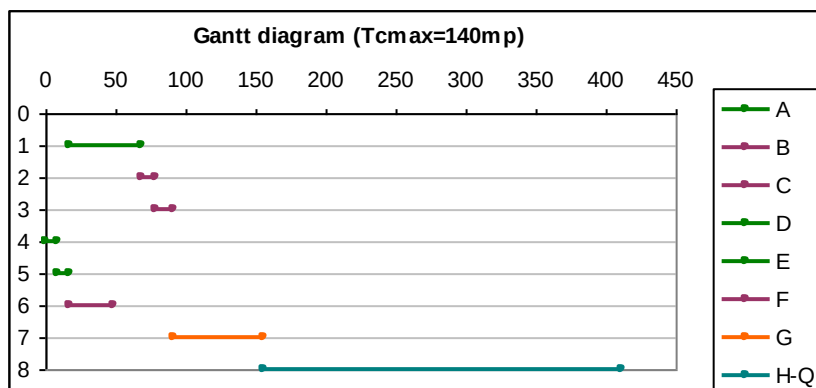
51. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 100$  mp esetén

Ennél a műveletszétosztásnál a legnagyobb a munkahelyekhez osztott műveletek összes idejének szórása, illetve a teljes átfutási idő is. Látható, hogy a 2. munkahelynek 30 másodpercet kell várakoznia, hogy az **F** művelet után nekikezdhesen a **C** műveletnek. Ez eredményezi a magas, 412 másodperces átfutási időt is. Megállapítható, hogy noha egyik munkahelyen sem haladja meg az  $s_j$  érték a 81 másodperces ciklusidőt, mégis ez a legkevésbé kedvező elrendezés a 29. ábrán feltüntetettek közül.

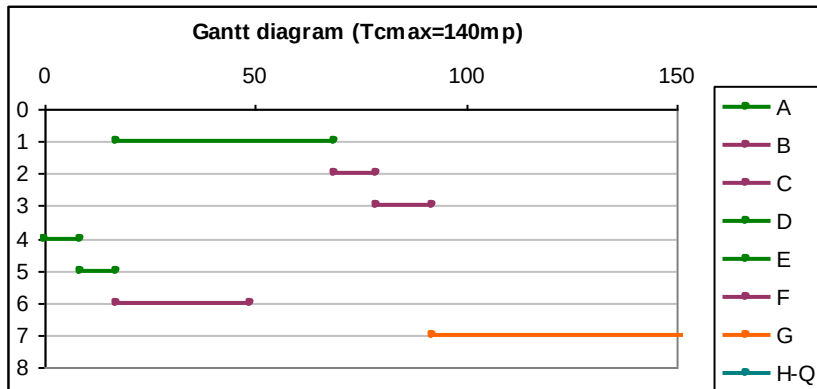
- $T_{c,max,elm} = 140$  mp



52. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv  $T_{c,max,elm} = 140$  mp esetén



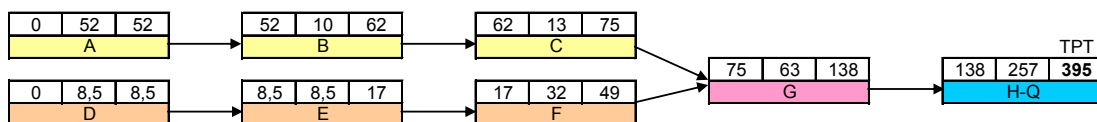
53. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 140$  mp esetén



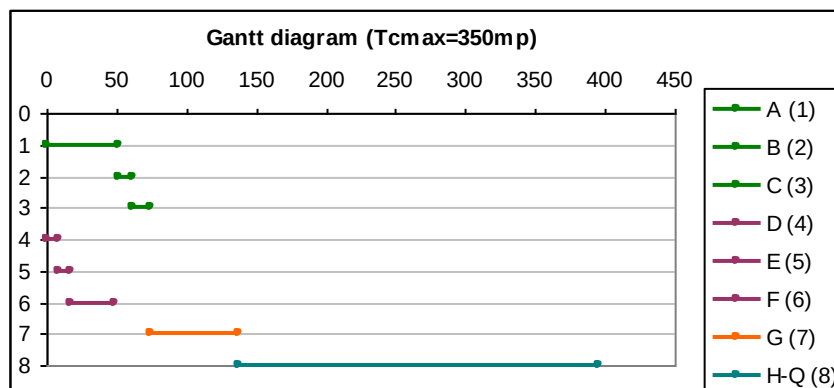
54. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 140$  mp esetén

Noha ennél az elrendezésnél az egyik legalacsonyabb az  $s_j$  értékek szórása, mégis ez az elrendezés adja a(z egyik) legmagasabb átfutási időt (az előző elrendezéshez hasonlóan 412 mp). Ennek oka itt is a várakozási idő: a 2. munkahelynek 20 másodpercet kell várakoznia, amíg az **F** művelet után el tudja kezdeni a **B** műveletet. Megállapíthatjuk tehát, hogy az, hogy a munkahelyek műveleti idők szempontjából kiegyenlítették, a logikai kapcsolatok miatt nem feltétlenül biztosítja a legkedvezőbb átfutási időt.

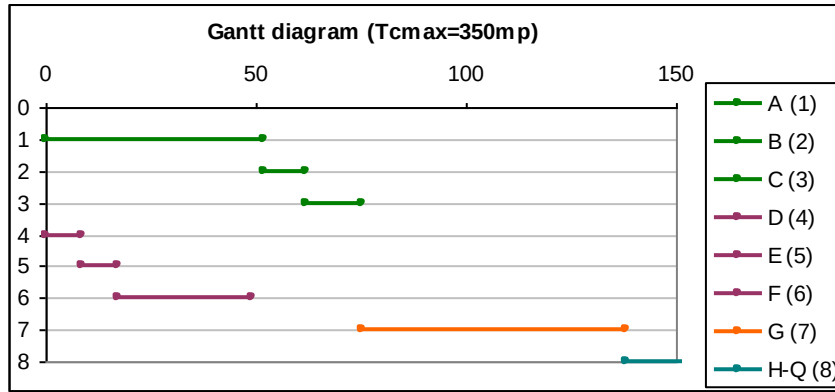
- $T_{c,max,elm} = 350$  mp



55. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálótér  $T_{c,max,elm} = 350$  mp esetén



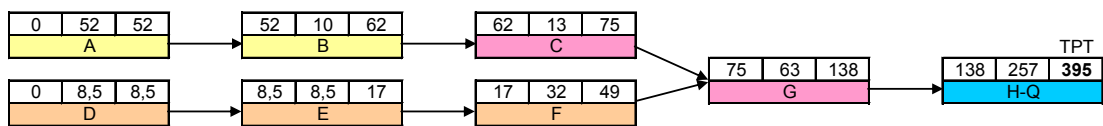
56. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 350$  mp esetén



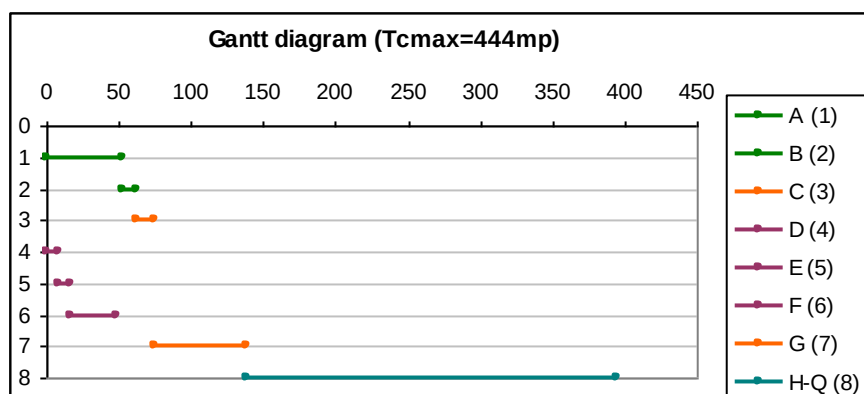
57. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 350$  mp esetén

Ez az elrendezés a  $T_{c,max,elm} = 87$  mp-es esettel azonos. Szemléltetésül szolgál arra, hogy a kapott elrendezések nem  $T_{c,max,elm}$  érvényességi tartományokhoz köthetők, hanem a branch-and-bound algoritmus által bejárando fától függnnek.

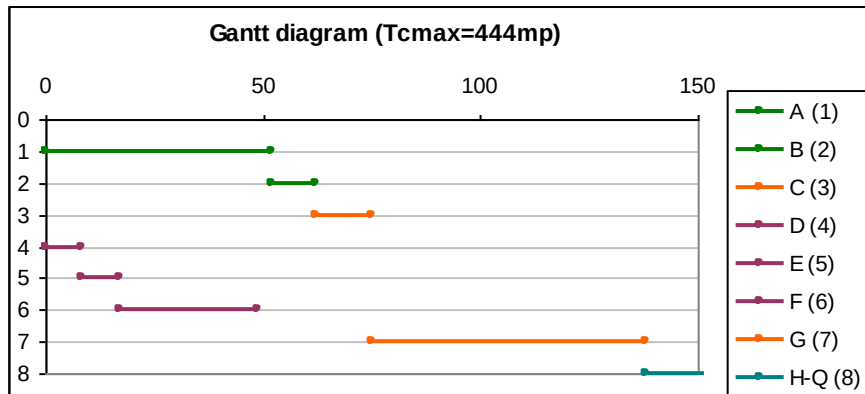
- $T_{c,max,elm} = 444$  mp



58. ábra: Egyszerűsített tevékenység-csomópontú hálóterv  $T_{c,max,elm} = 444$  mp esetén



59. ábra: Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 444$  mp esetén



60. ábra: Kinagyított Gantt-diagram  $T_{c,max,elm} = 444$  mp esetén

Noha két olyan elrendezés is van, ami az  $s_j$ -k szórása szempontjából kedvezőbb (ld.  $T_{c,max,elm} = 85,2$  mp, és  $T_{c,max,elm} = 87$  mp vagy  $T_{c,max,elm} = 350$  mp), ugyanakkor átfutási idő tekintetében mindhárom elrendezés azonos eredményre vezet, egyaránt a legalacsonyabb értéket adják.

Az ábrákból is levonható tehát a korábbi következtetés, miszerint a logikai kapcsolatoknak meghatározó jelentőségük van az átfutási idő szempontjából.