

Gerendák lehajlása: hibás-e a szilárdságtanon tanult összefüggés?

Tudományos Diákköri Konferencia

Készítette:

Miklós Zita
Trombitás Dóra

Konzulensek:

Dr. Pluzsik Anikó
Dr. Kollár László Péter

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

2011. november

1. Bevezetés	2
1.1. Téma bemutatása	2
1.2. Acélgerendák	3
1.3. Fa gerendák	4
1.4. Kompozit gerendák	4
2. Egydimenziós rúdmodellek	5
2.1. Kiindulás az előadáson tanultakból – Bernoulli- Navier hipotézis	5
2.1.1. Rúdmodell	5
2.1.2. Számpélda – klasszikus rúdelmélet	10
2.2. Timoshenko gerenda lehajlás elmélete	16
2.2.1. Timoshenko-modell	16
2.2.2. Számpélda	20
2.3. Szendvicselmélet	24
2.3.2. Vastag héjalású szendvics	28
2.3.3. Számpélda-szendvicselmélet	30
3. Háromdimenziós rúdmodell	32
3.1. Végeselem módszer – ANSYS	32
4. Összehasonlítás	35
4.1. Számítási módszerek összehasonlítása	35
4.1.1. Klasszikus rúdelmélet és Timoshenko-féle gerenda elmélet	35
4.1.2. Egy és háromdimenziós rúdmodellek összehasonlítása	37
4.1.2.1. Acélgerenda esetén	37
4.1.2.2. Kompozit anyagú gerenda esetén	38
4.2. Számítási módszerek a geometria és anyagi jellemzők függvényében	41
4.2.1. Keresztmetszet arányainak hatása	41
4.2.1.1. Klasszikus rúdelmélet és szendvicselmélet összehasonlítása	41
4.2.1.2. Timoshenko-modell és szendvicselmélet összehasonlítása	43
4.2.2. Az anyagi jellemzők hatása	45
4.2.2.1. Klasszikus rúdelmélet és szendvicselmélet összehasonlítása	45
4.2.2.2. Timoshenko-modell és szendvicselmélet összehasonlítása	46
5. Összefoglalás - következtetés	48
6. Köszönetnyilvánítás	50
7. Irodalomjegyzék	51
8. Csatolmányok	52

1. Bevezetés

1.1. Téma bemutatása

Rúdszerkezetek alakváltozását, jelen dolgozatban hajlított-nyírt gerendák lehajlását, többféle módon is meghatározhatjuk.

Ha figyelembe vesszük, hogy a rúd kiterjedése egyik irányban sokkal nagyobb, mint a másik kettőben egyszerűsíthetjük a feladatot úgy, hogy a vizsgált jellemzők csak egy változótól (hossz menti koordináta: x) függjenek. Ilyen rúdmodellt tanultunk a Szilárdságtan II. tantárgyban. Az adott alapfeltevéseket betartva a felírt alapegyenleteket analitikusan megoldva tudjuk számítani a lehajlás függvényt.

A tervezői gyakorlatban már széles körben elterjedt, végeselemes programok segítségével a feladat numerikusan is megoldható. A kis elemekre osztott rúd csomópontjaiban kapott megoldás jól közelíti az azonos alapfeltevéseken alapuló analitikus megoldást. Az elemszám növelésével a hiba csökken.

De vajon jól közelíti-e a valóságot akár a numerikus akár az analitikus megoldás? A válasz az, hogy nem minden esetben. Mikor használható a szilárdságtanban tanult összefüggés és mikor vezet hibás eredményre? Milyen módszerekkel pontosíthatjuk a számításainkat? Mik az alkalmazhatósági határai az egyes módszereknek? Dolgozatunk ezekre a kérdésekre keresi a választ.

A válaszhoz az ANSYS végeselem program segítségével héjelemekből elkészítettük a vizsgálandó gerenda 3D-s modelljét. Ezt fogadjuk el a legjobban közelítő „pontos” megoldásnak. Hiszen nem tartalmazza a 3D-ből 1D-be való váltás közelítéseit.

Az ANSYS programmal számolt lehajlásokat három különböző 1D-s rúdmodell eredményeivel vetettük össze. Ezek a nyomaték hatását figyelembe vevő Bernoulli-Navier hipotézisen alapuló klasszikus elmélet, a Timoshenko-féle nyírás hatását is figyelembe vevő rúdelméletet, és a vastag héjalású szendvics elmélet. Először egy konkrét gerendánál határoztuk meg a különböző modellekből származó lehajlásértékeket. A megoldás függvény eredményeit összevetve, megtudhatjuk melyik módszer a gerenda mely szakaszáig ad a tervezésnél használható, elegendő pontosságú eredményt.

Ezt követően különböző geometria, anyagjellemzők és rúd hosszak esetén vizsgáltuk meg a lehajlás függvények közti eltéréseket és adtuk meg az egyes rúdmodellek hibáját.

Tartószerkezeti szempontból kiemelkedően fontos, hogy a valósághoz közeli értéket kapjunk számításainkkal, hiszen a gerendák, födémek lehajlása nemcsak közérzetünket befolyásolja. A gerendával együtt a födém elmozdulása a falak megrepedését, hézagok képződését okozhatja. Esztétikailag és a teherbírási szempontból is károsodhat az épület, amennyiben nem kellő pontossággal számítjuk a gerenda lehajlását, és a valóságban túllépjük a használhatósági határállapotban megengedett értéket.

1.2. Acélgerendák

A 19. század második felében élték egyik fénykorukat az acélgerendás födémek, az úgy nevezett Horcsik és poroszsüveg födémek. Ma leginkább a magasházak és nagytámaszközü csarnokok szerkezeteként alkalmazzák.

A szerkezeti acélfajták karbontartalma 0,6%-nál többnyire kisebb. A mechanikai terhelésnél figyelembe vett acél legfontosabb fizikai jellemzői:

izotrop anyag, tulajdonságai függetlenek a térbeli irányoktól,

sűrűség: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$,

hőtágulási együttható: $\alpha_T = 0,000012 \text{ K}^{-1}$ (ferrit-perlites szerkezetű acélra),

rugalmassági modulus: $E = 206000 \text{ N/mm}^2$,

Poisson-tényező: $\nu = 0,30$,

Nyírási rugalmassági modulus az acélnál, mint izotrop anyagnál a Poisson-tényezőtől és a rugalmassági modulusból számítható: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Az általunk vizsgált gerenda I keresztmetszetű.

Dolgozatunkban lineárisan rugalmas anyagmodell tételünk fel, vagyis az acél képlékenyedését nem vesszük figyelembe.

1.3. Fa gerendák

Napjainkban fafödémekkel leginkább a készházak szerkezeteként találkozhatunk.

Anizotrop viselkedése a legfontosabb számunkra, vagyis tulajdonságai függenek a térbeli irányoktól. Az alábbi fafajtát használtuk számításaink során.

C20	fa (rostirány)	fa (merőleges)
$E \text{ (N/mm}^2\text{)}=$	9500	320
$G \text{ (N/mm}^2\text{)}=$	600	600

1-1. táblázat

1.4. Kompozit gerendák

A kompozit gerendák többféle anyagból készülnek. Fontos jellemzőjük, hogy anizotropok.

A fa kompozitokat a faanyag szétदारabolásával, majd az így nyert elemek újbóli egyesítésével állítják elő. Ebben az esetben az egyszerű analitikus elméletek nem alkalmazhatók közvetlenül, mivel a nem tengelyirányú szálak jelenléte miatt a gerendák egyszerű húzás vagy hajlítás esetén is elcsavarodhatnak, és a nyírási deformáció hatása sokkal jelentősebb, mint közönséges rudak esetében.

A műanyag szálerősítésű kompozit gerendákat újabban egyre nagyobb mértékben használják az építőiparban. Ebben az esetben a rúdban futó szálak irányát is meg lehet tervezni. Az egyszerűsítés érdekében tengelyirányban futó szálak kompozit gerendákkal számolunk. Ebben az esetben a szerkezet nyírási merevsége viszonylag alacsony. Acél esetén a rugalmassági modulus és a nyírási rugalmassági modulus E/G aránya körülbelül 2,5 üvegszálak epoxi esetén 10-15, egyirányú szálakat tartalmazó grafit epoxi esetében viszont az E/G akár 40 is lehet. Így a nyírási deformáció figyelembevétele alapvető fontosságú.

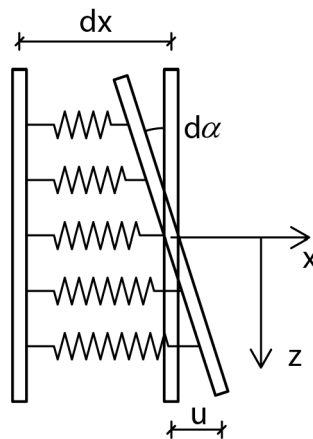
2. Egydimenziós rúdmodellek

2.1. Kiindulás az előadáson tanultakból – Bernoulli- Navier hipotézis

2.1.1. Rúdmodell

Domokos Gábor: Szilárdságtan jegyzetei alapján:

A szilárdságtanon tanult rúdmodellben a Hooke-törvényt és a Bernoulli - Navier hipotézist vesszük alapul a rúd tengelyre merőleges igénybevételre való reakcióinak megállapításához. Feltételezzük, hogy a rúd keresztmetszetei a deformáció után is síkok maradnak és merőlegesek a tengelyre. Ezek alapján a rudat keresztmetszetekre bontjuk, ezeket, mint merev lapokat kezeljük, melyek síkok maradnak deformáció után. A merev lapok közt nagyon rövid és sok lineáris rugó képes a megnyúlásra és reagál a nyírásra (1. ábra).

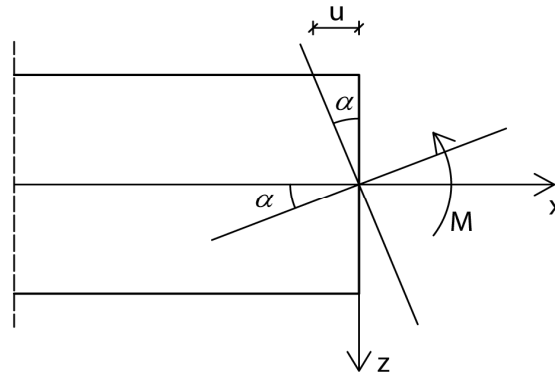


1. ábra: Keresztmetszet elfordulás, elemi szálak megnyúlása

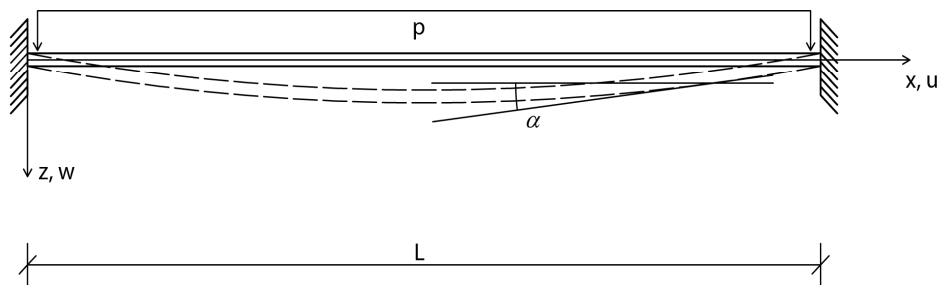
Az elmélet szerint e síkok közti elemi kis rugók (szálak) egyensúlyt tartanak az igénybevétellel. A rugóerők az elemi szálakban a megnyúlás miatt ébredő feszültségek.

Minden keresztmetszetben ismerjük a feszültséget és a fajlagos megnyúlást, melyek a rúd két végtelen közeli keresztmetszete közti részt jellemzik. Először a rúd egy eleme (rövid)

szakaszának viselkedését fogjuk vizsgálni (2. ábra), ennek ismeretében határozhatják meg a teljes rúd elmozdulásait.



2. ábra: Hajlításból származó keresztmetszet elfordulás



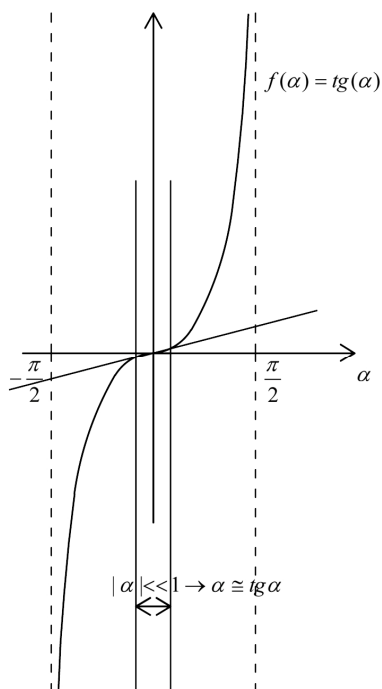
3. ábra: Két végén befogott tartó lehajlása megoszló terhelés esetén

Az elmozdulás függvényt z -vel jelöljük. A matematikában ismert, hogy: $z'(x) = \operatorname{tg}(\alpha(x))$ (3. ábra).

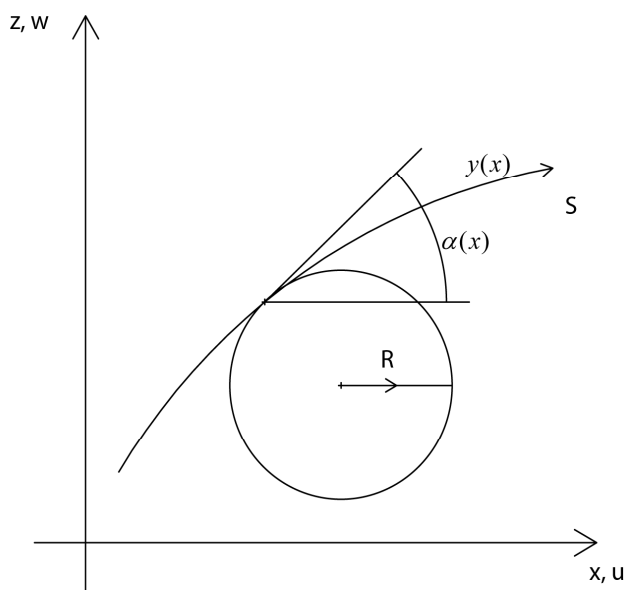
Feltételezzük, hogy az elmozdulások kicsinyek, vagyis $w \ll L$, így $\alpha \leq 5^\circ$, $z'(x) = \alpha(x)$ egyenlőség fennáll (4. ábra).

Az alábbi összefüggés alapján, és a kicsiny elmozdulások miatt a tengelyelfordulás függvény deriváltja a görbület függvény.

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} \text{ geometriai jelentése görbület: } \kappa = \frac{1}{R}; \quad (1)$$



4. ábra: Kis szög esetén fennálló egyenlőségek

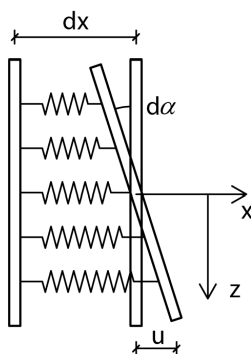


5. ábra: Simulókör sugara, görbület

Ha a tartó lapos $x \cong s$ (5. ábra),
 tehát $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx}$

Vagyis a rúdtengely alakját leíró $z(x)$ függvény második deriváltja azonos a görbülettel(1): $-z''(x) = \kappa$

Továbbá a sík keresztmetszetek elve miatt:



6. ábra: Keresztmetszet elfordulás, elemi szálak megnyúlása

$$\operatorname{tg} - \alpha = -d\alpha = \frac{u(z)}{z} ; \text{ mivel } |\alpha| \ll 5 \text{ rendezés után } u(z) = -zd\alpha$$

$$\text{Fizikai összefüggés: } u(z) = \varepsilon dx = \frac{\sigma}{E} dx = \frac{Mz}{EI} dx ; \text{ mivel } \sigma = \frac{Fz^2}{Az^2} = \frac{Mz}{I}$$

$$\text{Ezekből: } -zd\alpha = \frac{Mz}{EI} dx$$

$$-\frac{d\alpha}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \text{ mivel } -\frac{d\alpha}{dx} = \kappa = z''(x) \text{ így } z''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

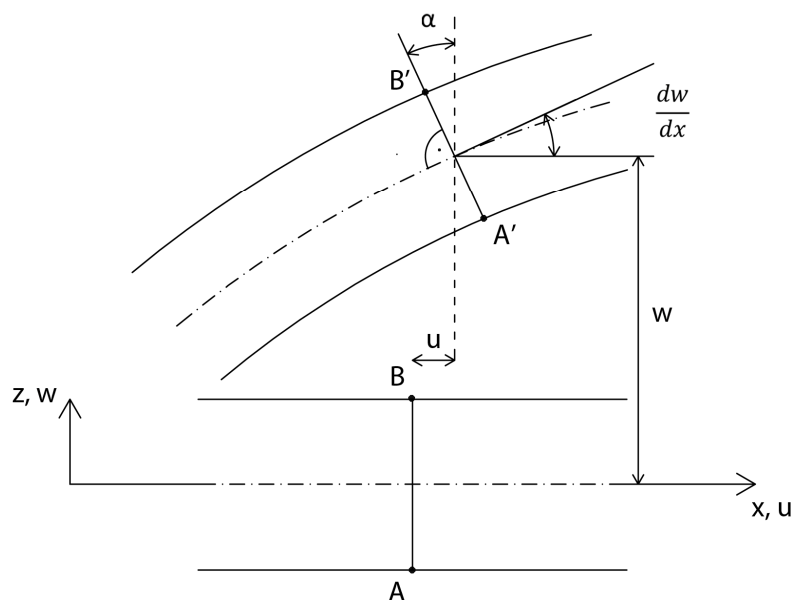
$$\text{Fizikai összefüggés (6. ábra): } \varepsilon = \frac{du}{dx} = u' = -\alpha' z$$

$$\text{Hooke törvény alapján: } \sigma = \varepsilon E = -\alpha' z E$$

$$M = \int z \sigma dA = \int z^2 (-\alpha') E dA = E(-\alpha') \int z^2 dA$$

$$M = EI\kappa \text{ mivel } \kappa = -\frac{d\alpha}{dx}$$

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$



7. ábra: Hajlításból származó tengelylehajlás, keresztmetszet elfordulás

Következtetések:

$M''(x) = -p(x)$; a rugalmas differenciálegyenlet: $z^{IV} = \frac{p_z}{EI}$ a peremfeltételek ismeretében megoldható. Az y ismeretében az x tengely elfordulása, a nyomaték és a nyíróerő is számítható.

$z \rightarrow$ lehajlás függvény

$z' \rightarrow$ tengely elfordulás

$z'' \rightarrow$ görbület vagy $\frac{M}{EI}$ (2)

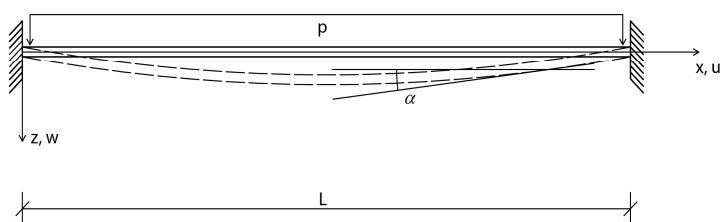
$z''' \rightarrow \frac{V}{EI}$

$z^{IV} \rightarrow \frac{p_z}{EI}$

Ezen differenciálegyenletek (2) a rendszer térbeli változtatását írják le. Ehhez kapcsolódó peremfeltételek pedig azt szabják meg, hogy mihez képest változik a rendszer. A tengely lehajlást leíró függvényhez a peremfeltételekkel és a differenciál egyenletek megoldásával juthatunk el.

2.1.2. Számpélda – klasszikus rúdelmélet

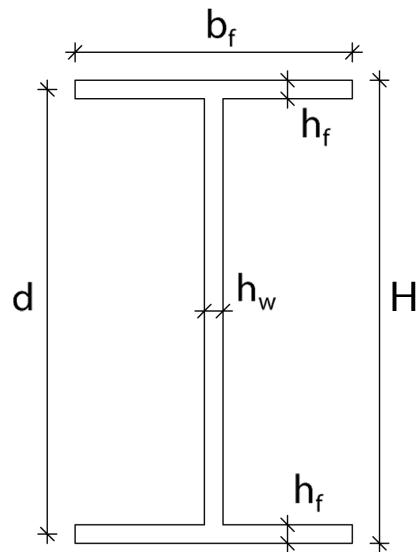
A továbbiakban a két végén befogott gerenda lehajlását számoljuk, mivel - adott támaszköz esetén - ebben az esetben a legjelentősebb az eltérés a modell és a valóság között, itt a legnagyobb a „klasszikus” elmélet hibája, a legnagyobb a nyíróerő hatása a nyomatékéhoz viszonyítva. Két végén befogott gerenda lehajlását számítottuk ki az eddigi összefüggések alapján, az alábbi módon (8. ábra):



8. ábra: Két végén befogott tartó lehajlása megoszló terhelés esetén

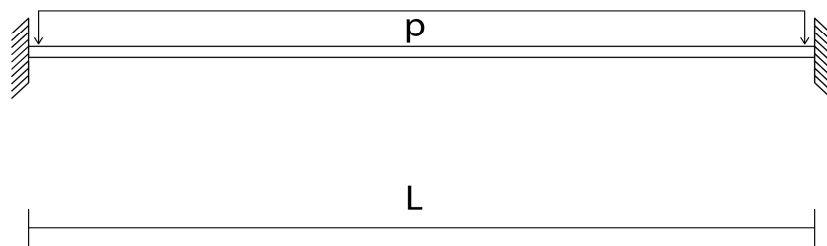
$p \text{ (N/mm)}=$	1,01
$E \text{ (N/mm}^2\text{)}=$	206000
$\nu =$	0,3
$G \text{ (N/mm}^2\text{)}=$	79230,7
$L \text{ (mm)}=$	5000
$H \text{ (mm)}=$	500
$b_f \text{ (mm)}=$	300
$h_f \text{ (mm)}=$	20
$h_w \text{ (mm)}=$	20
$I_y \text{ (mm}^4\text{)}=$	8,54E+08

2-1. táblázat



9. ábra: I gerenda keresztmetszete

Mivel tudjuk, hogy nincs lehajlás sem tengely elfordulás a befogásnál, ezért a y és y' függvény értékének a befogásoknál nullát vehetünk (3). A tartó statikailag háromszorosan határozatlan a nyomaték és nyíróerő értékét a differenciálegyenletek megoldásával kaphatjuk meg (5).



10. ábra: Két végén befogott gerenda megoszló terheléssel

Gerenda két befogásánál felírható peremfeltétel:

$$\begin{aligned} z(0) &= 0 & z(l) &= 0 \\ z'(0) &= 0 & z'(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$EIz^{IV} = -p$$

$$EIz'''(x) = -px + c_1$$

$$EIz''(x) = -\frac{px^2}{2} + c_1x + c_2$$

$$EIz'(x) = -\frac{px^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3 = 0$$

$$EIz(x) = -\frac{px^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4 = 0$$

$$z(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$z'(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$z(l) = -\frac{pl^4}{24} + \frac{c_1l^3}{6} + \frac{c_2l^2}{2} = 0$$

$$z'(l) = -\frac{pl^3}{6} + \frac{c_1l^2}{2} + c_2l = 0 \rightarrow c_2 = \frac{pl^2}{6} - \frac{c_1l}{2}$$

$$-\frac{pl^4}{24} + \frac{c_1l^3}{6} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{pl^2}{6} - \frac{c_1l}{2} \right) = 0$$

$$-\frac{pl^4}{24} + \frac{2pl^4}{24} + \frac{4c_1l^3}{24} - \frac{6c_1l^3}{24} = 0$$

$$\frac{pl^4}{24} = \frac{c_1l^3}{12} \rightarrow c_1 = \frac{pl}{2} \rightarrow c_2 = \frac{pl^2}{6} - \frac{pl^2}{4} = -\frac{pl^2}{12}$$

c_1 és c_2 $z(x)$ függvénybe való behelyettesítésekor az alábbi eredményt kapjuk:

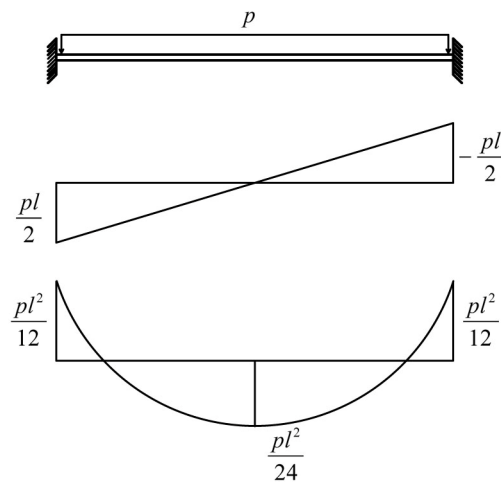
$$z(x) = \frac{p}{24EI} (2x^3l - x^4 - x^2l^2) \quad (4)$$

A legnagyobb lehajlás a gerendahossz felében keletkezik.

$$z\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{p}{24EI} \left(2 \frac{l^4}{8} - \frac{l^4}{8} - \frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} \right) = \frac{p}{24EI} \left(-\frac{l^4}{16} \right) = -\frac{1}{384} \cdot \frac{pl^4}{EI}$$

Az igénybevételi ábrákat (11. ábra), a befogási nyomatékokat és a nyíróerőket $z(x)$ deriváltjai (4) alapján könnyen megkapjuk:

$$\begin{aligned}
 V(0) &= EIz'''(0) = -p \cdot 0 + \frac{pl}{2} = \frac{pl}{2} \\
 V(l) &= EIz'''(l) = -pl + \frac{pl}{2} = -\frac{pl}{2} \\
 M(0) &= EIz''(0) = -\frac{p \cdot 0^2}{2} + \frac{pl}{2} \cdot 0 + \left(-\frac{pl^2}{12}\right) = -\frac{pl^2}{12} \\
 M(l) &= EIz''(l) = -\frac{pl^2}{2} + \frac{pl^2}{2} - \frac{pl^2}{12} = -\frac{pl^2}{12}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

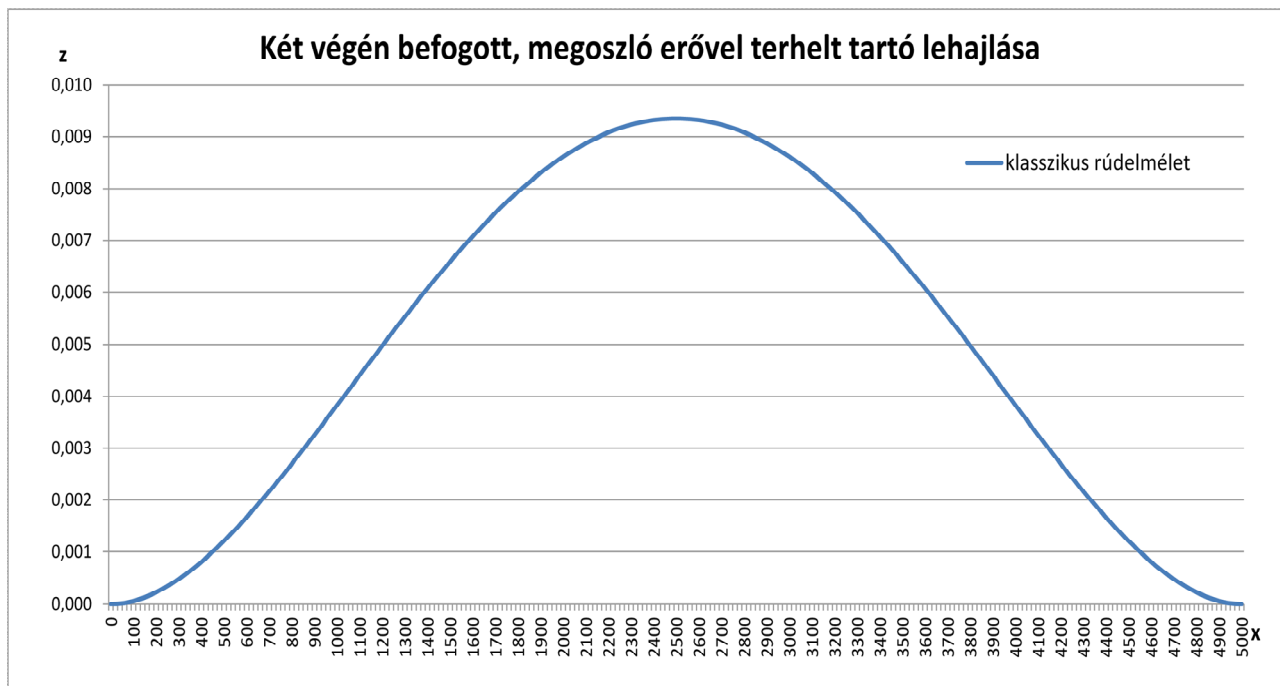


11. ábra: Két végén befogott tartó igénybevételi ábrái megoszló terhelés esetén

Az $z(x) = \frac{p}{24EI} (2x^3l - x^4 - x^2l^2)$ függvény felhasználásával a lehajlást a tartó hossza mentén az Excel program segítségével számítottuk és ábrázoltuk (2-2. táblázat; 1. diagram).

x	z(x)
0	0,000000
250	0,000337
500	0,001211
750	0,002431
1000	0,003828
1250	0,005257
1500	0,006595
1750	0,007740
2000	0,008613
2250	0,009160
2500	0,009346
2750	0,009160
3000	0,008613
3250	0,007740
3500	0,006595
3750	0,005257
4000	0,003828
4250	0,002431
4500	0,001211
4750	0,000337
5000	0,000000

2-2. táblázat



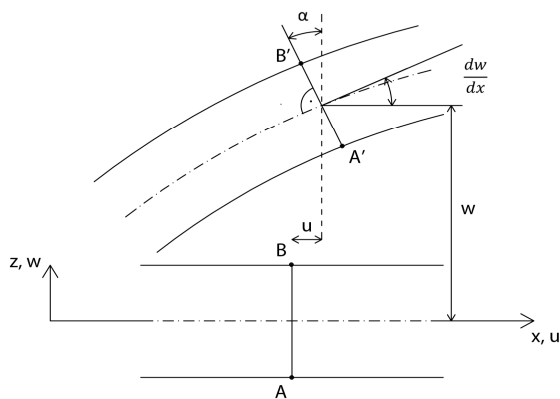
1. diagram

2.2. Timoshenko gerenda lehajlás elmélete

2.2.1. Timoshenko-modell

Timoshenko elmélete figyelembe veszi a nyírási alakváltozást. Míg a klasszikus gerendaelmélet feltételezi, hogy a keresztmetszetek síkja a deformáció után is merőleges marad a (görbült) rúdtengelyre, pontosabban annak pontbeli érintőjére (12. ábra). A Timoshenko - modell figyelembe veszi a nyírási deformáció hatását is, ezért a rúdtengely pontjainak a tengelyre merőleges eltolódását és a keresztmetszetek elfordulását egymástól függetlennek tekinti (13. ábra).

Klasszikus rúdelmélet

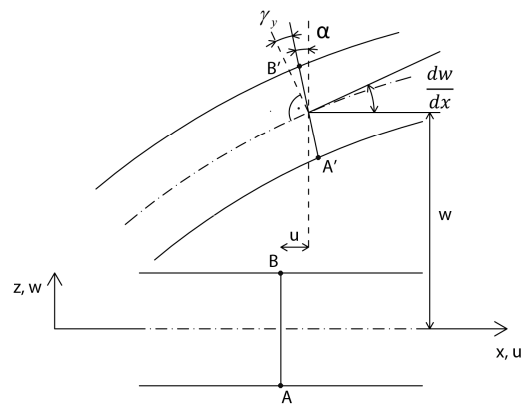


12. ábra: Hajlításból származó lehajlás, keresztmetszet elfordulás

$$\alpha = \frac{dw}{dx}$$

α a keresztmetszet elfordulás a függőlegeshez képest, ebben az esetben egyezik a tengely elfordulással a vízszinteshez képest.

Timoshenko - modell



13. ábra: Hajlításból és nyírásból származó lehajlás, keresztmetszet elfordulás

$$\alpha = \frac{dw}{dx} - \gamma_y$$

α – a keresztmetszet elfordulása függőlegeshez képest

γ_y – szögtorzulás, a szilárdsági tengely érintő vektora és a keresztmetszeti normális által bezárt szög.

A függvény lehajlásának mértéke függ az anyagi jellemzőtől és a geometriától. A nyíró erővel szemben és a nyomatékkal szemben a rúd merevségeinek arányában áll ellen.

Két végén befogott rúd merevségei az alábbiak:

A normálerőre létrejövő megnyúlás fordítottan arányos EA tényezővel.

A nyomaték hatása fordítottan arányos EI tényezővel.

A nyíróerő hatása fordítottan arányos S tényezővel.

Izotrop anyag keresztmetszete a nyíróerő hatására arányos a GA arányosan mozdul el.

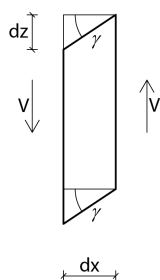
Izotrop anyagnál $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ahol ν az anyag nyúláskor keletkező haránt kontrakció értékét adja. Tehát S a rugalmassági modulussal is egyenesen arányos.

Izotrop és téglalap keresztmetszetű anyagnál a nyírási merevség: $S = \frac{GA}{1,2}$, így a nyírásból származó elfordulás: $\gamma = \frac{V}{S}$, és az ebből származó lehajlás: $z_v = \int \gamma dx = \int \frac{V}{S} dx$.

$$I_{\text{tartónál}}^1 : S_{zz} = \frac{G}{\left(\frac{1}{d \times h_w} + \frac{b_f}{6h_f \left(1 + \frac{d}{6 \times b_f} \right)^2 \times d^2} \right)}$$

Ahol $d = H - h_f$

¹ Mechanics of Composite Structures (Cambridge University Press, 2003) alapján.

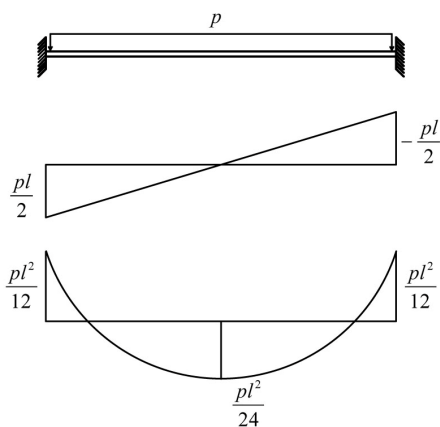


14. ábra: Nyírásból származó deformáció, szögtorzulás

A nyírásból származó elfordulás (14. ábra): $\gamma = \frac{V}{S}$, és az ebből származó lehajlás (2):

$$z_v = \int \gamma dx = \int \frac{V}{S} dx$$

Az igénybevételi ábrák változatlanok:



A nyíróerő függvény lineáris (15. ábra): $V = ax + b$ és tudjuk, hogy a befogásoknál:

$$V(0) = \frac{pl}{2} \text{ valamint } V(l) = -\frac{pl}{2} \text{ a}$$

függvény meredeksége is leolvasható:

$$b = p$$

$$V(l) = al + \frac{pl}{2} = -\frac{pl}{2}$$

$$a = -p$$

$$V = -px + \frac{pl}{2}$$

151. ábra: Két végén befogott tartó igénybevételi ábrái megoszló terhelés esetén

A lehajlás függvénynek az alábbi taggal bővülve kell eleget tennie a feltételeknek:

$$z_v(x) = \int \gamma dx = \int \frac{V}{S} dx = \frac{1}{S} \left(-\frac{px^2}{2} + \frac{pl}{2}x + c \right), \text{ ahol } c=0, \text{ hogy a } \gamma(0) = 0 \text{ feltételnek}$$

eleget tegyen.

A lehajlás a nyomaték és nyíróerő hatásából tevődik össze.

$$z_b(l) + z_s(l) = z(l) = 0 \quad z_b(0) + z_v(0) = z(0) = 0$$

A lehajlás függvény (4) tehát az alábbi módon bővül egy taggal :

$$\begin{aligned} z(0) &= 0 & z(l) &= 0 \\ z'(0) &= 0 & z'(l) &= 0 \end{aligned}$$

$$EIz^{IV} = -p$$

$$EIz'''(x) = -px + c_1$$

$$EIz''(x) = -\frac{px^2}{2} + c_1x + c_2$$

$$EIz'(x) = -\frac{px^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3 + \frac{1}{S}(-px + \frac{pl}{2}) = 0$$

$$EIz(x) = -\frac{px^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + \frac{1}{S}(-\frac{px^2}{2} + \frac{plx}{2} + c_4) = 0$$

$$z(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$\gamma(0) = z_b(0) \rightarrow c_3 = 0$$

$$z(l) = -\frac{pl^4}{24} + \frac{c_1l^3}{6} + \frac{c_2l^2}{2} - \frac{pl^2}{S2} + \frac{pl^2}{S2} = 0$$

$$z'(l) = -\frac{pl^3}{6} + \frac{c_1l^2}{2} + c_2l = 0 \rightarrow c_2 = \frac{pl^2}{6} - \frac{c_1l}{2}$$

$$-\frac{pl^4}{24} + \frac{c_1l^3}{6} + \frac{l^2}{2} \left(\frac{pl^2}{6} - \frac{c_1l}{2} \right) = 0$$

$$-\frac{pl^4}{24} + \frac{2pl^4}{24} + \frac{4c_1l^3}{24} - \frac{6c_1l^3}{24} = 0$$

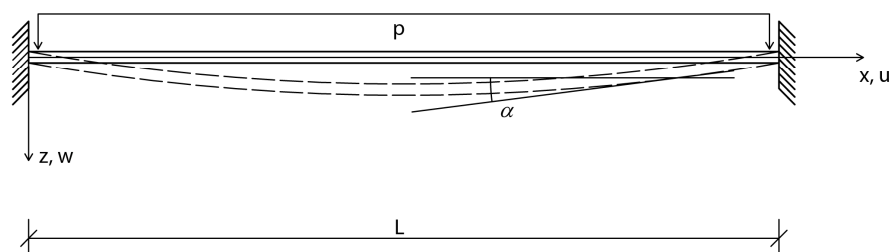
$$\frac{pl^4}{24} = \frac{c_1l^3}{12} \rightarrow c_1 = \frac{pl}{2} \rightarrow c_2 = \frac{pl^2}{6} - \frac{pl^2}{4} = -\frac{pl^2}{12}$$

c_1 és c_2 $z(x)$ függvénybe való behelyettesítésekor az alábbi eredményt kapjuk :

$$z(x) = \frac{p}{EI24} (x^4 - 2x^3l + x^2l^2) + \frac{1}{S} \left(-\frac{x^2p}{2} + \frac{plx}{2} \right) \quad (6)$$

2.2.2. Számpélda

A korábbi adatok felhasználásával:

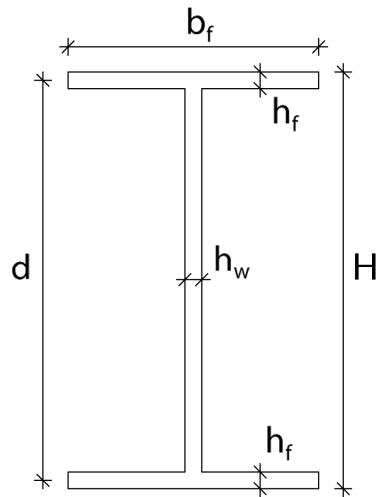


16. ábra: Két végén befogott tartó lehajlása megoszló terhelés esetén

$p(N/mm)=$	1,01	$L (mm)=$	5000
$E (N/mm^2)=$	206000	$H (mm)=$	500
$\nu =$	0,3	$b_f (mm)=$	300
$G (N/mm^2)=$	79230,7	$h_f (mm)=$	20
		$h_w (mm)=$	20
		$I_y (mm^4)=$	8,54E+08
		$S_{zz} =$	7,14E+08

2-3. táblázat

I tartónál a nyírási merevség képlete:



$$S_{zz} = \frac{1}{G} \left(\frac{1}{d \times h_w} + \frac{b_f}{6h_f \left(1 + \frac{d}{6 \times b_f} \right)^2 \times d^2} \right)$$

2. ábra: I gerenda keresztmetszete

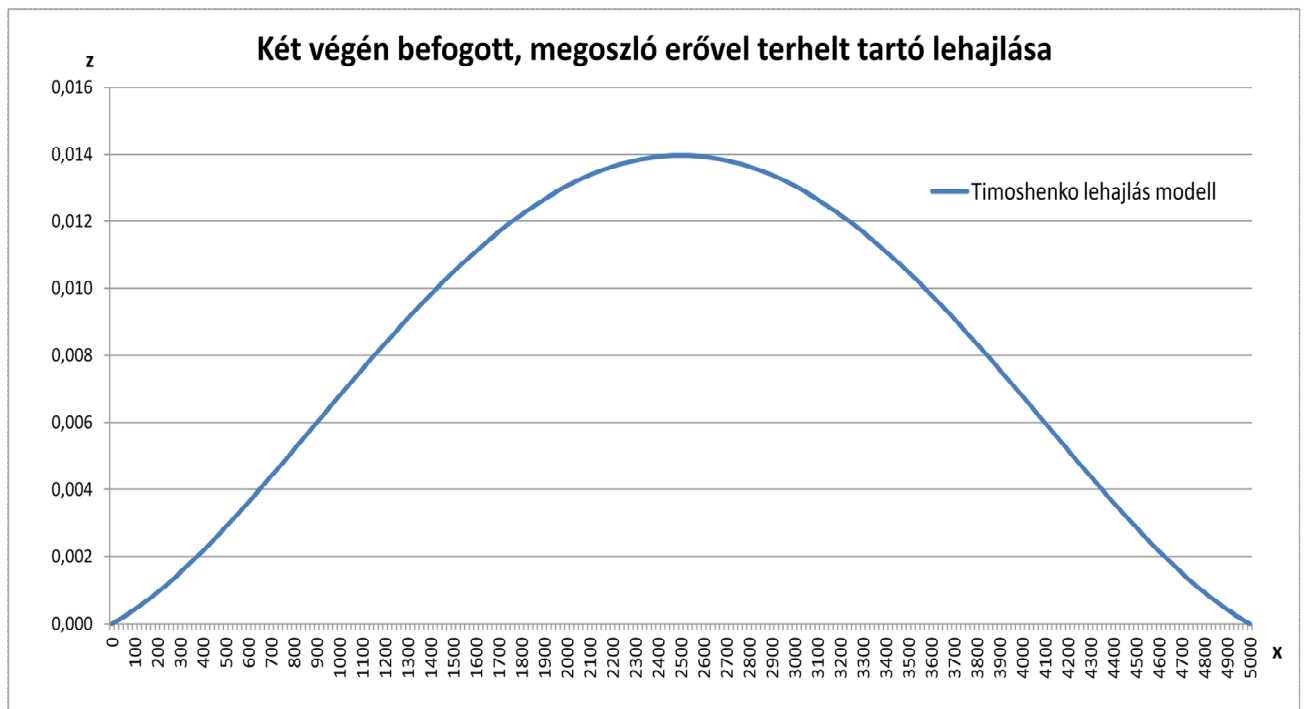
$$S_{zz} = \frac{79230,7}{\left(\frac{1}{480 \times 20} + \frac{300}{6 \times 20 \times \left(1 + \frac{480}{6 \times 300} \right)^2 \times 480^2} \right)} = 714243937,82$$

Az $z(x) = \frac{p}{EI24} (x^4 - 2x^3l + x^2l^2) + \frac{1}{S} \left(-\frac{x^2p}{2} + \frac{plx}{2} \right)$ (6) függvény felhasználásával a

lehajlást a tartó hossza mentén az Excel program segítségével számítottuk és ábrázoltuk.

x	z(x)
0	0,000000
250	0,001177
500	0,002802
750	0,004685
1000	0,006656
1250	0,008571
1500	0,010307
1750	0,011761
2000	0,012856
2250	0,013535
2500	0,013765
2750	0,013535
3000	0,012856
3250	0,011761
3500	0,010307
3750	0,008571
4000	0,006656
4250	0,004685
4500	0,002802
4750	0,001177
5000	0,000000

2-4. táblázat



2. diagram

A lehajlás függvényben $x=0$ és $x=l$ helyen a befogás ellenére tengelyelfordulást kapunk a nyírás γ szögtorzulás figyelembe vétele miatt.

Pontosabb elméletet kell figyelembe vennünk e hiba kiküszöbölésére.

2.3. Szendvicselmélet

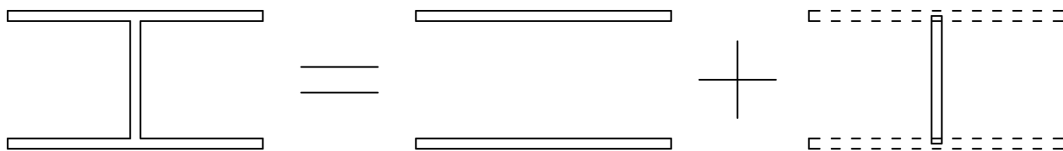
2.3.1. Szendvicselmélet bemutatása²

A szendvics elmélet, a gerendákat két részre osztja viselkedésük szerint (17. ábra):

Az héjaló rétegekre, ahol a nyírási deformáció elhanyagolhatóan kicsi, és a hajlítási merevségük a jelentős, ez az I gerendáknál az övekre vonatkozik.

A kitöltő rétegre ahol jelentős a nyírási deformáció, és a hajlítási merevségüket is figyelembe vesszük, ami az I gerendáknál a gerinc.

Zsuravszkij képlete alapján ez a közelítés elfogadható az I gerendáknál hiszen az I gerendáknál az övek szélessége általában sokszorosa a gerinc szélességének.



17. ábra: I gerenda keresztmetszetének felosztása a szendvics elmélet alapján

A szendvicselmélet alapvetően a szendvics lemezek lehajlásának leírására szolgál. A szendvics lemezeknél eltérő a merevsége a két résznek, de a lehajlások ugyanakkorák, mivel össze vannak kapcsolva. Ehhez hasonlóan az I gerendák övében és gerincében jelentős az eltérés a nyírási feszültségben, ennek ellenére a nyírásból adódó lehajlásuknak ugyanakkorának kell lennie. $w_l = w_o = w$. A teherviselés szempontjából is összeadódik a hatásuk:

$$p_l + p_o = p$$

$$M_l + M_o = M$$

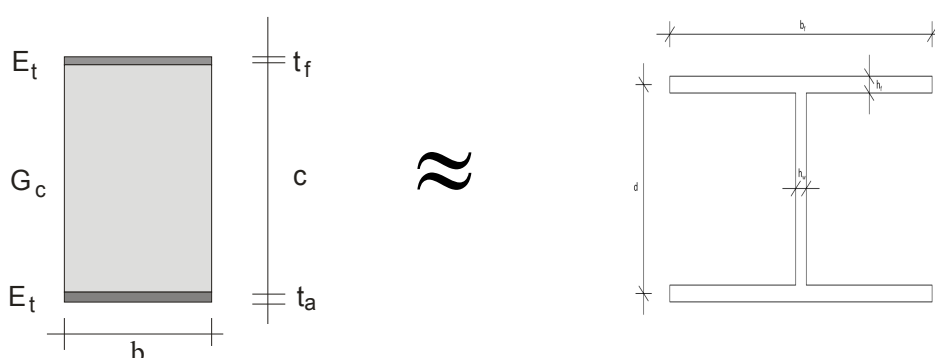
$$V_l + V_o = V$$

² Kollár Lajos (szerk.), Hegedűs István, László P. Kollár: A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái (Akadémia Kiadó, 2006)

A keresztmetszet elfordulása azonban a két részen különböző. A rétegek máshogy vannak igénybe véve merevségük miatt.

Az elmélet a szendvics lemezhez van kidolgozva, de az I keresztmetszetű gerendát is hasonlóan méretezhetjük (18. ábra).

A leggyakoribb három rétegű szendvicsgerenda jellemző keresztmetszeti kialakítását az 19. ábra mutatja.



183. ábra: Szendvicsgerenda és I gerenda, az I keresztmetszetű gerendát a szendvicsgerendához hasonlóan méretezhetjük

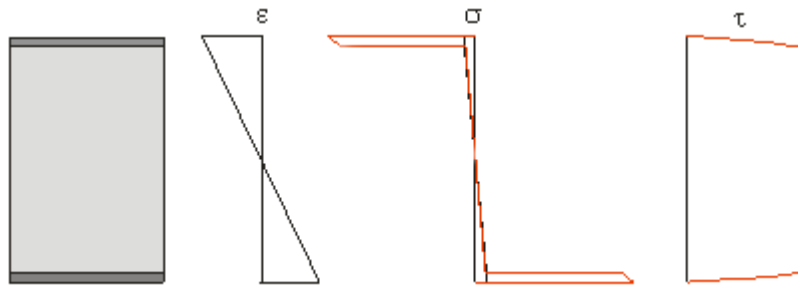
A kedvező nyomatéki teherviselés érdekében a szendvicsgerendák külső nagy szilárdságú héjaló rétegei közé ezek vastagságát sokszorosan meghaladó vastagságú, kicsiny térfogatsúlyú és szilárdságú kitöltő réteget helyeznek el. Mindig feltehetjük, hogy:

$$t_a, t_f \ll c,$$

$$E_t \gg G_c,$$

ahol E_t és G_c a héjaló rétegek rugalmassági modulusát, ill. a kitöltő réteg nyíró rugalmassági modulusát jelöli.

Ha a gerenda szilárdsági tengelye a héjaló rétegek közepén fekszik, a rugalmassági modulusok közti nagyságrendi eltérés miatt a kitöltő rétegben keletkező normálfeszültség-eloszlás miatt a τ nyírási feszültség a kitöltő rétegben majdnem konstans érték (19. ábra).



19. ábra: A hajlított nyírt szendvicserenda irányadó feszültség eloszlása

A keresztmetszeti feszültségeloszlást a pontosság érezhető romlása nélkül közelíthetjük úgy, hogy a héjaló rétegekben csak konstans $\sigma = \pm \frac{M_0}{dbt}$ normálfeszültséget, a kitöltő rétegben csak konstans $\tau = \frac{V}{db}$ nyírófeszültséget tételezünk fel, ahol M és V a keresztmetszeti nyomaték és nyíróerő, d pedig a két héjaló réteg középsíkjának távolsága:

$$d = c + t.$$

A fenti feszültségekhez a héjaló rétegekben:

$$\varepsilon = \pm \frac{\sigma}{E_f} = \pm \frac{M_0}{E_f dbt},$$

a kitöltő rétegben pedig:

$$\gamma = \frac{\tau}{G_c} = \frac{V}{G_c bd}$$

fajlagos alakváltozás tartozik. A héjaló rétegekben fellépő fajlagos nyúlások a keresztmetszet elfordulását, a kitöltő rétegben jelentkező szögtorzulás pedig a deformálódó szilárdsági tengely érintőjének a keresztmetszeti normálisához képesti elferdülését okozza. A „hagyományos” gerendáknál a keresztmetszetek $\alpha(x)$ elfordulását a gerenda

$$\kappa = -\frac{d\alpha}{dx}$$

görbület változásával követjük, a görbületváltozást pedig a szélső szálak megnyúlásai alapján határozzuk meg.

A $\kappa = \frac{\varepsilon_{alsó} - \varepsilon_{felső}}{dx}$ mennyiséget a szendvicsek nyomaték okozta alakváltozásainak

követésére is használhatjuk, de a geometriai értelmezés módosul, hiszen görbületváltozást

nemcsak a nyomaték, hanem a (rúd tengelye mentén változó nagyságú) nyíróerő is okozhat. Szendvicseknél ezért κ csupán a keresztmetszeti normális elfordulásának a változását jellemzi. A keresztmetszeti nyomaték és κ kapcsolatát a hagyományos gerendáknál a

$$\kappa = \frac{M}{EI} = \frac{M}{B}$$

összefüggéssel adjuk meg. A képlet nevezőjében lévő szorzatot a gerenda hajlítási merevségének nevezzük. A héjaló rétegek középfelületén hosszváltozást okozó nyomaték és a hosszváltozásokhoz tartozó elfordulások kapcsolatának jellemzésére a B_0 ún. globális hajlítási merevséget csak a teljes keresztmetszet inerciájában szereplő „Steiner-tag”-nak megfelelő merevségrészt tartalmazza. A fenti közelítéseknek alapján a szendvicserenda hajlítási merevségéként bevezethetünk egy

$$B_0 = 2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 bt \times E_f \quad (7)$$

menyiséget, amellyel a szűkített értelmezésű κ a

$$-\frac{d\alpha}{dx} = \kappa = \frac{M}{B_0}$$

összefüggéssel számítható. A 0 index azt jelöli itt, hogy elhanyagoltuk a héjaló rétegek ún. lokális hajlítási merevségét, az öv merevítési hatását a gerincre. Ennek nagysága a két héjaló réteg „saját” hajlítási merevségének összege:

$$B_l = \frac{E_f t_f^3 b}{12} + \frac{E_f t_a^3 b}{12} \quad (8)$$

A vékony héjalású gerendák esetében ezt elhanyagoljuk, ám a vastag héjalásúaknál nem.

2.3.2. Vastag héjalású szendvics

A B_l merevséget nem adhatjuk közvetlenül hozzá a B_0 merevséghez, mert a szerepe eltér azétól. Az eltérés abban áll, hogy a lokális merevség, B_l (8) a nyírási lehajlással szemben is dolgozik, míg a B_0 (7) merevség nem. A vastag héjalású szendvicsgerendák elmélete abban különbözik a vékonyétól, hogy ennek az eltérésnek a viszonylag korrekt figyelembevételére ad módot.

A parciális lehajlások bevezethetők, a lokális merevség szerepe miatt az alapösszefüggések:

$$w = w_B + w_S, \quad -\alpha = \frac{dw_B}{dx}, \quad \gamma = \frac{dw_S}{dx}, \quad \gamma = w' - \alpha$$

ahol γ a gerinc szögtorzulása.

A teher és a lehajlások kapcsolatában nemcsak azt kell figyelembe kell vennünk, hogy a B_l lokális merevség is dolgozik, hanem azt is, hogy a héjaló rétegekben (az övekben) a nyírási többlet-lehajlás is csak többlet-teher árán jöhet létre. Az övek teherviselése:

$$p_l = \frac{-d^2 M_l}{dx^2} = EI_l \frac{d^4 w}{dx^4} = B_l \frac{d^4 w}{dx^4},$$

a gerinc, avagy kitöltő réteg teherviselése:

$$p_0 = -\frac{dV_0}{dx} = -EI_0 \alpha''$$

$$p_0 = -S(w'' - \alpha')$$

$$0 = -EI_0 \alpha'' - S(w' - \alpha)$$

Emiatt a kapcsolati egyenlet a következőképp módosul:

$$p = p_0 + p_l = (B_0 + B_l) \frac{d^4 w_B}{dx^4} + B_l \frac{d^4 w_S}{dx^4}$$

$$p = B_0 \frac{d^4 w}{dx^4} - S \frac{d^2 w}{dx^2} + S \frac{d\alpha}{dx}$$

További egyenletet kapunk a gerincre jutó nyíróerő kifejezéséből:

$$V_0 = \frac{dM_0}{dx}$$

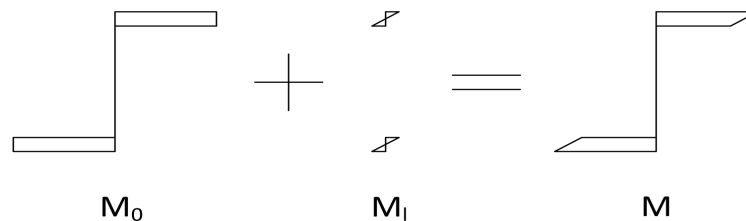
$$V_0 = EI_0 \alpha''$$

$$V_0 = -S(w' - \alpha)$$

$$0 = -EI_0 \frac{d^2 \alpha}{dx^2} - S \frac{dw}{dx} + S \alpha$$

A lokális merevség többlet-teherviselése miatt a teljes M keresztmetszeti nyomatékot két részre kell bontanunk (20. ábra):

$$M = -B_0 \frac{d^2 w_B}{dx^2} - B_l \frac{d^2 (w_B + w_S)}{dx^2} = M_0 + M_l.$$



20. ábra: Nyomatékból származó normál feszültség eloszlása az övekben

Erre a felbontásra azért van szükség, mert a kitöltő rétegben, vagyis I gerendánál a gerincben csak az M_0 rész változásához köthető

$$V_0 = \frac{dM_0}{dx}$$

nyíróerő-rész okoz nyírófeszültséget, ezért szögtorzulást is csak ez a nyíróerő-rész kelt, vagyis csak a kitöltő rétegekben keletkezik jelentős szögtorzulás. Mintha csak a gerincben lenne nyíróerő és szögtorzulás ezáltal:

$$\gamma = \frac{V_0}{S} = -\frac{B_0}{S} \frac{d^3 w_B}{dx^3}.$$

Látható, hogy a lokális merevségnek ez a „többletmunkája” alaposan megváltoztatja a teherviselésbe, ezért vastag héjalású szendvicseknél már nemigen számíthatunk rá, hogy a nyomatéki lehajlás „ilyen-olyan” korrekciókkal egy hagyományos értelmezésű lehajlásként

vehető fel. A lehajlást (w) valamint a szögtorzulást γ a $0 = -EI_0 \frac{d^2\alpha}{dx^2} - S \frac{dw}{dx} + S\alpha$,

$p = B_0 \frac{d^4w}{dx^4} - S \frac{d^2w}{dx^2} + S \frac{d\alpha}{dx}$ differenciálegyenletek felhasználásával kaphatjuk. Ezeknek

megoldására egy MATLAB program nyelven írt programot készítettünk. (1-es csatolmány)

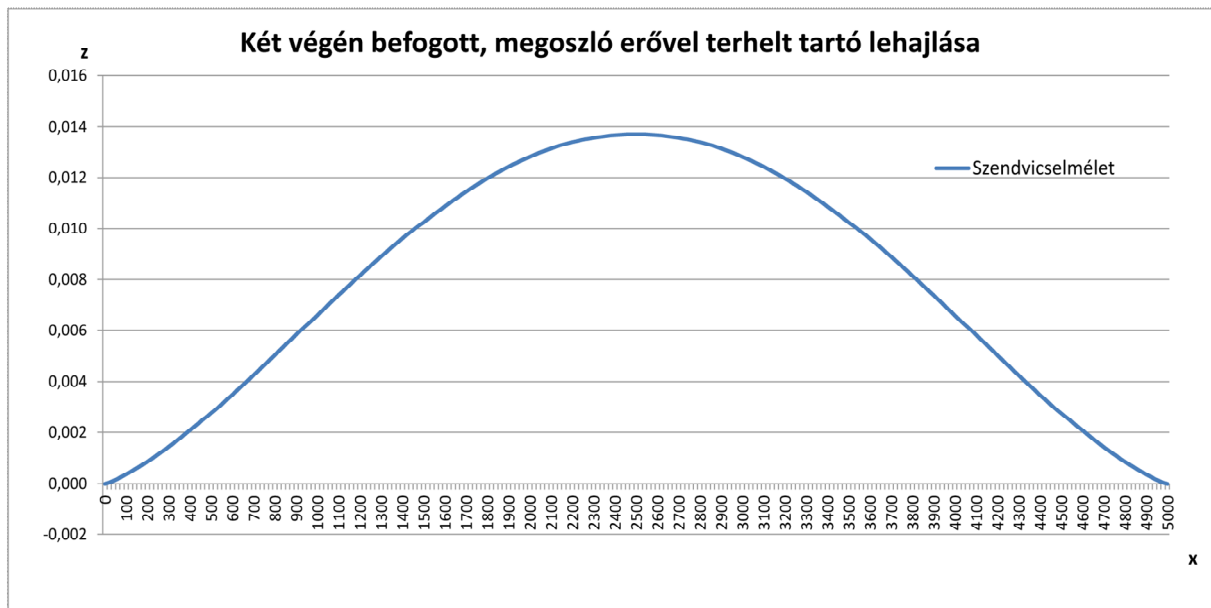
2.3.3. Számpélda-szendvicselmélet

A számpéldánkban a korábbi acél gerenda lehajlását számítottuk ki a szendvics elmélet alapján.

$p \text{ (N/mm)} =$	1,01
$E \text{ (N/mm}^2\text{)} =$	206000
$\nu =$	0,3
$G \text{ (N/mm}^2\text{)} =$	79230,7
$L \text{ (mm)} =$	5000
$H \text{ (mm)} =$	500
$b_f \text{ (mm)} =$	300
$h_f \text{ (mm)} =$	20
$h_w \text{ (mm)} =$	20
$I_y \text{ (mm}^4\text{)} =$	8,54E+08
$S_{zz} =$	7,14E+08

2-4. táblázat

Az eddigi keresztmetszeti adatokat és anyagi jellemzőket felhasználva a MATLAB-ban írt programmal kapott eredmények:



3. diagram

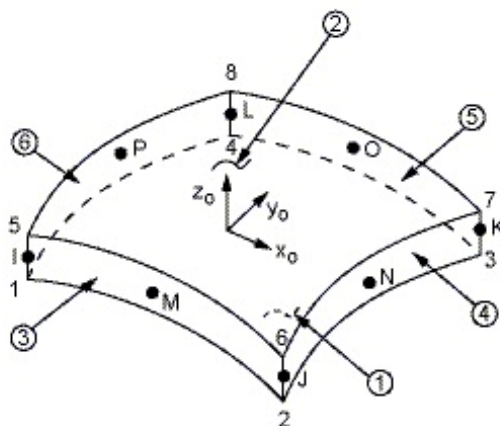
A szendvics elmélet tekintettel van az I gerenda öve és gerince közti eltérő nyírási feszültségre, és a kettő rész együtt dolgozására. Az $x=0$ és $x=l$ helyen a lokális befogás hatás érvényesül, nincsen tengelyelfordulás és szögtorzulás, amellet, hogy a nyírási deformációt is figyelembe vettük.

3. Háromdimenziós rúdmodell

3.1. Végeselem módszer – ANSYS

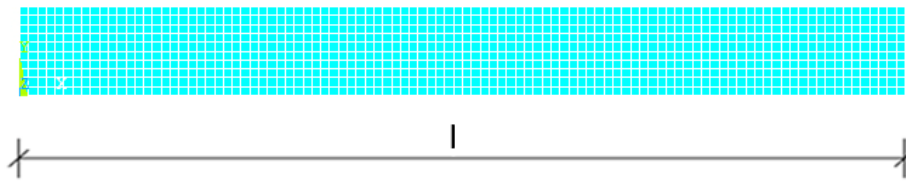
Az alkalmazott ANSYS végeselem program segítségével héjelemekből elkészítettük a vizsgálandó gerenda 3D-s modelljét. Ezt fogadjuk el a legjobban közelítő „pontos” megoldásnak. Hiszen nem tartalmazza a 3D-ből 1D-be való váltás közelítéseit.

A végeselemes számítás során az ANSYS-13 programot használtuk, a modellezés során a lineáris analízist futtattuk. A háromdimenziós I tartókat (21-25. ábra) nyolc csomópontos héjelemekből építettük fel (21. ábra) és lineárisan rugalmas izotrop anyagmodellt alkalmaztunk. A modell két végénél a csomópontok elmozdulását és elfordulását nullára vettük fel, az összes csomópontnál befogást hoztunk létre ezzel szimulálva a befogást. Az I gerendán eloszló terhet szimulálva y tengellyel párhuzamosan a szimmetria tengelyén terheltük a tartó tetejét. A megoszló terhet helyettesítettük az y tengellyel párhuzamosan, a gerinc mentén a csomópontokban ható, egyenletesen eloszló, koncentrált terhekkel. A megoszló terhet 1,01 N/mm nagyságúra, anyagállandóknak a rugalmassági moduluszt 206000 N/mm²-re, a Poisson-tényezőt 0.3-ra vettük fel.

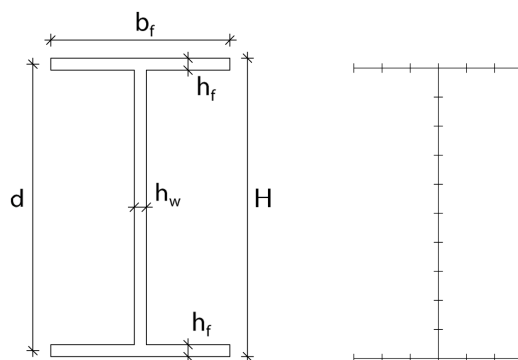


21. ábra: Nyolc csomópontos héjelem

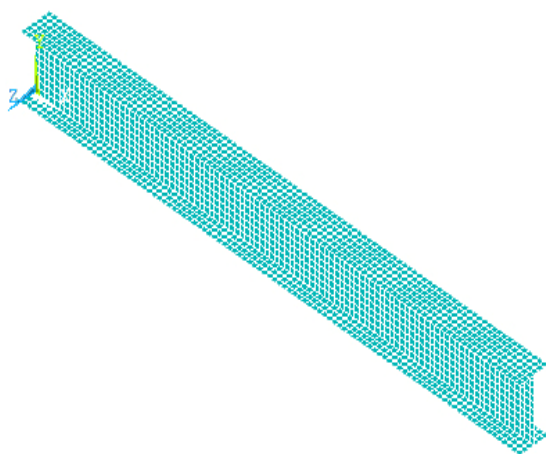
A tartó geometriáját úgynevezett „kulcspontok” megadásával és ezekre illesztett területekkel adtuk meg. Ezután felosztottuk a tartót héjdarabokra, és egyesítettük a csomópontokat, hogy az övek és a gerinc együtt dolgozzanak.



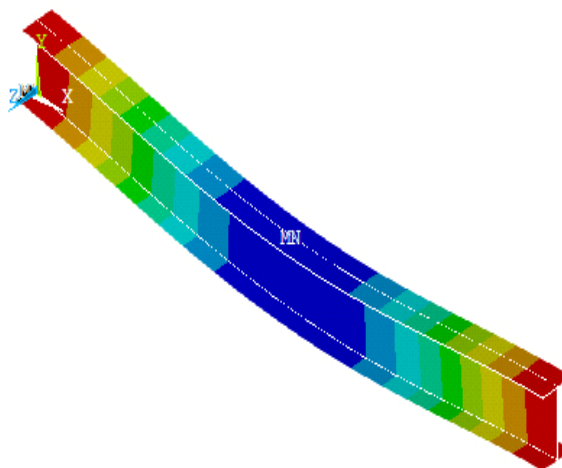
22. ábra: Oldalnézet



23. ábra: I gerenda keresztmetszete, és felosztása

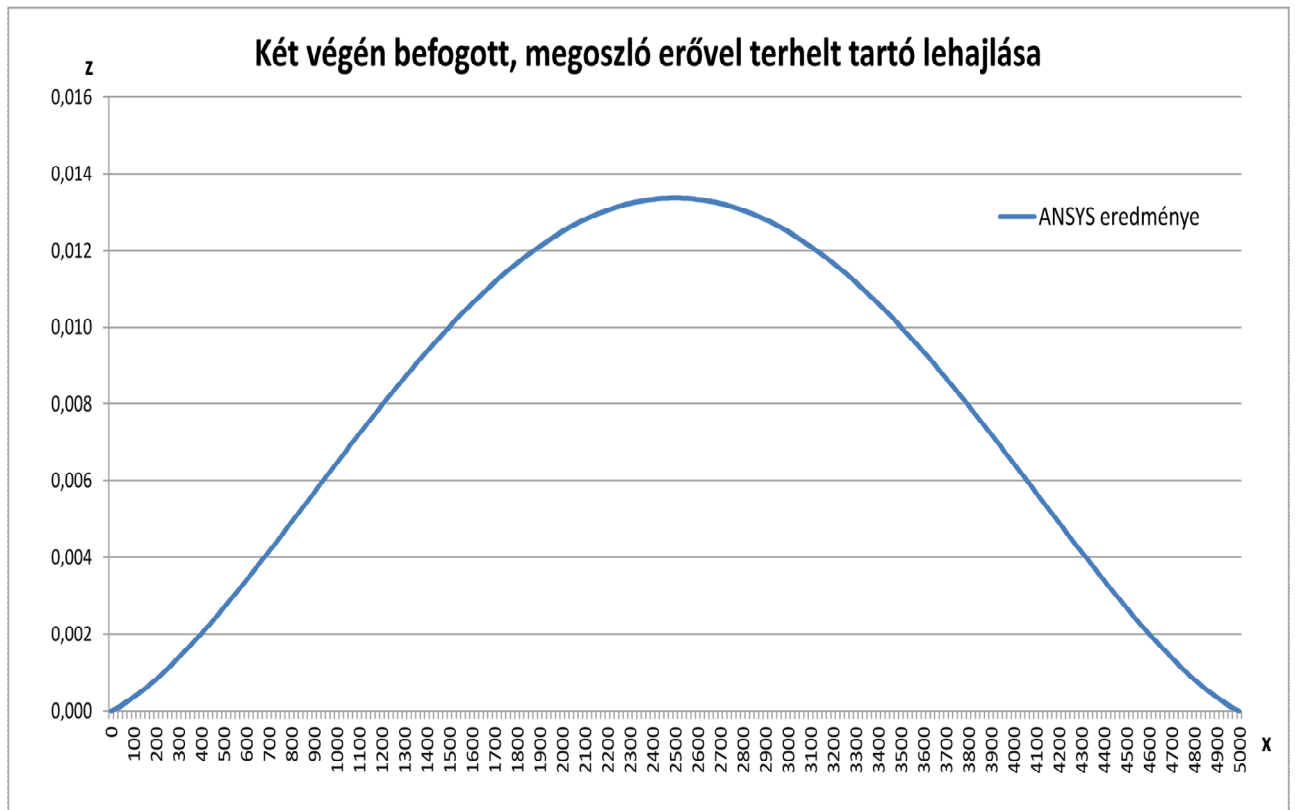


24. ábra: I gerenda axonometrikus nézete



25. ábra: Gerenda lehajlás axonometrikus ábrázolása ANSYS programban

A lehajlást kirajzoltattuk a programmal és a gerinc középvonalának a lehajlását kilistáztattuk.



4. diagram

4. Összehasonlítás

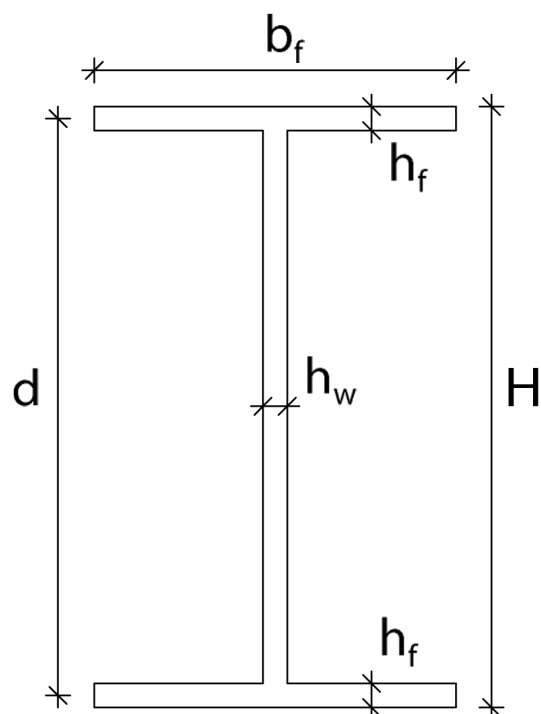
4.1. Számítási módszerek összehasonlítása

4.1.1. Klasszikus rúdelmélet és Timoshenko-féle gerenda elmélet

Összevetettük a klasszikus rúdelmélet és a Timoshenko-modell gerenda lehajlás értékét, az alábbi adatokkal (4-1. táblázat; 26. ábra).

$p(N/mm)=$	1
$E (N/mm^2)=$	206000
$\nu=$	0,3
$G (N/mm^2)=$	79231
$L (mm)=$	5000
$H (mm)=$	500
$b_f (mm)=$	300
$h_f (mm)=$	20
$h_w (mm)=$	20
$I (mm^4)=$	8,54E+08
$S=$	7,14E+08

4-1. táblázat



26. ábra: I gerenda keresztmetszete

$\frac{w_b}{w_s + w_b}$	
$b = \frac{3l}{8EI} =$	1,07E-11
$4ac = \frac{3}{2EIS} =$	1,24E-23
$b^2 - 4ac =$	1,01E-22
$2a = \frac{3}{EI} =$	4,26E-15
$\sqrt{b^2 - 4ac} =$	1,01E-11
$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$	4,8599E+03
$x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$	1,40103E+02

4-2. táblázat

$$\frac{w_b}{w_s + w_b} = 0,1$$

$$\frac{\frac{p}{24EI}(2x^3l - x^4 - x^2l^2)}{\frac{p}{EI24}(x^4 - 2x^3l + x^2l^2) + \frac{1}{S}(-\frac{x^2p}{2} + \frac{plx}{2})} = 0,1$$

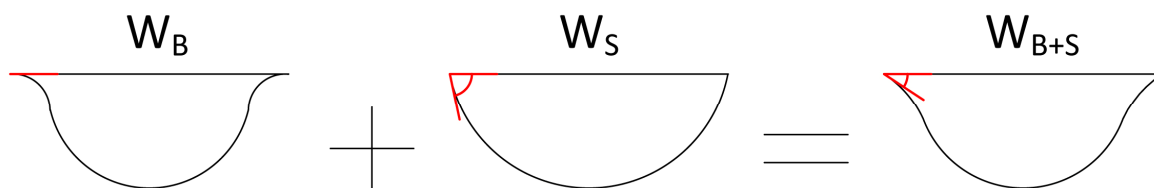
$$\frac{9}{EI24}(x^3 - 2x^2l + xl) = \frac{1}{S}(-x + l)$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{3l}{8EI} \pm \sqrt{\frac{9l^2}{64(EI)^2} - \frac{3}{2EIS}}}{\frac{3}{4EI}}$$

Ebben az esetben gerenda két végétől mérve a gerenda közepe felé 140 mm-ig kisebb az eltérés a két számítási mód eredménye között, mint a Timoshenko-modell alapján számolt lehajlás 10% -a.

Több tartónál nem vizsgáltuk a klasszikus rúdelmélet és a Timoshenko-modell közti eltérést, hiszen a szendvics elmélet és a végeelem módszer közelebb áll a valósághoz.

A Timoshenko modell hibája, hogy a befogásoknál a lehajlás függvényben $x=0$ és $x=l$ helyen a befogás ellenére tengelyelfordulást kapunk a nyírás hatásának (γ szögtorzulás) figyelembe vétele miatt (27. ábra).



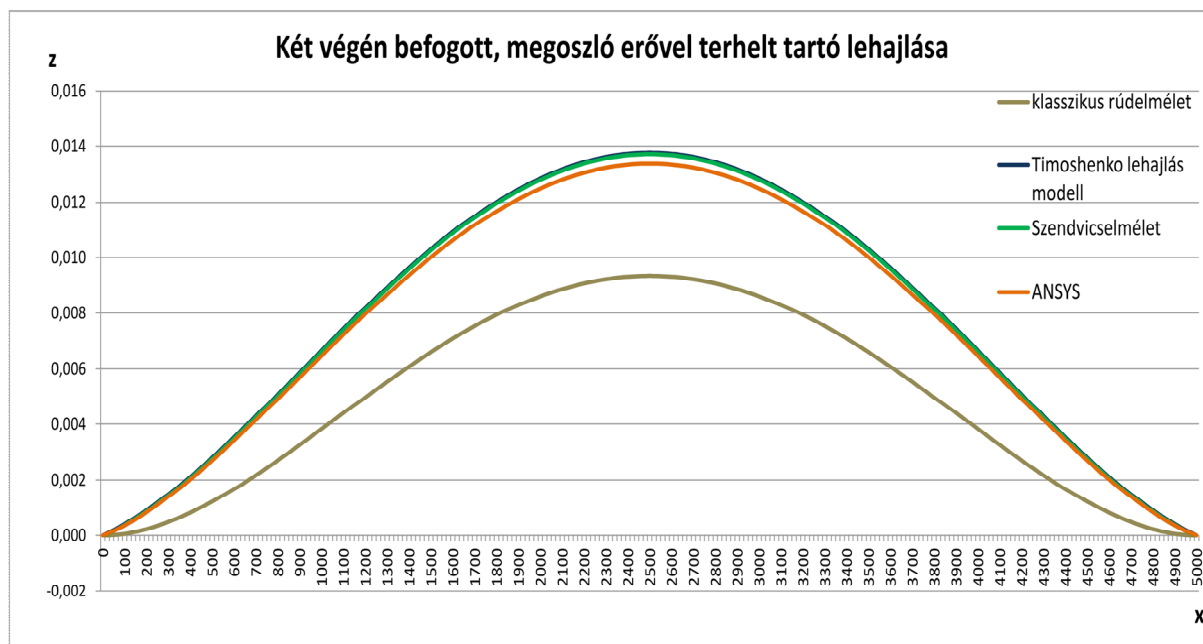
27. ábra: Befogási keresztmetszet elfordulása a Timoshenko-modell alapján

Ezen elméletek alapján tehát nem a valóságos eredményt kapjuk, ha ezeket alkalmazzuk hibát véthetünk. Hogy a klasszikus rúdelmélet és a Timoshenko-modell alkalmazási határait megtaláljuk, a valósághoz „közelebbi” eredményekkel vetjük össze az eddigi egyszerűbb és gyorsabb, ám pontatlan számítási módszereket.

4.1.2. Egy és háromdimenziós rúdmodellek összehasonlítása

4.1.2.1. Acélgerenda esetén

Az előző fejezetekben kiszámolt lehajlások ($\frac{H}{b_f}=1,667$, $\frac{L}{H}=10$):



5. diagram- acélgerenda

	$z(l/2)$ (mm)
M	0,009346
ANSYS	0,01338
SZENDVICS	0,013714
M+V	0,013765

4-3. táblázat

A valóságot legjobban a háromdimenziós rúdmodell közelíti. Hiszen nem tartalmazza a 3D-ből 1D-be való váltás közelítéseit.

A végeelemes eredményhez láthatóan a szendvics eredmény van legközelebb. A befogásoktól mérve a gerendahossznak kevesebb mint 1% -a után az eltérés már kisebb mint 10%. Nem számottevő az eltérés a két számítási mód között.

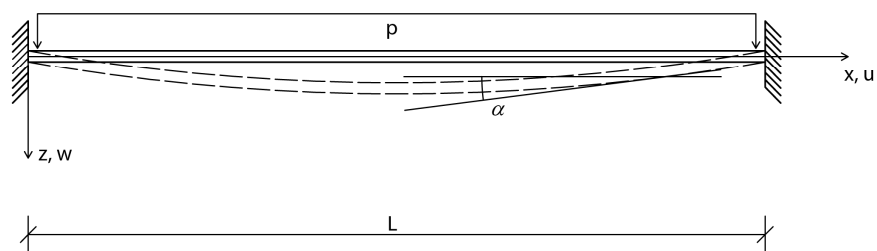
A Timoshenko-modell a befogásoktól mérve a gerendahossz 3,5% -tól 10%-os hibával közelíti az ANSYS eredményét. A szendvics eredmény kicsit pontosabb a Timoshenko-modellnél, mégis érdekesebb lehet a Timoshenko-modellt használni, hiszen gyorsabban egyszerűbben kapunk eredményt.

A legtávolabb a klasszikus rúdelmélet esik a „valóságtól”, több mint 30% az eltérés a gerenda minden pontjában a befogások között (5. diagram, 4-3. táblázat).

4.1.2.2. Kompozit anyagú gerenda esetén

Számpéldánkban az acél mellett a kompozit anyagot is használtuk, mert a kompozit nyírási merevsége kisebb, mint az acélnek. A kompozit anyagnak nagyobb a nyírási deformációja, valamint a lokális merevségek hatása is, miszerint a gerinc lehajlását akadályozzák az övek.

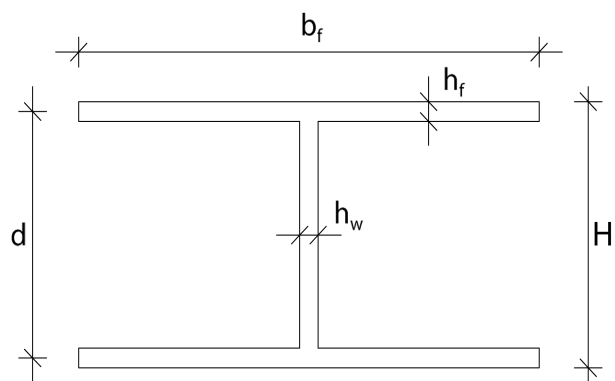
Az egyszerűsítés érdekében tengelyirányban futó szálak kompozit gerendákkal számolunk. Így szerkezet nyírási merevsége viszonylag alacsony, vagyis a nyírási deformáció figyelembevétele alapvető fontosságú. Az alábbi kompozit anyagú gerenda lehajlását számítottuk ki (4-4. táblázat; 28. ábra):



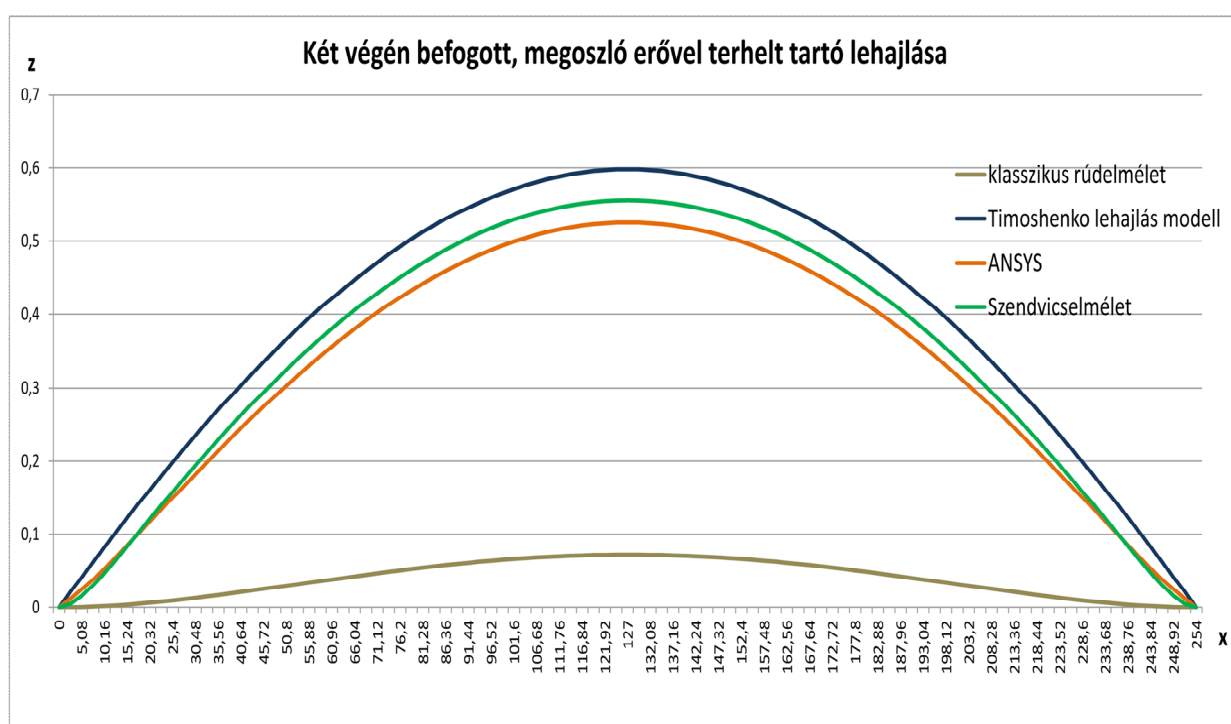
28. ábra: Két végén befogott tartó lehajlása megoszló terhelés esetén

kompozit2	
$p(N/mm)=$	1,01
$E (N/mm^2)=$	141963,0011
$\nu=$	0,3
$G (N/mm^2)=$	2999
$L (mm)=$	254
$H (mm)=$	12,7
$b_f (mm)=$	25,4
$h_f (mm)=$	1,016
$h_w (mm)=$	1,016
$I (mm^4)=$	1,87E+03
$S=$	2,71E+04

4-4. táblázat



29. ábra: I gerenda keresztmetszete



6. diagram-kompozit gerenda

	$z(l/2)$ (mm)
M	0,07227
ANSYS	0,525094
SZENDVICS	0,55584
M+V	0,598137

4-5. táblázat

A valóságot legjobban a háromdimenziós rúdmodell közelíti. Hiszen nem tartalmazza a 3D-ből 1D-be való váltás közelítéseit. (6. diagram; 4-5. táblázat)

A végeelemes eredményhez láthatóan a szendvics eredmény van legközelebb. A befogásoktól mérve a gerendahossznak 5% után viszont az eltérés kisebb, mint 10%, az eltérés tehát az ANSYS és a szendvics elmélet között nem jelentős kompozit gerenda esetében, egyedül a befogás közelében tér el nagy százalékban.

A Timoshenko-modell a gerenda minden pontján 10%-nál nagyobb eltérést ad a végeelem módszerhez képest, hibáznánk, ha ezzel számolnánk.

A legtávolabb a klasszikus rúdelmélet esik a „valóságtól”, több mint 85% az eltérés az ANSYS lehajlás eredményétől a gerenda közepén. (6. diagram)

4.2. Számítási módszerek a geometria és anyagi jellemzők függvényében

A különböző számítási módszerek alkalmazhatósági határa változik az anyagi jellemzők és geometria függvényében.

Megvizsgáltuk a klasszikus rúdelmélet és a Timoshenko-modell hibáját a szendvicselmélethez képest: $\frac{H}{b_f}$ és $\frac{E}{G}$ függvényében (2-es csatolmány). Változó $\frac{L}{H}$ arányú, két végén befogott és megoszló teherrel terhelt tartóból indultunk ki, mivel így a legnagyobb a nyírásból származó lehajlás értéke a klasszikus rúdelmélet alapján számolt lehajláshoz viszonyítva.

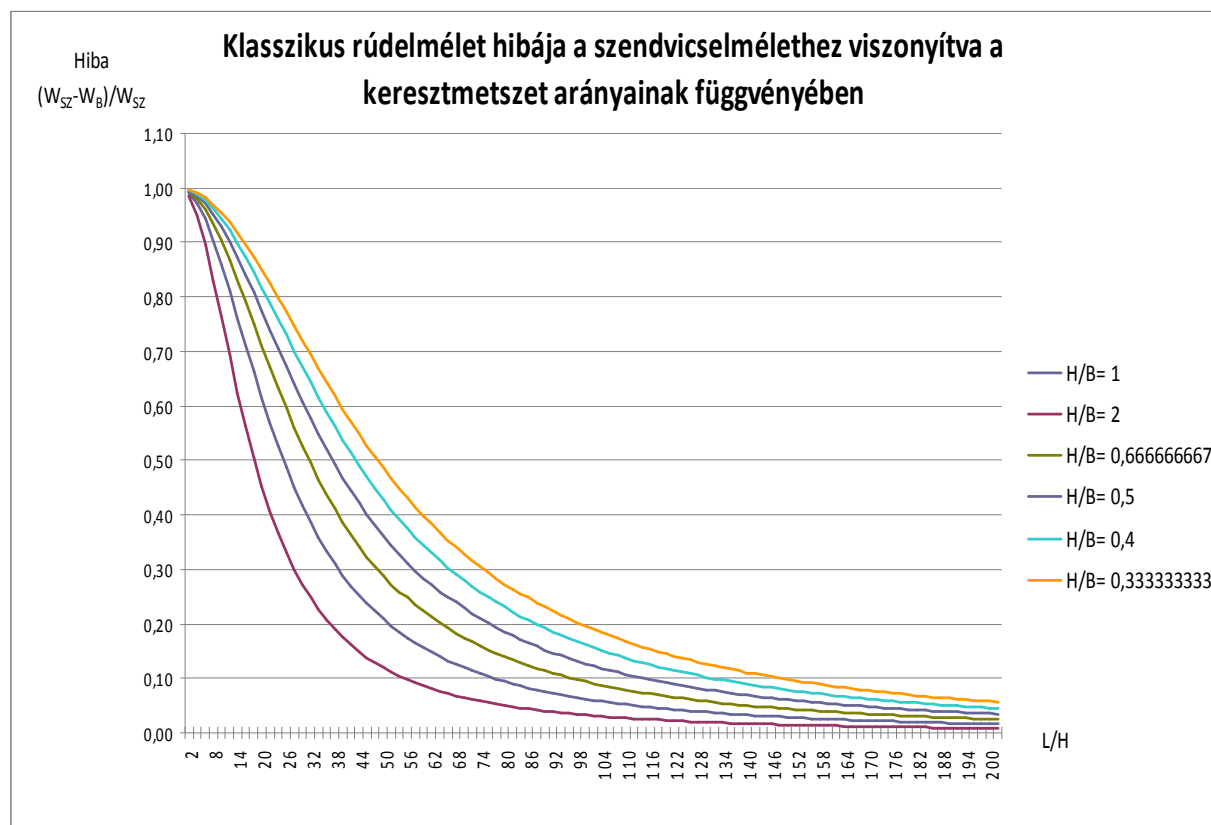
4.2.1. Keresztmetszet arányainak hatása

4.2.1.1. Klasszikus rúdelmélet és szendvicselmélet összehasonlítása

Kompozit gerenda állandó $\frac{E}{G}$ arányához különböző keresztmetszeti tényezőket választottunk és a klasszikus rúdelméletet és szendvicselméletet a gerenda $\frac{L}{H}$ függvényében egymáshoz arányítottuk. Ezáltal megkaptuk az egyes keresztmetszeti arányoknál azt a

gerenda hosszt melynél a klasszikus rúdelmélet használható kevesebb mint 10%-os tévedéssel.

A $\frac{w_{sz} - w_b}{w_{sz}}$ képlettel megkaptuk a különböző keresztmetszetekhez tartozó hibát a gerenda hossz függvényében. Ahol w_b és w_{sz} a gerenda maximális lehajlását vettük figyelembe, a gerenda középső szakaszán, hiszen tervezésnél ez a mértékadó.



7. diagram

E/G					
23,667	23,667	23,667	23,667	23,667	23,667
H/b					
2	1	0,667	0,5	0,4	0,33
10%-nál kisebb hiba (L/H)					
56	78	98	116	132	150

4-6. táblázat

A gerenda magasság növekedésével, valamint a szélesség csökkenésével, egyre kisebb $\frac{L}{H}$ arányú gerendáknál használhatjuk hiba nélkül a klasszikus rúdelméletet a lehajlás kiszámításához. Egyre rövidebb gerendáknál használhatjuk tévedés nélkül a klasszikus rúdelméletet. (7. diagram; 4-6. táblázat)

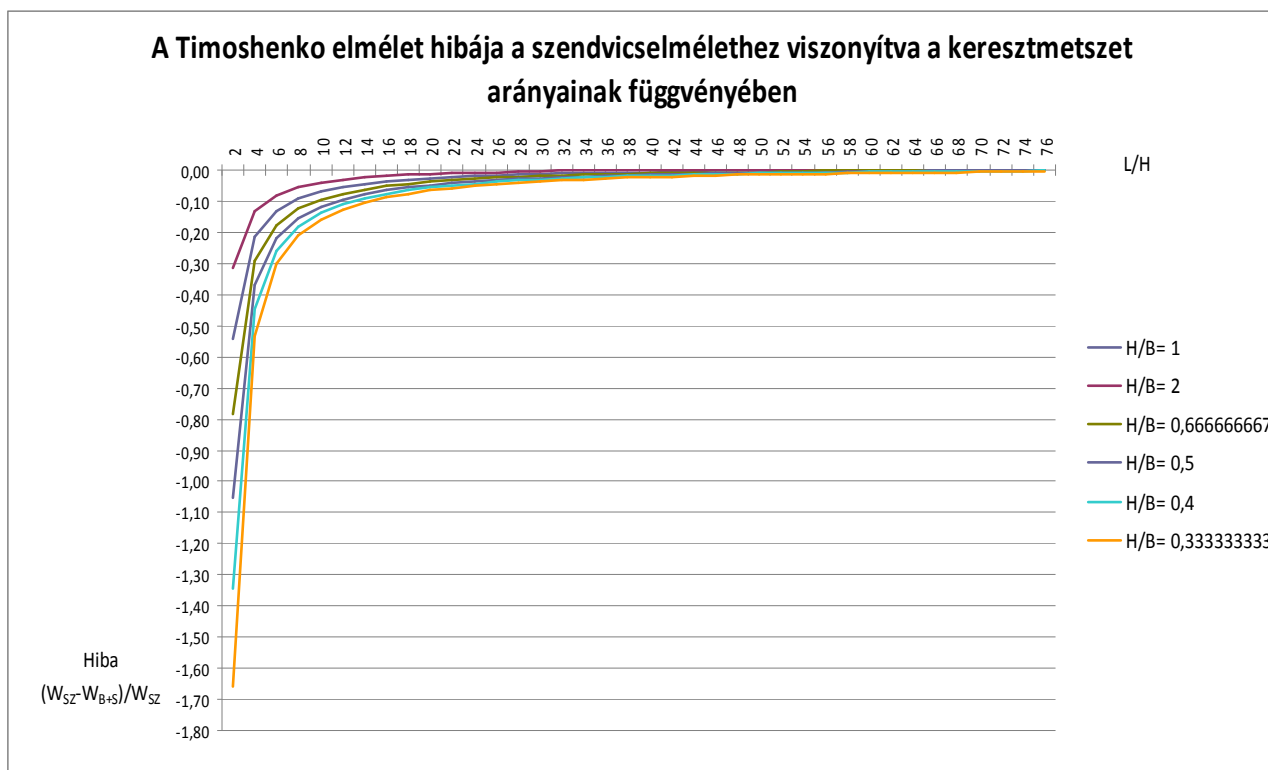
Látható, hogy gerenda hossz növekedésével egyre csökken az eltérés a klasszikus rúdelmélet és a szendvicselmélet közt.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{w_{sz} - w_b}{w_{sz}} \right) = 0$$

4.2.1.2. Timoshenko-modell és szendvicselmélet összehasonlítása

Kompozit gerenda $\frac{E}{G}$ arányához különböző keresztmetszeti tényezőket választottunk és a Timoshenko-modellt és szendvicselméletet a gerenda $\frac{L}{H}$ függvényében egymáshoz arányítottuk. Ezáltal megkaptuk az egyes keresztmetszeti arányoknál azt a gerenda hosszt melynél a Timoshenko-modellt használható kevesebb mint 10%-os tévedéssel.

A $\frac{w_{sz} - w_T}{w_{sz}}$ képlettel megkaptuk a különböző keresztmetszetekhez tartozó hibát a gerenda hossz függvényében. Ahol a $w_T = w_b + w_s$ és w_{sz} a gerenda maximális lehajlását vettük figyelembe, a gerenda középső szakaszán, hiszen tervezésnél ez a mértékadó.



8. diagram

E/G					
23,667	23,667	23,667	23,667	23,667	23,667
H/b					
2	1	0,667	0,5	0,4	0,33
10%-nál kisebb hiba (L/H)					
6	8	10	12	14	16

4-7. táblázat

A gerenda magasság növekedésével, valamint a szélesség csökkenésével, egyre kisebb $\frac{L}{H}$ arányú gerendáknál használhatjuk hiba nélkül a Timoshenko-modellt a lehajlás kiszámításához. (8. diagram; 4-7. táblázat)

Mivel a Timoshenko-modell által adott lehajlás nagyobb a szendvicselmélet eredményénél, a hiba negatív eredményt ad. Az előző ábrához hasonlóan a gerenda hossz

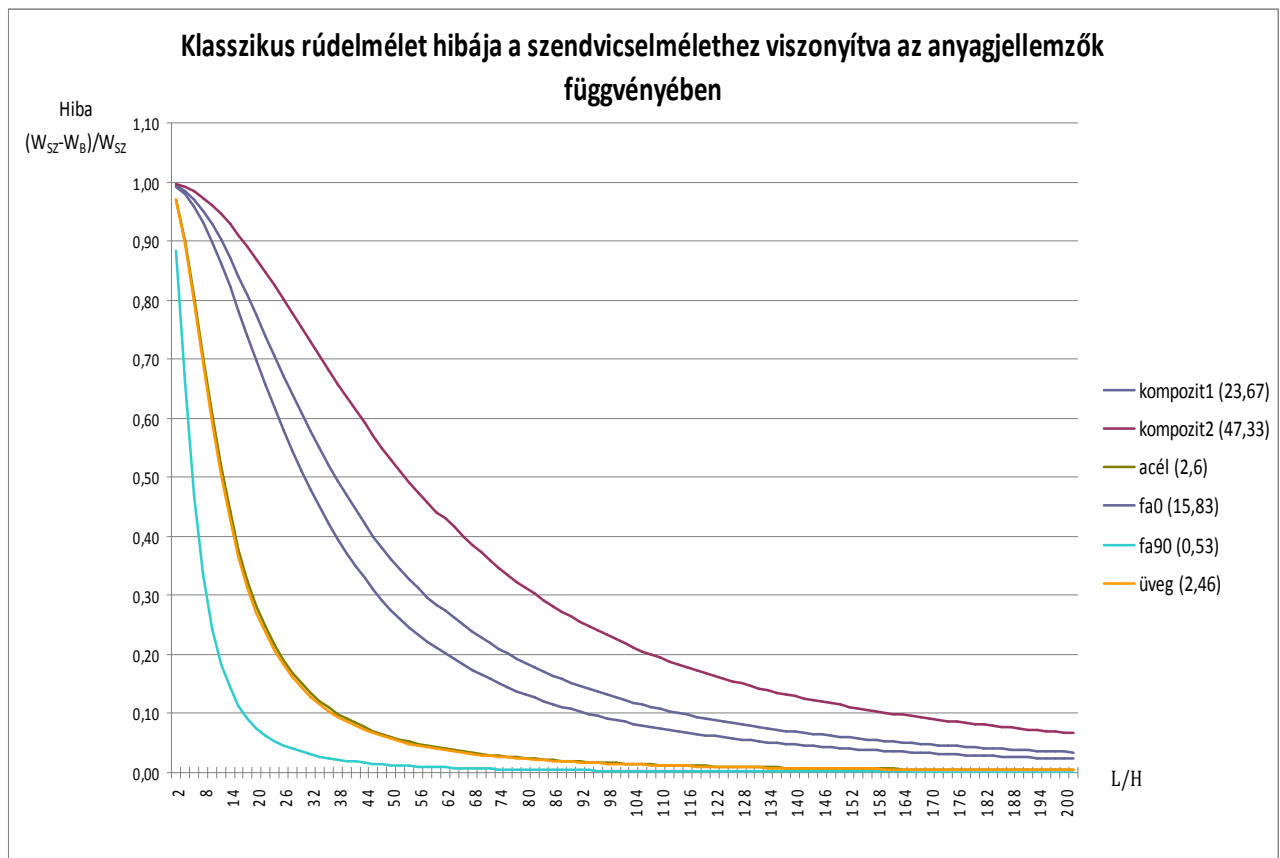
növekedésével csökken a hiba, nullához közelít $\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{w_{sz} - w_T}{w_{sz}} \right) = 0$.

4.2.2. Az anyagi jellemzők hatása

4.2.2.1. Klasszikus rúdelmélet és szendvicselmélet összehasonlítása

Állandó $\frac{H}{b}$ arányú keresztmetszet mellé különböző anyagi jellemzőjű gerendákat választottunk és a klasszikus rúdelmélet és szendvicselmélet eredményét a gerenda $\frac{L}{H}$ függvényében egymáshoz arányítottuk. Ezáltal megkaptuk az egyes anyagi jellemzőjű gerendáknál azt a gerenda hosszt melynél a klasszikus rúdelmélet használható kevesebb mint 10%-os tévedéssel.

$\frac{w_{sz} - w_b}{w_{sz}}$ képlettel megkaptuk a különböző anyagi minőséghez tartozó hibát a gerenda hossz függvényében. Ahol a w_b és w_{sz} a gerenda maximális lehajlását vettük figyelembe, a gerenda középső szakaszán, hiszen tervezésnél ez a mértékadó.



9. diagram

E/G					
fa (merőleges)	üveg	acél	fa (rostirányú)	kompozit2	kompozit1
0,533	2,46	2,6	15,833	23,667	47,33
H/b					
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
10%-nál kisebb hiba (L/H)					
18	38	38	94	116	162

4-8. táblázat

Minél kisebb az $\frac{E}{G}$ hányados annál kisebb $\frac{L}{H}$ arányú gerendánál alkalmazható a klasszikus rúdelmélet. (9. diagram; 4-8. táblázat)

A klasszikus rúdelmélet hibája a szendvicselmülethez viszonyítva a hossz növekedésével közelít a nullához. $\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{w_{sz} - w_b}{w_{sz}} \right) = 0$

4.2.2.2. Timoshenko-modell és szendvicselmélet összehasonlítása

Állandó $\frac{H}{b}$ arányú keresztmetszet és megoszló terhelés mellé különböző anyagi jellemzőjű gerendákat választottunk és a Timoshenko-modellt a szendvicselmélet eredményéhez a gerenda $\frac{L}{H}$ függvényében egymáshoz arányítottuk. Ezáltal megkaptuk az egyes anyagi jellemzőjű gerendáknál azt a gerenda hosszt melynél a Timoshenko-modell használható kevesebb mint 10%-os tévedéssel.

A $\frac{w_{sz} - w_T}{w_{sz}}$ képlettel megkaptuk a különböző anyagi minőséghez tartozó hibát a gerenda hossz függvényében. Ahol a $w_T = w_b + w_s$ és w_{sz} a gerenda maximális lehajlását vettük figyelembe, a gerenda középső szakaszán, hiszen tervezésnél ez a mértékadó.



10. diagram

E/G					
fa (merőleges)	üveg	acél	fa (rostirányú)	kompozit2	kompozit1
0,533	2,46	2,6	15,833	23,667	47,33
H/b					
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
10%-nál kisebb hiba (L/H)					
bármikor jó	4	4	10	12	18

4-9. táblázat

Minél kisebb az $\frac{E}{G}$ hányados annál kisebb $\frac{L}{H}$ arányú gerendánál alkalmazható a Timoshenko-modell. Ha az arány $\frac{E}{G} \leq 0,5$, a Timoshenko-modell bármekkora hosszúságnál és keresztmetszet magasságnál kellően pontos eredményt ad (10. diagram; 4-9. táblázat).

Mivel a Timoshenko-modell eredménye nagyobb a szendvicselmélet eredményénél, az eltérés negatív eredményt ad. Az előző ábrához hasonlóan a gerenda hossz növekedésével

csökken a hiba, nullához közelít $\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{w_{sz} - w_T}{w_{sz}} \right) = 0$.

5. Összefoglalás - következtetés

Eredményeink, a különböző rúdmodellek és számítási módszerek összehasonlítása segítségével most már választ adhatunk a dolgozat címében feltett kérdésre: Hibás-e a klasszikus rúdmodellből számított lehajlás? Természetesen nem „hibás” csak közelítéseket tartalmaz, ezért nem ad minden esetben elegendően pontos lehajlásértékeket. Azt az általánosan elfogadott ökölszabályt, miszerint a gerendalehajlást $\frac{L}{H} \geq 10$ esetleg $\frac{L}{H} \geq 8$ arány esetén a Bernoulli-Navier hipotézis feltételezésével jól közelíthetjük dolgozatunk alapján nagyon veszélyesnek ítéljük. Szélsőséges esetben a klasszikus rúdelmélettel számolt acéltartó lehajlásának hibája is felmehet akár 60%-ig.

A klasszikus rúdelmélet elhanyagolja a nyírási deformációt és a szendvicshatást. Az elhanyagolásból származó hiba nő:

- Az $\frac{E}{G}$ arány növekedésével (vagyis a nyírási merevség csökkenésével). Az acél anyagokhoz képest ($\frac{E}{G} = 2,6$) a fánál ez az arány körülbelül $5 \times$ akkora, egyes kompozit anyagoknál körülbelül $10 \times - 15 \times$ akkora is lehet.
- $\frac{H}{b}$ arány csökkenésével.
- A nyírásból származó lehajlás értékének növekedésével, a megtámasztási viszonyoktól függően. Kéttámaszú tartóhoz képest a befogott tartónál nagyobb a hiba.

Tehát míg egy $\frac{H}{b} = 2$ keresztmetszetű kéttámaszú acélgerenda esetén $\frac{L}{H} \geq 10$ aránynál a nyírási deformáció hatása valóban elhanyagolható addig pl.: $\frac{H}{b} = 0,5$ arányú két végén befogott acélgerendánál ez az érték $\frac{L}{H} \geq 38$ -ra módosul. Fagerenda esetén az arány szintén változik $\frac{L}{H} \geq 18$ -ra amennyiben a rostokra merőlegesen terhelünk, és $\frac{L}{H} \geq 94$ -re amennyiben párhuzamosan. Grafít epoxi szálak kompozit gerenda a $\frac{H}{b} = 0,5$ keresztmetszet

arány mellett a használhatósági határérték $\frac{L}{H} \geq 116$, $\frac{H}{b} = 2$ keresztmetszet arányok mellett $\frac{L}{H} \geq 56$ a használhatósági határértéke a klasszikus rúdelméletnek.

Amennyiben nem használható a klasszikus rúdelmélet, a nyírási deformáció hatását is figyelembe vevő Timoshenko-moddal pontosabb eredményt kapunk. Amíg a klasszikus rúdelmélet a valódi lehajlásnál kisebb értéket ad, addig a Timoshenko-moddal mindig a biztonság javára tér el a valóságtól (a valóságtól nagyobb értéket eredményez lásd 4.1.2. fejezet ábrái). A két végén befogott $\frac{H}{b} = 0,5$ arányú tartó esetén a Timoshenko-moddal használhatósági határértéke (hiba $\leq 10\%$) anyagoktól függően: közelítőleg acél- és üveggerenda esetén a $\frac{L}{H} \geq 4$, fagerenda, rostirányra merőlegesen terhelve bármekkora $\frac{L}{H}$, rostiránnyal párhuzamosan terhelve $\frac{L}{H} \geq 10$, valamint grafit epoxi szálak kompozit gerendánál $\frac{L}{H} \geq 18$ a Timoshenko-moddal használhatósági határértéke. Kompozit gerendánál $\frac{H}{b} = 2$ arány mellett a Timoshenko-moddal már $\frac{L}{H} \geq 6$ a használhatósági határértéke. Ha a kompozit gerenda aránya $\frac{H}{b} \leq 0,667$, akkor $\frac{L}{H} \geq 10$.

A Timoshenko-moddal is pontosabb a szendvicselmélet eredménye, de nem szükséges ezt használni, mivel a Timoshenko-moddal számolt lehajlás nagyobb mint a szendvicselmélet lehajlása, a biztonság javára tévedünk, ha a Timoshenko-moddal használjuk. Azoknál az anyagoknál, ahol kicsi a nyírási ellenállás, a lokális merevségnek nagy a hatása ezért ezeknél az anyagoknál, így a kompozit anyagoknál a szendvicselméletből lehet kiindulni, a valósághoz igen közeli eredményt ad, gazdaságosabb tartót lehet tervezni, amennyiben a pontos lehajlás értéket vesszük figyelembe.

Az ANSYS eredmény még pontosabb a szendvicselméletnél, de az alkalmazása hosszadalmasabb a többi számításnál. Érdemes ezért az egydimenziós rúdmodelleket használni helyette a használhatósági határértéken belül, amennyiben sok gerenda lehajlását kell kiszámolnunk.

Az 5-1. táblázat mutatja, hogy a szélsőséges esetekben az egydimenziós rúdmodellek használata nagymértékű, akár 90% feletti hibát is eredményezhet, ha az általánosan elfogadott

ököl szabályokból indulunk ki. Ezekben az esetekben érdemes a (7-10. diagramok) hibát mutató görbéket figyelembe venni.

Acél tartó-elmélet hibája			
L/H	5	10	15
klasszikus	85,54%	60,57%	40,89%
Timoshenko	6,93%	2,46%	1,11%

Fa (párhuzamos) tartó			
L/H	5	10	15
klasszikus	96,97%	89,84%	80,21%
Timoshenko	21,20%	9,12%	5,41%

Kompozit			
L/H	5	10	15
klasszikus	98,78%	96,09%	92,04%
Timoshenko	43,59%	17,77%	10,88%

5-1. táblázat: Klasszikus rúdmodell és Timoshenko modell hibája L/H különböző értékeinél, "szélsőséges esetben": két végén befogott tartónál, $H/b=0.5$ esetén

6. Köszönetnyilvánítás

Szeretnénk megköszönni Dr. Pluzsik Anikónak és Dr. Kollár Lászlónak a folyamatos segítségét, és támogatását a dolgozat elkészítéséhez.

7. Irodalomjegyzék

1. Dr. Kalinszky Sándor, Dr. Szilágyi György, Kurutzné Dr. Kovács Márta: Mechanika Szilárdságtan (Tankönyvkiadó, Budapest, 1990)
2. László P. Kollár, George S. Springer: Mechanics of Composite Structures (Cambridge University Press, 2003)
3. Domokos Gábor: Szilárdságtan jegyzet (kézirat)
4. Becker Sándor: Szilárdságtan II. (Műegyetem Kiadó, Budapest, 2002)
5. Kollár Lajos (szerk.), Hegedűs István, László P. Kollár: A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái (Akadémia Kiadó, 2006)

8. Csatolmányok

1-es csatolmány:

```
syms t

%ketvegenbefogott

S = dsolve('0.0402=EI1*D4v-S*D2v+S*Dk','0=-S*Dv-EI0*D2k+S*k','v(0) = 0','k(0) = 0','Dv(0) =0','v(1) = 0','k(1) = 0','Dv(1) =0')
%S.v

EI=1.76e+5;
EI1=8.24e+1;
EI0=EI-EI1;
S=6.82e-1;
l=50;

v=...

vszendvics=subs(v,t,l/2)
%vb=1/384*10.1*l^4/EI
%vb0=1/384*10.1*l^4/EI0
%vbl=1/384*10.1*l^4/EI1
%vs=10.1*l^2/8/S
%vst=vb+vs
%vt=1/(1/(vb0+vs)+1/vbl)

ve=zeros(101,1);
xe=zeros(101,1);

for i=1:250
    xe(i+1,1)=l*i/250;
    ve(i+1,1)=subs(v,t,l*i/250);
end

ve
plot(xe,ve)
```

2-es csatolmány:

```
syms t
```

```
ketvegenbefogott
```

```
S = dsolve('0.0402=EI1*D4v-S*D2v+S*Dk','0=-S*Dv-EI0*D2k+S*k','v(0) = 0','k(0) = 0','Dv(0) = 0','v(1) = 0','k(1) = 0','Dv(1) = 0')
```

```
%S.v
```

```
EI=7.06e+4;
```

```
EI1=165;
```

```
EI0=EI-EI1;
```

```
S=1.31e+4;
```

```
ve=zeros(10,1);
```

```
xe=zeros(10,1);
```

```
for i=1:50
```

```
l(1,1)=i
```

```
v=...
```

```
vszendvics=subs(v,t,l/2);
```

```
vszendvics
```

```
xe(i)=i;
```

```
ve(i)=subs(v,t,i/2);
```

```
end
```

```
xe
```

```
ve
```

```
plot(xe,ve)
```