

Elágazó fedések kobordizmuscsoportjai

Nagy Csaba

Matematikus MSc. 2. évfolyam

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Témavezető: Szűcs András

Egyetemi tanár

Analízis Tanszék

Bevezetés

A dolgozatban olyan elágazó fedéseket vizsgálunk, amelyekben a képsokaság minden pontjának legfeljebb egy szinguláris őspontja van. Az n -dimenziós sokaságok közötti k -rétű elágazó fedések között természetes módon definiálható a kobordizmus, és a kobordizmusosztályokon a diszjunkt unió csoportműveletet indukál. Minden k -hoz megkonstruáljuk a k -rétű elágazó fedések klasszifikáló terét, aminek az n . bordizmuscsoportja izomorf az így definiált kobordizmuscsoporttal. A klasszifikáló tér racionális homológiáinak kiszámolásával meghatározzuk ezen csoportok rangját. Azt kapjuk, hogy ez a rang 0, ha n páratlan, $(k-1) \sum_{t=0}^{m-1} \pi(t) + \pi(m)$, ha $n = 4m$, és $(k-1) \sum_{t=0}^{m-1} \pi(t)$, ha $n = 4m - 2$; ahol $\pi(t)$ a t partícióinak számát jelöli.

Az 1. részben összefoglaljuk a felhasznált tételeket, és bevezetjük az alapvető jelöléseket. A 2. részben definiáljuk az elágazó fedéseket és a $\text{Cob}_{bc}(n, k)$ kobordizmuscsoportokat. A 3. részben megkonstruáljuk az univerzális k -rétű elágazó fedést, és bebizonyítjuk, hogy az n . bordizmuscsoportja megegyezik $\text{Cob}_{bc}(n, k)$ -val. A 4. részben kiszámoljuk ennek a csoportnak a rangját.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szűcs Andrásnak a dolgozat elkészítéséhez nyújtott segítségét.

1. Előkészületek

A dolgozatban előforduló minden sokaságról és vektornyalábról feltesszük, hogy sima (végtelenszer differenciálható) és irányított.

Jelölés.

Az M sokaság pereme ∂M , belseje $\text{int } M = M \setminus \partial M$. A fordított irányítású sokaságot $(-M)$ jelöli.

$H_j(X)$ ill. $H^j(X)$ az X tér j -dimenziós racionális együtthatós szinguláris homológia-ill. kohomológiacsoportha.

$I = [0, 1]$ az egységintervallum, $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ a körlap (ezt azonosíthatjuk a komplex egységkörrel), $S^1 = \partial D^2$ a körvonal.

$z^i : D^2 \rightarrow D^2$ a komplex i . hatvány függvény.

A fedések klasszifikáló tere

Az itt leírtak megtalálhatóak pl. Husemoller [4] könyvében.

Jelölés. Az univerzális m -rétű fedés $\text{pr}_m : E_c(m) \rightarrow B_c(m)$.

Ezt a következőképpen konstruálhatjuk meg: Legyen S_m az $F = \{1, 2, \dots, m\}$ halmazon (balról) ható szimmetrikus csoport. A Milnor-konstrukcióval elkészíthetjük az $ES_m \rightarrow BS_m$ univerzális principális S_m nyalábot. Ekkor ES_m pontrahúzható és hat rajta S_m (jobbról), BS_m egy $K(S_m, 1)$ Eilenberg-MacLane tér, a leképezés köztük pedig ES_m faktorizációja S_m hatása szerint.

$E_c(m) = ES_m \times_{S_m} F = (ES_m \times F) / \sim$, ahol $(x, t) \sim (xg, g^{-1}t)$, minden $x \in ES_m$, $t \in F$, $g \in S_m$ esetén (ez ekvivalenciareláció).

$B_c(m) = BS_m$.

$\text{pr}_m : E_c(m) \rightarrow B_c(m)$ pedig az a leképezés, amit az $ES_m \times F \rightarrow ES_m \rightarrow BS_m$ kompozíció indukál $E_c(m)$ -en.

(Ha $m = 0$, akkor $E_c(0) = \emptyset$ és $B_c(0)$ pontrahúzható.)

$B_c(m) = K(S_m, 1)$, ezért a racionális együtthatós homológiacsoporthai:

$$H_j(B_c(m)) \cong \begin{cases} Q & \text{ha } j = 0 \\ 0 & \text{ha } j \neq 0 \end{cases}$$

Ha $p_A : \tilde{A} \rightarrow A$ egy m -rétű fedés, X tetszőleges tér és $u : X \rightarrow A$ folytonos leképezés, akkor X felett indukálódik egy m -rétű fedést: a fedőtér $\tilde{X} = \{(x, y) \in X \times \tilde{A} \mid x \in X, y \in p_A^{-1}(u(x))\}$, az $\tilde{X} \rightarrow X$ fedés $(x, y) \mapsto x$. Ha X kompakt, akkor minden X feletti m -rétű fedés előáll (izomorfizmus erejéig), mint valamilyen $u : X \rightarrow B_c(m)$ leképezés által indukált fedés, és u homotópia erejéig egyértelmű.

Vektornyalábok

Irányított 2-dimenziós vektornyalábokkal fogunk foglalkozni. Egy ilyen nyaláb automatikusan tekinthető komplex vonalnyalábnak (az i -vel való szorzás minden fibrumban a pozitív irányba való 90° -os forgatás).

Jelölés. Egy ξ vektornyaláb (legfeljebb 1 hosszú vektoraiból álló) golyónyalábja $D\xi$, gömbnyalábja $S\xi = \partial D\xi$, Thom-tere $T\xi = D\xi/S\xi$.

Jelölés. CP^m az m (komplex) dimenziós komplex projektív tér, $CP^\infty = \bigcup_{m=1}^\infty CP^m$, a CP^m ill. CP^∞ fölötti tautologikus nyaláb γ_m ill. γ , ezek projekciói pr_{γ_m} ill. pr_γ .

γ univerzális irányított 2-dimenziós vektornyaláb, azaz minden $\xi : E\xi \rightarrow B\xi$ irányított 2-dimenziós nyalábhoz létezik olyan $u : B\xi \rightarrow CP^\infty$ leképezés, ami γ -ból ξ -t indukálja, és u homotópia erejéig egyértelmű.

Jelölés. Ha ξ egy komplex vonalnyaláb, akkor $\xi^i = \xi \otimes \xi \otimes \cdots \otimes \xi$ a ξ nyaláb önmagával vett i -szeres tenzorszorzata, ez is egy vonalnyaláb.

Definiálhatunk egy $z_\xi^i : \xi \rightarrow \xi^i$ leképezést úgy, hogy minden ξ -beli x vektorra $z_\xi^i(x) = x \otimes x \otimes \cdots \otimes x$ (i -szeres tenzorszorzat). Ha vesszük ξ egy lokális trivializálását, azaz a bázistér egy pontjának környezetében a fibrumait azonosítjuk C -vel, az megad

egy lokális trivializálást ξ^i -ben, és ezekre teljesül, hogy z_ξ^i minden fibrumban (az azonosítások után) megegyezik a z^i komplex hatványfüggvénnyel.

A ξ -t γ -ból indukáló $u : B\xi \rightarrow CP^\infty$ leképezés egyúttal ξ^i -t is indukálja γ^i -ből. És u (homotopikusan) az egyetlen ilyen indukáló leképezés, mert ha $v : B\xi \rightarrow CP^\infty$ egy u -val nem homotóp leképezés, ami ξ^i -t indukálja γ^i -ből, és $\xi_1 \neq \xi$ az a nyaláb, amit v γ -ból indukál, akkor ξ^i és ξ_1^i izomorfak. Ismert (ld. pl. Hirzebruch [3]), hogy ha ϑ_1 és ϑ_2 két komplex vonalnyaláb ugyanazon bázistér felett, akkor $c_1(\vartheta_1 \otimes \vartheta_2) = c_1(\vartheta_1) + c_1(\vartheta_2)$ (ahol c_1 az 1. Chern-osztály). Ebből következik, hogy $c_1(\xi) = \frac{1}{i}c_1(\xi^i) = c_1(\xi_1)$. Ez pedig azt jelenti, hogy u és v a feltevésünkkel ellentétben mégis homotóp, mert CP^∞ egy $K(Z, 2)$ Eilenberg-MacLane-tér, c_1 a $H^2(CP^\infty)$ egy generátora, és $u^*(c_1) = v^*(c_1)$.

Ha ξ és η két vonalnyaláb ugyanazon bázistér felett, és adott egy $f : \xi \rightarrow \eta$ leképezés, úgy, hogy a nyaláboknak minden pont körül van olyan lokális trivializálásuk, ami szerint f minden fibrumban megegyezik a z^i leképezéssel, akkor η és ξ^i izomorf ($z_\xi^i \circ f^{-1}$ egy jóldefiniált izomorfizmus köztük). Tehát ekkor η indukálható γ^i -ből, és az indukáló leképezése homotopikusan egyértelmű.

Bordizmuscsoportok

Jelölés. Az irányított n -dimenziós sokaságok kobordizmuscsoportja (a diszjunkt unió művelettel) MSO_n .

$MSO_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} MSO_n$, ezen a sokaságok szorzása indukál egy szorzást, amivel MSO_* gyűrű lesz. Ennek a Q -val vett tenzorszorzata egy polinomgyűrű, aminek a generátorai a páros dimenziós komplex projektív terek kobordizmusosztályai: $MSO_* \otimes Q \cong Q[[CP^2], [CP^4], [CP^6], \dots]$ (ez Thom eredménye).

Jelölés. $\pi(n) = |\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n\}|$ jelöli az n partícióinak számát.

Ekkor

$$MSO_n \otimes Q \cong \begin{cases} Q^{\pi(j)} & \text{ha } n = 4j \\ 0 & \text{ha } n \text{ nem osztható 4-gyel} \end{cases}$$

Jelölés. Az X tér n -dimenziós irányított bordizmuscsoportha $\text{MSO}_n(X)$.

$\text{MSO}_n(X)$ elemei az $f : M \rightarrow X$ leképezések ekvivalenciaosztályai, ahol M n -dimenziós (irányított) sokaság; és f ekvivalens egy $g : N \rightarrow X$ leképezéssel, ha van olyan W kobordizmus M és N között (irányított, tehát a pereme $M \sqcup (-N)$) és $h : W \rightarrow X$, amire $h|_M = f$ és $h|_N = g$. f ekvivalenciaosztályát $[f]$ jelöli. Ez egy csoport a diszjunkt unió által az ekvivalenciaosztályokon indukált (és szintén $\sqcup$ -val jelölt) művelettel.

Ezekre a csoportokra teljesül (ld. pl. Conner [1]), hogy

$$\text{MSO}_n(X) \otimes Q = \bigoplus_{j=0}^n H_j(X) \otimes \text{MSO}_{n-j}$$

2. Elágazó fedések

Definíció. Egy $f : \tilde{M} \rightarrow M$ n -dimenziós zárt sokaságok közötti leképezés k -rétű elágazó fedés ($k \geq 2$), ha léteznek olyan $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3, \dots, \tilde{V}_k \subset \tilde{M}$ és $V_2, V_3, \dots, V_k \subset M$ (esetleg üres) diszjunkt zárt $(n-2)$ -dimenziós részsokaságok, és ezeknek olyan $\tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \dots, \tilde{U}_k \subset \tilde{M}$ és $U_2, U_3, \dots, U_k \subset M$ diszjunkt csőyszerű környezeteik, amelyekre

- $f|_{\tilde{M} \setminus f^{-1}(V)} : \tilde{M} \setminus f^{-1}(V) \rightarrow M \setminus V$ k -rétű fedés (ahol $V = \bigsqcup_{i=2}^k V_i$)
- $f|_{\tilde{M} \setminus f^{-1}(V)}$ irányítástartó

és minden $2 \leq i \leq k$ esetén

- $f|_{\tilde{V}_i} : \tilde{V}_i \rightarrow V_i$ diffeomorfizmus
- $f(\tilde{U}_i) = U_i$
- $f|_{f^{-1}(U_i) \setminus \tilde{U}_i} : f^{-1}(U_i) \setminus \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ $(k-i)$ -rétű fedés (ha $i = k$, akkor ez azt jelenti, hogy $\tilde{U}_k = f^{-1}(U_k)$)
- $\tilde{U}_i$ -t és U_i -t tekinthetjük D^2 -nyaláboknak $\tilde{V}_i$ és V_i fölött $\tilde{\pi}_i$ és π_i projekciókkal úgy, hogy ez a diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_i & \xrightarrow{f} & U_i \\ \tilde{\pi}_i \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ \tilde{V}_i & \xrightarrow{f} & V_i \end{array}$$

- minden $\tilde{x} \in \tilde{V}_i$ és $f(\tilde{x}) \in V_i$ pont körül van a nyaláboknak olyan lokális trivializálásuk, ami szerint f minden fibrumon megegyezik a z^i leképezéssel (ha D^2 -t a komplex egységkörnek tekintjük).

Megjegyzés.

1. Minden i -re $f|_{f^{-1}(V_i) \setminus \tilde{V}_i} : f^{-1}(V_i) \setminus \tilde{V}_i \rightarrow V_i$ $(k-i)$ -rétű fedés.
2. f egyértelműen meghatározza a $\tilde{V}_i$ és V_i részsokaságokat: $V_i \subset M$ azokból a pontokból áll, amelyek f szerinti ősképe $(k-i+1)$ elemű, $\tilde{V}_i$ pedig azokat az őspontokat tartalmazza, amelyeknek nincs olyan környezete, amin f leszűkítése diffeomorfizmus.
3. A definíció kiterjeszthető peremes sokaságokra is, ekkor megköveteljük, hogy $\partial\tilde{V}_i = \tilde{V}_i \cap \partial\tilde{M}$ és $\tilde{V}_i \pitchfork \partial\tilde{M}$, ill. $\partial V_i = V_i \cap \partial M$ és $V_i \pitchfork \partial M$.
4. Az elágazó fedéseket ennél általánosabban is lehet értelmezni. A mi definíciónk az a speciális esete az általánosnak, amelyikben M minden pontjának legfeljebb egy szinguláris őspontja van.

Definíció. Az $f_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M_1$ és $f_2 : \tilde{M}_2 \rightarrow M_2$ n -dimenziós, k -rétű elágazó fedések izomorfak, ha léteznek $\tilde{g} : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ és $g : M_1 \rightarrow M_2$ diffeomorfizmusok úgy, hogy $g \circ f_1 = f_2 \circ \tilde{g}$.

Definíció. Az $f_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M_1$ és $f_2 : \tilde{M}_2 \rightarrow M_2$ n -dimenziós, k -rétű elágazó fedések kobordánsak, ha létezik egy $\tilde{W}$ kobordizmus $\tilde{M}_1$ és $\tilde{M}_2$, ill. egy W kobordizmus M_1 és M_2 között, és egy $h : \tilde{W} \rightarrow W$ $(n+1)$ -dimenziós, k -rétű elágazó fedés, amire $h|_{\tilde{M}_1} = f_1$ és $h|_{\tilde{M}_2} = f_2$.

Az izomorfizmus és a kobordizmus ekvivalenciareláció.

Jelölés. Az n -dimenziós, k -rétű elágazó fedések kobordizmusosztályainak halmaza $\text{Cob}_{bc}(n, k)$. Az f elágazó fedés kobordizmusosztálya $[f]$.

Ha adott két n -dimenziós, k -rétű elágazó fedés, $f : \tilde{M} \rightarrow M$ és $g : \tilde{N} \rightarrow N$, akkor értelmezhető a diszjunkt uniójuk, $f \sqcup g : \tilde{M} \sqcup \tilde{N} \rightarrow M \sqcup N$. Ha f_1 és f_2 , ill. g_1 és g_2 kobordáns, akkor $f_1 \sqcup g_1$ és $f_2 \sqcup g_2$ is kobordáns, ezért $\sqcup$ indukál egy műveletet a kobordizmusosztályok halmazán is (amit ugyanígy jelölünk).

Állítás. $\text{Cob}_{bc}(n, k)$ a $\sqcup$ művelettel Abel-csoport.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\sqcup$ asszociatív és kommutatív. Az üres leképezés kobordizmusosztálya a nullelem. Tetszőleges $f : \tilde{M} \rightarrow M$ esetén $f \times \text{id} : \tilde{M} \times I \rightarrow M \times I$ kobordizmus $f : \tilde{M} \rightarrow M$ és $f : (-\tilde{M}) \rightarrow (-M)$ diszjunkt uniója és az üres leképezés között, ezért minden elemnek van ellentettje: ugyanaz a leképezés a fordított irányítású sokaságok között. $\square$

3. Az elágazó fedések klasszifikáló tere

Konstrukció

$$E_{bc}(k) = E_c(k) \bigcup_{\tilde{r}_2} \left(D\gamma \times B_c(k-2) \sqcup D\gamma^2 \times E_c(k-2) \right) \bigcup_{\tilde{r}_3} \left(D\gamma \times B_c(k-3) \sqcup D\gamma^3 \times E_c(k-3) \right) \bigcup \dots \bigcup_{\tilde{r}_k} \left(D\gamma \times B_c(0) \sqcup D\gamma^k \times E_c(0) \right)$$

$$B_{bc}(k) = B_c(k) \bigcup_{r_2} D\gamma^2 \times B_c(k-2) \bigcup_{r_3} D\gamma^3 \times B_c(k-3) \bigcup \dots \bigcup_{r_k} D\gamma^k \times B_c(0)$$

ahol az $\tilde{r}_i$ és r_i ragasztó leképezéseket a következőképpen adjuk meg:

A $z_\gamma^i : E\gamma \rightarrow E\gamma^i$ leképezés $S\gamma$ -ra való leszűkítésének felhasználásával készített $z_\gamma^i \times \text{id} \sqcup \text{id} \times \text{pr}_{k-i} : S\gamma \times B_c(k-i) \sqcup S\gamma^i \times E_c(k-i) \rightarrow S\gamma^i \times B_c(k-i)$ leképezés egy k -rétű fedés. $r_i : S\gamma^i \times B_c(k-i) \rightarrow B_c(k)$ legyen az ezt indukáló (homotopikusan egyértelmű) leképezés, $\tilde{r}_i : S\gamma \times B_c(k-i) \sqcup S\gamma^i \times E_c(k-i) \rightarrow E_c(k)$ pedig az a nyáláb-leképezés, amire a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} S\gamma \times B_c(k-i) \sqcup S\gamma^i \times E_c(k-i) & \xrightarrow{\tilde{r}_i} & E_c(k) \\ \downarrow z_\gamma^i \times \text{id} \sqcup \text{id} \times \text{pr}_{k-i} & & \downarrow \text{pr}_k \\ S\gamma^i \times B_c(k-i) & \xrightarrow{r_i} & B_c(k) \end{array}$$

Definíció. Az univerzális k -rétű elágazó fedés az a $p_k : E_{bc}(k) \rightarrow B_{bc}(k)$ leképezés, ami

$E_c(k)$ -n megegyezik pr_k -val,

$(D\gamma \times B_c(k-i) \sqcup D\gamma^i \times E_c(k-i))$ -n pedig $(z_\gamma^i \times \text{id} \sqcup \text{id} \times \text{pr}_{k-i})$ -vel.

Az $E_{bc}(k)$ - és $B_{bc}(k)$ -beli ragasztó leképezések definíciójából látszik, hogy ez a leképezés jóldefiniált (és folytonos).

Elágazó fedések indukálása

Legyen M kompakt n -dimenziós sokaság, $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ folytonos leképezés.

Jelölés.

$$M_i^u = u^{-1}(D\gamma^i \times B_c(k-i)) \subseteq M$$

$$M_i^u(\varepsilon) = u^{-1}(\mathring{D}_\varepsilon \gamma^i \times B_c(k-i)) \subseteq M, \text{ ahol } 0 < \varepsilon \leq 1 \text{ és } \mathring{D}_\varepsilon \gamma^i \text{ a } \gamma^i \text{ } \varepsilon\text{-nál kisebb}$$

hosszú vektoraiból álló részhalmaz

$$V_i^u = u^{-1}(CP^\infty \times B_c(k-i)) \subseteq M$$

$D\gamma^i \times B_c(k-i)$ zárt $B_{bc}(k)$ -ban, ezért M_i^u is zárt M -ben, tehát kompakt. A vetítésekkel való kompozícióval kapott $M_i^u \xrightarrow{u} D\gamma^i \times B_c(k-i) \rightarrow D\gamma^i \rightarrow CP^\infty$ leképezés folytonos, ezért a képe kompakt, ezért benne van egy véges dimenziós $CP^s \subset CP^\infty$ -ben valamilyen pozitív egész s -re. Jelölje $s(u, i)$ az ilyen s -ek közül a legkisebbet, és legyen $K(u) = \max_{2 \leq i \leq k} s(u, i)$. Ekkor minden i -re $u(M_i^u) \subseteq D\gamma_{K(u)}^i \times B_c(k-i)$.

Minden $0 < \varepsilon \leq 1$ esetén $\mathring{D}_\varepsilon \gamma^i \times B_c(k-i)$ nyílt $B_{bc}(k)$ -ban, ezért $M_i^u(\varepsilon)$ nyílt részhalmaz (és ezért részsokaság) M -ben, és a lezártja része M_i^u -nak.

V_i^u zárt, ezért kompakt, és részhalmaza $M_i^u(\varepsilon)$ -nak.

Jelölés. Az u M_i^u -ra való leszűkítésének a vetítésekkel vett kompozíciói:

$$u_i^1 : M_i^u \xrightarrow{u} D\gamma_{K(u)}^i \times B_c(k-i) \rightarrow D\gamma_{K(u)}^i$$

$$u_i^2 : M_i^u \xrightarrow{u} D\gamma_{K(u)}^i \times B_c(k-i) \rightarrow B_c(k-i)$$

Ezekkel a jelölésekkel $M_i^u(\varepsilon) = (u_i^1)^{-1}(\mathring{D}_\varepsilon \gamma^i)$ és $V_i^u = (u_i^1)^{-1}(CP^{K(u)})$.

Definíció. u -t simának nevezzük, ha u_i^1 sima V_i^u egy nyílt környezetén (minden $2 \leq i \leq k$ esetén).

Állítás. A sima leképezések sűrű halmazt alkotnak az összes folytonos $M \rightarrow B_{bc}(k)$ leképezés között.

Bizonyítás. Legyen $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ egy tetszőleges folytonos leképezés. Minden i esetén u_i^1 tetszőlegesen approximálható olyan $v_i : M_i^u \rightarrow D\gamma_{K(u)}^i$ leképezéssel, ami sima $M_i^u(\varepsilon_1)$ -ben és megegyezik az előző kompozícióval $M_i^u \setminus M_i^u(\varepsilon_2)$ egy környezetén (valamilyen $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq 1$ esetén). Az is föltehető, hogy $v_i^{-1}(CP^{K(u)}) \subset M_i^u(\varepsilon_1)$ (ez minden elég közeli approximációra teljesül), tehát v_i sima $v_i^{-1}(CP^{K(u)})$ egy

környezetén. Defináljuk az $u' : M \rightarrow B_{bc}(k)$ leképezést úgy, hogy $u'|_{M_i^u} = v_i \times u_i^2$ és $u'|_{M \setminus (\bigsqcup_{i=2}^k M_i^u(\varepsilon_2))} = u|_{M \setminus (\bigsqcup_{i=2}^k M_i^u(\varepsilon_2))}$. Ez jóldefiniált, folytonos, $(u')_i^1 = v_i$ sima $V_i^{u'} = v_i^{-1}(CP^{K(u)})$ egy környezetén, és a v_i -k megfelelő választásával tetszőlegesen közel lehet u -hoz. Tehát minden folytonos u leképezés approximálható simával. $\square$

Definíció. Az $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ leképezés generikus, ha sima és minden i -re u_i^1 transzverzális $CP^{K(u)}$ -ra.

Állítás. A generikus leképezések sűrűek az összes $M \rightarrow B_{bc}(k)$ leképezés között.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges sima $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ leképezést. Thom transzverzálitási tételéből következik, hogy minden i -re u_i^1 -et, ami sima V_i^u egy környezetén, tudjuk egy (kisebb) környezeten módosítani úgy, hogy a keletkező leképezés transzverzális legyen $CP^{K(u)}$ -ra. Ezekből az előző bizonyításhoz hasonlóan fel tudunk építeni egy u -t approximáló generikus leképezést. Tehát a generikus leképezések sűrűek a sima leképezések között, azok pedig az előző Állítás miatt sűrűek az összes folytonos leképezés között. $\square$

Legyen M kompakt n -dimenziós sokaság és $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ generikus leképezés.

Definíció. Az u által indukált k -rétű elágazó fedés az $f : \tilde{M} \rightarrow M$ leképezés, ahol $\tilde{M} = \{ (x, y) \in M \times E_{bc}(k) \mid x \in M, y \in p_k^{-1}(u(x)) \}$ és $f(x, y) = x$.

Állítás. A definíció jó, azaz $\tilde{M}$ sokaság, és f elágazó fedés.

Bizonyítás. Legyen $V = \bigsqcup_{i=2}^k V_i^u \subset M$ és $\hat{V} = f^{-1}(V) \subset \tilde{M}$. V zárt M -ben, f folytonos, ezért $\hat{V}$ is zárt $\tilde{M}$ -ban. p_k leszűkítése k -rétű fedés $B_{bc}(k) \setminus (\bigsqcup_{i=2}^k CP^\infty \times B_c(k-i))$ felett, ezért $f|_{\tilde{M} \setminus \hat{V}} : \tilde{M} \setminus \hat{V} \rightarrow M \setminus V$ is k -rétű fedés. Ezért minden $(x, y) \in \tilde{M} \setminus \hat{V}$ pontnak van olyan környezete $\tilde{M}$ -ban, ami homeomorf x egy M -beli környezetével. Tehát $\tilde{M} \setminus \hat{V}$ topologikus sokaság, és az M egy C^∞ atlasza ezen is megad egy differenciálható struktúrát úgy, hogy f lokális diffeomorfizmus lesz. Egyúttal egy irányítást is kapunk $(\tilde{M} \setminus \hat{V})$ -on (hiszen M irányított).

u generikus, ezért u_i^1 sima V_i^u egy környezetén, és transzverzális $CP^{K(u)}$ -ra. Mivel $V_i^u = (u_i^1)^{-1}(CP^{K(u)})$, ezért V_i^u $(n-2)$ -dimenziós részsokaság M -ben. Legyen $U_i = (u_i^1)^{-1}(D_\varepsilon \gamma^i) \subset M_i^u$. Ez (elég kicsi ε esetén) egy csőszerű környezete V_i^u -nak, amire leszűkítve az előbbi leképezés sima. U_i -t tekinthetjük V_i^u normálnyalábjának

(pontosabban ennek a golyónyalábjának), ekkor U_i izomorf az $u_i^1|_{V_i^u} : V_i^u \rightarrow \gamma_{K(u)}^i$ leképezés által indukált nyalábbal. Legyen $\tilde{U}_i = \{ (x, y) \in \tilde{M} \mid x \in U_i, y \in D\gamma \times B_c(k-i) \}$. Mivel p_k leszűkítése egy $D\gamma^i \times E_c(k-i) \rightarrow D\gamma^i \times B_c(k-i)$ $(k-i)$ -rétű fedés, ezért f leszűkítése, $f|_{f^{-1}(U_i) \setminus \tilde{U}_i} : f^{-1}(U_i) \setminus \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ is $(k-i)$ -rétű fedés. Tehát a $\hat{V} \cap (f^{-1}(U_i) \setminus \tilde{U}_i)$ -beli pontoknak is van euklideszi környezetük $\tilde{M}$ -ban, és ezeken megadható a korábbival kompatibilis differenciálható struktúra és irányítás.

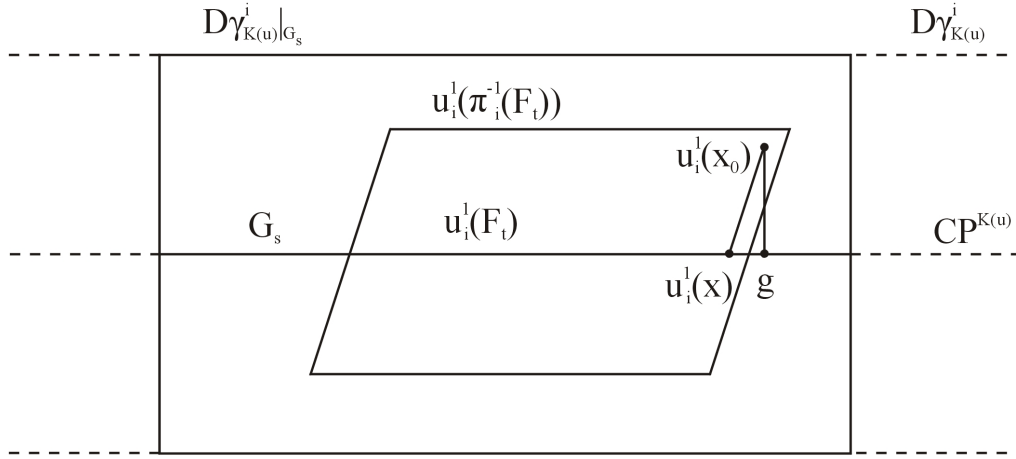
Legyen $\tilde{V}_i = \{ (x, y) \in \tilde{M} \mid x \in V_i^u, y \in CP^{K(u)} \times B_c(k-i) \} = f^{-1}(V_i^u) \cap \tilde{U}_i$. Ekkor $f|_{\tilde{V}_i} : \tilde{V}_i \rightarrow V_i^u$ homeomorfizmus. U_i a V_i^u normálnyalábjának golyónyalábja, legyen $\pi_i : U_i \rightarrow V_i^u$ a vetítés. Ennek a felhasználásával definiálhatunk egy $\tilde{\pi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i$ leképezést: $\tilde{\pi}_i(x, y) = (f|_{\tilde{V}_i})^{-1}(\pi_i(x))$. Be fogjuk látni, hogy $\tilde{U}_i$ D^2 -nyaláb $\tilde{V}_i$ fölött $\tilde{\pi}_i$ projekcióval. Ehhez az kell, hogy tetszőleges $\tilde{x} \in \tilde{V}_i$ pontnak van olyan környezete $\tilde{V}_i$ -ben (ez a következő bekezdésben definiált F_t -k egyike lesz), aminek a $\tilde{\pi}_i$ szerinti ősképe homeomorf $F_t \times D^2$ -vel, és $\tilde{\pi}_i$ az F_t -re való vetítés.

$CP^{K(u)}$ kompakt, ezért lefedhető véges sok olyan G_s ($s = 1, 2, \dots$) nyílt halmazzal, amelyek felett $\gamma_{K(u)}$ (és ezért $\gamma_{K(u)}^i$ is) triviális. Ekkor az (ebből indukált) U_i is triviális lesz $(u_i^1)^{-1}(G_s) \subseteq V_i^u$ felett. V_i^u kompakt, ezért lefedhető véges sok olyan nyílt halmazzal, amelyeknek a lezártja benne van valamelyik $(u_i^1)^{-1}(G_s)$ -ben. Jelölje F_t ($t = 1, 2, \dots$) ezeket a lezártakat. Ha ε elég kicsi, akkor $u_i^1(\pi_i^{-1}(F_t)) \subset \text{pr}_{\gamma_{K(u)}}^{-1}(G_s)$ arra az (egyik) s -re, amire $F_t \subset (u_i^1)^{-1}(G_s)$. Ez véges sok felső korlát ε -ra, ezért feltehető, hogy ε -t úgy választottuk, hogy ezek a feltételek mind teljesülnek.

Legyen $\tilde{x} \in \tilde{V}_i$ tetszőleges, ekkor $f(\tilde{x}) \in V_i^u$, tehát $f(\tilde{x}) \in \text{int } F_t$ valamelyik t -re. Legyen G_s az a trivializáló környezet $CP^{K(u)}$ -ban, amire $F_t \subset (u_i^1)^{-1}(G_s)$. Rögzítsük $\gamma_{K(u)}$ egy G_s feletti $a : G_s \times C \rightarrow E\gamma_{K(u)}|_{G_s} = \text{pr}_{\gamma_{K(u)}}^{-1}(G_s)$ trivializálást, ez meghatározza $\gamma_{K(u)}^i$ egy $a^i : G_s \times C \rightarrow E\gamma_{K(u)}^i|_{G_s}$ lokális trivializálását is. Ezekre teljesül, hogy a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} G_s \times C & \xrightarrow{a} & E\gamma_{K(u)}|_{G_s} \\ \text{id} \times z^i \downarrow & & \downarrow z_\gamma^i \\ G_s \times C & \xrightarrow{a^i} & E\gamma_{K(u)}^i|_{G_s} \end{array}$$

Legyen $w : E\gamma_{K(u)}^i|_{G_s} \rightarrow C$ a vetítés. F_t felett U_i is triviális, legyen $b : F_t \times D_\varepsilon^2 \rightarrow \pi_i^{-1}(F_t)$ egy trivializálása. Feltehető, hogy a $\pi_i^{-1}(F_t) \rightarrow D_\varepsilon^2$ vetítés megegyezik $w \circ u_i^1$ leszűkítésével.



Legyen $\delta = \sqrt[i]{\varepsilon}$. Definiálunk egy $q : F_t \times D_\delta^2 \rightarrow \tilde{U}_i$ leképezést:

$$q(x, y) = (x_0, (a(g, y), u_i^2(x_0))) \quad \text{ahol} \quad x_0 = b(x, z^i(y)) \quad \in \pi_i^{-1}(F_t)$$

$$g = \text{pr}_{\gamma_{K(u)}}(u_i^1(x_0)) \quad \in G_s$$

Mivel $\text{pr}_k(a(g, y), u_i^2(x_0)) = (z_\gamma^i \times \text{id})(a(g, y), u_i^2(x_0)) = (a^i(g, z^i(y)), u_i^2(x_0)) = (a^i(g, w \circ u_i^1(x_0)), u_i^2(x_0)) = (u_i^1(x_0), u_i^2(x_0)) = u(x_0)$, ezért $q(x, y) \in \tilde{M}$. $x_0 \in U_i$ és $(a(g, y), u_i^2(x_0)) \in D\gamma_{K(u)} \times B_c(k - i)$, tehát q képe tényleg $\tilde{U}_i$ -ben van. q folytonos és injektív (mert különböző x -ekhez különböző x_0 , különböző y -okhoz különböző $a(g, y)$ van hozzárendelve). F_t kompakt, ezért $F_t \times D_\delta^2$ is az, ezért q homeomorfizmus a képére.

Belátjuk, hogy q képe $\tilde{\pi}_i^{-1}((f|_{\tilde{V}_i})^{-1}(F_t)) = (f|_{\tilde{U}_i})^{-1}(\pi_i^{-1}(F_t))$. Ha $x \in F_t$, akkor x -nek $f|_{\tilde{U}_i}$ szerint egy őspontja van és mivel $f(q(x, 0)) = x_0 = x$, ezért ez benne van q képében. Ha $(\pi_i^{-1}(F_t) \setminus F_t)$ -ből veszünk egy $b(x', y')$ pontot, ahol $y' \neq 0$, akkor ennek $f|_{\tilde{U}_i}$ szerint i őspontja van. $f(q(x', \sqrt[i]{y'})) = x_0 = b(x', y')$, és $\sqrt[i]{y'}$ i különböző értékű lehet, ezért $f|_{\tilde{U}_i} \circ q$ szerint legalább i őspontja van. Mivel q injektív, ez azt jelenti, hogy az összes $f|_{\tilde{U}_i}$ szerinti őspont benne van q képében. Ezzel beláttuk, hogy q szürjektív. $\pi_i(f(q(x, y))) = \pi_i(x_0) = x \in F_t$, ezért q képe része $(f|_{\tilde{U}_i})^{-1}(\pi_i^{-1}(F_t))$ -nek. Tehát q egy $F_t \times D_\delta^2 \rightarrow \tilde{\pi}_i^{-1}((f|_{\tilde{V}_i})^{-1}(F_t))$ homeomorfizmus.

$\tilde{\pi}_i$ pedig nem más, mint az $F_t \times D_\delta^2 \rightarrow F_t$ vetítés (a megfelelő azonosítások után), ugyanis $\tilde{\pi}_i(q(x, y)) = (f|_{\tilde{V}_i})^{-1}(\pi_i(f(q(x, y)))) = (f|_{\tilde{V}_i})^{-1}(\pi_i(x_0)) = (f|_{\tilde{V}_i})^{-1}(x)$.

Tehát $\tilde{M}$ minden pontjának van euklideszi környezete, ezzel beláttuk, hogy $\tilde{M}$

sokaság, és az eddigiekből látszik, hogy f kielégíti az elágazó fedésekre vonatkozó összes feltételt. $\square$

Tétel. Minden k -rétű elágazó fedés indukálható $B_{bc}(k)$ -ből.

Bizonyítás. Legyen $f : \tilde{M} \rightarrow M$ egy k -rétű elágazó fedés, definiálni fogunk egy olyan $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ generikus leképezést, ami ezt indukálja. A konstrukció úgy megy, hogy először megadunk egy-egy leképezést külön az elágazó részsokaságok U_i környezetein, ill. ezeken kívül, majd ezeket összeragasztjuk. Ha az így kapott u_0 leképezés tényleg f -et indukálja, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor a ragasztás megváltoztatásával kapjuk meg a megfelelő u -t.

Legyenek $V_2, V_3, \dots, V_k \subset M$ és $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3, \dots, \tilde{V}_k \subset \tilde{M}$ az elágazó fedés definíciójában szereplő részsokaságok, $U_2, U_3, \dots, U_k$ és $\tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \dots, \tilde{U}_k$ ezek diszjunkt csőszerű környezetek. Ekkor minden $2 \leq i \leq k$ esetén $\tilde{U}_i$ egy irányított D^2 -nyaláb $\tilde{V}_i$ felett, ezért létezik egy (homotopikusan egyértelmű) $a_i : \tilde{V}_i \rightarrow CP^\infty$ leképezés, ami ezt a nyálábot indukálja (γ -ból). U_i D^2 -nyaláb V_i felett, és $f|_{\tilde{U}_i}$ i -szeresen képezi rá $\tilde{U}_i$ -t, ezért ezt $a_i \circ (f|_{\tilde{V}_i})^{-1}$ indukálja γ^i -ből. Legyen $\bar{a}_i : U_i \rightarrow D\gamma^i$ az efölötti nyáláb-leképezés. Feltehető, hogy a_i , és ezért $\bar{a}_i$ is sima. $f|_{f^{-1}(U_i) \setminus \tilde{U}_i} : f^{-1}(U_i) \setminus \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ $(k-i)$ -rétű fedés, ezért létezik egy $b_i : U_i \rightarrow B_c(k-i)$ leképezés, ami ezt indukálja. Legyen $u_0|_{U_i} = \bar{a}_i \times b_i : U_i \rightarrow D\gamma^i \times B_c(k-i)$.

Legyen $M_0 = M \setminus (\bigsqcup_{i=2}^k \text{int } U_i)$. f leszűkítése k -rétű fedés M_0 felett, legyen $c : M_0 \rightarrow B_c(k)$ az ezt indukáló leképezés. Legyen $P = \partial M_0 = \bigsqcup_{i=2}^k \partial U_i$ és $\tilde{P} = f^{-1}(P)$. Most adott két $P \rightarrow B_c(k)$ leképezés, $\bigsqcup_{i=2}^k r_i \circ (\bar{a}_i \times b_i)|_{\partial U_i}$ és $c|_P$. Mindkettő a $\tilde{P} \xrightarrow{f} P$ k -rétű fedést indukálja, ezért homotópok. Ezért c megváltoztatható a perem egy $P \times I$ -vel diffeomorf környezetén úgy, hogy a keletkező c' leképezés az eredetivel homotóp legyen, és $c'|_P = \bigsqcup_{i=2}^k r_i \circ (\bar{a}_i \times b_i)|_{\partial U_i}$ teljesüljön. Legyen $u_0|_{M_0} = c'$. Ekkor $u_0 : M \rightarrow B_{bc}(k)$ jóldefiniált, folytonos, és generikus.

Legyen $g : \tilde{N} \rightarrow M$ az u_0 által indukált elágazó fedés. u_0 -t úgy konstruáltuk, hogy minden i -re $g|_{g^{-1}(U_i)} : g^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ és $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ izomorf elágazó fedések legyenek U_i fölött. Legyen $d : f^{-1}(\bigsqcup_{i=2}^k U_i) \rightarrow g^{-1}(\bigsqcup_{i=2}^k U_i)$ egy diffeomorfizmus közöttük, amire $f|_{f^{-1}(\bigsqcup_{i=2}^k U_i)} = g|_{g^{-1}(\bigsqcup_{i=2}^k U_i)} \circ d$. f és g leszűkítései M_0 felett is izomorfak, legyen köztük $e : f^{-1}(M_0) \rightarrow g^{-1}(M_0)$ egy diffeomorfizmus. Legyen $\tilde{Q} = g^{-1}(P) = d(\tilde{P}) = e(\tilde{P})$. Ekkor $g|_{\tilde{Q}} : \tilde{Q} \rightarrow P$ egy k -rétű fedés és $l = d|_{\tilde{P}} \circ (e|_{\tilde{P}})^{-1} : \tilde{Q} \rightarrow \tilde{Q}$ ennek a fedésnek egy izomorfizmusa. Ha $l = \text{id}$, az

azt jelenti, hogy d és e megegyezik $\tilde{P}$ -re leszűkítve, így az uniójuk egy jóldefiniált $\tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ diffeomorfizmus. Ekkor f és g izomorf, tehát u_0 egy megfelelő indukáló leképezés.

Ha $l \neq \text{id}$, akkor legyen $\tilde{T} = (\tilde{Q} \times [0, 1]) / \sim$, ahol $(q, 0) \sim (l^{-1}(q), 1)$ minden $q \in \tilde{Q}$ -ra. Valamint legyen $T = P \times S^1 = (P \times [0, 1]) / \sim$, ahol $(p, 0) \sim (p, 1)$ minden $p \in P$ -re. A $g|_{\tilde{Q}} \times \text{id} : \tilde{Q} \times [0, 1] \rightarrow P \times [0, 1]$ leképezés indukál egy $\tilde{T} \rightarrow T$ k -rétű fedést a faktortereken. Legyen $v : T \rightarrow B_c(k)$ az ezt indukáló leképezés. Ezt a v -t tekinthetjük egy olyan $P \times [0, 1] \rightarrow B_c(k)$ leképezésnek, amelyre teljesül, hogy $v|_{P \times \{0\}} = v|_{P \times \{1\}} \cdot v|_{P \times \{0\}}$ és $u_0|_P$ homotópok, mert mindeketű a $\tilde{Q} \rightarrow P$ fedést indukálja, legyen $w_1 : P \times [-1, 0] \rightarrow B_c(k)$ egy homotópia, amire $w_1|_{P \times \{-1\}} = u_0|_P$ és $w_1|_{P \times \{0\}} = v|_{P \times \{0\}}$. Legyen $w_2 : P \times [1, 2] \rightarrow B_c(k)$, $w_2(p, x) = w_1(p, 1-x)$, ekkor w_1 , v és w_2 összeilleszthető egy $P \times [-1, 2] \rightarrow B_c(k)$ leképezéssé, amiből az intervallum átparaméterezésével kapunk egy $v' : P \times [0, 1] \rightarrow B_c(k)$ leképezést. Erre teljesül, hogy $v'|_{P \times \{0\}} = v'|_{P \times \{1\}} = u_0|_P$. Ezért v' tekinthető $T \rightarrow B_c(k)$ leképezésnek, és a konstrukciójából látszik, hogy homotóp v -vel, tehát ugyanazt a fedést indukálja.

M_0 diffeomorf azzal a sokasággal, amit úgy kapunk, hogy a pereméhez hozzáragasztjuk $P \times [0, 1]$ -et, legyen $m : M_0 \rightarrow M_0 \bigcup_{P=P \times \{0\}} P \times [0, 1]$ a diffeomorfizmus (amire $m(p) = (p, 1)$ minden $p \in P$ -re). $v'|_{P \times \{0\}} = u_0|_P = c'|_P$, ezért $M_0 \bigcup_{P=P \times \{0\}} P \times [0, 1]$ -en jóldefiniált a $c' \bigcup v'$ leképezés. Legyen $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ az a leképezés, amire $u|_{M_0} = (c' \bigcup v') \circ m$ és $u|_{\bigsqcup_{i=2}^k U_i} = u_0|_{\bigsqcup_{i=2}^k U_i}$. Ez jóldefiniált, mert $((c' \bigcup v') \circ m)|_P = (c' \bigcup v')|_{P \times \{1\}} = v'|_{P \times \{1\}} = u_0|_P$, és generikus.

Legyen az u által indukált elágazó fedés $r : \tilde{R} \rightarrow M$, és legyen $r^{-1}(P) = \tilde{S}$. Bebizonyítjuk, hogy r izomorf f -fel.

Tekintsük a következő kommutatív diagramot:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{R} & \xrightarrow{t} & g^{-1}(M_0) \bigcup_{q=(q,0)} \tilde{Q} \times [0, 1] \bigcup_{(l^{-1}(q),1)=q} g^{-1}\left(\bigsqcup_{i=2}^k U_i\right) & \longrightarrow & \tilde{N} \bigcup_{q=(q,0)=(l^{-1}(q),1)} \tilde{T} \\
r \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M = M_0 \bigcup_{i=2}^k \left(\bigsqcup U_i\right) & \xrightarrow{m \bigcup \text{id}} & M_0 \bigcup_{p=(p,0)} P \times [0, 1] \bigcup_{(p,1)=p} \left(\bigsqcup_{i=2}^k U_i\right) & \longrightarrow & M \bigcup_{p=(p,0)=(p,1)} T \\
u \downarrow & & \downarrow c' \bigcup v' \bigcup u_0|_{\bigsqcup_{i=2}^k U_i} & & \downarrow u_0 \bigcup v' \\
B_{bc}(k) & \xlongequal{\quad} & B_{bc}(k) & \xlongequal{\quad} & B_{bc}(k)
\end{array}$$

Ebben a függőleges nyilak közül a felső sorban levők elágazó fedések, az alsó sorban levők az ezeket indukáló leképezések ($M \cup T$ nem sokaság, hanem két sokaság összeragasztva, de $u_0 \cup v'$ indukál felette egy elágazó fedést).

Mivel $u = (c' \cup v' \cup u_0|_{\sqcup_{i=2}^k U_i}) \circ (m \cup \text{id})$, és $(m \cup \text{id})$ diffeomorfizmus, ezért r izomorf a $(c' \cup v' \cup u_0|_{\sqcup_{i=2}^k U_i})$ által indukált elágazó fedéssel, legyen $t : \tilde{R} \rightarrow g^{-1}(M_0) \cup \tilde{Q} \times [0, 1] \cup g^{-1}(\sqcup_{i=2}^k U_i)$ a diffeomorfizmus köztük. Ekkor $t(r^{-1}(M_0)) = g^{-1}(M_0) \cup \tilde{Q} \times [0, 1]$ és $t(\tilde{S}) = \tilde{Q} \times \{1\}$.

$g^{-1}(M_0)$ diffeomorf azzal a sokasággal, amit úgy kapunk, hogy a peremére ragasztunk $\tilde{Q} \times [0, 1]$ -et, és van egy olyan $\tilde{m} : g^{-1}(M_0) \rightarrow g^{-1}(M_0) \cup_{q=(q,0)} \tilde{Q} \times [0, 1]$ diffeomorfizmus köztük, amire $\tilde{m}(q) = (q, 1)$ (minden $q \in \tilde{Q}$ estén).

Megadunk egy $\tilde{M} \rightarrow \tilde{R}$ diffeomorfizmust: $f^{-1}(M_0)$ -on legyen az

$$f^{-1}(M_0) \xrightarrow{e} g^{-1}(M_0) \xrightarrow{\tilde{m}} g^{-1}(M_0) \cup \tilde{Q} \times [0, 1] \xrightarrow{t^{-1}} r^{-1}(M_0)$$

kompozíció, $f^{-1}(\sqcup_{i=2}^k U_i)$ -n pedig $f^{-1}(\sqcup_{i=2}^k U_i) \xrightarrow{d} g^{-1}(\sqcup_{i=2}^k U_i) \xrightarrow{t^{-1}} r^{-1}(\sqcup_{i=2}^k U_i)$. Ez jóldefiniált, ha a két rész P -n megyegyezik. Ezzel ekvivalens, hogy $(e^{-1} \circ \tilde{m}^{-1} \circ t)|_{\tilde{S}} = (d^{-1} \circ t)|_{\tilde{S}}$. Kiszámoljuk $(t^{-1} \circ d \circ e^{-1} \circ \tilde{m}^{-1} \circ t)|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ -ot, az kell, hogy ez az identikus leképezés. Mivel $d \circ e^{-1}$ leszűkítése megyegyezik l -lel, ezért amit számolni akarunk az $(t^{-1} \circ l \circ \tilde{m}^{-1} \circ t)|_{\tilde{S}}$. Legyen $s \in \tilde{S}$ tetszőleges, és legyen $t(s) = (q, 1) \in \tilde{Q} \times \{1\}$. Ekkor $(t^{-1} \circ l \circ \tilde{m}^{-1} \circ t)(s) = (t^{-1} \circ l \circ \tilde{m}^{-1})(q, 1) = (t^{-1} \circ l)(q) = t^{-1}(l(q))$. Viszont $t(\tilde{S})$ -ben a ragasztás miatt $l(q) = (l^{-1}(l(q)), 1) = (q, 1)$, tehát $t^{-1}(l(q)) = t^{-1}(q, 1) = s$. Tehát a kiszámolt leképezés tényleg az identitás $\tilde{S}$ -on, ami a korábbiak szerint azt jelenti, hogy meg tudtunk konstruálni egy izomorfizmust f és r között. Tehát u indukálja f -et. $\square$

Tétel. *Izomorf elágazó fedéseket indukáló leképezések homotópok.*

Bizonyítás. Legyen $f : \tilde{M} \rightarrow M$ egy k -rétű elágazó fedés, $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ az előző tételben megkonstruált indukáló leképezés, $\hat{u} : M \rightarrow B_{bc}(k)$ tetszőleges f -et indukáló generikus leképezés, belátjuk, hogy u és $\hat{u}$ homotópok. Legyenek $V_2, V_3, \dots, V_k \subset M$ az elágazó fedés definíciójában szereplő részsokaságok, ekkor $V_i = V_i^u = V_i^{\hat{u}}$. Legyen U_i olyan csőszerű környezete V_i -nek, hogy $\hat{u}(U_i) \subseteq D\gamma^i \times B_c(k-i)$ és $\hat{u}_i^1|_{U_i}$ sima. $u_i^1|_{V_i}$ és $\hat{u}_i^1|_{V_i} : V_i \rightarrow CP^\infty$ ugyanazt a nyalábot indukálják, ezért homotópok. U_i -nek deformációs retraktuma V_i és $D\gamma^i$ -nek deformációs retraktuma CP^∞ ezért $u_i^1|_{U_i}$ és

$\hat{u}_i^1|_{U_i} : U_i \rightarrow D\gamma^i$ is homotópok. $u_i^2|_{U_i}$ és $\hat{u}_i^2|_{U_i} : U_i \rightarrow B_c(k-i)$ ugyanazt a $(k-i)$ -rétű fedést indukálják, ezért ezek is homotópok. Tehát $\hat{u}|_{U_i}$ homotóp $u|_{U_i}$ -vel. Ez a homotópia kiterjed M -re ($\hat{u}$ -t meg tudjuk változtatni ∂U_i egy kis környezetében), ezért $\hat{u}$ homotóp egy olyan leképezéssel, ami U_i -n megegyezik u -val. A továbbiakban ezt jelöljük $\hat{u}$ -val.

Legyen $M_0 = M \setminus (\bigsqcup_{i=2}^k \text{int } U_i)$ és $P = \partial M_0 = \bigsqcup_{i=2}^k \partial U_i$. Mivel $\hat{u}(M_0) \subset B_{bc}(k) \setminus (\bigsqcup_{i=2}^k CP^\infty \times B_c(k-i))$, és ennek deformációs retraktuma $B_c(k)$ (hiszen minden i -re $(D\gamma^i \setminus CP^\infty) \times B_c(k-i)$ -nek deformációs retraktuma $S\gamma^i \times B_c(k-i)$), és $\hat{u}(P) = u(P) \subset \bigsqcup_{i=2}^k S\gamma^i \times B_c(k-i)$, ezért $\hat{u}|_{M_0}$ homotóp egy $B_c(k)$ -ba képező leképezéssel, méghozzá P -n rögzített homotópiával. Vagyis $\hat{u}$ -ról azt is feltehetjük, hogy $\hat{u}(M_0) \subset B_c(k)$. Legyen M_1 az a sokaság, amit úgy kapunk M_0 -ból, hogy a perem egy kis $P \times [0,1]$ -gyel diffeomorf környezetét elhagyjuk belőle. $\hat{u}$ és u leszűkítése izomorf k -rétű fedéseket indukálnak M_1 fölött, ezért homotópok. Így el tudjuk érni, hogy $\hat{u}$ és u megegyezzen M_1 -en is.

Most $\hat{u}|_{P \times [0,1]}$ és $u|_{P \times [0,1]} : P \times [0,1] \rightarrow B_c(k)$ két olyan leképezés, amelyek $P \times \{0,1\}$ -en megegyeznek, ezek összeilleszthetők egy $v : P \times S^1 \rightarrow B_c(k)$ leképezéssé. Legyen $\tilde{P} = f^{-1}(P)$, ekkor $\hat{u}|_{P \times [0,1]}$ és $u|_{P \times [0,1]}$ mindketten az $f|_{\tilde{P}} \times \text{id} : \tilde{P} \times [0,1] \rightarrow P \times [0,1]$ k -rétű fedést indukálják. Mivel $\hat{u}$ és u izomorf elágazó fedéseket indukálnak, ebből következik, hogy az $\hat{u}|_{P \times [0,1]}$ és $u|_{P \times [0,1]}$ összeragasztásával kapott v az $f|_{\tilde{P}} \times \text{id} : \tilde{P} \times S^1 \rightarrow P \times S^1$ k -rétű fedést indukálja. Ugyanezt indukálja a $P \times S^1 \rightarrow P \xrightarrow{u|_P} B_c(k)$ kompozíció is, ezért ez homotóp v -vel. A köztük lévő homotópia tekinthető egy olyan $\bar{v} : P \times D^2 \rightarrow B_c(k)$ leképezésnek, ami kiterjesztése v -nek. Egy ilyen $\bar{v}$ pedig megad egy $P \times \{0,1\}$ -en rögzített homotópiát $\hat{u}|_{P \times [0,1]}$ és $u|_{P \times [0,1]}$ között. Tehát u és $\hat{u}$ homotópok. $\square$

Tétel. Az $u_1 : M_1 \rightarrow B_{bc}(k)$ és $u_2 : M_2 \rightarrow B_{bc}(k)$ generikus leképezések pontosan akkor indukálnak kobordáns elágazó fedéseket, ha u_1 és u_2 $B_{bc}(k)$ bordizmuscsoportjának ugyanazt az elemét reprezentálja.

Bizonyítás. Jelölje $f_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M_1$ és $f_2 : \tilde{M}_2 \rightarrow M_2$ az u_1 és u_2 által indukált elágazó fedéseket.

Először tegyük fel, hogy u_1 és u_2 bordáns, azaz létezik egy W kobordizmus M_1 és M_2 között, és egy $v : W \rightarrow B_{bc}(k)$ leképezés, amire $v|_{M_1} = u_1$ és $v|_{M_2} = u_2$.

Feltehetjük, hogy ez a v generikus. Legyen $h : \tilde{W} \rightarrow W$ a v által indukált elágazó fedés. Az indukált elágazó fedés konstrukciójából látszik, hogy ennek a leszűkítései $h|_{\tilde{M}_1} = f_1$ és $h|_{\tilde{M}_2} = f_2$. Ekkor tehát h egy kobordizmus f_1 és f_2 között.

Másodszor tegyük fel, hogy f_1 és f_2 kobordáns, legyen $h : \tilde{W} \rightarrow W$ egy kobordizmus köztük. Legyen $v : W \rightarrow B_{bc}(k)$ egy h -t indukáló leképezés. Ekkor $v|_{M_1}$ f_1 -gyel, $v|_{M_2}$ pedig f_2 -vel izomorf elágazó fedést indukál, ezért az előző Tétel szerint ezek a leképezések homotópok u_1 -gyel ill. u_2 -vel. Mivel $v|_{M_1}$ és $v|_{M_2}$ nyilvánvalóan bordáns, azt kapjuk, hogy $[u_1] = [v|_{M_1}] = [v|_{M_2}] = [u_2]$. $\square$

Tétel. $\text{Cob}_{bc}(n, k) \cong \text{MSO}_n(B_{bc}(k))$

Bizonyítás. Definiálunk egy $H : \text{Cob}_{bc}(n, k) \rightarrow \text{MSO}_n(B_{bc}(k))$ függvényt: ha $f : \tilde{M} \rightarrow M$ egy elágazó fedés, akkor van olyan $u : M \rightarrow B_{bc}(k)$ generikus leképezés, ami ezt indukálja, legyen $H([f]) = [u]$. Ez jóldefiniált, mert ha f_1 és f_2 kobordáns elágazó fedések, azaz $[f_1] = [f_2]$, akkor az őket indukáló u_1 és u_2 leképezések bordánsak, tehát $[u_1] = [u_2]$. H homeomorfizmus mert ha f -et u , g -t v indukálja, akkor $(f \sqcup g)$ -t $(u \sqcup v)$ indukálja, tehát $H([f] \sqcup [g]) = H([f \sqcup g]) = [u \sqcup v] = [u] \sqcup [v]$. H szűrjektív, mert minden $[u]$ bordizmusosztályban van generikus u' leképezés, ami indukál egy f elágazó fedést, és ekkor $H([f]) = [u]$. Végül H injektív, mert ha $H([f]) = H([g])$, azaz egy f -et indukáló u és egy g -t indukáló v bordáns, akkor f és g kobordáns, azaz $[f] = [g]$. Tehát H csoport-izomorfizmus. $\square$

4. A $\text{Cob}_{bc}(n, k)$ csoport rangja

Tétel.

$$\text{rk } \text{Cob}_{bc}(n, k) = \begin{cases} (k-1) \sum_{t=0}^{m-1} \pi(t) + \pi(m) & \text{ha } n = 4m \\ (k-1) \sum_{t=0}^{m-1} \pi(t) & \text{ha } n = 4m - 2 \\ 0 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Bizonyítás. Először kiszámoljuk $B_{bc}(k)$ racionális együtthatós homológiacsoportjait.

$H_0(B_{bc}(k)) \cong \mathbb{Q}$, mert $B_{bc}(k)$ útösszefüggő.

A továbbiakban legyen $j > 0$. A $(B_{bc}(k), B_c(k))$ pár homologikus egzakt sorozatának felhasználásával határozzuk meg $H_j(B_{bc}(k))$ -t:

$$H_j(B_c(k)) \rightarrow H_j(B_{bc}(k)) \rightarrow H_j(B_{bc}(k), B_c(k)) \rightarrow H_{j-1}(B_c(k)) \rightarrow H_{j-1}(B_{bc}(k))$$

Ha $j > 1$, akkor $H_j(B_c(k)) \cong H_{j-1}(B_c(k)) \cong 0$, így $H_j(B_{bc}(k)) \cong H_j(B_{bc}(k), B_c(k))$.
 Ha $j = 1$, akkor $H_1(B_c(k)) \cong 0$ és $H_0(B_c(k)) \rightarrow H_0(B_{bc}(k))$ izomorfizmus (és mindkét csoport Q), mert $B_c(k)$ is útösszefüggő. Ebből következik, hogy $H_1(B_{bc}(k)) \cong H_1(B_{bc}(k), B_c(k))$.

A továbbiakban tehát a $H_j(B_{bc}(k), B_c(k))$ csoportot próbáljuk meghatározni:

$$\begin{aligned}
 H_j(B_{bc}(k), B_c(k)) &\cong H_j(B_{bc}(k)/B_c(k)) \cong \\
 &\cong H_j\left(\bigvee_{i=2}^k (D\gamma^i \times B_c(k-i)) / (S\gamma^i \times B_c(k-i))\right) \cong \\
 &\cong \bigoplus_{i=2}^k H_j((D\gamma^i \times B_c(k-i)) / (S\gamma^i \times B_c(k-i))) \cong \\
 &\cong \bigoplus_{i=2}^k H_j(((D\gamma^i/S\gamma^i) \times B_c(k-i)) / B_c(k-i)) \cong \\
 &\cong \bigoplus_{i=2}^k H_j((T\gamma^i \times B_c(k-i)) / B_c(k-i)) \cong \\
 &\cong \bigoplus_{i=2}^k H_j(T\gamma^i \times B_c(k-i), B_c(k-i))
 \end{aligned}$$

Most a $(T\gamma^i \times B_c(k-i), B_c(k-i))$ pár homologikus egzakt sorozatát írjuk fel:

$$\begin{aligned}
 H_j(B_c(k-i)) \rightarrow H_j(T\gamma^i \times B_c(k-i)) \rightarrow H_j(T\gamma^i \times B_c(k-i), B_c(k-i)) \rightarrow \\
 \rightarrow H_{j-1}(B_c(k-i)) \rightarrow H_{j-1}(T\gamma^i \times B_c(k-i))
 \end{aligned}$$

Ebből azt kapjuk, hogy $H_j(T\gamma^i \times B_c(k-i), B_c(k-i)) \cong H_j(T\gamma^i \times B_c(k-i))$. Ez utóbbit pedig a Künneth-formula felhasználásával határozzuk meg:

$$H_j(T\gamma^i \times B_c(k-i)) \cong \bigoplus_{p=0}^j H_p(T\gamma^i) \otimes H_{j-p}(B_c(k-i)) \cong H_j(T\gamma^i)$$

Q felett egy tér azonos dimenziós homológia- és kohomológiasoportjai izomorfak, ezért $H_j(T\gamma^i) \cong H^j(T\gamma^i)$. $T\gamma^i$ egy CP^∞ feletti 2 dimenziós vektornyaláb Thom-tere, ezért a Thom-izomorfizmus tételéből következik, hogy

$$H^j(T\gamma^i) \cong H^{j-2}(CP^\infty) \cong \begin{cases} Q & \text{ha } j \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } j \text{ páratlan} \end{cases}$$

Az eddigieket összefoglalva:

$$H_j(B_{bc}(k)) \cong \begin{cases} Q & \text{ha } j = 0 \\ Q^{k-1} & \text{ha } j > 0 \text{ és páros} \\ 0 & \text{ha } j \text{ páratlan} \end{cases}$$

A bordizmuscsoporthoz tehát a következőket kapjuk:

$$\mathrm{MSO}_n(B_{bc}(k)) \otimes Q \cong \bigoplus_{j=0}^n H_j(B_{bc}(k)) \otimes \mathrm{MSO}_{n-j} \cong \bigoplus_{t=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} H_{n-4t}(B_{bc}(k)) \otimes \mathrm{MSO}_{4t}$$

Ez a csoport 0, ha n páratlan.

$$\text{Ha } n = 4m: \quad \bigoplus_{t=0}^m H_{4m-4t}(B_{bc}(k)) \otimes Q^{\pi(t)} \cong Q^{(k-1) \sum_{t=0}^{m-1} \pi(t) + \pi(m)}$$

$$\text{Ha } n = 4m - 2: \quad \bigoplus_{t=0}^{m-1} H_{4m-4t-2}(B_{bc}(k)) \otimes Q^{\pi(t)} \cong Q^{(k-1) \sum_{t=0}^{m-1} \pi(t)}$$

Ezekből pedig leolvasható $\mathrm{Cob}_{bc}(n, k) \cong \mathrm{MSO}_n(B_{bc}(k))$ rangja. □

Irodalomjegyzék

- [1] P. E. Conner, *Differentiable Periodic Maps*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 181 pp., 1979.
- [2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 559 pp., 2002.
- [3] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer, 234. pp., 1978.
- [4] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill Book Company, 300 pp., 1966
- [5] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey and University of Tokyo Press, 330 pp., 1974.