

Egy explicit előállítás a Laplace-módszerben előforduló együtthetőkra

Nemes Gergő

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2012. május 13.

Kivonat

A Laplace-módszer integrálok aszimptotikus előállításának klasszikus eljárása. A módszer által szolgáltatott aszimptotikus sorfejtés együtthetői egy implicit módon adott függvény hatványsorának együtthetőiből származnak. Az aszimptotikus analízis tankönyvek nagy része nem ad általános formulát ezekre az együtthetőkra, csak az első néhányat sorolja fel. Az irodalomban azonban fellelhető néhány többé-kevésbé explicit előállítás is. Dingle (*Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*, Academic Press, New York (1973)) például komplex vonalintegrállal, míg Perron (*Sitzungsber. Bayr. Akad. Wissensch.*, 191–219 (1917)) explicit függvények magasabb rendű deriváltjai segítségével adta meg őket. Perron formulájához hasonlóan deriváltakat alkalmaz de Bruijn (*Asymptotic Methods in Analysis*, Dover, New York (1950)) egy képlete. Az eddig ismert leginkább explicit képlet a Campbell–Fröman–Walles–Wojdylo-féle formula (*Stud. Appl. Math.* **77**, 151–172 (1987); *SIAM Rev.* **48**, 76–96 (2006)), ami a Bell-polinomokat használja. A dolgozat célja egy új explicit formula megadása, melynek alapja a Perron-féle képlet és a Lagrange-interpoláció. Az új képlet alkalmazhatóságának szemléltetésére a Gamma-függvény és a Bell-számok aszimptotikus sorfejtéseit hozzuk példaként.

Szerző: Nemes Gergő, Matematikus M. Sc., második évfolyam

E-mail: nemesgergy@gmail.com

Témavezető: Dr. Tóth Árpád, egyetemi docens, ELTE TTK Analízis Tanszék

E-mail: toth@cs.elte.hu

Sok szeretettel ajánlom ezt a dolgozatot Sziráki Dorottyanak.

1. Bevezetés

A Laplace-módszer integrálok aszimptotikus előállításának klasszikus eljárása. A módszer által szolgáltatott aszimptotikus sorfejtésben szereplő együtthatók egy implicit módon definiált függvény hatványsorának együtthatóiból származnak. A témakör klasszikus tankönyveinek nagy része nem ad általános formulát ezekre az együtthatókra, csak az első néhányat sorolja fel. Mégis, az irodalomban fellelhető néhány többé-kevésbé explicit formula is. Dingle [3, 119. o.] például komplex vonalintegrállal, míg Perron [7] explicit függvények magasabb rendű deriváltjai segítségével állította elő őket. A Perron-formulához hasonlóan deriváltakat alkalmaz de Bruijn [1, 69. o.] egy képlete, de kevésbé explicit. A ma ismert leginkább explicitnek nevezhető képlet a Campbell–Fröman–Wallis–Wojdyło-féle formula [2, 9], ami a Bell-polinomokon alapul. A dolgozatban csatlakozunk a felsorolt szerzőkhöz, és egy új explicit formulát adunk meg az együtthatókra, amelynek alapja a Perron-féle képlet és a Lagrange-interpoláció. Az új képlet alkalmazhatóságának szemléltetésére a Gamma-függvény és a Bell-számok aszimptotikus sorfejtéseit hozzuk példaként, majd az első esetben kapott képletet összevetjük a Campbell–Fröman–Wallis–Wojdyło-féle formula által szolgáltatottal.

A dolgozat felépítése a következő: az első fejezetben áttekintjük a Laplace-módszert, majd részletesebben tárgyaljuk a fent említett szerzők formuláit. A második fejezetben kimondjuk és bizonyítjuk az új képletünket, majd példákon szemléltetjük annak alkalmazhatóságát. A dolgozat része egy függelék is, melyben a Bell-polinomok és az r -asszociált Stirling-számok alapvető tulajdonságait gyűjtöttük össze.

1.1. A Laplace-módszer

A Laplace-módszer speciális alakú integrálok aszimptotikus előállításának egyik legismertebb eljárása. Ebben a részben röviden áttekintjük a módszert. Tekintsük a következő alakú integrálokat:

$$I(x) = \int_a^b e^{-xf(t)} g(t) dt,$$

ahol (a, b) valós (véges vagy végtelen) intervallum, x nagy pozitív paraméter, f és g pedig folytonos függvények. Vegyük észre, hogy ha felosztjuk az intervallumot az f minimum és maximum helyeinél; ha szükséges, t előjelét megváltoztatva; az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy f -nek egyetlen minimuma van az $[a, b]$ intervallumban, a $t = a$ helyen. Az integrálási változót eltolva, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a = 0$ és tekinthetjük az

$$\boxed{I(x) = \int_0^c e^{-xf(t)} g(t) dt} \tag{1.1}$$

alakú integrálokat, ahol $c > 0$ és f -nek egyetlen minimuma van $[0, c]$ -n, a $t = 0$ pontban. Tegyük fel továbbá, hogy $t \rightarrow 0^+$ esetén

$$f(t) \sim \sum_{k \geq 0} a_k t^k, \quad g(t) \sim \sum_{k \geq 0} b_k t^{k+\alpha-1},$$

valamilyen $\alpha > 0$ számmal, és az f aszimptotikus sora tagonként differenciálható:

$$f'(t) \sim \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} t^k,$$

ha $t \rightarrow 0^+$. Hajtsuk végre (1.1)-ben a $t \rightarrow s$ változócsere, amit az $s = f(t) - f(0)$ egyenlet definiál:

$$I(x) = e^{-xf(0)} \int_0^{f(c)-f(0)} e^{-xs} h(s) ds, \quad (1.2)$$

ahol $h(s) = g(t(s))/f'(t(s))$. A h az $s = 0$ pontban az alábbi alakú sorfejtéssel rendelkezik:

$$h(s) \sim \sum_{n \geq 0} c_n s^{(n+\alpha)/m-1}, \quad (1.3)$$

ahol a c_n együtthatók a_k és b_k függvényei, az m pedig az első nem eltűnő együttható indexe az f sorfejtésében, leszámítva az a_0 konstans tagot. Az $I(x)$ integrál $x \rightarrow +\infty$ esetre vonatkozó aszimptotikus sora most már meghatározható a Watson-lemma segítségével: az (1.3) sorfejtést (1.2)-be helyettesítve, az integrálás felső határát kiterjesztve $+\infty$ -ig, majd tagonként integrálva kapjuk, hogy

$$\boxed{I(x) \sim e^{-xf(0)} \sum_{n \geq 0} \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m}\right) \frac{c_n}{x^{(n+\alpha)/m}},} \quad (1.4)$$

ha $x \rightarrow +\infty$ (lásd például [10, 58. o.]). Az itt előforduló c_n együttható az

$$s = f(t) - f(0) \sim \sum_{k \geq 1} a_k t^k$$

sor inverze és a $g(t)/f'(t)$ függvény kompozíciójának (aszimptotikus) hatványsorában szereplő, az $s^{(n+\alpha)/m-1}$ taghoz tartozó együtthatóként lett definiálva. Ebből a definícióból nehéz explicit képletet felírni a c_n számokra. Ha $f(t)$ és $g(t)$ $t^{1-\alpha}$ holomorfak a 0 egy környezetében, akkor a Cauchy-formulából kiindulva ez lehetséges, amint azt a következő alfejezetben látni fogjuk.

Megjegyezzük, hogy létezik a Laplace-módszernek komplex vonalintegrálokra vonatkozó változata is. Tekintsük a

$$J(x) = \int_C e^{-xf(z)} g(z) dz$$

alakú integrált, ahol x nagy valós paraméter, C pedig egy görbe a komplex számsíkon. Az f és g holomorf függvények egy, a C -t tartalmazó tartományon. Az eljárás lényege, hogy a Cauchy-tételt használva olyan C' útba deformáljuk C -t, amin $\Im m(f)$ konstans, és áthalad egy olyan ponton ahol $\Re e(f)$ -nek nyeregponja van (innen ered a Nyeregpon-módszer elnevezés). Az integrálási változó alkalmas transzformációja után a feladat (1.1) típusú integrálok aszimptotikus sorfejtésének problémájára redukálódik.

1.2. Korábbi képletek

Ebben a részben – bizonyításokkal együtt – áttekintjük a bevezetőben említett korábbi képleteket a Laplace-módszer együthetűire. Tegyük fel, hogy $f(t)$ és $g(t)t^{1-\alpha}$ holomorfak a 0 egy környezetében. Felhasználva, hogy $t^{m-\alpha}h(t^m) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$ és $h(s)ds = g(t)dt$, a Cauchy-formula alapján

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w^{m-\alpha} h(w^m)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i m} \int_C \frac{h(s)}{s^{(n+\alpha)/m}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i m} \int_C \frac{g(t)}{s^{(n+\alpha)/m}} dt = \frac{1}{2\pi i m} \int_C \frac{g(t)}{(f(t) - f(0))^{(n+\alpha)/m}} dt, \end{aligned}$$

azaz

$$c_n = \frac{1}{2\pi i m} \int_C \frac{g(t)}{(f(t) - f(0))^{(n+\alpha)/m}} dt,$$

ahol C az origót pozitív irányban megkerülő egyszerű zárt görbe. Ez Dingle formulája. Elvégezve az

$$\frac{1}{2\pi i m} \int_C \frac{g(t)}{(f(t) - f(0))^{(n+\alpha)/m}} dt = \frac{1}{2\pi i m} \int_C \frac{g(t)}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{t^m}{f(t) - f(0)} \right)^{(n+\alpha)/m} \frac{1}{t^{n+1}} dt$$

átalakítást, majd figyelembe véve $g(t)t^{1-\alpha}$ hatványsorát és a

$$\left(\frac{t^m}{f(t) - f(0)} \right)^{(n+\alpha)/m} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{t^m}{f(t) - f(0)} \right)^{(n+\alpha)/m} \right]_{t=0} t^k,$$

sorfejtést, Cauchy-szorzás és tagonkénti integrálást követően azt kapjuk, hogy

$$c_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^n \frac{b_{n-k}}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{t^m}{f(t) - f(0)} \right)^{(n+\alpha)/m} \right]_{t=0}.$$

Ez a Perron-formula. Felírhatjuk így is:

$$c_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^n b_{n-k} \frac{1}{a_m^{(n+\alpha)/m}} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{f(t) - f(0)}{a_m t^m} \right)^{-(n+\alpha)/m} \right]_{t=0}. \quad (1.5)$$

Az f sorfejtése alapján

$$\frac{f(t) - f(0)}{a_m t^m} = \frac{\sum_{k \geq 0} a_{m+k} t^{m+k}}{a_m t^m} = 1 + \frac{1}{a_m} \sum_{k \geq 1} a_{m+k} t^k.$$

Az (A.2) generátorfüggvény szerint

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{a_m} \sum_{k \geq 1} a_{m+k} t^k \right)^{-(n+\alpha)/m} \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{j=0}^k \binom{-\frac{n+\alpha}{m}}{j} B_{k,j}(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+k-j+1}) \frac{1}{a_m^j} \right) t^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m}\right)} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{a_m^j} \frac{B_{k,j}(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+k-j+1})}{j!} \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m} + j\right) \right) t^k, \end{aligned}$$

ami a Taylor-formula alapján azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{f(t) - f(0)}{a_m t^m} \right)^{-(n+\alpha)/m} \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m}\right)} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{a_m^j} \frac{B_{k,j}(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+k-j+1})}{j!} \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m} + j\right). \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezt az (1.5) összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\boxed{c_n = \frac{1}{m \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m}\right)} \sum_{k=0}^n b_{n-k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{a_m^{(n+\alpha)/m+j}} \frac{B_{k,j}}{j!} \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m} + j\right)}, \quad (1.6)$$

ahol $B_{k,j} = B_{k,j}(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+k-j+1})$. Ez a Campbell–Fröman–Wallis–Wojdyło-féle formula. Írjuk át az (1.1) integrált a következő alakba:

$$I(x) = e^{-x f(0)} \int_0^c e^{-a_m x t^m} e^{-x(f(t)-f(0)-a_m t^m)} g(t) dt. \quad (1.7)$$

Legyen

$$e^{-x(f(t)-f(0)-a_m t^m)} g(t) = \sum_{n \geq 0} D_n(x) t^{n+\alpha-1},$$

ahol $D_n(x)$ legfeljebb $\lfloor \frac{n}{m+1} \rfloor$ -edfokú polinom. Behelyettesítve ezt (1.7)-be, tagonként integrálva, majd $1/x$ növekvő hatványai szerint rendezve a sort azt találjuk, hogy

$$\boxed{c_n = \frac{1}{m \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m}\right)} \sum_{k=0}^n \frac{d_k^{(n+mk)}}{a_m^{(n+\alpha)/m+k}} \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m} + k\right)},$$

ahol

$$d_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} D_n(x) \right]_{x=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{m+1} \right\rfloor.$$

A de Bruijn-formula ennek az a speciális esete, amikor $m = 2$ és $\alpha = 1$.

2. Új explicit előállítás az együtthatókra

A következő tételünk, a dolgozat fő eredménye, egy új explicit előállítást ad a Laplace-módszer együtthatóira.

2.1. Tétel. Az (1.4) aszimptotikus sorfejtésben szereplő c_n együtthatók a

$$c_n = \frac{1}{m\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m}\right)} \sum_{k=0}^n \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m} + k + 1\right) b_{n-k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{\left(\frac{n+\alpha}{m} + j\right)} \frac{A_{k+mj,j}}{a_m^{(n+\alpha)/m+j} (k-j)! j!} \quad (2.1)$$

képlettel adhatóak meg, ahol α , m , a_n és b_n az 1.1 alfejezetben definiáltak. Az $A_{k+mj,j} = A_{k+mj,j}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+k})$ polinomok pedig az

$$(f(t) - f(0))^k = \sum_{n \geq 0} A_{n,k}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{(1-k)m+n}) t^n \quad (2.2)$$

generátorfüggvénnyel értelmezettek, ahol f az (1.1) integrálban szereplő függvény.

A bizonyítás előtt megnézzük az $A_{n,k}$ polinomok néhány tulajdonságát. A definícióból következik az

$$A_{n,k}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{(1-k)m+n}) = \sum \frac{k!}{(k-j)! j_1! j_2! \dots j_{n-km}!} a_m^{k-j} a_{m+1}^{j_1} a_{m+2}^{j_2} \dots a_{(1-k)m+n}^{j_{n-km}}$$

képlet, ahol $j_1 + 2j_2 + \dots + (n-km)j_{n-km} = n - km$ és $j_1 + j_2 + \dots + j_{n-km} = j$. Ha $n \geq m$, akkor $A_{n,1}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_n) = a_n$, továbbá $n \geq mk$, $k \geq 2$ esetén

$$\begin{aligned} A_{n,k}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{(1-k)m+n}) \\ = \sum_{j=m(k-1)}^{n-m} k \left(1 - \frac{j}{n}\right) a_{n-j} A_{j,k-1}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{(2-k)m+j}), \end{aligned}$$

$n < mk$ esetén pedig $A_{n,k} \equiv 0$. Ez a rekurzió a (2.2) definícióból differenciálás útján kapható meg. A definícióból és az (A.2) generátorfüggvényből könnyedén meggondolható, hogy az $A_{n,k}$ polinomok és a Bell-polinomok a következő kapcsolatban állnak

egymással:

$$\begin{aligned} A_{n,k} (a_m, a_{m+1}, \dots, a_{(1-k)m+n}) \\ = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_m^{k-j} B_{n-mk,j} (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{(1-k)m+n-j+1}). \end{aligned}$$

2.1. A képlet bizonyítása

Írjuk fel a Perron-formulát a

$$c_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^n b_{n-k} \frac{1}{a_m^{(n+\alpha)/m}} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{a_m t^m}{f(t) - f(0)} \right)^{(n+\alpha)/m} \right]_{t=0} \quad (2.3)$$

alakban. Definíáljuk az $\{F_n(x)\}_{n \geq 0}$ függvénysorozatot az

$$\left(\frac{a_m t^m}{f(t) - f(0)} \right)^x = \sum_{n \geq 0} F_n(x) t^n$$

generátorfüggvénnyel. Ezzel (2.3) a

$$c_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^n b_{n-k} \frac{1}{a_m^{(n+\alpha)/m}} F_k \left(\frac{n+\alpha}{m} \right) \quad (2.4)$$

formában írható. Az (A.2) generátorfüggvény szerint

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_m t^m}{f(t) - f(0)} \right)^x &= \left(1 + \frac{1}{a_m} \sum_{n \geq 1} a_{m+n} t^n \right)^{-x} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^n \binom{-x}{j} B_{n,j} (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n-j+1}) \frac{1}{a_m^j} \right) t^n, \end{aligned}$$

azaz $F_n(x)$ legfeljebb n -edfokú polinom. Az $x = \frac{n+\alpha}{m}$ helyettesítéssel visszajutnánk az (1.6) Campbell–Fröman–Wallis–Wojdylo-féle formulához. Az ötlet az, hogy más formában írjuk fel az $F_n(x)$ polinomokat. Ha k pozitív egész, akkor az iménti levezetésből adódik, hogy

$$F_n(-k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_{n,j} (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n-j+1}) \frac{1}{a_m^j}.$$

Lagrange-interpolációt alkalmazva

$$F_n(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{F_n(-k)}{(n-k)!k!(x+k)}. \quad (2.5)$$

Legyen

$$(f(t) - f(0))^k = \sum_{n \geq mk} a_m^k F_{n-mk}(-k) t^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} A_{n,k}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{(1-k)m+n}) t^n.$$

Felhasználva ezt a definíciót, a (2.5) formulát, $n \rightarrow k$ és $k \rightarrow j$ indexcserével azt kapjuk, hogy

$$F_k\left(\frac{n+\alpha}{m}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m} + k + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{m}\right)} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{\left(\frac{n+\alpha}{m} + j\right)} \frac{A_{k+mj,j}(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+k})}{a_m^j (k-j)!j!}.$$

Ha ezt visszahelyettesítjük a (2.4) kifejezésbe, akkor éppen a (2.1) formulát kapjuk.

2.2. Első példa: a Gamma-függvény

A Gamma-függvény aszimptotikus sorának együtthatóira keresünk explicit képletet. Az aszimptotikus sor klasszikus, jól ismert eredmény, a teljesség kedvéért levezetjük. Kiindulási pontunk a

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x-1} ds$$

integráلهőállítás ($x > 0$). A $t = \log(s/x)$ helyettesítés után

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_0^{+\infty} e^{-x(e^t - t - 1)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-x(e^{-t} + t - 1)} dt \quad (2.6)$$

adódik. Vizsgáljuk az első integrált. Az 1.1 alfejezet jelöléseivel élve $f(t) = e^t - t - 1$, $g(t) \equiv 1$, $\alpha = 1$, $m = 2$, $a_n = 1/n!$, $b_0 = 1$ és $b_n = 0$ ha $n \geq 1$. Az (1.4) formulát használva

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(e^t - t - 1)} dt \sim \sum_{n \geq 0} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{c_n}{x^{(n+1)/2}}, \quad (2.7)$$

ha $x \rightarrow +\infty$. Hasonlóan adódik, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(e^{-t} + t - 1)} dt \sim \sum_{n \geq 0} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{(-1)^n c_n}{x^{(n+1)/2}},$$

amint $x \rightarrow +\infty$. Visszahelyettesítve a kapott sorokat a (2.6) összefüggésbe, rendezés után kapjuk, hogy

$$\Gamma(x) \sim x^{x-1/2} e^{-x} \sqrt{2\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{x^n}$$

ahol

$$\gamma_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) c_{2n},$$

a nevezetes Stirling-együtthatók. Kiszámításukhoz elég a (2.7) sorfejtésben szereplő c_n együtthatókat meghatározni. Az $A_{n,k}$ polinomokat kifejezhetjük a Másodfajú 1-asszociált Stirling-számokkal (lásd az A.2 részt):

$$(e^t - t - 1)^k = \sum_{n \geq 0} \frac{k!}{n!} S_1(n, k) t^n,$$

azaz

$$A_{n,k} \left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots, \frac{1}{(n-2k+2)!} \right) = \frac{k!}{n!} S_1(n, k).$$

A (2.1) formula azt adja, hogy

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{3n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sum_{k=0}^n \frac{2^{n/2+k+1/2}}{(n+2k+1)(n-k)!} \frac{(-1)^k S_1(n+2k, k)}{(n+2k)!},$$

amiből a definíció szerint

$$\gamma_n = \Gamma\left(3n + \frac{3}{2}\right) \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{n+k+1}}{\sqrt{\pi} (2n+2k+1)(2n-k)!} \frac{(-1)^k S_1(2n+2k, k)}{(2n+2k)!}.$$

Felhasználva az (A.6) összefüggést,

$$\gamma_n = \Gamma\left(3n + \frac{3}{2}\right) \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{n+k+1}}{\sqrt{\pi} (2n+2k+1)(2n-k)!} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} S(2n+2k-j, k-j)}{j! (2n+2k-j)!}. \quad (2.8)$$

Ennek a formulának a bizonyítása fellelhető a dolgozat szerzőjének Stirling-együtthatókkal foglalkozó cikkében is [6]. Az első öt együtthatóra $\gamma_0 = 1$ és

$$\gamma_1 = \frac{1}{12}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{288}, \quad \gamma_3 = -\frac{139}{51840}, \quad \gamma_4 = -\frac{571}{2488320}$$

adódik. Ha a

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_0^{+\infty} e^{-x(-\log(1+t)+t)} dt + \int_0^1 e^{-x(-\log(1-t)-t)} dt \quad (2.9)$$

felírásból indulunk ki, akkor hasonló okoskodást követően, az Elsőfajú Stirling-számokkal kapunk egy előállítást:

$$\gamma_n = \Gamma\left(3n + \frac{3}{2}\right) \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{n+k+1}}{\sqrt{\pi} (2n+2k+1) (2n-k)!} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} s(2n+2k-j, k-j)}{j! (2n+2k-j)!}.$$

Figyeljük meg, hogy ez a formula megegyezik a (2.8) képlettel, leszámítva hogy "S helyett s-t írtunk". Ha az (1.6) Campbell–Fröman–Walles–Wojdylo-féle formulát akarjuk használni, akkor a $B_{n,k}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(n-k+3)!}\right)$ Bell-polinomokat kell kiszámítanunk. Az (A.1) generátorfüggvény szerint

$$\exp\left(y \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{(n+2)!}\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n B_{n,k}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(n-k+3)!}\right) \frac{y^k}{k!} \right) t^n.$$

Másrésről, az (A.5) generátorfüggvény alapján

$$\begin{aligned} \exp\left(y \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{(n+2)!}\right) &= \exp\left(\frac{y}{t^2} \left(e^t - t - 1 - \frac{t^2}{2}\right)\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor n/2+1 \rfloor} S_2(n, j) \frac{y^j}{t^{2j}} \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{S_2(n+2k, k)}{(n+2k)!} y^k \right) t^n, \end{aligned}$$

azaz

$$B_{n,k}\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(n-k+3)!}\right) = \frac{k! S_2(n+2k, k)}{(n+2k)!}.$$

Végül a Campbell–Fröman–Walles–Wojdylo-féle formula és a γ_n definíciója azt adja, hogy

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{S_2(2n+2k, k)}{2^{n+k} (n+k)!}.$$

Felhasználva az (A.7) képletet, a

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{n+k} \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j j!} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(-1)^{k-j-i} S(2n+2k-2j-i, k-j-i)}{i! (2n+2k-2j-i)!} \quad (2.10)$$

előállításhoz jutunk. A (2.9) alakot használva a Campbell–Fröman–Walles–Wojdylo-féle képlet a

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{n+k} \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j j!} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(-1)^{k-j-i} s(2n+2k-2j-i, k-j-i)}{i! (2n+2k-2j-i)!}$$

formulát adja, amely levezetése megtalálható López, Pagola és Sinusía cikkében is [5]. Megjegyezzük, hogy a (2.8) képlet felírható a

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{n+k+1} \Gamma(3n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (2n + 2k + 1) (2n - k)!} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j! (2n + 2k - j)!} \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(-1)^i i^{2n+2k-j}}{i! (k - j - i)!}$$

”teljesen” explicit formában is, felhasználva a Másodfajú Stirling-számokra vonatkozó

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

képletet. A *Derive 6* programcsomag segítségével teszteltük a (2.8) és a (2.10) képleteket, az eredményeket az 1. táblázat tartalmazza. (A számítógép 32-bites *Windows 7 Professional* operációs rendszert használt, *Mobile AMD Sempron 3500+* 1,8 GHz-es processzorral és 512 MB memóriával rendelkezett.) Azt tapasztaltuk, hogy az új módszerrel kapott formula segítségével sokkal gyorsabban határozhatóak meg a Stirling-együtthetők.

1. táblázat. A $[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n]$ vektor kiszámításához szükséges idő.

n	(2.8)	(2.10)
10	0,5 másodperc	2,6 másodperc
20	5,3 másodperc	50,2 másodperc
50	183,0 másodperc	3891,2 másodperc

2.3. Második példa: a Bell-számok

Az $m \geq 0$ elemű halmaz partícióinak számát B_m -mel jelöljük és m -edik Bell-számnak nevezzük. Az első néhány a következő: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, ... Célunk a B_m számok aszimptotikus sorfejtésének (lásd [1, 107. o.]) együtthetőire explicit képletet adni. Az

$$e^{e^t-1} = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} t^m$$

exponenciális generátorfüggvényből kiindulva, felhasználva a Cauchy-formulát, a

$$\frac{B_m}{m!} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{e^u-1}}{u^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- (m+1) \left(\log \left(1 + \frac{it}{u} \right) - \frac{e^{it}-1}{u} \right) \right) dt$$

integrálleőállításhoz juthatunk, ahol $u = u(m)$ az $u \log u = m + 1$ egyenlettel definiált [1, 105. o.]. Széjbontjuk az integrált két (1.2) típusú integrál összegére:

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+1}}{e^{e^u-1}} \frac{2\pi}{m!} B_m &= \int_0^{+\infty} \exp \left(- (m+1) \left(\log \left(1 + \frac{it}{u} \right) - \frac{e^{it} - 1}{u} \right) \right) dt \\ &+ \int_0^{+\infty} \exp \left(- (m+1) \left(\log \left(1 - \frac{it}{u} \right) - \frac{e^{-it} - 1}{u} \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vizsgáljuk az első integrált. Az 1.1 alfejezet jelöléseivel élve $f(t) = \log \left(1 + \frac{it}{u} \right) - \frac{e^{it}-1}{u}$, $g(t) \equiv 1$, $\alpha = 1$, $m = 2$, $a_n = -i^n \frac{u^{n-1} + (-1)^n (n-1)!}{n! u^n}$, $b_0 = 1$ és $b_n = 0$ ha $n \geq 1$. Az (1.4) formulát használva

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp \left(- (m+1) \left(\log \left(1 + \frac{it}{u} \right) - \frac{e^{it} - 1}{u} \right) \right) dt \\ \sim \sum_{n \geq 0} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) \frac{c_n(u)}{(m+1)^{(n+1)/2}} = \sum_{n \geq 0} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) \frac{c_n(u)}{u^{(n+1)/2}} e^{-(n+1)u/2}, \end{aligned}$$

ha $m \rightarrow +\infty$. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp \left(- (m+1) \left(\log \left(1 - \frac{it}{u} \right) - \frac{e^{-it} - 1}{u} \right) \right) dt \\ \sim \sum_{n \geq 0} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) \frac{(-1)^n c_n(u)}{(m+1)^{(n+1)/2}} = \sum_{n \geq 0} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) \frac{(-1)^n c_n(u)}{u^{(n+1)/2}} e^{-(n+1)u/2}, \end{aligned}$$

amint $m \rightarrow +\infty$. Visszahelyettesítve a kapott sorokat a (2.11) összefüggésbe, rendezés után adódik, hogy

$$\boxed{\frac{B_m}{m!} \sim \frac{e^{e^u - u/2 - 1}}{u^{m+1/2} \sqrt{2\pi} (u+1)} \sum_{n \geq 0} \frac{\delta_n(u) e^{-nu}}{(u+1)^n u^n},}$$

ahol

$$\delta_n(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(u+1)^{n+1/2}}{u} c_{2n}(u).$$

A $\delta_n(u)$ együtthatók kiszámításához elég a $c_n(u)$ együtthatókat meghatározni. Az $A_{n,k}$ polinomokat kifejezhetjük az Első-, és Másodfajú Stirling-számokkal:

$$\begin{aligned}
& \left(\log \left(1 + \frac{it}{u} \right) - \frac{e^{it} - 1}{u} \right)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{(e^{it} - 1)^{k-j}}{u^{k-j}} \log^j \left(1 + \frac{it}{u} \right) \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{1}{u^{k-j}} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(k-j)! i^n}{n!} S(n, k-j) t^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{j! i^n}{n!} s(n, j) t^n \right) \\
&= i^n k! \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u^{k-j}} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n!} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} s(r, j) S(n-r, k-j) \right) t^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left(i^n \frac{k!}{n!} \sum_{j=k}^n \left(\sum_{r=j-k}^j (-1)^{k+r} \binom{n}{r} s(r, k-j+r) S(n-r, j-r) \right) \frac{1}{u^j} \right) t^n,
\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}
A_{n,k} & \left(\frac{u+1}{2u^2}, i \frac{u^2-2}{6u^3}, \dots, i^n \frac{(-1)^k u^{n-2k+1} + (-1)^{n-k} (n-2k+1)!}{(n-2k+2)! u^{n-2k+2}} \right) \\
&= i^n \frac{k!}{n!} \sum_{j=k}^n \left(\sum_{r=j-k}^j (-1)^{k+r} \binom{n}{r} s(r, k-j+r) S(n-r, j-r) \right) \frac{1}{u^j}.
\end{aligned}$$

Így a (2.1) formula szerint

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3n}{2} + \frac{3}{2}\right)} c_n(u) \\
&= i^n \sum_{k=0}^n \frac{\sum_{j=k}^{n+2k} \left(\sum_{r=j-k}^j (-1)^{k+r} \binom{n+2k}{r} s(r, k-j+r) S(n+2k-r, j-r) \right) u^{n+2k-j+1}}{\left(\frac{u+1}{2}\right)^{n/2+k+1/2} (n+2k+1)! (n-k)!},
\end{aligned}$$

amiből a definíció alapján

$$\boxed{\delta_n(u) = \frac{\Gamma\left(3n + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^{n+k} P_{n,k}(u)}{(u+1)^k},} \quad (2.12)$$

ahol

$$\boxed{P_{n,k}(u) = \sum_{j=k}^{2n+2k} \left(\sum_{r=j-k}^j (-1)^r \frac{2^{n+k+1} s(r, k-j+r) S(2n+2k-r, j-r)}{(2n+2k+1)(2n-k)!(2n+2k-r)!r!} \right) u^{2n+2k-j}.}$$

Az első három együtthatóra $\delta_0(u) = 1$ és

$$\delta_1(u) = -\frac{2u^4 - 3u^3 - 20u^2 - 18u + 2}{24(u+1)^2},$$

$$\delta_2(u) = \frac{4u^8 - 156u^7 - 695u^6 - 696u^5 + 1092u^4 + 2916u^3 + 1972u^2 - 72u + 4}{1152(u+1)^4}$$

adódik. Ha az (1.6) Campbell–Fröman–Wallis–Wojdyło-féle formulát szeretnénk használni, akkor a $B_{n,k} \left(i \frac{u^2-2}{6u^3}, -\frac{u^3+6}{24u^4}, \dots, i^{n-k+1} \frac{u^{n-k+2} + (-1)^{n-k+1} (n-k+2)!}{(n-k+3)!u^{n-k+3}} \right)$ Bell-polinomokat kellene kiszámítanunk. Az (A.1) generátorfüggvény szerint

$$\begin{aligned} & \exp \left(y \sum_{n \geq 1} i^n \frac{u^{n+1} + (-1)^n (n+1)!}{(n+2)!u^{n+2}} t^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n B_{n,k} \left(i \frac{u^2-2}{6u^3}, -\frac{u^3+6}{24u^4}, \dots, i^{n-k+1} \frac{u^{n-k+2} + (-1)^{n-k+1} (n-k+2)!}{(n-k+3)!u^{n-k+3}} \right) \frac{y^k}{k!} \right) t^n. \end{aligned}$$

Ez a generátorfüggvény az

$$\begin{aligned} & \exp \left(y \sum_{n \geq 1} i^n \frac{u^{n+1} + (-1)^n (n+1)!}{(n+2)!u^{n+2}} t^n \right) \\ &= \exp \left(\frac{y}{t^2} \left(\log \left(1 + \frac{it}{u} \right) - \frac{it}{u} - \frac{t^2}{2u^2} \right) \right) \exp \left(-\frac{y}{ut^2} \left(e^{it} - it - 1 + \frac{t^2}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

alakban is írható. Erre alkalmazhatnánk az (A.4) és (A.5) generátorfüggvényeket, ami ebben az esetben már reménytelenül bonyolult kifejezéseket eredményez. Ha lemondunk az explicit formulára vonatkozó igényünkről, akkor az (A.3) rekurziót használva alkalmazhatjuk a Campbell–Fröman–Wallis–Wojdyło-féle formulát.

3. Összefoglalás

A dolgozatban a Laplace-típusú integrálok aszimptotikus sorfejtéseinek együtthatóival foglalkoztunk. Áttekintettük az irodalomban fellelhető explicit előállításokat, majd egy teljesen újat bizonyítottunk. A bizonyítás egy korábbi eredményt, a Perron-formulát és a Lagrange-interpolációt használta. Az új előállítás alkalmazhatóságát két példán szemléltettük. Az első a Gamma-függvény volt, az aszimptotikus sorban előforduló nevezetes Stirling-együtthatókra kerestünk explicit formulát. Az új eljárással kapott képletet összehasonlítottuk egy korábbi eredmény, a Campbell–Fröman–Wallis–Wojdyło-féle formula által szolgáltatottal. Azt láttuk, hogy az új módszerrel egyszerűbb, gyorsabban számítható képletet kaptunk a Stirling-együtthatókra. A második

példánk a Bell-számok voltak. Az új módszerünkkel ismét fel tudtunk írni explicit előállítás az aszimptotikus sorfejtés együtthatóira, a Campbell–Fröman–Wallis–Wojdylo-féle formulát használva ez azonban már reménytelennek bizonyult.

A. Függelék

A függelék két részből áll: az első a Bell-polinomok, a második az r -asszociált Stirling-számok definícióit és alapvető tulajdonságait tartalmazza.

A.1. Bell-polinomok

A dolgozatban szerepelnek az úgynevezett Bell-polinomok, definíciójuk a következő:

A.1. Definíció. Legyenek $n \geq k \geq 1$ egész számok. Az $n - k + 1$ változós $B_{n,k}$ Bell-polinomokat a

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{k!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_{n-k+1}^{j_{n-k+1}}$$

formulával értelmezzük, ahol az összegzést azokra a $j_1, j_2, \dots, j_{n-k+1}$ nemnegatív egészekre végezzük, amelyekre $j_1 + j_2 + \dots + j_{n-k+1} = k$ és $j_1 + 2j_2 + \dots + (n - k + 1)j_{n-k+1} = n$.

A dolgozatban előfordulnak olyan összegek, melyekben 0 indexet tartalmazó Bell-polinomok vannak. Legyen $B_{0,0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ és $B_{n,0} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ha $n \geq 1$. A definíció egyszerű következménye a következő. Legyenek

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} a_n t^n \quad \text{és} \quad g(t) = \sum_{n \geq 0} b_n t^n$$

formális hatványsorok. Ekkor

$$g(yf(t)) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n b_k B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1}) y^k \right) t^n.$$

Speciális esetként adódnak a

$$\exp \left(y \sum_{n \geq 1} a_n t^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1})}{k!} y^k \right) t^n, \quad (\text{A.1})$$

$$\left(1 + y \sum_{n \geq 1} a_n t^n \right)^\ell = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{\ell}{k} B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1}) y^k \right) t^n \quad (\text{A.2})$$

sorfejtések, ahol ℓ tetszőleges komplex konstans. A Bell-polinomokra fennáll a következő rekurzió:

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1}) = \sum_{j=k}^n a_{n-j+1} B_{j-1,k-1}(a_1, a_2, \dots, a_{j-k+1}). \quad (\text{A.3})$$

Ez az összefüggés közvetlenül bizonyítható az (A.1) generátorfüggvényből. További összefüggések találhatóak Riordan könyvében [8, 189. o.].

A.2. r -asszociált Stirling-számok

A Gamma-függvény aszimptotikus sorfejtésének együttthatóiban előfordulnak 1- és 2-asszociált Stirling-számok, az általános definíció a következő:

A.2. Definíció. *Legyenek r és k nemnegatív egészek. Az Első- és Másodfajú r -asszociált Stirling-számokat a következő generátorfüggvényekkel értelmezzük:*

$$\frac{1}{k!} \left(-\log(1-t) - \sum_{i=1}^r \frac{t^i}{i} \right)^k = \sum_{n \geq (r+1)k} s_r(n, k) \frac{t^n}{n!},$$

$$\frac{1}{k!} \left(e^t - \sum_{i=0}^r \frac{t^i}{i!} \right)^k = \sum_{n \geq (r+1)k} S_r(n, k) \frac{t^n}{n!}.$$

Ha $r = 0$, akkor $s(n, k) \stackrel{\text{def}}{=} s_0(n, k)$ és $S(n, k) \stackrel{\text{def}}{=} S_0(n, k)$, az Első- és Másodfajú Stirling-számok.

A definíció következményei a

$$\exp \left(y \left(-\log(1-t) - \sum_{i=1}^r \frac{t^i}{i} \right) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor n/r+1 \rfloor} s_r(n, j) y^j \right) \frac{t^n}{n!}, \quad (\text{A.4})$$

$$\exp \left(y \left(e^t - \sum_{i=0}^r \frac{t^i}{i!} \right) \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor n/r+1 \rfloor} S_r(n, j) y^j \right) \frac{t^n}{n!} \quad (\text{A.5})$$

formulák. A Gamma-függvény esetében a képleteinkben előforduló 1- és 2-asszociált Stirling-számokat ki szeretnénk fejezni a klasszikus (0-asszociált) Stirling-számok segítségével. Ismeretes (lásd [4]), hogy

$$s_r(n, k) = n! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j s_{r-1}(n-rj, k-j)}{r^j j! (n-rj)!},$$

$$S_r(n, k) = n! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j S_{r-1}(n - rj, k - j)}{(r!)^j j! (n - rj)!},$$

amiből speciális esetként adódnak az

$$S_1(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} S(n - j, k - j), \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} S_2(n, k) &= n! \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{S_1(n - 2j, k - j)}{2^j j! (n - 2j)!} \\ &= n! \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j j!} \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^{j-i} \frac{S(n - 2j - i, k - j - i)}{i! (n - 2j - i)!} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

összefüggések. Az r -asszociált Stirling-számokról további azonosságok találhatóak például Howard cikkében [4].

Hivatkozások

- [1] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*. Dover, New York, 1950.
- [2] J. A. Campbell, P. O. Fröman, E. Waller, Explicit series formulae for the evaluation of integrals by the method of steepest descent, *Stud. Appl. Math.* **77** (1987), 151–172.
- [3] R. B. Dingle, *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*. Academic Press, New York, 1973.
- [4] F. T. Howard, Associated Stirling Numbers, *Fibonacci Quart.* **18** (1980), 303–315.
- [5] J. L. López, P. Pagola, E. P. Sinusía, A simplification of Laplace’s method: Applications to the Gamma function and Gauss hypergeometric function, *J. Approx. Th.* **161** (2009), 280–291.
- [6] G. Nemes, On the coefficients of the asymptotic expansion of $n!$. *J. Integer Seqs.* **13** (2010), pp. 5.
- [7] O. Perron, Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen, *Sitzungsber. Bayr. Akad. Wissensch.* (1917), 191–219.
- [8] J. Riordan, *Combinatorial Identities*. Wiley, New York, 1979.
- [9] J. Wojdylo, Computing the coefficients in Laplace’s method, *SIAM Rev.* **48** (2006), 76–96.
- [10] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*. Academic Press, New York, 1989.