

Az egydimenziós Dirichlet-peremértékfeladat *a posteriori* hibabecslése Szoboljev-ortogonális polinomokkal

Pályázó: Csirik Mihály*
Témavezető: Horváth Tamás†

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA SZEKCIÓBAN TÖRTÉNŐ BEMUTATÁSRA

Kivonat

A dolgozat célkitűzése a

$$\begin{aligned} -u'' + \kappa^2 u &= f \quad [a, b]\text{-n} \\ u(a) &= u_a, \quad u(b) = u_b \end{aligned}$$

Dirichlet-peremértékfeladat végeelem diszkretizációjának *a posteriori* hibabecslése. Ehhez egy Szoboljev-ortogonális polinomsorozatot konstruálunk, amelyet egyszerű átalakításokkal alkalmassá teszünk a hiba reprezentálására. Az algoritmusunk egy előfeldolgozási lépésben végzi a polinomok előzetes konstrukcióját, oly módon, hogy a hibabecslés során a lehető legkevesebb számítást igényelje. A Szoboljev-ortogonális polinomok erre a feladatra történő alkalmazásáról nincs tudomásunk.

1. Bevezetés

A dolgozatban egy egydimenziós Dirichlet-peremértékfeladat végeelem-diszkretizációjának *a posteriori* hibabecslésével foglalkozunk. Az elemenkénti hiba hozzávetőleges, nagyságrendi meghatározására nagy szükség van adaptív végeelem módszerek esetén, ezek a módszerek ugyanis egy hibabecslés alapján irányítják az elemek felosztását/összevonását, ill. foksámok növelését/csökkentését.

Megvizsgáljuk, mi történik akkor, ha az elemenkénti hibabecslésnél eltekintünk a deriváltinformációk használatától, amelyek gyakran, főleg alacsony polinomfok esetén, megbízhatatlanok. Az eljárás sebesség tekintetében felülmúlja az implicit *a posteriori* Neumann-feladat megoldását, és bizonyos esetekben pontosságban is jóval megbízhatóbbnak tűnik. A módszert számos tesztfeladaton próbáljuk ki.

2. Végeelem-diszkretizáció. *A posteriori* hibabecslés

A dolgozatban elemzett feladat a következő. Legyen κ valós konstans, $J := [a, b]$ intervallum és $f \in L^2(J)$ ismert függvény, és vizsgáljuk a

$$\begin{cases} -u'' + \kappa^2 u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dirichlet-peremértékfeladat végeelem-diszkretizációval kapott megoldását. A variációs, más szóval *gyenge alakot* egy $v \in H_0^1(J)$ *tesztfüggvénnyel* való szorzást követő integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned} - \int_J u''(x)v(x) \, dx + \kappa^2 \int_J uv \, dx &= \int_J f v \, dx, \\ \underbrace{\int_J u'(x)v'(x) \, dx + \kappa^2 \int_J u(x)v(x) \, dx}_{a(u,v)} &= \underbrace{\int_J f(x)v(x) \, dx}_{\varphi(v)}. \end{aligned}$$

*csirik@gmail.com, ELTE Matematika (BSc), alk. mat. szakirány III. évf.

†ELTE TTK Alkalmazott Analízis Tanszék, tudományos segédmunkatárs

Sőt, igaz az is, hogy

$$\exists! u \in H_0^1(J) \text{ úgy, hogy } a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H^1(J). \quad (2)$$

A létezés és az egyértelműséget most a Riesz–Fréchet reprezentációs tétel biztosítja. A homogén peremfeltétel nem csorbítja az általánosságot, egy alkalmas u_D , ún. Dirichlet-lift függvénnyel inhomogén Dirichlet-peremfeltételeket lehet biztosítani, a jobboldal alkalmas módosítása mellett. Pontosabban, legyen $u_D(a) = u_a$, $u_D(b) = u_b$, $w \in H_0^1(J)$, és legyen $u = u_D + w$. Ekkor a variációs egyenlet $a(w, v) = \varphi(v) - a(u_D, v)$ lesz, és belátható, hogy az így kapott u megoldás nem függ az u_D választásától. Végeselem-diszkretizáció alatt a jól ismert Ritz–Galerkin approximációt értjük: legyen $X_h \leq H_0^1(J)$ véges dimenziós altér, és keressünk olyan

$$u_h \in X_h \text{ függvényt, amelyre } a(u_h, v) = \varphi(v) \quad (\forall v \in X_h). \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenletekből kapjuk az

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad (\forall v \in X_h) \quad (4)$$

Galerkin-ortogonalitási tulajdonságot, amely azt fejezi ki, hogy a diszkretizáció $e_h := u - u_h$ hibája a -ortogonális az X_h térre.

2.1. Implicit *a posteriori* hibabecslés

Egy implicit *a posteriori* séma [1] az e_h hibára vonatkozó,

$$\left. \begin{aligned} -e_h'' + \kappa^2 e_h &= \tilde{f} \\ -e_h'(a) &= D_1 \\ e_h'(b) &= D_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Neumann-peremértékfeladatot oldja meg, ahol $\tilde{f} = f + u_h'' - \kappa^2 u_h$. Az (5) hibaegyenlete $[a, b]$ minden részintervallumán is teljesül, ezért felírhatjuk egy $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ elemre is. A feladat variációs alakja $v \in H^1(I_k)$ tesztfüggvény esetén

$$[e_h'(x)v(x)]_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{I_k} e_h'(x)v'(x) dx + \kappa^2 \int_{I_k} e_h(x)v(x) dx = \int_{I_k} \tilde{f}(x)v(x) dx, \quad (6)$$

azaz

$$a(e_h, v) = \tilde{\varphi}(v) - e_h'(x_{k+1})v(x_{k+1}) + e_h'(x_k)v(x_k). \quad (7)$$

Ennek a feladatnak a végeselem-diszkretizációval kapott megoldását e_{hh} -val jelöljük. Az ilyen jellegű hibabecslési eljárások jelentősége abban áll, hogy az elemeket egymástól függetlenül dolgozzák föl, ezért jól párhuzamosíthatóak a kapott algoritmusok.

A $-e_h'(x_{k+1})$ és $e_h'(x_k)$ mennyiségek megbízható meghatározása az (5) megoldása szempontjából roppant fontos. A deriváltak közelítésére talán a legegyszerűbb lehetőség az ún. *face*-, vagy *simple averaging*, amely 1-dimenzióban

$$-u'(x_k) \approx \frac{u_h'|_{I_{k-1}} + u_h'|_{I_k}}{2}(x_k), \text{ és} \quad (8)$$

$$u'(x_{k+1}) \approx \frac{u_h'|_{I_k} + u_h'|_{I_{k+1}}}{2}(x_{k+1}). \quad (9)$$

2.1.1. Buborékfüggvények

Mi itt egy másik utat követünk, a deriváltak közelítéséről ugyanis teljes egészében lemondunk. Olyan v tesztfüggvényekkel végezzük ugyanis a diszkretizációt, amelyek az elem határán eltűnnek (*buborék-függvények*). A módszertől nem várjuk el, hogy az e_h hibát érdemben közelítse – pusztán annyit, hogy a kapott függvény jelezze, hogy egy adott elemen nagyságrendileg mennyi a hiba.

Olyan buborékfüggvényeket is konstruálunk, amelyek a -ortogonálisak az X_h térre, majd ezeket a függvényeket, mint bázist alkalmazzuk az e_{hh} számított hiba elemenkénti diszkretizációjánál. Egy u

buborékfüggvényt úgy teszünk az X_h térre merőlegessé, hogy az $a(u_h, v) = \varphi(v)$ ($v \in X_h$) feladatot megoldjuk, ahol $\varphi(v) = \int (-u'' + \kappa^2 u)v$, így a (4) Galerkin-ortogonalitást felhasználva kapjuk, hogy $(u - u_h)$ a kívánt tulajdonságú buborékfüggvény.

A módszer általánosításaként egy nagyobb intervallumon készítünk buborékfüggvényeket (ezt nevezzük *spread* buborékoknak), amelyek mondjuk 3, 5, stb. elemet fednek le, és az e_{hh} megoldást a középső intervallumra való leszűkítésként értelmezzük.

Milyen B_n buborékfüggvény-sorozatból induljunk ki? Ha most az egyszerűség kedvéért $[-1, 1]$ -et tekintjük, akkor legyen

$$B_n(x) = (1 - x^{2\alpha})x^n, \quad (10)$$

ahol $\alpha \in \mathbb{N}$. Ezekhez tehát elkészítjük a fent említett módon a B_n^h diszkretizáltakat, és kapjuk a $\hat{B}_n := B_n - B_n^h$ függvényeket.

Mi azonban kísérleteztünk olyan a -ortogonális polinomsorozatokkal, amelyekről reméltük, hogy szebb tulajdonságokkal rendelkeznek. Természetes kíváncsi, hogy az *a posteriori* Dirichlet-feladat mátrixa diagonális legyen, más szóval $a(\hat{B}_n, \hat{B}_m) = 0$, ha $n \neq m$. E célkitűzés irányában haladunk tovább a következőkben.

3. Klasszikus ortogonális polinomok

Az itt közölt tárgyalásmód [5] munkát követi. További forrásként megjelöljük a terület alapjait képező [9] és [2] műveket.

Jelöljük $\mathbb{P}$ -vel a valós együtthatós egyváltozós polinomok lineáris terét, és legyen $\mathring{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ az egy főegyütthatós polinomok részhalmaza. Legyen μ egy pozitív mérték $\mathbb{R}$ -en, amelyről tegyük fel, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az

$$m_k(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu$$

momentumok végesek, valamint hogy az

$$(u, v)_\mu := \int_{\mathbb{R}} uv d\mu \quad (11)$$

definícióval megadott bilineáris forma egy (μ) -belső szorzat $\mathbb{P}$ -n, azaz tegyük még fel, hogy $(\cdot, \cdot)_\mu$ pozitív definit $\mathbb{P}$ -n. (Ha nem tüntetjük fel a μ mértéket, akkor a Lebesgue-mérték szerint integrálunk.) Azt mondjuk, hogy $(p_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{P}$ egy μ -ortogonális polinomsorozat, amennyiben

$$(p_k, p_\ell)_\mu \begin{cases} = 0, & \text{ha } k \neq \ell \\ > 0, & \text{ha } k = \ell \end{cases},$$

illetve $(\tilde{p}_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{P}$ μ -ortonormált polinomsorozat, ha $(\tilde{p}_k, \tilde{p}_\ell)_\mu = \delta_{k\ell}$, ahol $\delta_{k\ell}$ a Kronecker-szimbólum. A generáló mérték azonosítására a μ -ortogonális polinomsorozatot $p_n(\cdot; \mu)$ -vel jelölünk. A létezését és az egyértelműséget a Gram-Schmidt algoritmus biztosítja.

Két esetet különböztetnek meg. Ha a μ abszolút folytonos a λ Lebesgue-mértékre nézve, akkor a Radon-Nikodym tétel miatt létezik egy, a μ -t generáló $w \geq 0$ λ -integrálható *súlyfüggvény*, tehát ekkor

$$(u, v)_\mu = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)w(x)d\lambda(x).$$

A második esetben a mérték egy N pontra koncentrált *diszkrét mérték*. Egy ilyen μ_N mérték

$$\sum_{1 \leq k \leq N} w_k \omega_{x_k}$$

alakban áll elő, ahol az w_k -k pozitív számok, $x_k \in [-1, 1]$ és

$$\omega_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \in A, \\ 0, & \text{ha } a \notin A \end{cases}$$

a *Dirac*-mérték. Ilyenkor tehát a μ_N -belső szorzatunk egy

$$(u, v)_{\mu_N} = \sum_{1 \leq k \leq N} u(x_k) v(x_k) w_k, \quad (12)$$

véges összeg. Mielőtt rátérnénk az ortogonális polinomok numerikus megvalósításának kérdéseire, idézzünk fel egy közismert elméleti eredményt.

(3.1) Tétel. *A $p_n(\cdot) := p_n(\cdot; \mu)$ sorozatra fennáll a következő háromtagú rekurzió.*

$$\begin{aligned} p_{-1}(x) &= 0, \quad p_0(x) = 1 \\ p_{n+1}(x) &= (x - \alpha_n(\mu))p_n(x) + \beta_n(\mu)p_{n-1}(x) \quad (n \geq 0), \end{aligned}$$

ahol

$$\alpha_n(\mu) = \frac{(xp_n, p_n)_\mu}{(p_n, p_n)_\mu}, \quad \beta_n(\mu) = \frac{(p_n, p_n)_\mu}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\mu}, \quad \text{és legyen } \beta_0(\mu) = (p_0, p_0)_\mu. \quad (13)$$

Hasonlóan, ha $\tilde{p}_n$ μ -ortonormált polinomsorozat, akkor

$$\tilde{p}_{-1}(x) = 0, \quad \tilde{p}_0(x) = 1/\sqrt{\beta_0(\mu)} \quad (14)$$

$$\sqrt{\beta_{n+1}(\mu)}\tilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n(\mu))\tilde{p}_n(x) + \sqrt{\beta_n(\mu)}\tilde{p}_{n-1}(x) \quad (n \geq 0). \quad (15)$$

3.1. Gauss-kvadratúraszabályok

A következőkben egy eljárást mutatunk be Gauss-féle kvadratúraszabályok konstruálására [6]. Először is tegyük fel, hogy valamely n indexig rendelkezünk az α_k és β_k rekurziós együtthatókkal. Ha a (15) egyenleteket

$$x\tilde{p}_k(x) = \sqrt{\beta_k}\tilde{p}_{k-1}(x) + \alpha_k\tilde{p}_k(x) + \sqrt{\beta_{k+1}}\tilde{p}_{k+1}(x) \quad (k \geq 0) \quad (16)$$

alakra hozzuk, és bevezetjük a

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_n} \\ & & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{p}}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0(x) \\ \tilde{p}_1(x) \\ \tilde{p}_2(x) \\ \vdots \\ \tilde{p}_{n-2}(x) \\ \tilde{p}_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

jelöléseket, akkor azonnal látható módon az $n+1$ darab (16) alakú egyenletet egy

$$x\tilde{\mathbf{p}}(x) = \mathbf{J}_n\tilde{\mathbf{p}}(x) + \sqrt{\beta_n}p_n(x)\mathbf{e}_n \quad (17)$$

vektoregyenletként írhatjuk, ahol $(\mathbf{e}_n)_i = \delta_{ni}$. Ez az egyenlet mutatja, hogy a $\mathbf{J}_n$ ún. *Jacobi-mátrix* n különböző $\xi_k^{(n)}$ valós sajátértéke éppen a $p_n(x)$ polinom gyökeivel egyezik meg, és az $\xi_k^{(n)}$ -hez tartozó sajátvektor éppen $\tilde{\mathbf{p}}(\xi_k^{(n)})$ (amely sosem a nullvektor (14) miatt). Ez a megfogalmazás a μ -höz tartozó Gauss-féle kvadratúraformula hatékony kiszámítását teszi lehetővé. A

$$\mathbf{J}_n \mathbf{y}_k = \xi_k^{(n)} \mathbf{y}_k, \quad \|\mathbf{y}_k\| = 1 \quad (18)$$

sajátértékproblémából rövid számolással kapjuk (lásd [5], 135. oldal), hogy a Gauss-kvadratúra csomópontjai $x_k^G = \xi_k^{(n)}$ és súlyai $w_k^G = \beta_0 y_{k1}^2$. Összefoglalva, az $(\alpha_k), (\beta_k)$ rekurziós együtthatókból, amelyek gyakran explicite rendelkezésre állnak, egy tridiagonális, szimmetrikus sajátérték-sajátvektor probléma megoldásával eljutunk az $(x_k^G), (w_k^G)$ Gauss-kvadratúraszabályhoz.

3.2. Gautschi-Stieltjes algoritmus

Legyen adott egy μ_N diszkrét mérték, amelyet az $x_k \in [-1, 1]$ csomópontokkal és $w_k > 0$ súlyokkal adunk meg minden $1 \leq k \leq N$ -re. A most ismertetésre kerülő *Gautschi-Stieltjes algoritmus* diszkrét mértékhez tartozó ortogonális polinomsorozat első n rekurziós együtthatóját határozza meg. Mivel

$p_0 \equiv 1$, α_0 és β_0 meghatározható (13) alapján. Az m -edik lépéshez tegyük fel, hogy a $p_{m-1}(x_k)$ és $p_m(x_k)$ helyettesítési értékek ($1 \leq k \leq N$), valamint az $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ és $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ együtthatók rendelkezésünkre állnak. A következő, $\alpha_{m+1}(\mu_N)$ és $\beta_{m+1}(\mu_N)$ együtthatókhoz (13) szerint szükséges a $p_{m+1}(x_k)$ számok ismerete elvégre

$$\alpha_{m+1}(\mu_N) = \frac{\sum_{1 \leq k \leq N} x_k p_{m+1}(x_k) p_{m+1}(x_k) w_k}{\sum_{1 \leq k \leq N} p_{m+1}(x_k) p_{m+1}(x_k) w_k}, \text{ és } \beta_{m+1}(\mu_N) = \frac{\sum_{1 \leq k \leq N} p_{m+1}(x_k) p_{m+1}(x_k) w_k}{\sum_{1 \leq k \leq N} p_m(x_k) p_m(x_k) w_k},$$

viszont ezeket rögtön kiszámíthatjuk a rekurzióból:

$$p_{m+1}(x_k) = (x_k - \alpha_m) p_m(x_k) + \beta_m p_{m-1}(x_k) \quad (1 \leq k \leq N).$$

4. Szoboljev-ortogonális polinomok

A Szoboljev-ortogonális polinomok területe viszonylag új. A [8] munka egy közérthető történeti áttekintés a szakterület fejlődéséről. Itt csak olyan Szoboljev-belső szorzatokkal foglalkozunk, amelyekben csak az első deriváltak szerepelnek, de a Gautschi–Stieltjes algoritmus Szoboljev-esetre történő általánosítása nem csak elsőrendig működik.

Legyen μ_0 , és μ_1 két abszolút folytonos, $[-1, 1]$ tartójú mérték, mint az előző szakaszban. Defináljuk az

$$(u, v)_{\mu_0, \mu_1} = (u, v)_{\mu_0} + (u', v')_{\mu_1} \quad (u, v \in \mathbb{P})$$

Szoboljev-belső szorzatot $\mathbb{P}$ -n. Sajnos a legfontosabb eredmény, a klasszikus háromtagú rekurzió nem vihető át a Szoboljev-esetre, mivel az a belső szorzat $(xu, v) = (u, xv)$ eltolási tulajdonságán múlik. A most bevezetett $(u, v)_{\mu_0, \mu_1}$ szemlátomást nem rendelkezik ezzel. Természetesen rekurzió továbbra is van, még ha általánosabb is, ugyanis igaz a

(4.1) Tétel. *Legyen $p_n(\cdot) = p_n(\cdot; \mu_0, \mu_1)$ a (μ_0, μ_1) -Szoboljev-ortogonális polinomsorozat. Ekkor a következő, általános rekurzió érvényes:*

$$p_{n+1}(x) = x p_n(x) - \sum_{0 \leq k \leq n} \beta_{nk} p_{n-k}(x), \quad (19)$$

ahol

$$\beta_{nk}(\mu_0, \mu_1) = \frac{(x p_n, p_{n-k})_{\mu_0, \mu_1}}{(p_{n-k}, p_{n-k})_{\mu_0, \mu_1}}. \quad (20)$$

A Gautschi–Stieltjes algoritmus a Szoboljev-esetben hasonlóan működik, mint a klasszikus esetben. Most viszont a p'_{n+1} helyettesítési értékekre is szükség van, amit a (19) egyenlet deriválásával kapunk. Az algoritmus tehát, a

$$\left. \begin{aligned} p_{n+1}(x_k) &= x_k p_n(x_k) - \sum_{0 \leq \ell \leq n} \beta_{n\ell} p_{n-\ell}(x_k) \\ p'_{n+1}(x_k) &= p_n(x_k) + x_k p'_n(x_k) - \sum_{0 \leq \ell \leq n} \beta_{n\ell} p'_{n-\ell}(x_k) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

és a (20) egyenletek között alternál.

5. Buborékpolinomok

Tegyük fel, hogy $\{W_n\}$ egy ortogonális polinomsorozat a $[-1, 1]$ -en a $b(u, v) = (u, v)_{\mu_0, \mu_1}$ Szoboljev-belső szorzatra nézve, ahol

$$w(x) = 1 - x^{2\alpha}, \quad d\mu_0 = (\kappa^2 w^2 - w'' w) d\lambda, \quad \text{és} \quad d\mu_1 = w^2 d\lambda, \quad (22)$$

továbbá $\alpha \in \mathbb{N}$.

(5.1) Állítás. *A $C_n := \|w W_n\|^{-\frac{1}{2}} w W_n$ buborékpolinom-sorozat a -ortogonális $[-1, 1]$ -en.*

Bizonyítás. A normalizáció későbbi célokat szolgál, nyilván az ortogonalitás szempontjából lényegtelen, ezért most el is hagyjuk. A b -ortogonalitásból kapjuk a

$$0 = (W_n, W_m)_{\mu_0} + (W'_n, W'_m)_{\mu_1} = \kappa^2(wW_n, wW_m) - (w''W_n, wW_m) + (wW'_n, wW'_m).$$

relációt. Ezt utóbbit felhasználva, valamint parciális integrálással (amely határtagja eltűnik), kapjuk

$$\begin{aligned} a(C_n, C_m) &= a(wW_n, wW_m) \\ &= \kappa^2(wW_n, wW_m) + ((wW_n)', (wW_m)') \\ &= \kappa^2(wW_n, wW_m) + (w'W_n, w'W_m) + (w'W_n, wW'_m) + (wW'_n, w'W_m) + (wW'_n, wW'_m) \\ &= (w'W_n, w'W_m) + (w''W_n, wW_m) + (w'W_n, wW'_m) + (wW'_n, w'W_m) \\ &= (w'^2 + w''w, W_nW_m) + (w'w, W_nW'_m + W'_nW_m) \\ &= ((w'w)', W_nW_m) + (w'w, (W_nW_m)') \\ &= ((w'w)', W_nW_m) - ((w'w)', W_nW_m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ugyan a C_n polinomok nem őrzik meg a -ortogonalitásukat más hosszúságú tartóintervallumra történő áttéréskor, feltehetjük, hogy egy adaptív szimulációban úgy választjuk meg az intervallumokat, hogy lehetőleg sok egyforma hosszúságú legyen. Ez a helyzet például az intervallumfelezés esetén.

6. *A posteriori* hibabecslés buborékfüggvényekkel

Tegyük fel, hogy a szóbanforgó végeelem-tér p -edfokú. Elérjük, hogy a hiba elemenkénti diszkretizációjára alkalmas legyen a $\{C_n\}$ polinomsorozat, abban az értelemben, hogy a -ortogonális legyen X_h -ra. Tegyük fel, hogy az a *posteriori* hibabecslést az $I_k \subset [a, b]$ elemen számítjuk, és számítsuk ki a $\{C_n\}$ sorozatot egy $|I_k|$ hosszú intervallumon. Minden C_n esetén keressünk olyan $C_n^h \in X_h$ végeelem-diszkretizációval kapott megoldást, hogy

$$a_{I_k}(C_n^h, v) = \varphi_n(v) \quad (\forall v \in X_h), \quad (23)$$

$$\text{ahol } \varphi_n(v) := \int_{I_k} (-C_n''(x) + \kappa^2 C_n(x)) v(x) dx. \quad (24)$$

(Itt $a_{I_k}(\cdot, \cdot)$ jelöli $a(\cdot, \cdot)$ I_k tartójú verzióját.) A feladatot úgy határoztuk meg, hogy C_n egzakt megoldása legyen. Ekkor a (4) Galerkin-ortogonalitás miatt a $\widehat{C}_n := C_n - C_n^h$ szakaszonként polinom buborékfüggvényekre

$$a_{I_k}(\widehat{C}_n, v) = 0 \quad (\forall v \in X_h). \quad (25)$$

Természetesen, ha $C_n \in X_h$ valamely $n \leq K$ indexekre, akkor $\widehat{C}_n \equiv 0$, azonban az $\alpha := \lceil p/2 \rceil$ választással el tudjuk érni, hogy a sorozat elején ne legyenek nullák. A $\{\widehat{C}_n\}$ függvények nem alkotnak a_{I_k} -ortogonális rendszert. Először is megjegyezzük, hogy valójában

$$a(\widehat{C}_k, \widehat{C}_\ell) = a(C_k, C_\ell) - a(C_k, C_\ell^h) - a(C_k^h, C_\ell) + a(C_k^h, C_\ell^h) \quad (26)$$

$$= -\varphi_k(C_\ell^h) - a(C_k^h, C_\ell) + \varphi_k(C_\ell^h) \quad (27)$$

$$= -a(C_k^h, C_\ell) \quad (28)$$

$$= -a(C_k^h, C_\ell^h) \quad (29)$$

(az I_k feltüntetését az egyszerűség kedvéért elhagyjuk). Ezek a mennyiség azonban már rendelkezésünkre állnak: írjuk fel a C_n^h diszkretizáltakat a végeelem bázisban: $C_n^h = \sum_i \gamma_{ki} \phi_k$. Ekkor

$$a(C_k^h, C_\ell^h) = \sum_{i,j} \gamma_{ki} \gamma_{\ell j} a(\phi_k, \phi_\ell), \quad (30)$$

az $a(\phi_k, \phi_\ell)$ mennyiségek viszont ismertek a $\{C_n^h\}$ végeelem-diszkretizációja során (az ún. lokális mátrix elemei).

Ezek után alkalmazzuk a Gram–Schmidt ortogonalizációs algoritmust a $\{\widehat{C}_n\}$ sorozatra, hogy megkapjuk az a -ortogonális $\{D_n\}$ sorozatot. A kapott sorozat minden tagja megőrzi a (25) ortogonalitási tulajdonságot, elvégre a Gram–Schmidt algoritmus a $\widehat{C}_n$ -ok lineáris kombinációiként fejezi ki az ortogonalizált D_n -eket. Összefoglalva, a $\{D_n\}$ -t mint bázist alkalmazva az elemenkénti *a posteriori* séma bázisfüggvényeiként diagonális egyenletrendszert kapunk.

7. Eredmények

7.1. Buborékpolinomok generálása

Mivel a (22) mértékek roppant egyszerűek, a Stieltjes–Gautschi valamint a *Csebishev–Gautschi* algoritmus (nem részleteztük, mivel konceptuálisan jóval bonyolultabb, mint a Stieltjes–Gautschi) kitűnően működnek (egyébként is igen stabilak, lásd [5]), és így gyakorlatilag gépi pontossággal a -ortogonálisak lesznek a kapott polinomok. A hiba mérőszáma $\sigma := \max_{i \neq j} |G_{ij}|$ ahol $G_{ij} = a(C_i, C_j)$ a Gram-mátrix. A paraméterek különböző értékeire az 1. Táblázat rögzíti a `test/bubble.py` program kimenetét. A futás $\epsilon = 10\text{e-}20$ mellett történt, de mivel ezt tetszőlegesen megválasztható a sebesség jelentős csökkenése nélkül, σ a kívánt nagyságúra csökkenthető. A példában $\max \sigma = 1.65234\text{e-}15$, tehát 64-bites lebegőpontos számábrázolás esetén a kapott polinomok mind használhatóak. A Gauss–Legendre kvadrátúraszabályok számítását magasabb pontosságon végezzük el, amely hasznosnak bizonyult más számolásoknál is, ezzel ugyanis kizárhatjuk a *kvadrátúraszabály* hibáját, és hagyatkozhatunk a garantált egzaktyságra.

7.2. *A posteriori* hibabecslés

A numerikus kísérletezéshez a következő tesztfeladatokat használtuk. A feladatok egytől egyig $[-1, 1]$ -en értendők, és egyenletes rácson, Lagrange–Csebishev bázisfüggvények használatával végezzük a végeelem diszkretizációt.

- **spike:** $u(x) = (1 - x^2)^s$, $s = 100$.
- **arctan:** $u(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(sx)$, $s = 100$.
- **expspike:** $u(x) = e^{-x^2/a^2}$, $a = 0.01$.
- **loggap:** $u(x) = \log(1 + x + s)$, $s = 0.00001$.
- **sinc:** $u(x) = \sin(d\pi x)/(d\pi x)$, $d = 20$.

Az alábbi hibabecslési sémákat hasonlítjuk össze.

- **neufa:** (NFA) Az (5) Neumann-feladat megoldása elemenként, face averaging-gel.
- **bubortho:** (B) A 6. szakaszban leírt séma által konstruált D_n -ek használata. A buborékfüggvények generálását előfeldolgozási lépésnek tekintjük.
- **bubspread:** (BS) Spread buborékfüggvények.
- **buba** (BA) Az a -ortogonális $\{C_n\}$ sorozat, ahogyan az 5. szakaszban definiáltuk.

Minden futás során meghatározzuk az elemenkénti e_h egzakt hiba, ill. a e_{hh} számított hiba H^1 -normájának ρ Pearson korrelációs együtthatóját. Ha nem csak polinomok szerepeltek egy integrandusban, akkor azt az integrált nagy pontossággal, az `MPMath` könyvtár `quad` adaptív kvadrátúr rutinjával közelítettük. Ez az eljárás igen költséges, de szerettük volna minimalizálni a jobb oldalak hibáját.

A táblázatokban `nel`, ill. p jelöli az elemzett végeelem szimuláció elem-, ill. fokszámát, `neliap` ill. p_{iap} pedig az elemenkénti implicit *a posteriori* séma elem-, ill. fokszámát. Megjegyezzük, a **buba** sémában nincs értelme a `neliap` számnak.

A futási eredményekből látszik, ahogyan az várható volt, módszerünk sebességbeli fölénye. A különbség sokkal látványosabb lenne kevésbé pontos kvadrátúra alkalmazásával, a jobb oldalak kvadrátúrájának költsége ugyanis nagyságrendekkel nagyobb az elemenkénti egyenletrendszer megoldásának költségénél (LU a **neufa** esetben).

A spread buborékfüggvényeket nem találjuk hasznosnak. Meglepő viszont, hogy az egyszerű buba séma mennyire jól teljesített a `sinc` feladatban elsőfokú elemeken. Talán még ennél is meggyőzőbb eredményeket látunk az `expspike` esetben. Az elemszám növelésével váltakozva szélsőséges értékeket felvevő korreláció azzal magyarázható, hogy a függvény érdekes része egyszer éppen elemhatáron van, máskor elem belsejében.

Összefoglalva, az itt bemutatott új, implicit *a posteriori* sémák használhatónak tűnnek a gyakorlatban, főképp egy durva közelítés finomításának irányítására. A módszert érdemes lenne kipróbálni magasabb dimenzióban is, ott azonban a Szoboljev-ortogonális polinomok elmélete nem ilyen kiterjedt, az instabil Gram–Schmidt algoritmusra kellene hagyatkoznunk mindvégig. Jövőbeni munkaként megvizsgálnánk, hogyan lehet szimplexre kiterjeszteni az eljárást, illetve egy nagyobb lélegzetvételi munka keretében összehasonlítanánk a magasabb dimenzióban használatos számos egyéb implicit *a posteriori* sémával.

A. Implementációs részletek

A dolgozat numerikus számolásait az általunk készített STIELTJES [3] könyvtárral végeztünk. Ugyan ennek eredeti célkitűzése az OPQ [4] átportolása volt Pythonba az MPMath [7] könyvtár használatával, végül a dolgozat miatt végeselem kód is került bele. Azért esett a Python programozási nyelvre a választásunk, mert

- szabad és ingyenes (A MATLAB zárt és drága.),
- a sebesség nem volt elsődleges szempont, és
- tartalmaz funkcionális programozást lehetővé tevő elemeket.

Megjegyeznénk még, hogy a Gauss-kvadratúraszabályok konstruálásához szükséges (18) sajátérték-sajátvektor feladatot az MPMath könyvtár használatával implementált TQL2 tridiagonális QL algorit-mussal oldjuk meg, amely igen jól teljesített a gyakorlatban. A STIELTJES könyvtárat a jövőben kvadratúraszabályok (táblázatok) készítésére fogjuk felhasználni.

Hivatkozások

- [1] M. Ainsworth–J. T. Oden: *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, Inc., 2000.
- [2] T. S. Chihara: *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, 1978.
- [3] M. Csirik: STIELTJES: *A multi-precision Python library for orthogonal polynomials and quadrature*. <https://github.com/xyzw/stieltjes>, 2011.
- [4] W. Gautschi: OPQ: *A MATLAB Suite of Programs for Generating Orthogonal Polynomials and Related Quadrature Rules*. <http://www.cs.purdue.edu/archives/2002/wxg/codes/OPQ.html>, 2002.
- [5] W. Gautschi: *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*. Oxford University Press, 2004.
- [6] G. H. Golub–J. H. Welsch: Calculation of gauss quadrature rules. In *Mathematics of Computation*, 23. évf. (1969), 221–230. p.
- [7] Fredrik Johansson–Others: *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.14)*. 2010. February. <http://code.google.com/p/mpmath/>.
- [8] H.G. Meijer: A short history of orthogonal polynomials in a sobolev space i. the non-discrete case. In *Delft University of Technology Report*, 51. évf. (1995).
- [9] G. Szegő: *Orthogonal Polynomials (4. kiadás)*. AMS Colloquium Publications, 1975.

n	α	h	κ^2	σ	$\Delta t_{GL}[\text{ms}]$	$\Delta t_{pb}[\text{ms}]$
5	1	2.0	1.0	1.28e-20	65.882	314.093
5	1	2.0	100.0	9.497e-20	68.685	311.823
5	1	2.0	1000.0	8.58e-19	68.192	312.679
5	1	0.0001	1.0	1.109e-20	68.188	317.278
5	1	0.0001	100.0	5.712e-21	68.204	316.843
5	1	0.0001	1000.0	6.195e-21	68.527	317.454
5	1	1000.0	1.0	3.268e-20	68.521	317.377
5	1	1000.0	100.0	2.436e-18	68.723	314.625
5	1	1000.0	1000.0	1.581e-17	68.498	315.182
5	5	2.0	1.0	1.948e-20	451.743	1126.587
5	5	2.0	100.0	1.183e-19	457.244	1139.782
5	5	2.0	1000.0	3.728e-19	449.310	1135.421
5	5	0.0001	1.0	1.956e-20	454.748	1137.779
5	5	0.0001	100.0	1.463e-20	448.226	1126.820
5	5	0.0001	1000.0	1.599e-20	449.707	1125.939
5	5	1000.0	1.0	1.269e-20	448.585	1118.163
5	5	1000.0	100.0	2.5e-18	448.816	1122.980
5	5	1000.0	1000.0	2.482e-17	447.580	1121.513
10	1	2.0	1.0	8.906e-19	250.059	1836.377
10	1	2.0	100.0	2.144e-18	257.727	1856.361
10	1	2.0	1000.0	5.977e-18	251.303	1851.208
10	1	0.0001	1.0	1.541e-18	252.158	1852.699
10	1	0.0001	100.0	1.752e-18	250.898	1853.427
10	1	0.0001	1000.0	1.722e-18	250.439	1847.266
10	1	1000.0	1.0	1.067e-17	249.570	1851.518
10	1	1000.0	100.0	8.663e-16	249.401	1846.924
10	1	1000.0	1000.0	9.109e-16	252.546	1855.682
10	5	2.0	1.0	3.205e-18	1056.780	3723.651
10	5	2.0	100.0	5.948e-19	1045.136	3707.927
10	5	2.0	1000.0	2.21e-17	1044.544	3705.260
10	5	0.0001	1.0	2.163e-18	1046.793	3723.185
10	5	0.0001	100.0	4.756e-18	1054.292	3749.479
10	5	0.0001	1000.0	4.117e-18	1051.506	3731.619
10	5	1000.0	1.0	7.993e-19	1045.002	3723.667
10	5	1000.0	100.0	1.126e-15	1050.459	3734.250
10	5	1000.0	1000.0	1.652e-15	1047.306	3726.441

1. táblázat. Buborékpolinomok előzetes generálása

n a kívánt sorozat hossza, h a tartóintervallum hossza, Δt_{GL} a Gauss–Legendre kvadratura számításához szükséges idő, Δt_{pb} a polinomsorozat teljes konstrukciójának ideje.

nel	p	nel_{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BS}	$\Delta t_{NFA}[s]$	$\Delta t_B[s]$
10	1	3	3	0.740056869027389	0.99997360469136	0.941018593791673	4.482407	3.829430
11	1	3	3	0.997910261911162	0.983672501596363	0.0623835036501989	4.879612	3.966354
12	1	3	3	0.73500792307294	0.999367949630189	0.999759700288196	5.282808	4.450260
13	1	3	3	0.999147397328257	0.988978584190102	0.363861471653826	5.728061	4.652442
14	1	3	3	0.846613378220443	0.999430013690657	0.996485453112166	6.233677	4.926311
15	1	3	3	0.993784724935385	0.999245961045697	0.727715432025572	6.613073	5.338451
16	1	3	3	0.956641852960646	0.953367616771641	0.921918625607888	7.037185	5.452687
17	1	3	3	0.989287507526168	0.96338653967654	0.887191719068677	7.475860	5.869489
18	1	3	3	0.995243933448939	0.874623746339171	0.853776019181611	7.907229	6.290592
19	1	3	3	0.988315524913466	0.886451179081319	0.932491808226481	8.378198	6.506968
20	1	3	3	0.999295280078221	0.869987435308347	0.831043911357294	8.854023	6.979799
21	1	3	3	0.990234722671929	0.788848970994433	0.946515001014596	8.998793	7.206057
22	1	3	3	0.994923958427815	0.916649622969721	0.81719527661233	9.579672	7.387838
23	1	3	3	0.99350467719114	0.679995139339759	0.955481846648234	10.093871	7.786271
24	1	3	3	0.990618181771164	0.967594010018747	0.798819560041093	10.249937	8.330619
25	1	3	3	0.996655503534313	0.569960911159205	0.967819198781861	10.732325	8.373582
26	1	3	3	0.988984562362037	0.997145987807933	0.774894615510325	11.015655	8.613197
27	1	3	3	0.998738705018501	0.47431433125157	0.983477725425153	11.426147	8.956618
28	1	3	3	0.990161223091027	0.993115725494231	0.75247234774496	11.893656	9.427492
29	1	3	3	0.999552055466139	0.405820365590897	0.996348291564997	12.135728	9.793876

2. táblázat. spike

nel	p	nel _{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BA}	$\Delta t_{NFA}[\text{s}]$	$\Delta t_B[\text{s}]$	$\Delta t_{BA}[\text{s}]$
10	1	3	3	0.740056869027389	0.99997360469136	0.999405375299959	4.573348	3.844259	1.527215
11	1	3	3	0.997910261911162	0.983672501596363	0.999766418892122	4.931343	4.046857	1.583349
12	1	3	3	0.73500792307294	0.999367949630189	-0.11541493863061	5.311735	4.509126	1.776306
13	1	3	3	0.999147397328257	0.988978584190102	0.999932206342981	5.718867	4.725988	1.924528
14	1	3	3	0.846613378220443	0.999430013690657	0.687312289551051	6.281279	4.964453	2.021785
15	1	3	3	0.993784724935385	0.999245961045697	0.99999898819383	6.597266	5.411384	2.067964
16	1	3	3	0.956641852960646	0.953367616771641	0.912820658449491	7.079667	5.582581	2.163615
17	1	3	3	0.989287507526168	0.96338653967654	0.999888433868127	7.552652	5.862420	2.462704
18	1	3	3	0.995243933448939	0.874623746339171	0.975318700962868	7.933894	6.259183	2.463846
19	1	3	3	0.988315524913466	0.886451179081319	0.999651454817112	8.376172	6.569347	2.702829
10	2	3	3	0.999828220809411	0.999951231718022	0.99901424771363	4.708701	3.931558	1.695495
11	2	3	3	0.899381483720862	0.987243777759314	0.965733799832116	5.433834	4.293853	1.592952
12	2	3	3	0.992864159532428	0.999986639207655	-0.125377433010325	5.466653	4.716213	1.799456
13	2	3	3	0.918435669838918	0.993676986087054	0.990127384200114	5.907760	5.797825	1.944317
14	2	3	3	0.928796829201655	0.999593861968101	0.563905242803797	6.574603	5.458650	2.546317
15	2	3	3	0.988746469193321	0.952411811525744	0.999327915217573	7.236681	5.725555	2.258232
16	2	3	3	0.767749395386788	0.999839079440428	0.709541103959017	7.252016	5.938102	2.149162
17	2	3	3	0.928735440278695	0.975607784677735	0.877682192863777	7.622235	6.410594	2.433427
18	2	3	3	0.641976002456368	0.997228078977519	0.752214950997688	8.148832	6.608944	2.459679
19	2	3	3	0.878736462644152	0.677288782806064	0.398093605573251	8.572388	7.096743	2.792926
10	3	3	5	0.999959006236667	0.999997965820695	0.985946220491684	10.200977	10.444127	3.629214
11	3	3	5	0.999767927500629	0.99134830158738	0.973098425404847	11.037049	10.853459	3.719124
12	3	3	5	0.999597514980783	0.999678023972136	0.100952991053782	11.785315	11.852694	4.177313
13	3	3	5	0.997935243639617	0.99858411433218	0.977724083042732	12.942684	12.779158	4.535645
14	3	3	5	0.995982321643818	0.999999552593143	0.656229345853804	13.896182	13.596682	4.849508
15	3	3	5	0.993931528111408	0.983315497744631	0.999208839581995	14.804682	14.729150	5.121746
16	3	3	5	0.992875649766251	0.976506941623837	0.747830921701927	15.795796	15.186404	5.270439
17	3	3	5	0.994721287997159	0.986644420765013	0.984916918944995	16.571080	16.187655	5.736397
18	3	3	5	0.0204183744186536	0.958517456850399	0.789433296895304	17.411104	18.157816	6.209915
19	3	3	5	0.995604800761115	0.999467234865753	0.945620298210914	18.447403	18.190247	6.417491

3. táblázat. spike II.

nel	p	nel _{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BA}	$\Delta t_{NFA}[\text{s}]$	$\Delta t_B[\text{s}]$	$\Delta t_{BA}[\text{s}]$
10	2	2	10	0.999828257819794	0.998511915471858	0.99901424771363	31.602440	16.354077	8.769208
11	2	2	10	0.899360757084176	0.895453714073379	0.965733799832116	34.008321	17.326503	8.388124
12	2	2	10	0.992896343299091	0.999571722725369	-0.125377433010316	36.656347	18.886744	9.455691
13	2	2	10	0.918363365322943	0.860703499083825	0.990127384200114	39.727433	20.617673	9.989293
14	2	2	10	0.929082370154159	0.901736822344774	0.563905242803797	43.444529	22.093949	10.824657
15	2	2	10	0.988662403165526	-0.0899865910514703	0.999327915217573	45.559496	23.829204	11.080005
16	2	2	10	0.766761337028516	-0.126796588213028	0.709541103959001	48.034905	24.162777	11.674182
17	2	2	10	0.91195003247879	-0.119440264718764	0.877682192863777	52.076510	27.108190	12.534478
18	2	2	10	0.530779607213379	-0.132244304955548	0.752214950997687	54.496031	29.786033	13.487875
19	2	2	10	0.165817158634425	-0.116698621011921	0.398093605573255	57.536323	30.308004	13.908708
10	2	3	10	0.993145072575554	0.999952045158662	0.99901424771363	41.649502	23.436045	8.076322
11	2	3	10	0.88390016823797	0.986992779330039	0.965733799832116	44.840310	24.725504	8.445197
12	2	3	10	0.0459061410587986	0.982823191394101	-0.125377433010316	47.605595	27.324246	9.502288
13	2	3	10	0.323464157354719	0.0929707147890167	0.990127384200114	54.378157	31.181528	10.452821
14	2	3	10	-0.116011679969334	-0.0828204426837049	0.563905242803797	55.823398	33.894373	11.266001
15	2	3	10	-0.0845248735089109	-0.11384042528225	0.999327915217573	63.062069	36.400443	12.312785
16	2	3	10	-0.184830799009248	-0.139712763311495	0.709541103959001	65.079518	38.363503	11.730193
17	2	3	10	-0.15272017525464	-0.170060996671492	0.877682192863777	75.421316	43.383189	13.581723
18	2	3	10	-0.171636376310059	-0.112350593996632	0.752214950997687	76.867210	44.303554	13.709332
19	2	3	10	-0.182770457066877	-0.115222523382096	0.398093605573255	77.852892	45.489014	13.962179

4. táblázat. spike III.

nel	p	nel _{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BA}	$\Delta t_{NFA}[\text{s}]$	$\Delta t_B[\text{s}]$	$\Delta t_{BA}[\text{s}]$
10	1	3	3	0.257159922396749	0.99995615032036	0.998924131458155	3.990102	3.714529	1.235322
11	1	3	3	0.334093391085674	0.99996126093413	0.99885595818808	4.394939	4.045099	1.321184
12	1	3	3	0.395936165735024	0.99996639510223	0.998801582274155	4.749331	4.544956	1.492544
13	1	3	3	0.446810872092429	0.999970730335891	0.998757557339158	5.199327	4.826627	1.590384
14	1	3	3	0.489460477104748	0.999974141891912	0.998721428232683	5.534349	5.171199	1.713000
15	1	3	3	0.525776349128874	0.99998337596154	0.998691417861418	5.911191	5.584494	1.857269
16	1	3	3	0.557104592374258	0.999981995442004	0.998666218775568	6.388413	5.889719	1.909310
17	1	3	3	0.584429968113578	0.999985737221806	0.998644854070908	7.204093	6.934369	2.632958
18	1	3	3	0.608490255169613	0.99999276949891	0.998626582869244	8.243253	6.636884	2.214539
19	1	3	3	0.629849725683195	0.999045297104541	0.998610834824011	7.497375	7.006012	2.321405
10	1	3	5	0.257159821384259	0.999992008192058	0.99892413145801	12.234650	7.115882	2.620083
11	1	3	5	0.334093860216659	0.755387164953789	0.998855958188101	13.547830	7.805776	2.835846
12	1	3	5	0.395936235148368	0.636447794087899	0.998801582273924	14.620395	8.576159	3.154681
13	1	3	5	0.446809872296593	0.859125146849447	0.998757557338819	15.923838	9.311974	3.414959
14	1	3	5	0.48946098421065	0.635646831312038	0.998721428232893	17.135160	10.012264	3.725730
15	1	3	5	0.525776745612047	0.913940295822123	0.998691417861091	18.460254	10.767434	3.922517
16	1	3	5	0.557104142859783	0.407816535370883	0.998666218775321	19.648356	11.297129	3.996405
17	1	3	5	0.584428748541634	0.874303243922254	0.998644854070853	20.806469	12.082850	4.430014
18	1	3	5	0.60849054263382	0.771600956995953	0.99862658286866	22.088164	13.040832	4.700790
19	1	3	5	0.629857626602782	0.668146659096587	0.998610834823403	23.276347	13.907040	5.004061

5. táblázat. expspike I.

nel	p	nel _{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BA}	$\Delta t_{NFA}[s]$	$\Delta t_B[s]$	$\Delta t_{BA}[s]$
10	1	2	3	0.99999999999599	0.99999999999587	0.999999999384565	3.271230	2.525132	1.669741
11	1	2	3	0.99999999999517	0.99999999999494	0.99999999932073	3.528600	2.785633	1.585566
12	1	2	3	0.99999999999429	0.99999999999391	0.999999999259183	3.830931	2.999442	1.745767
13	1	2	3	0.99999999999334	0.99999999999278	0.999999999199832	4.159470	3.236062	1.876452
14	1	2	3	0.99999999999233	0.99999999999156	0.999999999142555	4.481622	3.453514	2.003432
15	1	2	3	0.99999999999126	0.99999999999023	0.99999999908722	5.038567	3.805175	2.063284
16	1	2	3	0.99999999999014	0.99999999998881	0.999999999033688	5.048981	3.770838	2.077830
17	1	2	3	0.99999999998896	0.99999999998729	0.999999998981827	5.400163	4.190071	2.287920
18	1	2	3	0.99999999998772	0.99999999998567	0.999999998931509	5.845504	4.670107	2.490426
19	1	2	3	0.99999999998644	0.99999999998396	0.999999998882618	5.998093	4.705476	2.571745
20	1	2	3	0.9999999999851	0.99999999998214	0.999999998835044	6.497129	5.592524	3.001119
21	1	2	3	0.99999999998373	0.99999999998024	0.99999999878869	6.612879	5.141345	2.783728
22	1	2	3	0.99999999998229	0.99999999997823	0.999999998743464	6.785629	5.467867	2.889251
23	1	2	3	0.99999999998082	0.99999999997611	0.999999998699285	7.035429	5.628721	3.219721
24	1	2	3	0.9999999999793	0.99999999997391	0.999999998656079	7.339233	5.762001	3.131197
25	1	2	3	0.99999999997774	0.9999999999716	0.999999998613778	7.607355	6.331183	3.264523
26	1	2	3	0.99999999997614	0.99999999996919	0.999999998572323	7.918024	6.483383	3.376924
27	1	2	3	0.9999999999745	0.99999999996668	0.999999998531656	8.401927	6.513770	3.554939
28	1	2	3	0.99999999997282	0.99999999996408	0.999999998491728	8.448771	6.686940	3.660278
29	1	2	3	0.99999999997111	0.99999999996137	0.999999998452491	9.086898	6.998716	3.787666
10	2	2	3	0.99999999999995	1.0	0.999999999462722	3.379474	2.623559	1.696870
11	2	2	3	0.99999999999992	0.99999999999999	0.999999999391509	3.671469	2.877170	1.597269
12	2	2	3	0.99999999999989	1.0	0.999999999322314	3.941271	3.850158	2.003888
13	2	2	3	0.99999999999985	0.99999999999999	0.999999999255145	4.813184	3.447977	1.970435
14	2	2	3	0.99999999999998	0.99999999999999	0.999999999189941	4.767719	3.723780	2.253322
15	2	2	3	0.999999999999974	0.99999999999999	0.999999999126602	4.982218	3.784446	2.077538
16	2	2	3	0.999999999999967	0.99999999999998	0.999999999065014	5.385277	3.849069	2.139256
17	2	2	3	0.999999999999959	0.99999999999999	0.999999999005053	5.477065	4.457439	2.317429
18	2	2	3	0.99999999999995	0.99999999999999	0.999999998946599	5.844876	4.610901	2.541621
19	2	2	3	0.999999999999938	0.99999999999999	0.99999999888954	6.219063	4.884680	2.603795
20	2	2	3	0.999999999999926	0.99999999999998	0.999999998833766	6.442846	4.976313	2.714074
21	2	2	3	0.999999999999911	0.99999999999998	0.999999998779179	6.672692	5.323117	2.823008
22	2	2	3	0.999999999999894	0.99999999999997	0.999999998725687	7.037278	5.462045	2.926552
23	2	2	3	0.999999999999877	0.99999999999996	0.999999998673207	7.296700	5.990521	3.179660
24	2	2	3	0.999999999999856	0.99999999999998	0.999999998621665	7.628777	6.041296	3.175979
25	2	2	3	0.999999999999832	0.99999999999997	0.999999998570987	7.889406	6.222407	3.450622
26	2	2	3	0.999999999999806	0.99999999999996	0.999999998521114	8.190115	6.504136	3.418083
27	2	2	3	0.99999999999978	0.99999999999996	0.999999998471988	8.440068	6.756944	3.733957
28	2	2	3	0.999999999999749	0.99999999999997	0.999999998423556	8.769939	7.308994	3.754834
29	2	2	3	0.999999999999715	0.99999999999995	0.999999998375771	9.077262	7.602304	3.967486

nel	p	nel_{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BS}	$\Delta t_{NFA}[s]$	$\Delta t_B[s]$
10	1	3	4	0.99999897300949	0.99999999972608	0.981628653049413	9.126599	6.234511
11	1	3	4	0.159866642071491	0.999999990121031	0.907441849691727	10.269298	6.142454
12	1	3	4	0.999997871572053	0.99999999912433	0.986282648090563	11.056225	6.778650
13	1	3	4	0.0699906341389569	0.999999969451944	0.91445728999462	12.070587	7.274750
14	1	3	4	0.999996087956544	0.99999999763734	0.989817291473859	13.243918	7.450400
15	1	3	4	0.0226648000515646	0.999999919483266	0.920947182053217	13.935244	8.169841
16	1	3	4	0.999993395988942	0.99999999440643	0.992504998950315	14.586120	8.451187
17	1	3	4	-0.00313310179151694	0.99999811657882	0.926934946546976	15.911024	8.987480
18	1	3	4	0.999989540467544	0.99999998803269	0.994548947231051	16.566160	9.608438
19	1	3	4	-0.0174604988316031	0.999999598603538	0.932465075240594	17.402272	10.123755
20	1	3	4	0.999984237401925	0.99999997639332	0.996098085896991	18.300552	10.683242
21	1	3	4	-0.0253405795301177	0.999999206226816	0.937584373595907	18.639782	11.272705
22	1	3	4	0.999977174016368	0.99999995648065	0.99726354214699	20.165915	11.857430
23	1	3	4	-0.0294160765552502	0.999998523809537	0.942337113391647	20.830487	12.306110
24	1	3	4	0.999968008567775	0.99999992434791	0.998130050277245	21.952014	12.804919
25	1	3	4	-0.0311405845600469	0.99999739148991	0.946763899520639	22.598711	13.272135
26	1	3	4	0.99995637002508	0.99999987531849	0.998763514995496	23.950290	13.834870
27	1	3	4	-0.0313408354990855	0.999995584090635	0.950901579712321	24.388613	14.529809
28	1	3	4	0.999941857652104	0.99999980471871	0.999216059183812	25.503384	14.940680
29	1	3	4	-0.0304968929722935	0.999992789863221	0.954783424099465	26.335177	15.420550
10	2	3	4	0.999963480818727	0.99999999999685	0.999472808860989	9.487237	5.827623
11	2	3	4	0.259687335866654	0.99999999767861	0.0194295754938009	10.427783	6.357303
12	2	3	4	0.999901877995118	0.99999999998879	0.999665509494917	11.296630	6.849628
13	2	3	4	0.149275271069718	0.999999999358791	0.0437844469471998	12.341987	7.233557
14	2	3	4	0.999761667823918	0.9999999999657	0.99979428922058	13.165775	7.629761
15	2	3	4	0.0854228211388055	0.99999998577161	0.0607575206307824	14.084277	8.146747
16	2	3	4	0.99945604992554	0.99999999990869	0.999878233485427	14.885650	8.595345
17	2	3	4	0.0472301216485363	0.99999997462286	0.0732621212610711	16.021797	9.287087
18	2	3	4	0.99880356017172	0.99999999978719	0.999931531832918	17.134367	9.725619
19	2	3	4	0.0235383133546088	0.999999996536799	0.0828591125619589	17.482879	10.440064
20	2	3	4	0.997415498093564	0.99999999956025	0.999964156207018	18.757284	10.964435
21	2	3	4	0.00839242145050366	0.999999996928866	0.090460914911119	19.255297	11.639666
22	2	3	4	0.994430682545276	0.99999999908846	0.999983071020991	21.002458	11.984509
23	2	3	4	-0.00150622216722616	0.999999999178164	0.0966369640080267	21.550949	12.577388
24	2	3	4	0.987861819243364	0.99999999802124	0.999993162160375	22.267505	12.945556
25	2	3	4	-0.00806353850151364	0.999999998703902	0.101761233369786	22.908778	13.672566
26	2	3	4	0.972931813358228	0.99999999589979	0.999997869609574	24.547925	14.066553
27	2	3	4	-0.0124244275154643	0.999999975930271	0.106089538048859	25.050411	14.511719
28	2	3	4	0.937928883390671	0.99999999199644	0.999999600518965	25.978883	15.088752
29	2	3	4	-0.0153004018577573	0.999999879746869	0.109802731453018	26.605603	16.212709

nel	p	nel _{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BS}	$\Delta t_{NFA}[\text{s}]$	$\Delta t_B[\text{s}]$
10	3	3	4	0.999976349059224	0.999999999999997	0.967869818073018	9.571583	7.615556
11	3	3	4	0.189533391854263	0.999999999989936	-0.0619018379670461	10.688768	8.472633
12	3	3	4	0.999955909983628	0.999999999999978	0.977042464404083	11.566168	9.185526
13	3	3	4	0.115814377103138	0.999999999959954	-0.032056845781381	12.817975	10.505585
14	3	3	4	0.999925786794141	0.999999999938747	0.984940329774705	13.968602	11.280814
15	3	3	4	0.0726909675767028	0.999999999892092	-0.00981557860054394	14.885195	12.013645
16	3	3	4	0.99988335296128	0.99999999980061	0.991504175641501	15.326427	12.527493
17	3	3	4	0.0462426943768057	0.999999650710128	0.00781841792080696	16.455702	13.926827
18	3	3	4	0.999825257217957	0.99998629714997	0.996443846447266	18.035520	14.276149
19	3	3	4	0.029385030743966	0.999995098481472	0.0224588918199445	17.906862	16.138407
20	3	3	4	0.999747059714928	0.99999535857202	0.999287402321075	19.818062	15.863864
21	3	3	4	0.0183317562690434	0.999996399076905	0.0350973828949229	20.519552	17.435529
22	3	3	4	0.999642694271292	0.999670839187138	0.999989232224862	21.481283	17.540830
23	3	3	4	0.010951001554233	0.999926495903291	0.0436196102471241	21.571922	18.319361
24	3	3	4	0.999503646722216	0.999787437725754	0.998469415111478	22.861341	19.319968
25	3	3	4	0.00598566182191415	0.948654104225664	0.0559013865400441	23.631503	20.853764
26	3	3	4	0.99931765964229	0.426713997314695	0.283467870713441	24.748522	21.714598
27	3	3	4	0.00266526967269155	-0.0348836303024222	0.049990723397924	25.751051	23.020385
28	3	3	4	0.99906662521215	0.45908199853936	-0.0761096480468679	26.927780	23.640044
29	3	3	4	0.000502712438995511	-0.0534933486652383	0.0739185394266999	27.389275	24.219722

8. táblázat. arctan II.

nel	p	nel _{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BA}	$\Delta t_{NFA}[s]$	$\Delta t_B[s]$	$\Delta t_{BA}[s]$
10	1	2	3	0.999998972701556	0.99999999973303	0.999999999243307	3.524379	2.774537	1.600350
11	1	2	3	0.161118777892343	0.999999991207202	-0.158719705148312	3.744208	3.036605	1.523524
12	1	2	3	0.99999787122442	0.99999999914831	0.99999999914969	4.047670	3.316653	1.871487
13	1	2	3	0.0704104004628277	0.999999972572419	-0.130737377365274	4.318383	3.530182	2.450772
14	1	2	3	0.999996087605742	0.99999999770647	0.99999999041796	4.963736	3.817030	2.119469
15	1	2	3	0.0228367075462087	0.999999927142314	-0.110021665987767	4.924762	4.014917	2.024911
16	1	2	3	0.999993395662774	0.99999999457896	0.99999998910237	5.159462	3.948057	2.279140
17	1	2	3	-0.00304294215407532	0.999999828337572	-0.094579346257689	5.542209	4.445538	2.263035
18	1	2	3	0.999989540183108	0.99999998841311	0.99999998748938	5.794163	4.753840	2.617127
19	1	2	3	-0.0174046372064093	0.999999631767948	-0.0827030826794737	6.084119	4.866527	2.702982
10	2	2	3	0.999963446304367	0.99999999999689	0.99999998907285	3.640548	3.045717	1.649681
11	2	2	3	0.261274415042007	0.99999999748755	-0.159243310181748	4.036207	3.158057	1.563186
12	2	2	3	0.999901813258231	0.99999999998898	0.99999998545375	4.214466	3.501341	2.032976
13	2	2	3	0.1498612508851	0.99999999927353	-0.13144812728304	4.512613	3.680284	2.193501
14	2	2	3	0.99976155634862	0.99999999996626	0.99999997972764	4.775348	3.897990	2.148485
15	2	2	3	0.0856809883279678	0.9999999826865	-0.110729112376274	5.049600	4.208423	2.059166
16	2	2	3	0.999455867244543	0.99999999990925	0.99999997068524	5.308812	4.266045	2.278564
17	2	2	3	0.0473744184971346	0.99999996559318	-0.0953698604815831	5.876656	4.637471	2.327094
18	2	2	3	0.998803268365466	0.99999999978079	0.99999995661358	5.958524	4.798305	2.631639
19	2	2	3	0.02363321381852	0.99999994502071	-0.0836976105639309	6.265132	5.238848	2.722086

9. táblázat. arctan III.

nel	p	nel _{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BA}	$\Delta t_{NFA}[\text{s}]$	$\Delta t_B[\text{s}]$	$\Delta t_{BA}[\text{s}]$
10	1	3	5	0.89008054411146	0.990960298385489	-0.245180783314171	14.492232	10.357660	3.946851
11	1	3	5	0.982784763545649	0.934790162368787	0.999970608208085	16.053059	11.395758	4.645463
12	1	3	5	0.985900462053987	0.779084200643522	0.960383764505162	16.900062	11.744949	4.711627
13	1	3	5	0.986765456504596	0.757663129765156	0.999081364157962	19.211690	12.998895	6.071405
14	1	3	5	0.990839701199089	0.689818091170924	0.995232752558701	20.495628	13.118606	6.190798
15	1	3	5	0.99163573402624	0.476640483133328	0.998119277432547	21.609797	13.985439	6.348097
16	1	3	5	0.995500937865664	0.683264664238829	0.998543193819507	22.785448	14.092781	6.061677
17	1	3	5	0.996271547549074	0.265833494748201	0.998536316306713	25.022125	15.182071	7.115254
18	1	3	5	0.99249531452996	0.819743030047589	0.999465408880891	25.217778	15.604791	7.085456
19	1	3	5	0.999018968564503	0.0814928860526179	0.998958313809908	27.408547	17.097285	7.897807
10	2	3	5	0.993366812456451	0.990040266011286	0.990733399601956	14.375307	11.840884	3.945786
11	2	3	5	0.992544594702915	0.964725082881543	0.849558620500454	16.388512	13.443662	4.989278
12	2	3	5	0.990479540690438	0.983713008175942	0.977321713814341	17.380563	14.378180	4.843540
13	2	3	5	0.444131091246776	0.996406826612828	0.312566663779495	19.731044	16.045080	5.655216
14	2	3	5	0.980829147806231	0.966897543790224	0.988072060988728	20.036462	16.971720	5.592773
15	2	3	5	0.0920836461144853	0.995374744744002	0.372199683412227	22.291335	18.312764	6.356195
16	2	3	5	0.430221520032783	0.974851519591046	0.240670740113536	23.358642	19.577558	6.138892
17	2	3	5	0.456960161911118	0.981493932673202	0.535171252616778	25.180215	21.648880	7.162360
18	2	3	5	0.257723631268562	0.98586613462232	-0.141791916258324	25.402965	22.178306	7.201455
19	2	3	5	0.503879935768517	0.833986291981394	0.50563785631807	28.239495	24.244450	8.280930

10. táblázat. sinc I.

nel	p	nel_{iap}	p_{iap}	ρ_{NFA}	ρ_B	ρ_{BA}	$\Delta t_{NFA}[s]$	$\Delta t_B[s]$	$\Delta t_{BA}[s]$
20	1	3	5	0.992631925985576	0.951368046350468	0.99977204963597	28.395580	17.861904	7.743074
21	1	3	5	0.998987724906371	0.0190331892210274	0.999275084164612	31.088102	19.361633	8.650543
22	1	3	5	0.997699948771864	0.671448167782426	0.999595408023803	30.948355	19.772076	8.633856
23	1	3	5	0.998416189549813	0.120804384271715	0.999574920563717	32.936851	21.086913	9.503833
24	1	3	5	0.9987678503573	0.306882533714974	0.999643729443158	34.107555	20.760673	9.458925
25	1	3	5	0.998893221718471	0.225216006337711	0.999783859550535	35.308341	21.975779	10.235049
26	1	3	5	0.998969893321391	0.0492865131615144	0.999736033030263	36.675897	22.387923	10.324153
27	1	3	5	0.999199105251193	0.1967847537608	0.999817038069307	38.254916	23.496281	12.509030
28	1	3	5	0.999232065365607	0.0400941164633231	0.999801787714539	39.456616	24.179413	11.002958
29	1	3	5	0.999400272190777	0.10327783197843	0.999836755792491	42.753457	28.613406	13.471292
20	2	3	5	0.197479954918451	0.989170644239565	0.0425336998248514	29.366396	26.427827	8.741762
21	2	3	5	0.59195914313868	0.725957181639965	0.679942272463539	31.045985	29.384202	8.940737
22	2	3	5	0.239812264735204	0.980088960187707	0.745090760309907	31.440456	29.050503	9.112777
23	2	3	5	0.781616988299995	0.843629443555213	0.618267487870213	34.558784	30.834119	9.994301
24	2	3	5	0.825081077070874	0.88283137699388	0.624118899476992	35.050185	32.919791	10.019919
25	2	3	5	0.893462564897758	0.76632342446171	0.263899644932242	39.314242	34.594637	10.492921
26	2	3	5	0.38184406365533	-0.0640531383045615	0.482265023277924	37.667978	32.165515	10.918284
27	2	3	5	0.72059584877918	-0.166695366468862	0.15715932220073	39.736079	33.231088	11.323956
28	2	3	5	0.737557483617597	-0.113408567731898	0.410228000058963	40.012922	34.235509	11.711174
29	2	3	5	0.277255975559088	-0.175558686021048	0.149674997566475	42.577447	33.719518	12.957195

11. táblázat. sinc II.