

Nemlineáris numerikus analízis: Konzisztencia, Stabilitás és Konvergencia

TDK pályamunka

Fekete Imre

II. éves Alkalmazott Matematikus M.Sc.

E-mail cím: imrefekete1989@gmail.com

Témavezető:

Faragó István

Egyetemi Tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem



Budapest
2011

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Faragó Istvánnak és Mincsovics Miklósnak a dolgozat megírásában nyújtott segítségét.

Kivonat

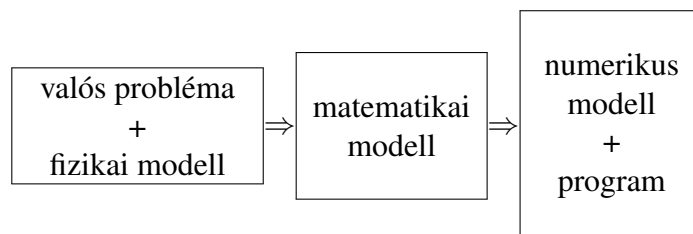
A pályamunkában nemlineáris egyenletek numerikus megoldását vizsgáljuk. Megállapítjuk, hogy a konvergencia garantálható két direktben ellenőrizhető feltétellel, nevezetesen a konzisztenciával és a stabilitással. Későbbiekben látjuk, hogy ezen feltételek együttesen elégségesek, de nem szükségesek a konvergencia biztosításához. Részletesen tárgyaljuk a Trenogin-féle elméletet. Az elméleti eredményeket példákkal illusztráljuk.

1. Bevezetés

Sok természetben megfigyelhető folyamat matematikai modellek segítségével jellemezhetőek. Általában ezen modellek megoldását zárt formában (analitikusan) nehéz megadni, ezért numerikus és számítógépes eljárásokat konstruálunk. A numerikus módszerek nem az adott probléma pontos megoldását szolgáltatják, hanem annak egy közelítését oly módon, hogy minden egyes számítási lépés során egyre és egyre közelebb kerülünk a pontos megoldáshoz.

A numerikus módszerek tényleges alkalmazásához programokat kell írunk. Számítógépünk révén rengeteg adat áll rendelkezésünkre, melyek minőségi információval is bírnak. A számítógép nagy előnye, hogy a drága kísérletekkel szemben az itt végzett számítások olcsóak.

Az alábbi séma jól érzékelteti a valós probléma megoldásának menetét:



Azaz a teljes modellezési folyamat három fő lépésből áll. A pályamunkában a matematikai (általában folytonos) modell numerikus (általában diszkrét) modellé történő átalakítására fókuszálunk. Célunk továbbá, hogy ezen lépés során tényleges információt ne veszítsünk.

A diszkrét modell diszkrét feladatok sorozatából áll. A numerikus modell konstruálásánál az alábbiakat követeljük meg:

- A diszkrét feladatok korrekt kitűzésűek legyenek.
- Hatékonyan számíthassuk a numerikus megoldást.
- A numerikus megoldások sorozata konvergens legyen.

- A numerikus megoldások sorozata az eredeti feladat megoldásához tartoznak.

A lineáris elmélet jóval kidolgozottabb (*Lax*¹-*Richtmyer*²-*Kantorovich*³ ekvivalencia tétel). A nemlineáris elmélet vizsgálata még kezdetleges. Első lépésként az ehhez szükséges matematikai háttér ismertetjük.

2. Matematikai háttér

A valós feladat modellezésekor általában a következő nemlineáris problémához jutunk:

$$F(u) = 0, \quad (1)$$

ahol $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ normált terek, $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, míg $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy nemlineáris operátor. A numerikus analízis elméletében feltételezzük, hogy létezik egyértelmű megoldás, melyet a továbbiakban $\bar{u}$ -val jelölünk.

Másrészt a valós problémák esetében bizonyítanunk kell az $\bar{u} \in \mathcal{D}$ létezését. Általában ennek bizonyítása nem konstruktív. Még ha direktben megoldható is, a problémát a megoldási folyamat realizálása jelenti, ugyanis ez nehéz, szinte kivitelezhetetlen. Ugyanakkor az is igaz, hogy (1) megoldásának egy jó közelítése elegendő, hiszen ezt az egyenletet is a valós feladat egyszerűsítéseként nyertük.

A diszkretizáció eredményeként egyszerűbb problémák sorozatát nyerjük. Az ezekkel szemben támasztott követelményeink a Bevezető részben leírtakkal megegyező. Azonban ezzel a megközelítéssel az alábbiak jelenthetnek problémát:

- az eredeti (1) feladat megoldásának és az egyszerűbb problémák megoldásait különböző terekben kell összehasonlítani;
- maga az összehasonlítás nem megvalósítható, hiszen (1) megoldását nem ismerjük.

Hogy közös nevezőre jussunk, bevett az alábbi gyakorlat: bevezetjük a konzisztencia és a stabilitás fogalmát. Ezek a fogalmak függetlenek (1)

¹Lax Péter (1926-) magyar származású matematikus. Elsősorban alkalmazott matematikával foglalkozik. Kutatási területei: a parciális differenciálegyenletek elmélete, folyadékdinamika, számításelmélet.

²Robert Davis Richtmyer (1910-2003) amerikai matematikus, fizikus. Az ún. 'alaptétel' mellett nevéhez fűződik a Richtmyer-Meshkov instabilitás.

³Leonid Kantorovich (1912-1986) közgazdasági Nobel-emlékdíjas orosz matematikus és közgazdász. Főként funkcionálanalízissel foglalkozott, sőt ő vetett fel egy matematikai módszert, ami napjainkban lineáris programozásként ismert.

megoldásától és ellenőrizhetőek. A konvergencia a két fogalommal együttesen helyettesíthető. Ezt szokás a numerikus analízis alaptételeként is emlegetni:

$$\text{Konzisztencia} + \text{Stabilitás} = \text{Konvergencia} . \quad (2)$$

A továbbiakban bevezetjük és megvizsgáljuk ezeket a fogalmakat, valamint (2)-t is új megvilágításba helyezzük. Nevezetesen:

- hogyan is definiáljuk a konzisztenciát és a stabilitást, hogy (2) igaz legyen;
- vajon a konzisztencia és/vagy a stabilitás szükséges feltétel-e a konvergenciához.

1. Definíció. Az (1)-es probléma az alábbi hármassal jellemezhető: $\mathcal{P} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, F)$. Ezt a továbbiakban $\mathcal{P}$ problémának nevezzük.

2. Példa. Tekintsük a következő kezdeti érték problémát:

$$u'(t) = f(u(t)) \quad (3)$$

$$u(0) = u_0 , \quad (4)$$

ahol $t \in [0, 1]$, $u_0 \in \mathbb{R}$ és $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ egy Lipschitz folytonos függvény.

Ekkor az $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ és F a következők:

- $\mathcal{X} = C^1[0, 1]$, $\|u\|_{\mathcal{X}} = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$
- $\mathcal{Y} = C[0, 1] \times \mathbb{R}$, $\left\| \begin{pmatrix} u \\ u_0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Y}} = \max_{t \in [0, 1]} (|u(t)|) + |u_0|$
- $F(u) = \begin{pmatrix} u'(t) - f(u(t)) \\ u(0) - u_0 \end{pmatrix} .$

3. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{N} = (\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n, F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy numerikus módszer, ha diszkrét problémák sorozatát generálja:

$$F_n(u_n) = 0 , \quad n = 1, 2, \dots , \quad (5)$$

ahol

- $\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n$ normált terek;
- $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{X}_n$ és $F_n : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{Y}_n$.

Ha az (5)-nek léteznek egyértelmű megoldásai, akkor ezeket a továbbiakban $\bar{u}_n$ -
nel jelöljük.

4. Példa. A fenti definícióban szereplő hármasok az alábbiak $n \in \mathbb{N}$ -re:

- $\mathcal{X}_n = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{v}_n = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{X}_n : \|\mathbf{v}_n\|_{\mathcal{X}_n} = \max_{i=0, \dots, n} |v_i|$
- $\mathcal{Y}_n = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{y}_n = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}_n : \|\mathbf{y}_n\|_{\mathcal{Y}_n} = |y_0| + \max_{i=1, \dots, n} |y_i|$.
- $F_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, és tetszőleges $\mathbf{v}_n = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ -re

$$(F_n(\mathbf{v}_n))_i = \begin{cases} n(v_i - v_{i-1}) - g(v_{i-1}), & i = 1, \dots, n, \\ v_0 - c, & i = 0. \end{cases} \quad (6)$$

(Itt a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és a $c \in \mathbb{R}$ adott értékek, melyeket a numerikus módszer egyértelműen meghatároz.)

5. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{D} = (\varphi_n, \psi_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat egy
diszkretizáció, ha

- φ_n és ψ_n vetítő operátorok $\mathcal{X}$ -ből $\mathcal{X}_n$ -be, illetve $\mathcal{Y}$ -ből $\mathcal{Y}_n$ -be, ahol
 $\mathcal{X}, \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}, \mathcal{Y}_n$ normál terek;
- $\Phi_n : \{F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Y} \mid \mathcal{D} \subset \mathcal{X}\} \rightarrow \{F_n : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{Y}_n \mid \mathcal{D}_n \subset \mathcal{X}_n\}$.

6. Példa. A Példa 2. és Példa 4. alapján, definiáljuk a Definíció 5.-ben szereplő
tereket: $\mathcal{X} = C^1[0, 1]$, $\mathcal{Y} = C[0, 1] \times \mathbb{R}$, $\mathcal{X}_n = \mathcal{Y}_n = \mathbb{R}^{n+1}$.

$\mathbb{G}_n := \{t_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n\}$. Ekkor a fenti definícióban szereplő operátorok
hármasát így adhatjuk meg:

- Tetszőleges $u \in \mathcal{X}$ -re legyen $(\varphi_n u)_i = u(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$,
- Tetszőleges $y \in \mathcal{Y}$ -ra legyen

$$(\psi_n y)_i = \begin{cases} y(t_{i-1}), & i = 1, \dots, n, \\ y(t_0), & i = 0. \end{cases}$$

- A $\Phi_n : C^1[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ leképezés legyen:

$$[(\Phi_n(F)) u]_i = \begin{cases} n(u(t_i) - u(t_{i-1})) - g(u(t_{i-1})), & i = 1, \dots, n, \\ u(t_0) - c, & i = 0. \end{cases} \quad (7)$$

A bevezetett fogalmak és a numerikus módszerek egymástól függetlenek a problémákra nézve. Ugyanakkor az alkalmazhatóság szempontjából csak azon $\mathcal{N}$ numerikus módszerek érdekelnek bennünket, melyeknél érvényes, hogy a $\mathcal{D}$ diszkretizációs módszer alkalmazható a $\mathcal{P}$ problémára.

7. Megjegyzés. Elméletileg a diszkretizáció és a feladat $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ terei különbözőek is lehetnek. Azonban egy diszkretizációs módszert csak akkor tudunk alkalmazni egy konkrét problémára, ha a terek megegyezők. Ezzel a feltételezéssel élni fogunk a továbbiakban.

8. Példa. Legyen a $\mathcal{P}$ problémára alkalmazott $\mathcal{N}$ numerikus módszer a Példa 2.-ből, míg a $\mathcal{D}$ diszkretizáció a Példa 6.-ból való. Ekkor az (5)-ös feladatot megoldjuk úgy, hogy a g és a c értékeket a (3)-(4)-ből vesszük. Így $F_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ az alábbi: tetszőleges $\mathbf{v}_n = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ -re nyerjük, hogy

$$(F_n(\mathbf{v}))_i = \begin{cases} n(v_i - v_{i-1}) - f(v_{i-1}), & i = 1, \dots, n, \\ v_0 - u_0, & i = 0. \end{cases} \quad (8)$$

A $h = 1/n$ -es jelölést bevezetve, a (8)-ra alkalmazott (5)-ös feladat az alábbi jelenti: keressük azon $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektort, amelyre

$$\begin{cases} \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = f(v_{i-1}), & i = 1, \dots, n, \\ v_0 = u_0, & i = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Azaz az így nyert módszer a $\mathbb{G}_n$ rácshálón értelmezett h lépésközű explicit Euler módszer.

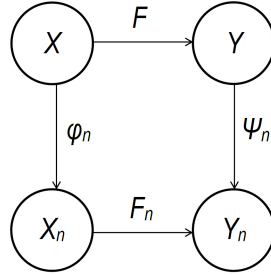
Később a $\mathcal{D} = (\varphi_n, \psi_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diszkretizációra a következő feltevéseket tesszük.

9. Feltevés. A $\mathcal{D}$ diszkretizáció rendelkezik a $\psi_n(0) = 0$ tulajdonsággal.

Ha ψ_n lineáris operátor, nyilván ez a tulajdonság teljesül. Említünk még két később használt feltevést.

10. Feltevés. A $\mathcal{D}$ diszkretizáció generál egy $\mathcal{N}$ numerikus módszert, amelyre igaz, hogy $\dim \mathcal{X}_n = \dim \mathcal{Y}_n < \infty$.

11. Feltevés. A $\mathcal{P}$ problémára alkalmazott $\mathcal{D}$ diszkretizáció olyan, hogy F_n folytonos a $B_R(\varphi_n(\bar{u}))$ gömbön.



1. ábra. A numerikus módszerek általános sémája.

3. Elméleti eredmények

Ebben a fejezetben a numerikus módszer struktúráját vizsgáljuk. Alkalmazzuk a $\mathcal{P}$ problémára a $\mathcal{D}$ diszkretizációt, így nyerünk egy $\mathcal{N}$ numerikus módszert, mely (5)-beli feladatok sorozatát generálja. Célunk az $\bar{u}_n$ megoldások létezésének és az $\bar{u}$ megoldáshoz való közelségének garantálása. Ehhez definiálnunk kell az elemek közötti távolságot, melyet majd globális diszkretizációs hibának nevezünk. A globális hiba direktben nehezen ellenőrizhető, hiszen ehhez az $\bar{u}$ megoldást ismertnek tételezzük fel. Bevezetünk további fogalmakat, melyek segítenek a globális diszkretizációs hiba viselkedésének megértésében.

3.1. Konvergencia

Általában az $\bar{u}$ és az $\bar{u}_n$ elemek távolságát az $\mathcal{X}_n$ térben érdemes venni. Vehetnénk a távolságukat az $\mathcal{X}$ térben is, de a problémát az $\mathcal{X}_n$ térből $\mathcal{X}$ -be történő kiterjesztés okozza.

12. Definíció. Az $e_n = \varphi_n(\bar{u}) - \bar{u}_n \in \mathcal{X}_n$ elemet globális diszkretizációs hibának nevezzük.

Természetes, hogy célunk annak garantálása, hogy n növelésével a globális diszkretizációs hiba tetszőlegesen kicsi legyen. Ennek érdekében megköveteljük az alábbi tulajdonságot.

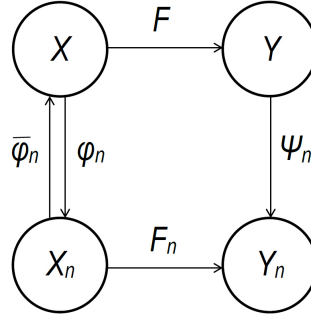
13. Definíció. A $\mathcal{P}$ problémára alkalmazott $\mathcal{D}$ diszkretizációt konvergensnek nevezzük, ha a

$$\lim \|e_n\|_{\mathcal{X}_n} = 0 \quad (10)$$

egyenlőség teljesül. Amikor

$$\|e_n\|_{\mathcal{X}_n} = \mathcal{O}(n^{-p})$$

alakú, akkor a diszkretizációt p -ed rendben konvergensnek nevezzük.



2. ábra. A numerikus módszer általános sémája kiterjesztési operátorral.

14. Megjegyzés. A fejezet elején már említettük, hogy másképpen is lehetséges a távolság mérése; a $\bar{\varphi}_n : \mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}$ operátorral ez az $\|\bar{u} - \bar{\varphi}_n \bar{u}_n\|_{\mathcal{X}}$.

Itt feltesszük, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{X}$ -re $\lim(\varphi_n \circ \bar{\varphi}_n)v = v$. Megjegyeznénk, hogy ez az összefüggés nem jelenti azt, hogy $\bar{\varphi}_n$ φ_n inverze lenne, hiszen φ_n nem invertálható. Tipikusan $\bar{\varphi}_n$ -t interpolációként képzelhetjük el. A konvergencia ebben a megközelítésben az $\|\bar{u} - \bar{\varphi}_n \bar{u}_n\|_{\mathcal{X}}$ nullához tartását jelenti. A fő problémát az interpoláció megválasztása jelenti, ugyanis ez a konvergencia rendjét is befolyásolja. Többek között ezért sem ez az elterjedt az $\bar{u}$ és az $\bar{u}_n$ elemek távolságának mérésére.

3.2. Konzisztencia

A konzisztencia kapcsolatot teremt a $\mathcal{P}$ probléma és az $\mathcal{N}$ numerikus módszer között.

15. Definíció. A $\mathcal{P}$ problémára alkalmazott $\mathcal{D}$ diszkrétizációt egy $v \in \mathcal{D}$ elemen konzisztensnek nevezzük, ha

- $\varphi_n(v) \in \mathcal{D}_n$ egy indextől kezdve,
- igaz a

$$\lim \|F_n(\varphi_n(v)) - \psi_n(F(v))\|_{\mathcal{Y}_n} = 0 \quad (11)$$

egyenlőség.

A (11)-ben szereplő $l_n(v) = F_n(\varphi_n(v)) - \psi_n(F(v)) \in \mathcal{Y}_n$ fontos szerepet játszik a numerikus analízisben. Rögzített $v \in \mathcal{D}$ esetén a fenti egyenlet az $\mathcal{Y}_n$ térben két bejárési irányt mutat. A definícióba $\bar{u}$ -t helyettesítve az $l_n(\bar{u})$ a módszer hibáját mutatja meg, többek között ezért is szokták képlethibának is hívni.

16. Definíció. Az $l_n(v) = F_n(\varphi_n(v)) - \psi_n(F(v)) \in \mathcal{Y}_n$ -t a v elemen vett lokális diszkretizációs hibának nevezzük. Az $l_n(\bar{u}) = F_n(\varphi_n(\bar{u})) - \psi_n(F(\bar{u})) = F_n(\varphi_n(\bar{u}))$ -t lokális diszkretizációs hibának nevezzük. Amikor

$$\|l_n(v)\|_{\mathcal{X}_n} = \mathcal{O}(n^{-p})$$

alakú, akkor v -re a konzisztencia p -ed rendű.

17. Megjegyzés. Az egyszerűség kedvéért bevezetjük az $l_n(\bar{u})$ -re az l_n jelölést.

Felmerülhet a kérdés, hogy önmagában a konzisztencia garantálja-e a konvergenciát? A következő példa jól érzékelteti, hogy ez általában nem garantálható.

18. Példa. Legyen $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n = \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_n = \mathbb{R}$, míg φ_n és ψ_n az identikus leképezés. Oldjuk meg az $F(x) = 0$ skalár egyenletet, ahol feltesszük, hogy az $\bar{x} = 0$ az egyértelmű megoldás. Definiáljuk az $\mathcal{N}$ numerikus módszert $F_n(x) = (1-x)/n$ -ként. Világos, hogy φ_n és ψ_n linearitása miatt $l_n = F_n(0) - 0 = F_n(0)$. Mivel $F_n(0) \rightarrow 0$, így a diszkretizáció konzisztens. Ugyanakkor nem konvergens, hiszen az $F_n(x) = 0$ feladatok megoldása minden esetben az $\bar{x}_n = 1$.

Azaz általában a konvergencia nem helyettesíthető csak a konzisztenciával.

3.3. Stabilitás

Ahogy már korábban is láthattuk, a konzisztencia önmagában nem elegendő a konvergenciához. Feltéve az F_n^{-1} létezését nyerjük, hogy:

$$e_n = \varphi_n(\bar{u}) - \bar{u}_n = F_n^{-1}(F_n(\varphi_n(\bar{u}))) - F_n^{-1}(0) = F_n^{-1}(l_n) - F_n^{-1}(0),$$

ami a globális és lokális diszkretizációs hiba közötti kapcsolatot mutatja. Ez az egyenlet jól mutatja, hogy ha $(F_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ jó tulajdonságú, akkor a konzisztencia biztosíthatja a konvergenciát, azaz a lokális diszkretizációs hiba (l_n) tart nullához. Egy ilyen tulajdonság a Lipschitz folytonosság. Érdekes feltenni, hogy F_n^{-1} kielégíti a $0 \in \mathcal{Y}$ pontban a Lipschitz tulajdonságot. Általában nem garantálható az F_n^{-1} létezése, ennek érdekében néhány tulajdonságot tételezünk fel F_n -ről. Ennek első lépéseként bevezetjük a szemistabilitás fogalmát.

19. Definíció. A $\mathcal{P}$ problémán a $\mathcal{D}$ diszkretizációt szemistabilnak nevezzük, ha léteznek olyan $S \in \mathbb{R}$, $R \in (0, \infty]$ konstansok, hogy

- $B_R(\varphi_n(\bar{u})) \subset \mathcal{D}_n$ igaz egy indextől kezdve;
- $\forall (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ melyre $v_n \in B_R(\varphi_n(\bar{u}))$ teljesül a

$$\|\varphi_n(\bar{u}) - v_n\|_{\mathcal{X}_n} \leq S \|F_n(\varphi_n(\bar{u})) - F_n(v_n)\|_{\mathcal{Y}_n} \quad (12)$$

becslés.

A szemistabilitás a konzisztenciához hasonlóan pusztán elméleti fogalom, mely direktben nem ellenőrizhető, hiszen $\bar{u}$ ismeretlen. A következő állítás a három fogalom közötti kapcsolat jelentőségét mutatja.

20. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}$ diszkretizáció*

- *konzisztens $\bar{u}$ -val és szemistabil $\mathcal{P}$ -n az R stabilitási konstanssal;*
- *generál egy $\mathcal{N}$ numerikus módszert, melynek az (5)-beli megoldása egy indextől kezdve $B_R(\varphi_n(\bar{u}))$ -ban van.*

Ekkor az (5)-beli egyenlet megoldásainak sorozata a $\mathcal{P}$ probléma megoldásához tart, és a konvergencia rendje nem kevesebb mint a konzisztencia rendje.

Bizonyítás. Felhasználva az $F_n(\bar{u}_n) = \psi_n(F(\bar{u})) = 0$ egyenlőséget,

$$\|\varphi_n(\bar{u}) - \bar{u}_n\|_{\mathcal{X}_n} \leq S \|F_n(\varphi_n(\bar{u})) - F_n(\bar{u}_n)\|_{\mathcal{Y}_n} = S \|F_n(\varphi_n(\bar{u})) - \psi_n(F(\bar{u}))\|_{\mathcal{Y}_n}.$$

Így $\|e_n\|_{\mathcal{X}_n} \leq S \|l_n\|_{\mathcal{Y}_n}$. □

A lemmának azonban hátránya is van: a lemma feltételei közvetlenül nem ellenőrizhetőek, hiszen $\bar{u}$ általában ismeretlen. Emellett nem lehet garantálni az (5)-beli egyenlet $B_R(\varphi_n(\bar{u}))$ -beli megoldását sem. Ezeket a problémákat segít a következő, Kellertől⁴ származó definíció.

21. Definíció. *A $\mathcal{D}$ diszkretizációt a $\mathcal{P}$ problémán egy $v \in \mathcal{X}$ elemen stabilnak mondunk, ha léteznek olyan $S \in \mathbb{R}$, $R \in (0, \infty]$ konstansok, hogy*

- $B_R(\varphi_n(v)) \subset \mathcal{D}_n$ igaz egy indextől kezdve;
- $\forall (v_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ melyre $v_n^i \in B_R(\varphi_n(v))$, továbbá igaz a

$$\|v_n^1 - v_n^2\|_{\mathcal{X}_n} \leq S \|F_n(v_n^1) - F_n(v_n^2)\|_{\mathcal{Y}_n} \quad (13)$$

becslés.

22. Megjegyzés. *Természetesen adódik, hogy az (1)-es probléma megoldásának stabilitása (azaz az $\bar{u} \in \mathcal{X}$ elemen) maga után vonja a szemistabilitást is.*

A Keller-féle definíció egyik legnagyobb haszna az injektivitás, melyet a következő állításban láthatunk.

⁴Herbert Bishop Keller (1925-2008) amerikai alkalmazott matematikus. Érdeklődési területe az alkalmazott és numerikus matematika szinte összes területét lefedte.

23. Következmény. Ha a $\mathcal{D}$ diszkretizáció a $\mathcal{P}$ problémán egy $v \in \mathcal{X}$ elemen az R stabilitási konstanssal stabil, akkor F_n inkejtív $B_R(\varphi_n(v))$ -en.

A következő állítás a Keller-féle stabilitási definíció hasznát érzékelteti.

24. Lemma. Tegyük fel, hogy

- $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ normált terek, melyre $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} < \infty$;
- $G : B_R(v) \rightarrow \mathcal{W}$ folytonos, ahol $B_R(v) \subset \mathcal{V}$ a $v \in \mathcal{V}$ középpű, $R \in (0, \infty]$ sugarú gömb;
- tetszőleges v^1, v^2 -re, melyre $v^i \in B_R(v)$, teljesül a

$$\|v^1 - v^2\|_{\mathcal{V}} \leq S \|G(v^1) - G(v^2)\|_{\mathcal{W}} \quad (14)$$

stabilitási becslés.

Ekkor

- G invertálható, és $G^{-1} : B_{R/S}(G(v)) \rightarrow B_R(v)$;
- G^{-1} Lipschitz folytonos az S konstanssal.

Bizonyítás. Lásd [S73]-ban. □

25. Lemma. A $\mathcal{D}$ diszkretizációra tegyük fel, hogy

- konzisztens és stabil az $\bar{u}$ elemen az R stabilitási és S Lipschitz konstanssal a $\mathcal{P}$ problémán;
- A Feltevés 10. és 11. teljesülnek.

Ekkor a $\mathcal{D}$ diszkretizáció egy $\mathcal{N}$ numerikus módszert generál, melynek (5)-beli megoldása egy indextől kezdve egyértelmű $B_R(\varphi_n(\bar{u}))$ -en.

Bizonyítás. A Lemma 24.-ből tudjuk, hogy F_n invertálható, és $F_n^{-1} : B_{R/S}(F_n(\varphi_n(\bar{u}))) \rightarrow B_R(\varphi_n(\bar{u}))$. Továbbá a konzisztenciának köszönhetően $F_n(\varphi_n(\bar{u})) = l_n \rightarrow 0$. Ez azt jelenti, hogy $0 \in B_{\frac{R}{S}}(F_n(\varphi_n(\bar{u})))$. Ebből már az állítást közvetlenül adódik. □

A fő eredményünk a következő tételben csúcsosodik ki.

26. Tétel. Tegyük fel, hogy

- a $\mathcal{D}$ diszkretizáció konzisztens és stabil az $\bar{u}$ elemen az R stabilitási és S Lipschitz konstanssal a $\mathcal{P}$ problémán;
- a Feltevés 10. és 11. teljesülnek.

Ekkor a $\mathcal{D}$ diszkretizáció konvergens a $\mathcal{P}$ problémán, és a konvergencia rendje nem kevesebb mint a konzisztencia rendje.

Bizonyítás. Az állítás a Lemma 25. és 20.-ból közvetlenül adódik. □

3.4. Stabilitási fogalmakkal kapcsolatos megjegyzések

Léteznek más stabilitási fogalmak is az irodalomban, többnyire a Keller-féle definíció stabilitás fogalmának általánosításai. A továbbiakban hárommal ismerkedünk meg. Ezeknek a speciális esete a lineáris elméletből ismert definíció. A lineáris esetben ez az F_n^{-1} operátorok normában egyenletes korlátosságát jelentik. Az első ilyen Stetter 1973-as könyvében található.

27. Definíció. A $\mathcal{D}$ diszkretizációt a $\mathcal{P}$ problémán Stetter⁵-féle értelemben stabilnak nevezzük, ha léteznek olyan $S \in \mathbb{R}$, $R \in (0, \infty]$ és $r \in (0, \infty]$ konstansok, hogy

- $B_R(\varphi_n(\bar{u})) \subset \mathcal{D}_n$ igaz egy indextől kezdve;
- tetszőleges $(v_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ -re, melyre $v_n^i \in B_R(\varphi_n(\bar{u}))$, továbbá feltéve $F_n(v_n^i) \in B_r(F_n(\varphi_n(\bar{u})))$, és a

$$\|v_n^1 - v_n^2\|_{\mathcal{X}_n} \leq S \|F_n(v_n^1) - F_n(v_n^2)\|_{\mathcal{Y}_n}$$

becslés igaz.

Észrevehető, hogy ez a definíció kevésbé megkötő, hiszen az $r = \infty$ helyettesítéssel a Keller-féle definíciót nyerjük. A másodikat López-Marcos és Sanz-Serna⁶ 1988-as cikkükben jelentették meg.

28. Definíció. A $\mathcal{D}$ diszkretizációt a $\mathcal{P}$ problémán López-Marcos és Sanz-Serna-féle értelemben stabilnak nevezzük, ha léteznek olyan $S \in \mathbb{R}$ and $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $R_n \in (0, \infty]$ konstansok, hogy

- $B_{R_n}(\varphi_n(\bar{u})) \subset \mathcal{D}_n$ igaz egy indextől kezdve;
- $\forall (v_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ melyre $v_n^i \in B_{R_n}(\varphi_n(\bar{u}))$ igaz a

$$\|v_n^1 - v_n^2\|_{\mathcal{X}_n} \leq S \|F_n(v_n^1) - F_n(v_n^2)\|_{\mathcal{Y}_n}$$

becslés.

A harmadik definíció Trenogin nevéhez fűződik.

29. Definíció. A $\mathcal{D}$ diszkretizációt a $\mathcal{P}$ problémán Trenogin-féle értelemben stabilnak nevezzük, ha létezik olyan $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre

⁵Hans J. Stetter (1930-) német matematikus. A numerikus analízis számtalan területével foglalkozik. A TU Vienna nyugalmazott professzora.

⁶Főként funkcionálanalízissel foglalkozó spanyol matematikusok. Jelenleg az Universidad de Valladolid alkalmazott matematika tanszékének tanárai.

- folytonos, szigorúan monoton növekvő;
- $\mathcal{D}(\omega) = [0, +\infty]$
- $\omega(0) = 0$ és $\omega(+\infty) = +\infty$;
- továbbá $\forall (v_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n^2)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_n$, és $\forall n = 1, 2, \dots$ esetén igaz a

$$\|F_n(v_n^1) - F_n(v_n^2)\|_{Y_n} \geq \omega(\|(v_n^1) - (v_n^2)\|_{X_n}) \quad (15)$$

becslés.

4. A Trenogin-féle elmélet illusztrálása

Az előző fejezetben definiált Trenogin⁷-féle stabilitási fogalom segítségével eltérő bizonyítást adunk a korábban már megállapított 'alaptételünkre'. A tétel kimondásához bevezetünk egy fogalmat.

30. Definíció. Az $X_n, n \in \mathbb{N}$ normált terek reguláris normájúak, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(v)\|_{X_n} = 0 \Rightarrow v = 0.$$

31. Tétel. Tegyük fel, hogy

- X_n normái regulárisak,
- létezik (1)-nek és (5)-nek megoldása,
- a $\mathcal{D}$ diszkretizáció az $\bar{u}$ -n konzisztens és stabil

Ekkor

i, $\bar{u}$ egyértelmű,

ii, $\forall n$ -re $\bar{u}_n$ egyértelmű,

iii, fennáll a konvergencia.

Bizonyítás. i, Legyenek v_1, v_2 az (1)-nek két megoldása és ezekre teljesüljenek a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(v_1)\|_{X_n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(v_2)\|_{X_n} = 0$$

⁷Vladilen A. Trenogin (1931-) szovjet matematikus. Mind az elméleti, mind az alkalmazott matematika jeles képviselője. Fő kutatási területe a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete, valamint a funkcionálanalízis.

approximációk.

Ekkor $\|\varphi_n(v_1 - v_2)\|_{\mathcal{X}_n} \leq \omega^{-1}(\|F_n(\varphi_n(v_1)) - F_n(\varphi_n(v_2))\|)_{\mathcal{Y}_n} \leq \omega^{-1}(\|F_n(\varphi_n(v_1))\|_{\mathcal{Y}_n} + \|F_n(\varphi_n(v_2))\|_{\mathcal{Y}_n}) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ezért kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(v_1 - v_2)\|_{\mathcal{X}_n} = 0,$$

a norma regularitása miatt $v_1 = v_2$, azaz a megoldás egyértelmű.

ii, Legyenek v_1^n, v_2^n az (5)-nek két megoldása. A (15)-be helyettesítve kapjuk, hogy $0 \geq \omega(\|v_1^n - v_2^n\|_{\mathcal{X}_n}) \geq 0$, azaz $\omega(\|v_1^n - v_2^n\|_{\mathcal{X}_n}) = 0$. A norma regularitásából következik, hogy $v_1^n = v_2^n$.

iii, A Trenogin-féle stabilitási definíció, továbbá az ω^{-1} függvény $t = 0$ pontbeli folytonossága és (5) alapján:

$$\|v_1^n - \varphi(v_1)\|_{\mathcal{X}_n} \leq \omega^{-1}(\|F_n(v_1^n) - F_n(\varphi(v_1))\|)_{\mathcal{Y}_n} = \omega^{-1}(\|F_n(\varphi(v_1))\|)_{\mathcal{Y}_n},$$

ez pedig tart 0-hoz, ha $n \rightarrow \infty$.

□

32. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a Tétel 31. feltételei enyhíthetőek! A bizonyítás során nem használtuk ki hogy $\omega(+\infty) = +\infty$. Megfigyelhető, hogy az ω függvény folytonossága helyett elegendő a függvény folytonossága csak a $t = 0$ pont egy környezetében.

A fejezet hátralévő részében kezdeti érték probléma numerikus megoldását tűzzük ki célul. A feladatot az explicit Euler módszerrel oldjuk meg a Trenogin-féle elmélet alapján.

4.1. A konzisztencia rendjének megállapítása

Tekintsük a korábban már a Példa 4., 6. és 8.-ban meghatározott explicit Euler módszert. Alkalmazzuk ezt a (3)-(4)-re. A konzisztencia rendjének meghatározásához elegendő a lokális diszkretizációs hiba nagyságrendjét meghatározni.

$$\begin{aligned} l_n(v)(t_i) &= \|[F_n(\varphi(v))](t_i)\|_{\mathcal{Y}_n} = \left\| \frac{v(t_i) - v(t_{i-1})}{h} - v'(t_{i-1}) \right\|_{\mathcal{Y}_n} = \\ &= \|n[v(t_i) - v(t_{i-1})] - v'(t_{i-1})\|_{\mathcal{Y}_n} = \max_{1 \leq i \leq n} |v'((i-1)/n) - n[v(i/n) - v((i-1)/n)]| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |n \int_{(i-1)/n}^{i/n} [v'((i-1)/n) - v'(s)] ds| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |v'(t_{i-1}) - v'(s)| ds. \end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy $M_2(v) := \sup_{t \in (0,1)} |v''(t)| < \infty$, akkor a lokális diszkretizációs hibára közvetlenül adódik, hogy:

$$l_n(v) \leq nM_2(v) \frac{1}{2n^2} = \frac{M_2(v)}{2n}$$

Azaz ebből rögtön adódik, hogy a konzisztencia rendje egy.

4.2. A stabilitás igazolása

A stabilitás ellenőrzéséhez tekintsük az

$$F_n(x_n + z_n) - F_n(x_n) = y_n \quad (16)$$

egyenletet, ahol x_n elemet paraméternek, z_n -t pedig ismeretlennek tekintünk. Ha sikerül egy

$$\|z_n\|_{\mathcal{X}_n} \leq \zeta(\|y_n\|_{\mathcal{Y}_n}) \quad (17)$$

típusú becslést adnunk, ahol $\zeta(t)$ tulajdonságai megegyeznek $\omega(t)$ tulajdonságaival, akkor az $\omega(t) := \zeta^{-1}(t)$ függvény mellett beláttuk a stabilitást.

Ezt onnan láthatjuk, hogy legyen (16)-ban $x_n = x_1^n$, míg $x_n + z_n = x_2^n$. Ekkor $F_n(x_2^n) - F_n(x_1^n) = y_n$ és $x_2^n - x_1^n = z_n$. A (17)-es összefüggésből adódik, hogy

$$\|x_2^n - x_1^n\|_{\mathcal{X}_n} \leq \zeta(\|F_n(x_2^n) - f_n(x_1^n)\|_{\mathcal{Y}_n}).$$

Mivel ζ inverze létezik és szigorúan monoton növekvő, ezért írhatjuk, hogy

$$\zeta^{-1}(\|x_2^n - x_1^n\|_{\mathcal{X}_n}) \leq \|F_n(x_2^n) - f_n(x_1^n)\|_{\mathcal{Y}_n},$$

amely éppen a Trenogin-féle definícióban szereplő (15)-ös stabilitási becslésnek feleltethető meg.

Ha az egyenlet jobb oldala $f(x, t)$ alakú, akkor megköveteljük a $|f_x(x, t)| < L$ feltételt, ahol L a Lipschitz konstans. A stabilitáshoz tulajdonképpen a

$$\|z_n\|_{\mathcal{X}_n} \leq c \|y_n\|_{\mathcal{Y}_n} = c(\max_{1 \leq i \leq n} |y_i| + |u_0|) \quad (18)$$

becslést kell igazolnunk. Helyettesítsük be F_n -et (16)-ba, ekkor kapjuk, hogy:

$$(y_n)_i = \begin{cases} n(z_i - z_{i-1}) + f(t_{i-1}, x_{i-1} + z_{i-1}) - f(t_{i-1}, x_{i-1}) = y_{i-1}, & i = 1, \dots, n, \\ z_0 = u_0, & i = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Ekkor a fenti egyenletet az alábbi alakba írhatjuk:

$$z_i = (1 - hL_{i-1})z_{i-1} + hy_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

és $z_0 = y_0$, ahol

$$L_{i-1} = \int_0^1 f_x(t_{i-1}, x_{i-1} + \theta z_{i-1}) d\theta.$$

Továbbá azt is tudjuk, hogy: $|L_{i-1}| \leq L$, $1 \leq i \leq n$. Mindezeket felhasználva nyerjük z_i -re, hogy:

$$|z_i| \leq (1 + Lh)|z_{i-1}| + h|y_{i-1}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ezeket minden i indexre kiírva, illetve a fenti egyenlőtlenséget rekurzívan felhasználva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} |z_1| &\leq (1 + Lh)|u_0| + h \|y_n\|_\infty, \\ |z_2| &\leq (1 + Lh)^2|u_0| + [(1 + Lh) + 1]h \|y_n\|_\infty, \\ &\vdots \\ |z_n| &\leq (1 + Lh)^n|u_0| + \sum_{k=1}^{n-1} (1 + Lh)^k h \|y_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Becsüljük fölülről az alábbi két tagot:

$$\begin{aligned} (1 + Lh)^k &= \left(1 + \frac{L}{n}\right)^k \leq \left(1 + \frac{L}{n}\right)^n \leq e^L, \\ \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{L}{n}\right)^k \frac{1}{n} &= \frac{\left(1 + \frac{L}{n}\right)^{n+1} - 1}{\left(1 + \frac{L}{n}\right) - 1} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{e^L - 1}{L}. \end{aligned}$$

Ekkor z_n normájára nyerjük az alábbi becslést:

$$\|z_n\|_{\mathcal{X}_n} \leq e^L |u_0| + \frac{e^L - 1}{L} \|y_n\|_\infty.$$

Azaz, ha a $c = \max(e^L, \frac{e^L - 1}{L})$ -lel egyenlő, akkor (18)-as alakú becslést tudunk felírni, azaz ezzel a stabilitást láttuk be.

A 4.1 és 4.2 alfejezetek segítségével (3)-(4) kezdeti érték feladatra alkalmazott explicit Euler módszer elsőrendű konvergenciáját igazoltuk.

5. Alapfogalmak valós alkalmazhatósága

A Tétel 26. nem felel meg a tényleges céljainkra: hiszen a feltételek a $v = \bar{u}$ elemen történő ellenőrzésre vonatkoznak (konzisztencia, stabilitás). Így az az állítás valós probléma során nem alkalmazható. Többek között emiatt is terjesztjük ki a korábban bevezetett pontszerű (lokális) definíciókat halmazokra (globális) vonatkozó definíciókra.

33. Definíció. A $\mathcal{D}$ diszkretizációt a $\mathcal{P}$ problémán konzisztensnek nevezzük, ha létezik olyan $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ halmaz, melynek $F(\mathcal{D}_0)$ képe sűrű a $0 \in \mathcal{Y}$ pont egy környezetében, és minden $v \in \mathcal{D}_0$ elemen konzisztens.

A $\mathcal{D}_0$ halmazon a konzisztencia rendjét az $\inf \{p_v : v \in \mathcal{D}_0\}$ -ként definiáljuk, ahol p_v a v elemen vett konzisztencia rendjét jelöli.

34. Példa. Tekintsük a 4.1-es fejeztben leírt feltételeket. A konzisztencia rendjét a $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ halmazon igazoljuk, ahol $\mathcal{D} := C^1[0, 1]$, míg $\mathcal{D}_0 := C^2[0, 1]$. Ekkor a lokális diszkretizációs hibára nyerjük:

$$[F_n(\varphi_n(v)) - \psi_n(F(v))](t_i) = \begin{cases} \frac{1}{2n} v''(\theta_i) & i = 1, \dots, n, \\ 0, & i = 0, \end{cases} \quad (20)$$

ahol $\theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ adott érték. Ekkor a Definíció 16.-ból az $\|l_n(v)\|_{\mathcal{X}_n} = \mathcal{O}(n^{-1})$ adódik.

Azaz Lipschitz folytonos f jobb oldalú (3)-(4) problémák esetén az explicit Euler módszer konzisztens, és rendje egy.

35. Megjegyzés. A konzisztencia rendjének igazolásakor tekintett megoldások osztálya szűkebb, mint az F nemlineáris operátor értelmezési tartománya.

A 3. fejezetben (Példa 18.) már láthattuk, hogy a megoldáson ($\bar{u}$ -n) vett lokális konzisztencia önmagában nem garantálja a konvergenciát. Azt gondolhatnánk, hogy az ebben a fejezetben definiált konzisztencia fogalom segítségével ez már elégséges feltételt ad a konvergenciához. Azonban itt is adható ellenpélda (lásd [FMF11]).

Az általánosabb tétel kimondásához további feltevésekkel kell élnünk.

36. Feltevés. Legyen a $\mathcal{P}$ probléma olyan, hogy F^{-1} folytonos a $0 \in \mathcal{Y}$ pontban.

37. Feltevés. A $\mathcal{P}$ problémára alkalmazott $\mathcal{D}$ diszkretizáció rendelkezzen az alábbi tulajdonsággal: létezik olyan $K_1 > 0$ állandó, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{D}$ -re igaz a

$$\|\varphi_n(\bar{u}) - \varphi_n(v)\|_{\mathcal{X}_n} \leq K_1 \|\bar{u} - v\|_{\mathcal{X}}$$

egyenlőtlenség tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén.

38. Feltevés. A $\mathcal{P}$ problémára alkalmazott $\mathcal{D}$ diszkretizáció rendelkezzen az alábbi tulajdonsággal: létezik olyan $K_2 > 0$ állandó, hogy tetszőleges $y \in \mathcal{Y}$ -ra igaz a

$$\|\psi_n(y) - \psi_n(0)\|_{\mathcal{Y}_n} \leq K_2 \|y - 0\|_{\mathcal{Y}}$$

egyenlőtlenség tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Az egyszerűbb kezelhetőség kedvéért a Feltevés 9–11. és 36–38.-akban leírtakat egyszerűen Feltevés A^* -gal jelöljük.

39. Lemma. *A Feltevés A^* -on túl tegyük fel még, hogy*

- *a $\mathcal{D}$ diszkretizáció a $\mathcal{P}$ problémán konzisztens*
- *a $\mathcal{D}$ diszkretizáció a $\mathcal{P}$ problémán az $\bar{u}$ elemen stabil az R stabilitási és az S Lipschitz konstanssal.*

Ekkor F_n invertálható a $\psi_n(0)$ pontban, azaz elegendően nagy n indextől kezdve $F_n^{-1}(\psi_n(0))$ létezik.

Bizonyítás. Az F^{-1} folytonosságának köszönhetően választhatunk egy $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot úgy, hogy $y^k \rightarrow 0 \in \mathcal{Y}$ és $F^{-1}(y^k) =: u^k \rightarrow \bar{u}$. Elegendően nagy k indextől kezdve a $\mathcal{D}$ diszkretizáció a $\mathcal{P}$ problémán az u^k elemen stabil az $R/2$ stabilitási és az S Lipschitz konstanssal. Továbbá F_n folytonos a $B_{R/2}(\varphi_n(u^k))$ gömbön, így ezen k indexekre és elegendően nagy n indexekre létezik az $F_n^{-1} : B_{R/2S}(F_n(\varphi_n(u^k))) \rightarrow B_{R/2}(\varphi_n(u^k))$. A Lemma 24. szerint ráadásul ez Lipschitz folytonos az S Lipschitz konstanssal. Ekkor

$$\|F_n(\varphi_n(u^k))\|_{\mathcal{Y}_n} \leq \|F_n(\varphi_n(u^k)) - \psi_n(F(u^k))\|_{\mathcal{Y}_n} + \|\psi_n(F(u^k))\|_{\mathcal{Y}_n}.$$

A konzisztencia miatt az első tag nullához tart, ha $n \rightarrow \infty$. A Feltevés 38. alapján a $\|\psi_n(y^k)\|_{\mathcal{Y}_n} \leq K_2 \|y^k\|_{\mathcal{X}_n}$ becslés igaz. Mivel a jobb oldali tag $k \rightarrow \infty$ esetén tart a nullához, ez azt jelenti, hogy a $B_{R/2}(F_n(\varphi_n(u^k)))$ gömb középpontja tart a $0 \in \mathcal{Y}_n$ ponthoz. Azaz, ezzel az állítást beláttuk. $\square$

40. Következmény. *A Lemma 39. feltételei mellett, elegendően nagy k és n indexek mellett az alábbiak igazak:*

- *Létezik az $F_n^{-1}(\psi_n(y^k))$, mivel $\psi_n(y^k) \in B_{R/2S}(F_n(\varphi_n(u^k)))$;*
- *$F_n^{-1}(\psi_n(y^k)), \varphi_n(F^{-1}(y^k)) \in B_{R/2}(\varphi_n(\bar{u}))$.*

A konzisztenciához analóg módon definiálható a halmazon értelmezett stabilitási fogalom. Többek között ez teszi irrelevánssá az $\bar{u}$ ismeretét.

41. Definíció. *A $\mathcal{D}$ diszkretizációt a $\mathcal{P}$ problémán stabilnak nevezzük, ha léteznek olyan $S \in \mathbb{R}$, $R \in (0, \infty]$ konstansok és létezik olyan $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ halmaz, melyre $\bar{u} \in \mathcal{D}_1$. Továbbá minden $v \in \mathcal{D}_1$ elemen stabil az R stabilitási és az S Lipschitz konstanssal.*

Most már minden készen áll ahhoz, hogy kimondhassuk a fő tételünket. A tétel fő eredménye, hogy a konvergencia garantálható a halmazon értelmezett konzisztencia és stabilitási fogalmak együttesével. Ezeket közvetlenül igazolhatjuk, ráadásul ehhez a $\mathcal{P}$ probléma megoldásának ismeretére sincsen szükségünk.

42. Tétel. *A Feltevés A^* -on túl tegyük még fel, hogy a $\mathcal{D}$ diszkretizáció a $\mathcal{P}$ problémán*

- *konzisztens;*
- *stabil az R stabilitási és az S Lipschitz konstanssal.*

Ekkor a $\mathcal{D}$ diszkretizáció konvergens a $\mathcal{P}$ problémán, és a konvergencia rendje nem kevesebb, mint a $\mathcal{D}_0$ halmazhoz tartozó konzisztencia rendje.

Bizonyítás. A háromszög egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(\bar{u}) - \bar{u}_n\|_{\mathcal{X}_n} &= \|\varphi_n(F^{-1}(0)) - F_n^{-1}(\psi_n(0))\|_{\mathcal{X}_n} \leq \\ &\underbrace{\|\varphi_n(F^{-1}(0)) - \varphi_n(F^{-1}(y^k))\|_{\mathcal{X}_n}}_{I.} + \\ &\underbrace{\|\varphi_n(F^{-1}(y^k)) - F_n^{-1}(\psi_n(y^k))\|_{\mathcal{X}_n}}_{II.} + \\ &\underbrace{\|F_n^{-1}(\psi_n(y^k)) - F_n^{-1}(\psi_n(0))\|_{\mathcal{X}_n}}_{III.}, \end{aligned} \quad (21)$$

ahol az $y^k \in \mathcal{Y}$ elemek a Lemma 39.-ben definiáltak.

Most a (21)-ben szereplő tagokat becsüljük meg.

I. Az első taga a Feltevés 37.-ből nyerjük az alábbi becslést:

$$\|\varphi_n(F^{-1}(0)) - \varphi_n(F^{-1}(y^k))\|_{\mathcal{X}_n} \leq K_1 \|F^{-1}(0) - F^{-1}(y^k)\|_{\mathcal{X}}.$$

Mivel $y^k \rightarrow 0$, midőn $k \rightarrow \infty$, és az F^{-1} folytonos a $0 \in \mathcal{Y}$ pontban. Így az első tag n -től függetlenül tart nullához.

II. Ez a tag $\|F_n^{-1}(F_n(\varphi_n(F^{-1}(y^k)))) - F_n^{-1}(\psi_n(y^k))\|_{\mathcal{X}_n}$ alakba írható. Erre a tagra a stabilitási becslést a Következmény 40. miatt alkalmazhatjuk. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(F^{-1}(y^k)) - F_n^{-1}(\psi_n(y^k))\|_{\mathcal{X}_n} &\leq \\ S \|F_n(\varphi_n(F^{-1}(y^k))) - \psi_n(y^k)\|_{\mathcal{Y}_n} &= S \|F_n(\varphi_n(u^k)) - \psi_n(F(u^k))\|_{\mathcal{Y}_n}. \end{aligned}$$

A fenti becslésben szereplő jobb oldali tag az u^k elem konzisztenciája miatt tart a nullához.

III. A harmadik tagra vonatkozó becslésben a Lemma 39. és Következmény 40.-ből adódóan használhatjuk az F_n^{-1} Lipschitz folytonosságát. Továbbá a Feltevés 38.-et használva kapjuk, hogy

$$\|F_n^{-1}(\psi_n(y^k)) - F_n^{-1}(\psi_n(0))\|_{\mathcal{X}_n} \leq S \|\psi_n(y^k) - \psi_n(0)\|_{\mathcal{Y}_n} \leq SK_2 \|y^k\|_{\mathcal{Y}}.$$

A fenti becslésben szereplő tag az n indextől függetlenül tart nullához.

□

6. A három alapfogalom közötti kapcsolat

Az A^* feltétel melletti Tétel 42. azt mutatja nekünk, hogy a konzisztencia és a stabilitás együttesen elegendő feltétel a konvergenciához. A másik oldalról viszont jelenleg nem tudunk válasszal szolgálni ezen fogalmak szükségességére.

Ezt a gondolatmenetet folytatva: vajon mi lehet a tényleges kapcsolat a három alapfogalom között? Mind a három fogalom lehet egyaránt igaz (I) és hamis (H) is. Azaz nyolc esetet különböztethetünk meg, melyet a lenti táblázatban szemléltetünk.

	konzisztencia	stabilitás	konvergencia
1	I	I	I
2	I	I	H
3	I	H	I
4	I	H	H
5	H	I	I
6	H	I	H
7	H	H	I
8	H	H	H

1. táblázat. A nyolc lehetséges eset.

Az alkalmazhatóság szempontjából a 6-os a 8-as esetek érdektelenek. Bizonyos esetekre példák konstruálhatóak (ezeket a második táblázatban van példa címszóval illettük), melyek az [FMF11]-ben találhatók. Ebből adódóan is részben láthatjuk, hogy sem a konzisztencia, sem a stabilitás nem szükséges feltétel a konvergenciához.

Eset száma	Válasz	Magyarázat
1	mindig teljesül	Tétel 42
2	sosem teljesül	Tétel 42
3	lehetséges	van példa
4	lehetséges	Példa 18
5	lehetséges	van példa
6	-	-
7	lehetséges	van példa
8	-	-

2. táblázat. Válasz az egyes esetekre.

7. Összefoglalás

A pályamunkában nemlineáris egyenletek numerikus megoldását vettük górcső alá. Fő célként a numerikus folyamat konvergenciájának garantálását tűztük ki célul. A lineáris esethez hasonlóan láthattuk, hogy a konzisztencia és a stabilitás együttesen biztosítja a konvergenciát. Ez a lineáris esetben a jól ismert Lax-Richtmyer-Kantorovich tétel. Nemlineáris esetben ez a két feltétel elégséges a konvergencia garantálásához. Megemlítettük, hogy általában sem a konzisztencia, sem a stabilitás nem szükséges feltétele a konvergenciának. A Trenogin-elméletet gyakorlatba is ültettük: közönséges differenciálegyenletekre megvizsgáltuk az explicit Euler módszerrel a kezdeti érték problémát. Igazoltuk ennek elsőrendű konzisztenciáját, továbbá hogy a módszer stabil, azaz az alaptételünk szerint igazoltuk az elsőrendű konvergenciát is.

A jövőre nézve parciális differenciálegyenletekre történő alkalmazás, illetve implicit sémák vizsgálata érdekes kutatási alapot szolgáltatnak.

Hivatkozások

- [FMF11] Faragó, I., Mincsovics, M. E., Fekete, I.: Notes on the basic notions in nonlinear numerical analysis.
Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 1–22 (2011) (közlésre elfogadva)
- [K75] Keller, H. B.: Approximation Methods for Nonlinear Problems with Application to Two-Point Boundary Value Problems.
Math. Comput., 130, 464–474 (1975)
- [LR56] Lax, P. D., Richtmyer, R. D.: Survey of Stability of Linear Finite Difference Equations.
Comm. Pure Appl. Math., 9, 267–293 (1956)
- [LS88] López-Marcos, J. C., Sanz-Serna, J. M.: Stability and Convergence in Numerical Analysis III: Linear Investigation of Nonlinear Stability.
IMA J. Numer. Anal., 8, 71–84 (1988)
- [PS84a] Palencia, C., Sanz-Serna, J. M.: An Extension of the Lax-Richtmyer Theory.
Numer. Math., 44, 279–283 (1984)
- [PS84b] Palencia, C., Sanz-Serna, J. M.: Equivalence Theorems for Incomplete Spaces: an Appraisal.
IMA J. Numer. Anal., 4, 109–115 (1984)
- [PS85] Palencia, C., Sanz-Serna, J. M.: A General Equivalence Theorem in the Theory of Discretization Methods.
Math. of Comp., 45/171, 143–152 (1985)
- [S73] Stetter, H. J.: Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations.
Springer, Berlin, (1973)
- [T80] Trenogin, V. A.: Funkcionálanalízis. (oroszul)
Nauka, Moszkva, (1980)