

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Szalkai Balázs  
Matematikus MSc

KÖRFEDÉSEK SZIMMETRIÁI  
TDK-dolgozat

Témavezető: Csikós Balázs egyetemi docens, tanszékvezető  
Geometria Tanszék



Budapest, 2012.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megragadni az alkalmat, hogy megköszönjem témavezetőmnek, dr. Csikós Baláznak a dolgozatírás során nyújtott sok segítségét; beleértve magát a problémafelvetést, kapcsolódó szakirodalom ajánlását, illetve rendkívül hasznos szakmai útmutatását is.

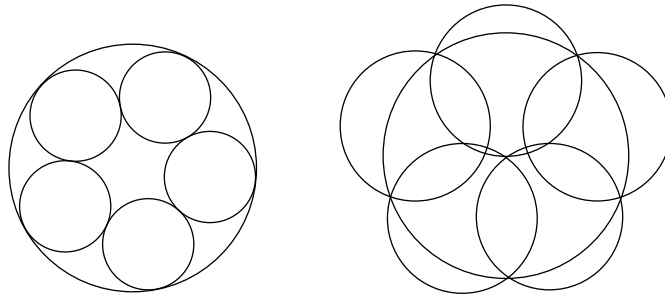
# Tartalomjegyzék

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| Tartalomjegyzék                                    | 3  |
| 1. Bevezetés                                       | 4  |
| 2. Körpolinomok területének iránymenti deriváltjai | 5  |
| 3. Kör lefedése körökkel                           | 6  |
| 4. A program                                       | 9  |
| 5. Kör lefedése két körrel                         | 13 |
| 6. Kör lefedése három körrel                       | 14 |
| 6.1. A lehetséges metszési gráfok . . . . .        | 15 |
| 6.2. 2. eset . . . . .                             | 15 |
| 6.3. 3. eset . . . . .                             | 16 |
| 6.4. 4. eset . . . . .                             | 16 |
| 6.5. 5. eset . . . . .                             | 17 |
| 6.6. 6. eset . . . . .                             | 18 |
| 6.7. 7. eset . . . . .                             | 19 |
| 6.7.1. A fedés esete . . . . .                     | 19 |
| 6.7.2. 41610. számú konfiguráció . . . . .         | 20 |
| 6.7.3. 41675. számú konfiguráció . . . . .         | 26 |
| 6.7.4. 45963. számú konfiguráció . . . . .         | 26 |
| 6.7.5. 303770. számú konfiguráció . . . . .        | 29 |
| 6.7.6. 304650. számú konfiguráció . . . . .        | 29 |
| 6.7.7. 307870. számú konfiguráció . . . . .        | 30 |
| 6.7.8. 308123. számú konfiguráció . . . . .        | 30 |
| 6.7.9. 309003. számú konfiguráció . . . . .        | 31 |
| 6.7.10. 320410. számú konfiguráció . . . . .       | 31 |
| 6.8. Konklúzió . . . . .                           | 31 |
| 7. Kör lefedése négy körrel                        | 32 |
| Hivatkozások                                       | 35 |

# 1. Bevezetés

Sokan – köztük számos magyar matematikus – vizsgálták már alakzatok körökkel való lefedhetőségét, ill. diszjunkt körökkel való minél jobb kitöltését, az úgynevezett fedési, ill. pakolási problémákat.  $n$  db  $r$  sugarú kis kör diszjunkt pakolása egy nagyobb, az egyszerűség kedvéért egység sugarú körbe régóta vizsgált téma. A pakolási sugár lehető legnagyobb értéke és az optimális konfiguráció  $1 \leq n \leq 13$  és  $n = 19$  esetén ismert [10] [8], pl. az  $n = 12, 13, 19$  eseteket nemrég, 1999 és 2003 között bizonyította be Fodor Ferenc [5] [6] [4].  $n \leq 7$  esetén az optimális konfiguráció egybevágóság erejéig egyértelmű és forgásszimmetrikus. Sőt, ha az  $n = 8, 9$  eseteket nézzük, még ezekre az  $n$  értékekre is létezik olyan optimális konfiguráció, mely forgásszimmetrikus, viszont itt az optimális elrendezésben az egyik kis kör „lötyög”, vagyis bármilyen irányban elmozdítható megfelelő kis távolságra [9].

Tekinthetjük azt a feladatot is, amikor  $n$  db egyenlő sugarú kis körrel le kell fednünk egy nagyot. Keressük a legkisebb olyan  $r$  értéket, amely sugarú kis körökkel az egység sugarú körlap már lefedhető. Meglepő, hogy már  $n = 5$  esetén sem forgásszimmetrikus az optimális konfiguráció. Az aszimmetrikus, egyáltalán nem triviális optimális elrendezés megkeresése a célja a Cover-The-Spot nevű fejtörő játéknak, mely egy időben vásári játékként is népszerű volt. A konfiguráció optimalitását Bezdek Károly bizonyította be 1983-ban [1].

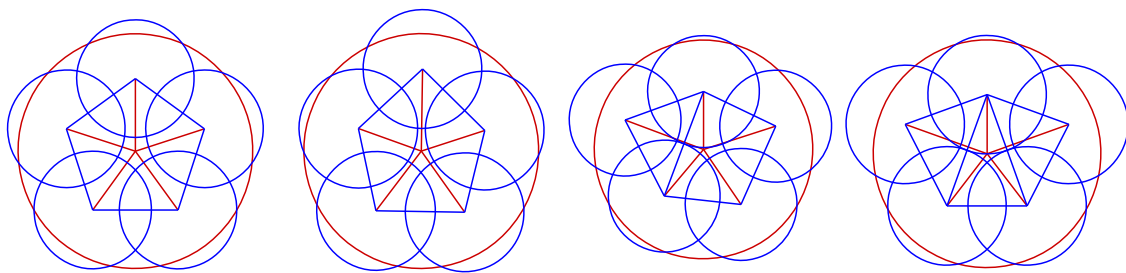


Tehát 5 db kis kör esetén a pakolási konfiguráció még forgásszimmetrikus, míg a fedési konfiguráció már nem az.

Tekintsük azt a Robert Connelly [2] által 2008-ban felvetett feladatot, amelyben adott (egyenlő) sugarú kis körökkel kell *minél többet* lefednünk a nagy kör területéből! Ez a pakolási sugár esetén a pakolási feladattal ekvivalens, a fedési sugár esetén pedig a fedésivel. Adódik a kérdés, hogy mi a helyzet a köztes sugárértékekkel? Ha egy olyan értéket veszünk, amekkora körök már nem férnek el diszjunkt módon a nagy körben, viszont teljesen lefedni sem tudják azt, akkor vajon az optimális elrendezés forgásszimmetrikus lesz vagy sem?

Gáspár, Tarnai és Hincz 2010-ben mutatták be eredményüket [7] egy franciaországi konferencián, melyben numerikus módszert javasolnak az optimális elrendezés megkereséséhez, egyúttal megfogalmazzák sejtésüket az optimális konfiguráció alakjáról  $r$  függvényében. Kiderül, hogy a sejtés szerint kis  $r$  értékekre – a pakolási problémához hasonlóan – forgásszimmetrikus elrendezés az optimális.  $r$  értékét növelve „tojásszerű” ötszög csúcaiban helyezkednek el a kis körök, aztán van egy

intervallum, melybe eső  $r$ -ekre még csak nem is tengelyesen szimmetrikus az optimális elrendezés, végül, elég nagy  $r$ -ekre, a fedési probléma megoldásához hasonló, „sütőtököszerű” konfiguráció a legjobb.



A lehetséges optimális formációk 5 kör esetén: forgásszimmetrikus, tojás, aszimmetrikus, sütőtök  
(forrás: [7])

BSc-szakdolgozatomban elsőként bizonyítottam, hogy ha 5 helyett csak 3 kis körre vizsgáljuk a lehető legnagyobb lefedhető területet, akkor mindig van forgásszimmetrikus optimum. Ez a TDK-dolgozat leírja a három kis kör esetét, de általános állításokat is megfogalmaz több körre, ill. a négy kis kör optimális elhelyezkedésének megkeresése felé is tesz lépéseket.

## 2. Körpolinomok területének iránymenti deriváltjai

Tekintsük a Connelly-féle feladatot! Ennek a feladatnak biztosan létezik optimális megoldása, hiszen a konfigurációs téren kompakt tartójú és folytonos az adott konfiguráció esetén a lefedett területet megadó függvény, tehát felveszi a maximumát. Tegyük fel, hogy megtaláltuk az optimális elrendezést! Ekkor bármelyik kört tekintjük mozgathatónak (a többi lefixálva), a lefedett terület összes mozgatható irányban vett deriváltjának 0-nak kell lennie.

**2.0.1. Definíció.** *Jordan-görbének nevezzük egy  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonos, zárt síkgörbét, ha az  $[a, b)$  intervallumon injektív.*

**2.0.2. Definíció.** *Diszjunkt láncnak nevezzük véges sok diszjunkt  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  Jordan-görbe halmazát, ahol  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$  pontosan akkor pozitív irányítású, ha páros sok másik görbének van a belsejében. A diszjunkt lánc belseje azoknak a pontoknak a halmaza, amik nincsenek rajta egyik görbén sem, és páratlan sok résztvevő görbe belsejében vannak benne.*

Csikós [3] tetszőleges térformabeli golyók hálópolinomjaként (unió, metszet és zárójel felhasználásával) előálló alakzatok térfogatának deriváltjára adott formulát. Ennek speciális esete a miénk, hiszen  $\mathbb{R}^2$  is térforma, és minket a kis körök uniójának és a nagy körnek a metszete érdekel (amely persze hálópolinomja a körlapoknak). A terület iránymenti deriváltjára adott formula azon alakja, amit a továbbiakban használni fogunk, két dimenzióban így hangzik:

**2.0.3. Tétel.** Legyen  $C$  és  $D$  egy-egy körívekből összerakott diszjunkt lánc a síkon, és rendelje az  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  függvény egy tetszőleges  $v$  síkbeli vektorhoz a  $C + v$  és a  $D$  láncok belsejének a metszetének a területét.

Tegyük fel, hogy a két láncnak nincs közös szakasza, vagyis csak véges sok  $P_i$  közös pontjuk van. Függjön az  $\alpha(P_i)$  egész szám értéke attól, hogy  $P$ -ben  $C$  belép  $D$ -be  $(-1)$ , kilép  $D$ -ből  $(+1)$ , vagy végig  $D$ -n kívül/belül halad  $(0)$ . Nevezzük átmetszési pontoknak két diszjunkt lánc azon metszéspontjait, amelyek  $\alpha$  értéke nem  $0$ .

Ekkor, minden  $w$  nemnulla vektorra,  $A$ -nak a  $w$  irányú deriváltja létezik és folytonos az origóban, az értéke pedig:

$$A_w(0) = w \times \sum_{i=1}^n \alpha(P_i) P_i.$$

A fenti tételt felhasználva kapjuk az alábbi alternatívátételt:

**2.0.4. Következmény.** Legyen  $C$  és  $D$  egy-egy körívekből összerakott diszjunkt lánc, és  $A(v)$  mint fent. Ekkor ha  $A(v)$ -nek szélsőértéke van egy  $v$  pontban, akkor a  $C + v$  és  $D$  láncokra a következők közül legalább az egyik teljesül:

- a két láncnak végtelen sok közös pontja van
- véges sok  $P_1, P_2, \dots$  közös pont van, és  $\sum_{i=1}^n \alpha(P_i) P_i = \vec{0}$ .

**2.0.5. Megjegyzés.** A fenti tétel, ill. következmény általánosítható szakaszonként folytonosan differenciálható diszjunkt láncokra is, azonban ekkor a láncok helyzetére bizonyos megkötéseket kell tenni.

### 3. Kör lefedése körökkel

Tekintsük most a Connelly által felvetett feladatot: Adott  $n$  db  $r$  sugarú és egy  $R$  sugarú ( $R > r$ ) körlap. Helyezzük el úgy a kis köröket, hogy együtt a nagy körből a legnagyobb területet fedjék le!

Nyilvánvaló, hogy úgy is elhelyezhetőek optimálisan a körök, hogy nem esik egybe semelyik kettő sem (akkor ugyanis egyikük feleslegesen van ott).

Jelöljük az  $r$  sugarú köröket  $K_1, K_2, \dots, K_n$ -nel, a nagy ( $R$  sugarú) kört pedig  $K_0$ -lal! Legyenek a körök pozitív irányításúak, középpontjaik az  $O_i$  pontok, a körök által határolt zárt körlapok a  $D_i$  halmazok, a körök által határolt nyílt körlapok pedig a  $B_i$  halmazok. Defináljuk a  $C_i$  diszjunkt láncokat a következőképpen:  $C_i (i \geq 1)$  legyen a  $D_0 \setminus \bigcup_{j \notin \{0, i\}} D_j$  idom határa,  $C_0$  pedig az  $\bigcup_{i \geq 1} D_i$  halmaz határa. Jelölje végül  $BC_i$  a  $C_i$  lánc által határolt nyílt halmazt,  $DC_i$  pedig  $BC_i$  lezártját.

Azért definiáltuk így a láncokat, hogy az optimumban a  $K_i$  körök szükségszerűen úgy legyenek elhelyezve, hogy rendre a  $C_i$  láncok belsejéből a lehető legtöbb területet fedjék le. Vagyis optimális konfiguráció esetén szükséges, hogy mindegyik kör a hozzá tartozó láncot olyan pontokban metsze át, amelyeknek a megfelelő előjeles összege 0. (Emiatt az átmetszési pontok száma nyilvánvalóan nem lehet 2.) Tehát a következő információk megléte esetén egyenleteket írhatunk fel a körök metszéspontjainak koordinátáira, amelyekből megkapjuk az optimális elrendezést:

- Melyik kör melyiket metszi át? (az érintés nem számít) Ez adja meg az ún. átmetszési gráfot.
- Bármely két átmetsző  $K_i$  és  $K_j$  körre: a metszés során keletkező 2 átmetszési pont a maradék két kör belsejében/határán/külsejében van-e?
- Ha az egyik átmetszési pont pl.  $K_k$ -nak a határán van, akkor az adott pontban  $K_i$  belép  $K_k$ -ba, kilép  $K_k$ -ból, vagy érinti azt?
- Ha két kör átmetszi egymást, akkor a metszéspontokat aszerint különböztetjük meg, hogy ott  $K_i$  lép be  $K_j$ -be, vagy fordítva (a pozitív irányítást figyelembe véve).

(Az esetek vizsgálata során két átmetszési gráfot akkor fogunk lényegesen különbözőnek tekinteni, ha nem létezik közöttük olyan izomorfizmus, amely kis kört kis körnek, nagy kört nagyknak feleltet meg.) A fenti pontok alapján épp a „szemre különbözö” konfigurációkat különböztetjük meg.

Tehát ha a körök összesen  $k$  db pontban metszik át egymást, akkor  $k(n - 1)$  db tesztet kell elvégeznünk (mind a  $k$  db pontra meg kell vizsgálnunk, hogy a metszésben részt nem vevő  $n - 1$  körhöz képest hol helyezkedik el).

Az előző négy pont alapján megvizsgált információkból el tudjuk dönteni bármelyik körről, hogy az őhozzá rendelt láncot hány helyen metszi át, a metszéspontok hogyan számolhatóak ki a körök koordinátáiból, valamint a metszéspontoknak mennyi az  $\alpha$  (belépési/kilépési) értéke. Ugyanis kör és lánc átmetszési pontja csak olyan pont lehet, ahol a körünk átmetszi valamelyik másik kört, a metszéspontnak a négy pont alapján megvizsgált elhelyezkedése pedig eldönti, hogy magát a láncot is átmetszi-e ebben a pontban a kiszemelt körünk. Tehát ekkor egyenleteket tudunk felírni arra, hogy az adott kör és lánc átmetszési pontjai megfelelően összeadva nullvektort adnak.

**3.0.6. Megjegyzés.** *Ha  $K_k$  egy kis kör, és valamilyen  $i, j$ -re  $K_i$  és  $K_j$  egyik  $P$  átmetszési pontja  $K_k$  belsejében van, akkor  $K_k$  metszi a  $K_i$  és  $K_j$  kört is. Ha  $P$  épp a  $K_k$  körvonala esik, akkor az igaz, hogy  $K_i$  és  $K_j$  közül legalább az egyiket  $K_k$  átmetszi.*

A következő lemmák akárhány kis kör esetén információval szolgálnak az optimális konfigurációról:

**3.0.7. Lemma.** *Optimális konfiguráció esetén az átmetszési gráfnak a  $K_0$ -t tartalmazó komponensén kívül csak izolált pontjai lehetnek.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy optimumban vagyunk, és van a gráfnak egy  $H$  legalább kétpontú komponense, mely nem tartalmazza  $K_0$ -t. Ha optimumban vagyunk, akkor nyilván  $D_0$ -on helyezkedik el  $H$  összes köre. Vegyük a  $H$ -beli kis körök közül a legkisebb  $x$  koordinátáját; ha több ilyen is van, akkor ezek közül a legkisebb  $y$  koordinátáját! Ez legyen  $K_a$ .  $K_a$  nem izolált pont, tehát  $D_a$ -nak pozitív területű a metszete a többi kis körlap uniójával.

Ha vesszük  $K_a$ -nek a többi körlap unióján belül haladó íveit, és az ezek kezdő- és végpontjait ( $K_a$  pozitív irányítású) összekötő  $v_i$  vektorokat, akkor a kapott vektorok összege 0 kell, hogy legyen, hiszen optimumban vagyunk. Tegyük fel, hogy valamelyik ilyen vektornak az  $y$  koordinátája negatív! Ekkor van olyan  $K_b$  kör, hogy  $K_a$  alacsonyabban fekvő pontban jön ki  $K_b$ -ből, mint ahol belép. Viszont ekkor az  $O_b O_a$  vektornak az  $x$  koordinátája pozitív lenne, ami  $K_a$  választásával ellentmondana. Tehát az összes  $v_i$  vektor  $y$  koordinátája nemnegatív.

Mivel  $\sum v_i = 0$ , ezért minden  $v_i$ -nek vízszintesnek kell lennie. Ekkor viszont maximum 2 db  $v_i$  vektor lehet, de 1 vektor esetén a vektorösszeg nem lenne nulla. Tehát 2 vektor van, melyeknek ekkor ellentétesnek kell lenniük. Legyen a jobbra mutató vektor  $v_1$ , a balra mutató pedig  $v_2$ !

$K_a$   $v_1$  kezdőpontjában belép egy másik  $K_c$  körbe. Ha ebből a  $v_1$ -hez tartozó ív belső pontjában lépne ki, akkor  $K_a$  alacsonyabban fekvő pontban jönne ki  $K_c$ -ből, mint ahol belép, ami nem lehet. Tehát  $K_a$  és  $K_c$  metszete kifeszíti a  $v_1$  vektort, vagyis  $K_c$   $x$ -koordinátája megegyezik  $K_a$ -ével,  $y$  koordinátája pedig kisebb. Ellentmondásra jutottunk, mert most azt kaptuk, hogy  $K_c$ -t kellett volna választani  $K_a$  helyett.  $\square$

**3.0.8. Következmény.** *Egy olyan gráf, ahol a nagy kör nem metsz át egy kis kört sem, csak akkor adhat optimumot, ha a gráfnak nincs éle, vagyis ha a kis körök belepakolhatóak a nagyba. Másképpen: ha  $r$  maximum akkora, mint a pakolási sugár.*

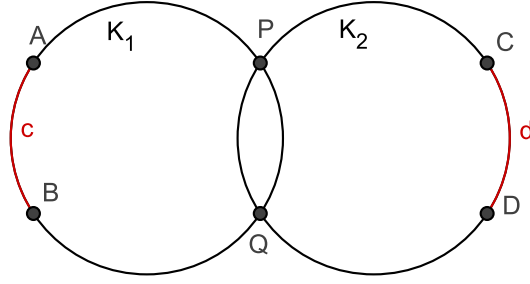
**3.0.9. Lemma.** *Van olyan optimális elrendezés, mely esetén minden kis kör kerületének legalább a fele a nagy kör belsejébe esik.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás azon a trivialitáson alapszik, hogy ha a tulajdonság nem teljesül, akkor az adott kis kör vagy  $B_0$  komplementerébe esik (ami nem optimális), vagy  $K_0$ -t két pontban metszi. Ekkor pedig a két metszéspont egyenesére tükrözve a nagy körből az adott kis kör által lefedett rész csak növekedhet, mivel ami eddig le volt fedve, ezután is le lesz.  $\square$

A továbbiakban tehát feltesszük, hogy mindegyik kis kör kerületének legalább a fele  $B_0$ -ba esik.

**3.0.10. Lemma.** *Optimális konfiguráció esetén minden  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j$ -re igaz a következő: ha a  $K_i$  és  $K_j$  kis körök átmetszik egymást, akkor valamelyik metszéspontjuk  $B_0$ -ba esik.*

*Bizonyítás.* Legyen az általánosság megszorítása nélkül  $i = 1, j = 2$ . Tegyük fel, hogy egy optimális elrendezés áll előttünk, és azt is, hogy  $K_1$  és  $K_2$  két metszéspontja ( $P$  és  $Q$ ) nincs  $B_0$ -ban. A 3.0.9 Lemma miatt viszont  $K_1$  és  $K_2$  kerületének legalább a fele  $B_0$ -ba kell, hogy essen.



Bármelyik íve is essen a két kis kör kerületének  $B_0$ -ba, mindenképpen igaz az, hogy az ábrán bejelölt  $c$  és  $d$  ívek (amik a  $PQ$  ívek tükörképeiként állnak elő a kis körök középpontjaira)  $B_0$ -ban futnak. Ebből következik, hogy  $A, B, C, D \in D_0$ . Emiatt pedig az  $AC$  és  $BD$  nyílt szakaszok  $B_0$ -ban futnak, vagyis  $P, Q \in B_0$ . Ellentmondásra jutottunk, tehát az elrendezés nem lehet optimális.  $\square$

**3.0.11. Lemma.** *Optimumot adó átmetszési gráfban nem lehet egyfokú pont.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az egyfokú pont a  $K_i$  kör, szomszédja pedig  $K_j$ ! Ekkor  $K_i \cap K_j$  nem eshet bele semelyik másik kis kör belsejébe, mert különben  $K_i$  metszené azt a kis kört is. Továbbá, ha  $K_i$  és  $K_j$  kis körök, akkor a metszetüknek van pontja  $B_0$ -ban a 3.0.10 Lemma szerint. Viszont ekkor a metszet másik pontja is  $D_0$ -ban van, mert  $K_i$  nem metszi  $K_0$ -t. Mindebből azt kaptuk, hogy ha  $K_i$  egyfokú, akkor a láncát pontosan két pontban metszi, ami nem lehet optimális.  $\square$

**3.0.12. Lemma.** *Ha  $n \leq 4$ , és van olyan optimum, ahol  $K_0$  nem metszi át  $C_0$ -t, akkor a kis körök vagy belepakolhatóak a nagyba, vagy lefedik azt.*

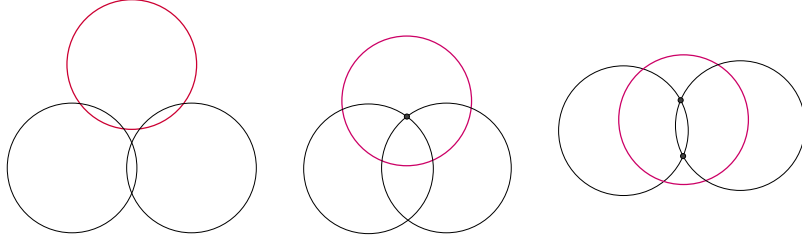
*Bizonyítás.* Ha  $K_0$  végig  $DC_0$ -ban halad, akkor ez azt jelenti, hogy a kis körök lefedik a kerületét. Tehát legalább az egyikük lefedi a kerületnek legalább az  $n$ -ed részét. Ez egy alsó korlátot ad  $r$ -re, amiről kiszámolható, hogy  $n \leq 4$ -re legalább annyi, mint a fedési sugar.

Ha viszont  $K_0$  végig  $BC_0$ -on kívül halad, akkor a kerületének nincs a kis körök belseje által lefedett pontja, vagyis nem metszi át egyik kis kört sem. A 3.0.8 Lemmában pedig már láttuk, hogy ilyenkor optimum csak pakolhatóság esetén lehetséges.  $\square$

## 4. A program

Jegyezzük meg, hogy három egybevágó, egymást metsző körnek lényegében háromfajta konfigurációja lehet csak (pl. aszerint végignézve az eseteket, hogy a  $K_1 \cap K_2$  pontok közül hányat tartalmaz a  $K_3$ ).

**4.0.13. Definíció.** *Az alábbi ábráknak megfelelő elrendezéseket rendre „lyukas”, „Venn–diagram” és „hernyó”-konfigurációknak nevezzük.*



**4.0.14. Jelölés.** Azt a pontot, ahol a  $K_i$  kör belép a  $K_j$  körbe,  $m(i, j)$ -vel jelöljük. A  $\text{rel}[i, j, k]$  igaz/hamis érték pedig azt mondja meg, hogy  $m(i, j)$  benne van-e a  $K_k$  kör belsejében.

Szeretnénk azt az esetet egyszerűbben kezelni, amikor van három körnek közös pontja. Nevezzük ezeket a konfigurációkat extrémnek! Egy ilyen elrendezés (az  $\mathbb{R}^8$ -nal azonosítható fázistér elemeként) előáll egy olyan elrendezésekből álló sorozat határértékeként, amelyek nem extrémek, vagyis melyekre az összes metszéspont különböző. Ráadásul a lefedett terület deriváltja is konvergál, mert a metszéspontok konvergálnak. Sőt, mivel az extrém helyzetben  $K_0$  legalább 4 helyen átmetszi  $C_0$ -t, ezért a konvergáló sorozat elemeiben is ennek teljesülnie kell.

Az előző szakaszban ismertettük, hogy – nem extrém esetben – a körök kombinatorikai elhelyezkedésének leírásához elég megmondani a  $\text{rel}[i, j, k]$  logikai értékeket. Ha a metszési gráf élszáma  $E$ , a kis körök száma pedig  $n$ , akkor tehát egy  $2E(n-1)$  bites típusszám leír egy kombinatorikai esetet. Pl. három kis kör esetén, ha minden mindent metsz, akkor összesen  $2^{24} = 16777216$  különböző típusszám létezik, de 4 kis kör esetén már  $2^{60}$  eset van, 5 kis kör esetén pedig  $2^{120}$ .

Ezzel a típusszám–definícióval természetesen igaz az, hogy minden extrém helyzet előáll egyforma típusú nem extrém helyzetek limeszeként. Tehát az extrém helyzeteket is adott típusú nem extrém helyzetként tárgyalhatjuk (bár ez a típusszám nem biztos, hogy egyértelmű!), megengedve pontok egybeesését.

3 és 4 kis kör esetén a típusszámok szűrésére programot alkalmaztam, mely D programnyelven íródott. A következő lemmák szükségesek a nemkívánatos esetek kiszórásához:

**4.0.15. Állítás.** Ha három kis kör „lyukas” konfigurációban áll (4.0.13), akkor a középpontjaik hegyesszögű háromszöget határoznak meg.

*Bizonyítás.* Legyen a három középpont  $O_1, O_2$  és  $O_3$ ; és  $S := \frac{O_1+O_2}{2}$ . Tudjuk, hogy  $S \in B_1 \cap B_2$ . Tehát  $S \notin D_3$ , vagyis  $d(S, O_3) > r > \frac{1}{2}d(O_1, O_2)$ . Ebből következik, hogy az  $O_1O_3O_2$  szög hegyesszög. Ugyanez elmondható a másik két szögre is.  $\square$

**4.0.16. Következmény.** Nem fordulhat elő az, hogy négy kis kör páronként átmetszi egymást, és az összes metszéspontjuk a maradék két körön kívülre (vagy a körvonalra) esik. (Ez lenne a lyukas konfiguráció 4-körös esete.)

*Bizonyítás.* Ebben az esetben a négy középpont által meghatározott összes szög hegyesszög lenne. De ha a középpontok konvex burka háromszög, akkor a közép-

eső pontból legalább az egyik oldal legalább 120 fokban látszik, ami nem hegyesszög. Viszont ha a konvex burok négyszög, akkor az egyik csúcsban lévő szög legalább derékszög, tehát ekkor sem lehet az összes szög hegyes.  $\square$

**4.0.17. Állítás.** *Ha három kis kör hernyó-konfigurációban áll (azaz  $K_1 \cap K_2 \subset D_3$ ), akkor  $O_3$ -ból tompaszögben látszik az  $O_1O_2$  szakasz.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\{P, Q\} := K_1 \cap K_2$ . Feltehetjük, hogy  $P \in K_3$ , mert a látószöget csökkentve eltávolíthatjuk a  $K_3$  kört az  $O_1O_2$  egyenestől addig, amíg még a körlapjára esik a másik két kör középpontja. Ha  $K_P$  középpontja  $P$ , sugara pedig  $r$ ; és  $I$  jelöli a  $K_P$  kör  $O_1$  és  $O_2$  közé eső kisebb ívét, akkor tehát feltehetjük, hogy  $O_3 \in I$ .  $I$  pontjaiból pedig tényleg tompaszögben látszik az  $O_1O_2$  szakasz.  $\square$

**4.0.18. Következmény.** *Nem fordulhat elő a következő eset:  $K_1 \cap K_2 \subset D_3$ ,  $K_2 \cap K_3 \subset D_4$ ,  $K_3 \cap K_4 \subset D_1$  és  $K_4 \cap K_1 \subset D_2$ . (Ez a hernyó általánosításának tekinthető.)*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy előfordulhat. Ekkor a 4.0.17 Állítás miatt az  $O_4O_1O_3$  és az  $O_1O_3O_2$  szögek is tompák. Tehát az  $O_1O_3$  szakaszra a két végpontjában állított merőlegesek által határolt végtelen sáv szigorúan elválasztja az  $O_4$  és  $O_2$  pontokat, vagyis  $O_4O_2 \geq O_1O_3$ , és egyenlőség csak akkor, ha  $O_4 - O_2 = O_1 - O_3$  (mint vektorok).

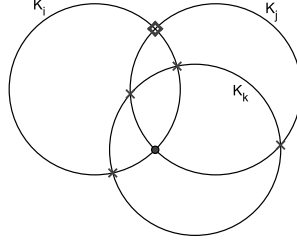
Analog módon kapható, hogy  $O_1O_3 \geq O_2O_4$ , és egyenlőség csak akkor, ha  $O_1 - O_3 = O_2 - O_4$ . Tehát  $O_4O_2 = O_1O_3$ . Ekkor viszont  $O_4 - O_2 = O_1 - O_3 = O_2 - O_4$ , vagyis  $O_2 = O_4$ . Ellentmondásra jutottunk, mert kizárjuk a kis körök egybeesését.  $\square$

A program működési elve a következő: végigpróbálgatja a 0 és 1 értékeket az összes bitre, azonban a már beállított bitek értékéből következtet a még üres bitek értékére, és ha úgy találja, hogy a konfiguráció nem felel meg bizonyos feltételeknek, akkor azt a konfigurációt nem írja ki. A program által használt szabályok olyan konfigurációkat dobnak ki, melyek vagy „fizikailag” nem fordulhatnak elő, vagy nem adhatnak optimumot.

**4.0.19. Megjegyzés.** *A program végig felteszi, hogy a kis körök nem fedik le a nagyot, és nem is pakolhatóak bele. Ezek ugyanis triviális esetek lennének.*

A használt szabályok a következők:

- 0. szabály (optimalitási): Extrém határesetben sem optimális, ha két kis kör a  $B_0$  halmazon kívül metsz. (vö.: 3.0.10 Lemma)
- 1. szabály (fizikai): Minden  $i, j, k$  különböző indexekre: ha  $rel[i, j, k] = igaz$ , és  $rel[j, i, k] = hamis$ , akkor  $rel[k, i, j] = igaz$ ,  $rel[i, k, j] = hamis$ ,  $rel[k, j, i] = igaz$ , és  $rel[j, k, i] = hamis$ .



- 2. szabály (fizikai): Tegyük fel, hogy  $k > 0$  (vagyis  $K_k$  kis kör),  $K_i$  és  $K_j$  pedig  $K_k$ -n belül metszik csak egymást. Ekkor  $K_k$  metszi  $K_i$ -t és  $K_j$ -t is. Ha  $i > 0$ , akkor  $K_k \cap K_j \subset D_i^c$ . Ha pedig  $i = 0$ , akkor vagy  $K_k \cap K_j \subset D_i^c$ , vagy  $K_k \cap K_j \subset B_i$ ; másszóval  $rel[j, k, i] = rel[k, j, i]$ . Ugyanez elmondható  $i$  és  $j$  szerepének felcserélésével is.
- 3. szabály (fizikai): Minden kör a láncát páros sok pontban metszi.
- 4. szabály (optimalitási): Az nem lehet, hogy  $n \leq 4$ , és a nagy kör optimumban  $C_0$ -t 0 pontban metszi át (vö. 3.0.12), vagy 2 pontban metszi át (ekkor határesetnek kell fellépnie, hogy a két pont egybeessen, ami ekkor szintén pakolást vagy fedést jelent).
- 5. szabály (optimalitási): Ha egy  $K_i$  kis kör a láncát 2 pontban metszi át, akkor azok az optimalitás miatt egybeesnek. Ha ezek közül az egyik  $K_0$ -lal, a másik meg  $K_j$ -vel vett metszéspont, akkor ezek tehát egybeesnek, vagyis  $K_i$  és  $K_j$  egyik metszéspontja  $K_0$  kerületén van. Az optimalitás érdekében ekkor viszont a másik metszéspontjuk mindenképpen  $K_0$  belsejében kell, hogy legyen.
- 6. szabály (fizikai): Teljesül a 4.0.16 és 4.0.18 Lemmák állítása.
- 7. szabály (fizikai): Legyenek  $i, j, k, l$  különböző indexek,  $i, j > 0$ . Ha  $K_j \cap K_k \subset B_i$ , és  $K_l \cap K_k$  egyik pontja  $B_j$ -ben van, akkor ez a metszéspont  $B_i$ -ben is van.
- 8. szabály (fizikai): Legyenek  $i, j, k, l$  különböző indexek,  $i, j > 0$ . Tegyük fel, hogy  $rel[k, l, i] = igaz$  és  $rel[k, l, j] = igaz$ . Ekkor  $K_k$  legalább két pontban metszi  $D_i \cap D_j$  határát, vagyis  $rel[k, i, j], rel[i, k, j], rel[k, j, i], rel[j, k, i]$  közül legalább kettő igaz. Ugyanez mondható el  $K_l$ -re.

A program ekvivalensnek tekint két konfigurációt, ha egymásból megkaphatóak a kis körök permutálásával, és/vagy a sík (tetszőleges) tengelyre való tükrözésével (másképpen: a körök irányításának megfordításával). Csak a legkisebb sorszámút tartja meg és írja ki az ekvivalensek közül.

A program outputja minden lehetséges konfigurációra egy típusszámot tartalmaz, és az elrendezést táblázatos formában: a táblázat  $i$ . sorában és  $j$ . oszlopában azoknak a köröknek a listája szerepel, amelyek belsejükben tartalmazzák az  $m(i, j)$  pontot.

## 5. Kör lefedése két körrel

$n = 2$  esetén könnyen meghatározhatjuk az optimális konstrukciót.

Ha  $r \leq R/2$ , akkor a két kis kör elfér a nagy belsejében, és a lefedett terület  $2\pi r^2$ . Tekintsük hát az  $r > R/2$  nemtriviális esetet. Ekkor az átmetszési gráfban  $K_0$  nem 0-fokú, tehát 2-fokú.  $K_1$  és  $K_2$  pedig össze vannak kötve éllel, különben a 3.0.11 lemma alapján nem kapnánk optimumot.

Ha most vesszük a két kis kör által lefedett területet határoló  $C_0$  láncot, akkor ennek a  $K_0$  nagy körrel max. 4 átmetszési pontja lehet (mindkét kis körnek maximum 2). Az átmetszési pontok száma mindig páros, és optimális esetben nem lehet 2 (mert ekkor az előjeles összegük egy nemnulla vektor lenne). Tehát vagy 0, vagy 4 átmetszési pont van. Ugyanez érvényes a  $K_1$  kis körre és a  $C_1$  láncra (ami a  $K_0$  kör által igen, de a  $K_2$  kis kör által nem lefedett területet határolja), valamint a  $K_2$  kis körre és a  $C_2$  láncra.

Tegyük fel, hogy a három lehetőség közül egyikben sincs metszéspon! Ekkor a kis körök lefedik a nagyot, ami  $r < R$  esetén lehetetlen.

Maradt az a lehetőség, amikor valamelyik kör és a megfelelő lánc átmetszi egymást. Ekkor mind a három kör 4-4 metszésponban kell, hogy metssze a megfelelő láncot, hiszen mindegyiknek van metszésponja valamelyik másik körrel. Ebben az esetben bármelyik két kör a harmadikból ugyanolyan ( $2h$ ) hosszúságú és párhuzamos (de nem egybeeső) húrokat metssz ki. (Ez egy átfogalmazása annak, hogy a négy átmetszési pont alternáló összege 0.)

A kimetszett húrok párhuzamossága miatt a három kör középpontja ( $O_0$ ,  $O_1$  és  $O_2$ ) egy egyenesbe esik, legyen ez pl. az x-tengely. Jelöljük a három kör középpontjának x koordinátáját  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ -vel, ahol legyen az általánosság megszorítása nélkül  $x = 0$ ,  $x_1 > 0$  és  $x_1 > x_2$ . Felírhatjuk a következő egyenleteket a körök középpontjának távolságai alapján (a függetlenül változtatható  $\pm$  jeleket  $\pm_1$ -gyel és  $\pm_2$ -vel jelölve):

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{R^2 - h^2} \pm_1 \sqrt{r^2 - h^2} \\ |x_2| &= \sqrt{R^2 - h^2} \pm_2 \sqrt{r^2 - h^2} \\ x_1 - x_2 &= 2\sqrt{r^2 - h^2} \end{aligned}$$

Az első két egyenletből:

$$x_1 - x_2 = \lambda \sqrt{R^2 - h^2} + \mu \sqrt{r^2 - h^2},$$

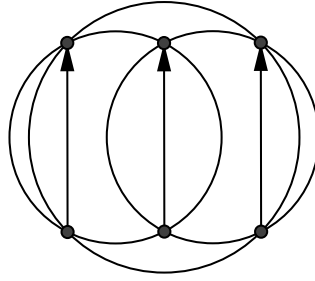
ahol  $\lambda$  és  $\mu$  értéke is a  $\{-2, 0, 2\}$  halmazba esik, és legalább az egyiküknek pozitívna (2-nek) kell lennie, hiszen  $x_1 - x_2 > 0$ .

Ha  $\lambda = 2$ , akkor  $\mu = \frac{2(\sqrt{r^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2})}{\sqrt{r^2 - h^2}} = 2 - 2\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{\sqrt{r^2 - h^2}}$ . Ez 2-nél kisebb, és nem lehet 0, mert akkor  $r = R$  adódna. Tehát ekkor  $\mu = -2$ . Viszont ez csak úgy lehet,

ha  $x_1 = -x_2 = \sqrt{R^2 - h^2} - \sqrt{r^2 - h^2}$ . Sőt,  $\mu = 2$  miatt  $2\sqrt{R^2 - h^2} = 4\sqrt{r^2 - h^2}$ , vagyis  $R^2 - h^2 = 4r^2 - 4h^2$ , amiből  $h = \sqrt{\frac{4r^2 - R^2}{3}} \in \mathbb{R}$ . Ez az eset tehát tényleg lehetséges.

Ha  $\mu = 2$ , akkor a harmadik egyenletből  $\lambda = 0$ , ebből pedig  $x_{1,2} = \sqrt{R^2 - h^2} \pm \sqrt{r^2 - h^2}$ . Ekkor azonban nincs 4 metszéspont, mert a két kis kör alkotta láncba a nagy kör csak kétszer metsz bele (mivel a kis körök ugyanazt a húrt metszik ki a nagyból). Ez az eset tehát nem megfelelő.

Visszatérve a  $\lambda = 2$  esetre, számoljuk ki a kis körök által lefedett rész területét! A terület  $2\pi r^2 - 2\mathcal{T}(r, 2h) - 2(\mathcal{T}(r, 2h) - \mathcal{T}(R, 2h))$ , ahol  $\mathcal{T}(a, b)$  az  $a$  sugarú körből egy  $b$  hosszú húr által lemetezett (kisebbik) körszelet területe. ( $\mathcal{T}(a, b) = \frac{\varphi - \sin \varphi}{2} a^2$ , ahol  $\varphi = 2 \sin^{-1} \frac{b}{2a}$ .) Kijelenthetjük, hogy ez az optimális konfiguráció. Az optimális elrendezés az alábbi ábrán látható.



Kimondhatjuk tehát az alábbi tételt:

**5.0.20. Tétel.** Egy  $R$  sugarú körlapból két  $r$  sugarú körlap által maximálisan lefedhető terület:

- $2\pi r^2$ , ha  $r \leq R/2$
- $2\pi r^2 - 2\mathcal{T}(r, 2h) - 2(\mathcal{T}(r, 2h) - \mathcal{T}(R, 2h))$ , ha  $R/2 < r < R$ ; ahol  $h = \sqrt{\frac{4r^2 - R^2}{3}}$
- $\pi R^2$ , ha  $r \geq R$

*Emellett, minden esetben létezik olyan optimális konfiguráció, amely középpontosan tükrös, vagyis másodrendben forgásszimmetrikus.*

## 6. Kör lefedése három körrel

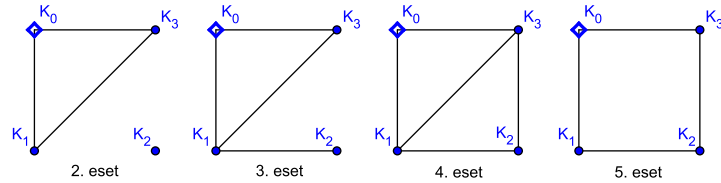
Tekintsük azt a problémát, amikor három egyenlő ( $r$ ) sugarú körrel szeretnénk lefedni egy  $R > r$  sugarú körből minél nagyobb területet! Ebben a szakaszban bebizonyítjuk, hogy mindig létezik olyan optimális elhelyezés, ami harmadrendben forgásszimmetrikus.

## 6.1. A lehetséges metszési gráfok

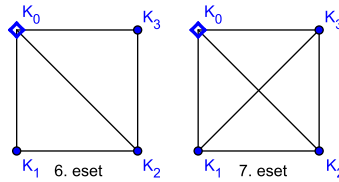
Most azt fogjuk áttekinteni, hogy milyen átmetszési gráfok léphetnek fel, és melyek adhatnak optimumot.

Az *1. eset* lesz az, amikor a nagy kör nem metszi egyik kicsit sem. Láttuk, hogy ebben az esetben pontosan akkor kapunk optimumot, ha a kis körök belepakolhatóak a nagyba. A pakolási sugár értéke  $r = \frac{R}{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}$  [10]. Maximum ekkora  $r$ -re a három kis kör elfér a nagy belsejében, tehát ekkor a lefedhető max. terület  $3r^2\pi$ . Ha viszont  $r$  ennél nagyobb, akkor az *1. eset* nem adhat optimumot.

Láttuk, hogy ha valamelyik kör foka 1, akkor az a 3.0.11 Lemma miatt biztosan nem optimális. Ha a nagy kör foka 2, akkor négy lényegében különböző gráfot kapunk, amelyek az alábbi ábrán láthatóak. Ezek lesznek rendre a *2.*, *3.*, *4.* és *5. eset*.

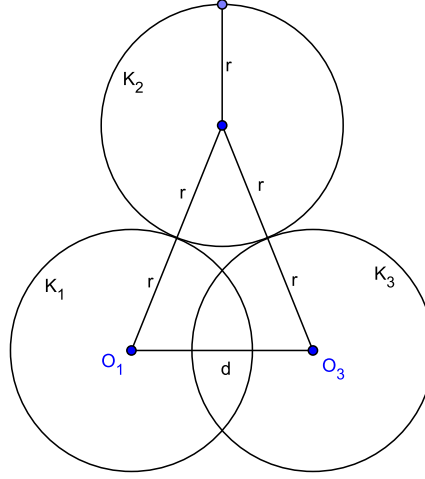


Ha a nagy kör metszi mindhárom kis kört, akkor, mivel a kis körök ismét legalább kétfokúak, csak két eset lehetséges. Ezek a *6.* és *7. eset*.



## 6.2. 2. eset

Mivel  $K_2$  semelyik másik kört nem metszi, ezért amikor feltételeket írunk fel a körök helyzetéről, ugyanazokat a feltételeket kapjuk, mintha csak két kis körünk lenne. Emiatt, ha optimális konfigurációt kapunk ennek az esetnek a segítségével, akkor a két kis kör esetén már megvizsgált optimális konfiguráció írja le a  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  körök helyzetét, amiből következik, hogy  $r > \frac{R}{2}$  kell, hogy legyen, hogy megvalósulhasson az optimum.



Ekkor viszont, ha  $K_2$  elfér  $D_0$ -on, a másik két kis körön kívül, akkor átvihető olyan helyzetbe, hogy érintse mindkét másik kis kört, és továbbra is  $D_0$ -ban legyen. Ekkor azonban az ábráról leolvasható, hogy a konstrukció az  $O_1O_3$  egyenes fölé  $r + \sqrt{(2r)^2 - (\frac{d}{2})^2}$  magasra emelkedik, ahol  $d = d(O_1, O_3)$ . Tehát  $R \geq r + \sqrt{(2r)^2 - (\frac{d}{2})^2} \geq r + \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r(1 + \sqrt{3}) > 2r > R$  kell, hogy legyen. Ez ellentmondás, tehát a 2. eset nem adhat optimumot.

### 6.3. 3. eset

Be fogjuk látni, hogy ebben az esetben  $K_2$  két helyen metszi át a láncát, tehát ez az eset sem adhat optimumot.

Tekintsük  $K_2$  és  $K_1$  metszéspontjait! Megmutatjuk: ezek a  $D_0 \setminus B_3$  halmazon vannak. Ebből ugyanis az következik, hogy a metszéspontok a  $C_2$  láncon vannak rajta.

A metszéspontok egyike sem lehet  $B_3$ -ban, mert akkor  $K_3$  metszené  $K_2$ -t.  $D_0$ -on viszont rajta vannak, hiszen  $K_2$  nem metszi  $K_0$ -t, tehát az optimalitás miatt  $K_2$  a  $D_0$  körlapon helyezkedik el.

Tehát  $K_2$  és  $C_2$  valóban 2 (különböző) helyen metszik át egymást, vagyis ez az eset nem optimális.

### 6.4. 4. eset

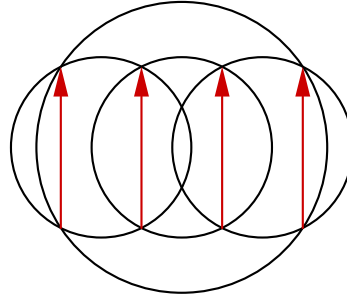
Mivel  $K_2$  és  $K_0$  nem átmetszők, ezért  $K_2$ -nek az optimalitás miatt a  $D_0$  körlapon kell lennie.

$K_2$  átmetszi  $D_1 \cup D_3$  határát (mivel átmetszi  $K_1$ -et és  $K_3$ -at is). Mégpedig ekkor minimum két pontban, amelyek közül legalább az egyik (nevezzük  $P$ -nek)  $B_0$ -ban van, hiszen  $K_2$ -nek legfeljebb egy pontja eshet csak a  $K_0$  körvonalra (az esetleges érintési pont). Ekkor  $P$ -ben  $K_2$  átmetszi a  $C_2$  láncot. Viszont ekkor  $K_2$  és  $C_2$  az

optimalitás miatt 4 pontban metszik egymást, melyek csak  $(K_2 \cap K_1) \cup (K_2 \cap K_3)$  lehetnek.

Ebből következik, hogy a  $K_1 \cap K_2$  és a  $K_2 \cap K_3$  pontpárok által (alkalmas irányítással) meghatározott két (nemnulla) vektor az optimalitás miatt egyenlő. Tehát a három kis kör középpontja egy egyenesen van. Mivel páronként metszik egymást, ezért csak hernyó-konfigurációt alkothatnak, vagyis közülük kettő a harmadik belsejében metszi egymást. Az előbb elmondottak miatt ez nem lehet  $K_1$  és  $K_2$ , vagy  $K_2$  és  $K_3$ , tehát kizárásos alapon  $K_1$  és  $K_3$   $K_2$  belsejében metszik egymást.

Most már minden metszéspont helyét tudjuk, felrajzolhatjuk tehát a konfiguráció sémáját (a berajzolt vektorok egyenlők):



Ekkor viszont a négy középpont egy egyenesbe esik. Tehát ha  $K_2$ -t egy kis  $\varepsilon$ -nal elmozgatjuk a középpontok egyenesére merőlegesen, akkor a  $D_1 \cap D_2$  és  $D_2 \cap D_3$  kétszer lefedett területek csökkennek, mivel az  $O_1O_2$  és  $O_2O_3$  távolságok nőnek. (A kis körök által középen háromszor lefedett terület nagysága nem változik.) Ekkor viszont a három kör által együtt  $D_0$ -ból lefedett terület nő.

Mindebből azt szűrhetjük le, hogy bár kaptunk egy olyan elhelyezést, amely esetén akármilyen kört mozgatva a derivált nulla, ez nem jelentett maximumhelyet. Tehát a 4. eset nem adhat optimális konfigurációt.

## 6.5. 5. eset

Mivel  $K_2$  és  $K_0$  nem metszők, ezért az optimalitás miatt  $K_2 \subset D_0$ . Ekkor  $K_1 \cap K_2 \subset D_0$ . A 3.0.10 Lemma miatt  $K_1 \cap K_2$ -nek legalább az egyik eleme  $B_0$ -ba esik, legyen ez a pont  $P$ .

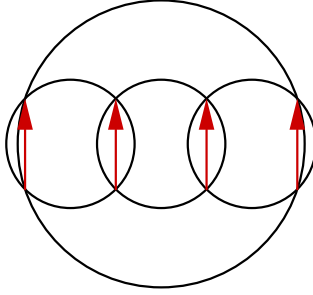
Tekintsük  $K_1$ -nek egy  $P$ -t tartalmazó nyílt  $i$  ívét!  $K_1$  és  $K_3$  nem metszik át egymást, tehát  $K_1$ -nek és  $D_3$ -nak maximum egy közös pontja lehet ( $K_1$  és  $K_3$  esetleges érintési pontja), vagyis elég rövid  $i$  esetén  $i \setminus P \subset D_3^c$ .  $P \in B_0$ , tehát ha  $i$  elég rövid, akkor  $i \subset B_0$ . Továbbá,  $P$ -ben  $K_1$  átmetszi  $K_2$ -t.  $P$   $i$ -t két darabra vágja, melyek közül az egyik ekkor  $B_2$ -beli, a másik  $D_2^c$ -beli.

Mindebből látszik, hogy  $P$ -ben  $K_1$  átmetszi  $C_1$ -et. Ugyanígy bizonyítható, hogy  $K_3$  is átmetszi  $C_3$ -at legalább egy pontban.

Az optimalitás miatt ekkor legalább 4-4 metszéspont kell, de a metszési gráf miatt legfeljebb is csak ennyi lehet. Másszóval,  $(K_1 \cap K_0) \cup (K_1 \cap K_2) \subset C_1$ .

Mivel a metszéspontok alternáló összege nulla, ezért  $(K_1 \cap K_0) \cup (K_1 \cap K_2)$  egy paralelogramma négy csúcsa, melyek egy körön vannak, tehát a négy metszéspont téglalapot alkot. Mivel a téglalap átlója  $K_1$  átmérőjével egyenlő hosszú, ezért a  $\text{conv}(K_1 \cap K_0)$  és  $\text{conv}(K_1 \cap K_2)$  szakaszok nem lehetnek a téglalap két átlója (mert ekkor  $\text{diam}(K_1 \cap K_2) = 2r$  lenne, de ez nem lehet, mert  $\text{diam}(K_1 \cap K_2) < 2r$ ). Tehát a  $\text{conv}(K_1 \cap K_0)$  és  $\text{conv}(K_1 \cap K_2)$  szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

Hasonló mondható el  $K_3$ -ra és  $K_2$ -re is. A konfiguráció tehát csak az ábrán megadott módon lehet optimális (a berajzolt vektorok egyenlők):



Azt, hogy bár a derivált nulla, ez nem egy maximumhely; a 4. eset -hez teljesen hasonlóan bizonyíthatjuk. Végeredményben láthatjuk, hogy az 5. eset sem adhat optimális konfigurációt.

## 6.6. 6. eset

Tegyük fel, hogy  $K_1$  nem metszi át a  $C_1$  láncot. Ekkor  $K_1 \cap K_2 \subset D_3 \cup B_0^c$ . Viszont  $K_1$  és  $K_2$  nem metszheti egymást  $B_0$ -on kívül, mert az a 3.0.10 Lemma miatt nem lenne optimális. Tehát  $K_1 \cap K_2 \subset D_3$ . Ekkor viszont  $K_1$ -nek legalább két pontja van a  $D_3$  halmazon, vagyis metszi  $K_3$ -at. Ez ellentmondás.

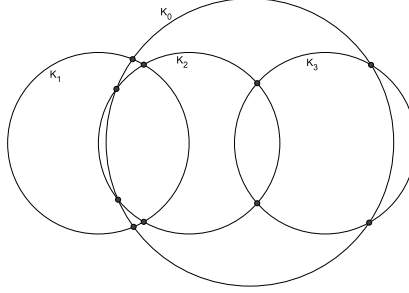
Végző soron azt kaptuk, hogy  $K_1$  mégis átmetszi a  $C_1$  láncot, mégpedig ekkor legalább négy pontban kell átmetszenie, és ezek csak a  $(K_0 \cap K_1) \cup (K_1 \cap K_2)$  pontok lehetnek. Tehát  $K_0 \cap K_1 \subset B_2^c \cap B_3^c$  és  $K_1 \cap K_2 \subset D_0 \cap B_3^c$ . Felhasználva, hogy  $K_0 \cap K_1$  és  $K_1 \cap K_2$  diszjunkt (hiszen uniójuk négyelemű),  $K_0 \cap K_1 \cap K_2 = \emptyset$ , tehát tovább szigoríthatunk a tartalmazásokon:  $K_0 \cap K_1 \subset D_2^c \cap B_3^c$  és  $K_1 \cap K_2 \subset B_0 \cap B_3^c$ . Ugyanez  $K_3$ -ra felírva:  $K_0 \cap K_3 \subset D_2^c \cap B_1^c$  és  $K_3 \cap K_2 \subset B_0 \cap B_1^c$ .

Az optimalitás miatt  $\text{aspan}(K_0 \cap K_1) \parallel \text{aspan}(K_1 \cap K_2)$  és  $\text{aspan}(K_0 \cap K_3) \parallel \text{aspan}(K_3 \cap K_2)$ , ahol  $\text{aspan}(X)$  az  $X$  halmaz affin burkát jelöli. Ebből pedig az következik, hogy egy egyenesben van egyrészt  $O_0$ ,  $O_1$  és  $O_2$ , másrészt  $O_0$ ,  $O_3$  és  $O_2$ . Mivel  $K_0$  és  $K_2$  metszők, ezért  $O_0 \neq O_2$ , tehát mind a négy középpont egy  $\ell$  egyenesre esik. Emiatt a körök átmetszési pontjai nem esnek erre az egyenesre,  $K_1$  és  $K_3$  esetleges érintési pontja viszont igen. Tovább finomíthatjuk tehát a tartalmazási feltételeket, pl.  $K_1$ -re felírva:  $K_0 \cap K_1 \subset D_2^c \cap D_3^c$  és  $K_1 \cap K_2 \subset B_0 \cap D_3^c$ .

Vágjuk fel  $K_0$ -t két részre az  $O_0$ -ból  $\ell$ -re állított merőleges segítségével! Ha mindkét félkörre megnézzük a belőle  $DC_0$  által lefedett részt, akkor az  $\ell$ -re szimmetrikus zárt körívek uniója, tehát egy zárt körív lesz. Vagyis  $K_0$  maximum négy

pontban metszheti át  $C_0$ -t. Ez a négy pont csak  $(K_0 \cap K_1) \cup (K_0 \cap K_3)$  lehet, mivel ezek rajta vannak  $C_0$ -on: pl.  $K_0 \cap K_1 \subset D_2^c \cap D_3^c$ . Emiatt pedig ahol  $K_0$  átmetszi  $K_2$ -t, ott nem metszheti át  $C_0$ -t, vagyis  $K_0 \cap K_2 \subset D_1 \cup D_3$ .

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $K_0 \cap K_2$  egyik pontja  $D_1$ -beli. Az  $\ell$ -re való szimmetria miatt ekkor a másik is. Másrészt nem lehet  $K_0 \cap K_2 \subset K_1$ , mert akkor  $K_1$  és  $K_2$   $B_0$ -on kívül metszenék egymást. Tehát  $K_0 \cap K_2 \subset B_1$ , vagyis  $K_2$  max. 4 pontban metszheti  $C_2$ -t. (De 4 pontban biztosan metszi, mert pl.  $K_2 \cap K_1 \subset B_0 \cap D_3^c$ , tehát  $(K_2 \cap K_1) \cup (K_2 \cap K_3) \subset C_2$ .)



A konfiguráció tehát az ábrán felvázolthoz hasonló. Ekkor viszont ismét alkalmazhatjuk azt a trükköt, amit már a 4. és 5. eset-nél használtunk, ti. hogy  $K_2$  elmozgatható egy kis  $\varepsilon$ -nal  $\ell$ -re merőlegesen úgy, hogy nagyobb legyen a lefedett terület. Tehát ez az eset nem adhat optimális konstrukciót.

## 6.7. 7. eset

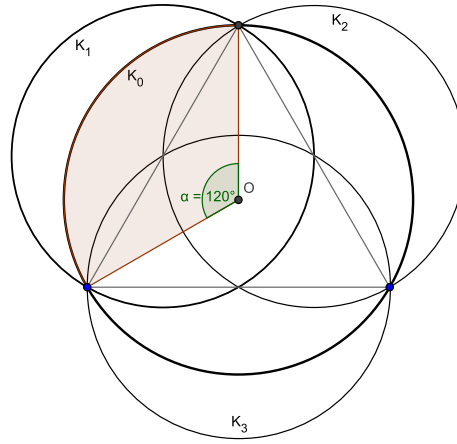
Először azt az alesetet fogjuk vizsgálni, amikor a három kis kör lefedi a nagyot; utána pedig a program által visszaadott konfigurációkat. (Néhány konfigurációnál a körök számozása eltér a program által favorizálttól.)

### 6.7.1. A fedés esete

Nyilvánvaló, hogy egy alsó becslést fogunk kapni az  $\frac{r}{R}$  arányra. Ez lesz a fedési sugárány. Ha a kis körök legalább ekkorák, akkor ez az elrendezés lehetséges, sőt, biztosan optimális; egyébként nem fordul elő.

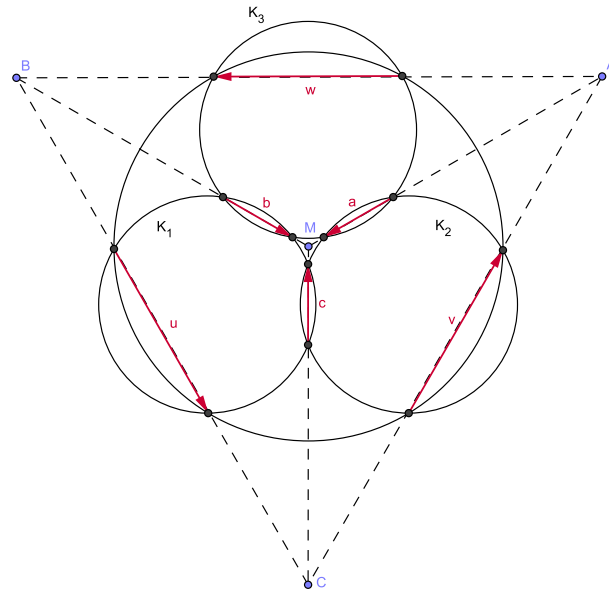
Mivel a kis körök lefedik a nagy kört, ezért a területét is, vagyis legalább egyikük lefedi a területnek legalább az egyharmadát. Ennek a kis körnek így az átmérője legalább akkora, mint a nagy körbe írt egyenlő oldalú háromszög oldalhossza. Az oldalhosszra az  $R = \frac{abc}{4T} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$  képlet alapján  $a = \sqrt{3}R$  adódik. Vagyis a fedéshez  $\frac{r}{R} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  kell.

Ez egy éles becslés, vagyis ekkora sugárány esetén a kis körök lefedik a nagy kört teljes egészében:



Tekintsük a nagy körbe írt szabályos háromszöget. Ennek oldalai legyenek a kis körök átmérői. A háromszög oldalai a nagy körnek egy három körcikkre való felbontását határozzák meg. Mindegyik körcikknek az összes pontjából a körcikket meghatározó húr legalább 120, vagyis legalább 90 fokos szögben látszik, így a húrra mint átmérőre emelt megfelelő kis kör (az ábrán kiemelt körcikk esetén ez  $K_1$ ) lefedi a körcikket. Ezzel beláttuk, hogy  $\frac{r}{R} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  esetén a kis körök teljes egészében le tudják fedni a nagy kört, egyébként pedig ez az eset nem jöhet létre.

#### 6.7.2. 41610. számú konfiguráció



Az ábrán szaggatottal jelölt szakaszok a körök páronkénti hatványvonalainak darabjai. Az  $A, B, C, M$  pontok a hatványvonalak metszéspontjaiként adódnak (mind-egyikükön három-három hatványvonal halad át, mivel három kör páronkénti hatványvonalai egy pontban metszik egymást). Ha feltesszük, hogy az ábránk optimális, akkor a következő összefüggéseket írhatjuk fel a bejelölt, a körök metszéspontjait összekötő vektorokra:

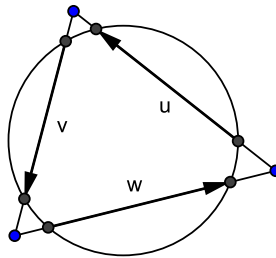
$$\begin{aligned}
u + c - b &= 0 \\
v + a - c &= 0 \\
w + b - a &= 0 \\
u + v + w &= 0.
\end{aligned}$$

**6.7.1. Lemma.** *Legyen  $K$  egy tetszőleges kör a síkon,  $AB$  pedig egy szakasz, amit  $K$  két belső pontban metsz. Legyen  $H$  az olyan  $P$  pontok halmaza, melyekre az  $ABP$  háromszög mindegyik oldalszakaszát a  $K$  kör két pontban metszi, továbbá a kimetszett szakaszok körben irányítva nullvektort adnak összegként.*

*Ekkor  $H$  maximum kételemű. Sőt,  $H$  egyik pontja sem eshet az  $AB$  egyenesre, és az  $AB$  egyenes által meghatározott két félsík mindegyikébe csak maximum egy eleme eshet.*

*Bizonyítás.* Az, hogy  $H$  és az  $AB$  egyenes metszete üres halmaz, triviális, hiszen bárhogy választjuk a  $P$  pontot  $AB$ -n, a keletkező elfajuló háromszög valamelyik oldalát kevesebb, mint 2 pontban fogja metszeni a kör.

Ha egy háromszög három oldala és egy kör úgy metszik egymást, hogy a kimetszett három (körben irányított) vektor összege 0, akkor az csak úgy lehet, hogy a háromszög oldalaiból kimetszett szakaszok a megfelelő oldalhoz rendre ugyanúgy aránylanak. Megfordítva, ha egy kör a háromszög  $a, b, c$  hosszú oldalaiból rendre  $\beta a, \beta b, \beta c$  hosszú szakaszokat metsz ki, ahol  $\beta$  pozitív szám (vagyis az ábra jelöléseivel  $\frac{\|u\|}{a} = \frac{\|v\|}{b} = \frac{\|w\|}{c}$ ), akkor a kimetszett vektorok összege (az ábrán  $u + v + w$ ) nyilvánvalóan nullvektor lesz.



A  $\beta := \frac{\text{diam}(K \cap AB)}{AB}$  jelöléssel az előzőek miatt  $P \in H$  pontosan akkor, ha  $K$  két-két pontban metszi az  $AP$  és  $BP$  szakaszokat, valamint  $\frac{\text{diam}(K \cap AP)}{AP} = \beta$  és  $\frac{\text{diam}(K \cap BP)}{BP} = \beta$ . Az első egyenletnek eleget tevő  $P$  pontok halmaza legyen  $L_1$ , a második egyenletnek eleget tevő pontok halmaza pedig  $L_2$ .



- mindegyike egy hiperbola inverze egy olyan körre, melynek középpontja az a-szimptoták metszéspontja
- negyedrendű görbék, „kanonikus egyenletük”  $(x^2 + y^2)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ . Ha  $r$  jelöli az alapkör sugarát,  $d$  pedig az alappont és a kör középpontjának távolságát, akkor  $a = \frac{1}{2r}$  és  $b = \frac{1}{2\sqrt{d^2 - r^2}}$ .
- alappontja kétszeres multiplicitású csomópont
- szintén kétszeres multiplicitással átmennek a kör pontokon
- a két levelük egy-egy konvex idomot határol

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy tetszőleges lemniszkátát a síkon! Egybevágósági transzformációval vigyük át a lemniszkáta alappontját az origóba, az alapkör középpontját pedig az  $x$  tengely pozitív felére.

Legyen  $e$  egy, az origón átmenő, az  $x$  tengellyel  $\alpha$  szöget bezáró szelője a  $K$  alapkörnek,  $X$  pedig az alapkör középpontja. Állítsunk  $X$ -ből merőlegest  $e$ -re, a talppontot jelölje  $T$ . Az  $e \cap K$  halmaz pontjait jelölje  $P$  és  $Q$ . Ekkor  $XT = d \sin \alpha$ , ebből pedig  $TP = TQ = \sqrt{r^2 - XT^2} = \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}$ . Vagyis a lemniszkátának a pontjai az  $(R, \theta) = (2\sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}, \alpha)$  polárkoordinátákkal fejezhetőek ki. Ha ezt átvisszük Descartes-koordinátákra, akkor a  $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  összefüggés alapján a  $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{r^2 - d^2 \frac{y^2}{x^2 + y^2}}$  implicit egyenletet kapjuk a lemniszkátára. Átalakítva a fenti egyenletet, az  $(x^2 + y^2)^2 = 4r^2 x^2 - (4d^2 - 4r^2)y^2$  egyenlethez jutunk, ami éppen a tétel második állítását bizonyítja. Az első állítás ebből ellenőrizhető a hiperbola kanonikus egyenletének felhasználásával.

A kanonikus egyenletben a legalacsonyabb fokú tag másodfokú, tehát az origó valóban kétszeres multiplicitású. Homogenizálva az  $(x^2 + y^2)^2 = \frac{x^2 z^2}{a^2} - \frac{y^2 z^2}{b^2}$  egyenlethez jutunk. Ez eltűnik, ha behelyettesítjük a kör pontokat, amik pedig fixpontjai az eltolásoknak és forgatásoknak, tehát nem csak a kanonikusak, hanem minden lemniszkáta átmegy rajtuk.

Legyen  $j := \pm i$ . A kör pontok multiplicitása ugyanakkora, mint az origó multiplicitása az  $(1 + (y + j)^2)^2 - \frac{z^2}{a^2} + \frac{(y + j)^2 z^2}{b^2}$  komplex affin síkgörbén. (Az  $x \neq 0$  affin síkra szorítottuk meg a kanonikus projektív lemniszkátát.)

Kibontva és rendezve a fenti egyenletet, a kapott kifejezés  $y^4 + \frac{y^2 z^2}{b^2} + \frac{2j}{b^2} y z^2 + 4j y^3 - 4y^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) z^2$ . ( $a$  és  $b$  geometriai jelentése alapján itt  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4d^2$ .) Itt a legkisebb fokú nemnulla tag másodfokú, vagyis valóban kétszeres multiplicitású pontjai a kör pontok a lemniszkátáknak.

Az ötödik állítás bizonyításához az kell, hogy a lemniszkátának ne legyen inflexiós pontja a csomóponton kívül. Elég ehhez az, hogy a lemniszkátának a csomópontján kívül sehol sem lehet 0 a görbülete.

Ehhez felhasználjuk, hogy a csomópontjától megfosztott lemniszkáta egy hiperbola inverz képe. Az inverzió sima, így tetszőleges rendbeli érintést megtart. Vagyis a

lemnizskátát másodrendben érintő körök/egyenesek éppen a hiperbolát másodrendben érintő körök/egyenesek inverzei. A hiperbola sehol sem 0 görbületű, tehát ha simulóköréi nem mennek át az aszimptoták metszéspontján, akkor inverz képeik is körök lesznek, amiből következik, hogy a lemnizskátának a csomóponton kívül nem lehet nulla görbületű pontja, spec. inflexiós pontja sem.

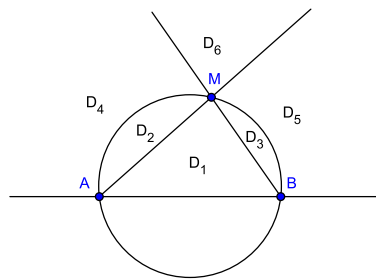
Ez abból is következik, hogy a hiperbola minden pontjában az érintő szigorúan elválasztja az origót a simulókör pontjaitól (kivéve persze az érintési pontot, de az nyilván nem lehet az origó). Ez pedig bizonyítható pl. úgy, hogy az érintő az evolúta megfelelő pontját (a görbületi kör középpontját) szigorúan elválasztja az origótól. Ezzel az ötödik állítást is beláttuk.  $\square$

Térjünk rá most  $L_1$  és  $L_2$  metszetére! Szorítkozzunk csak az  $AB$  egyenes által meghatározott egyik félsíkra, és tegyük fel, hogy itt van egy  $M$  metszéspont.

Jelölje  $\tilde{L}_i$  az  $L_i$  görbe kiegészítését teljes lemnizskátává, ahol  $i \in \{1,2\}$ . Értelmezzük  $\tilde{L}_i$ -t komplex projektív síkgörbéként. Tekintsük most az  $A, B, M$  pontokra illeszkedő  $C$  kört és annak  $\tilde{L}_i$ -vel vett metszetét. Legyen az általánosság megszorítása nélkül  $i := 1$ .

Mivel  $C$  másodfokú görbe,  $\tilde{L}_1$  pedig negyedfokú, ezért a Bézout-tétel miatt multiplicitással számolva pontosan 8 metszéspontjuk van  $\mathbb{CP}^2$ -n. Ezekből összesen legalább négyet adnak a köri pontok (ezeken a lemnizskáta kétszer, a kör egyszer megy át, és két ilyen pont van). Továbbá,  $A, B$  és  $M$  is metszéspont, amelyek közül a lemnizskáta csomópontja ( $A$ ) legalább kétszeres, a másik két pont pedig legalább egyszeres. Tehát megvan  $C$  és  $\tilde{L}_1$  összes metszéspontja: a két köri pont és  $A$  csomópontja kétszeres multiplicitással, továbbá  $B$  és  $M$  egyszeres multiplicitással. Mivel  $M$  és  $B$  egyszeres, ezért ott a kör és a lemnizskáta átmetszik egymást.  $A$ -ban is át kell metszeniük egymást, mivel különben több, mint kétszeres multiplicitású metszéspont lenne ott.

Húzzuk be most az  $AM, BM$  félegyeneseket, valamint a  $C$  kört! Ezek hat részre osztják a félsíkot. Legyen  $D_1$  ezek közül a háromszög,  $D_2$  és  $D_3$  rendre az  $AM$ , ill.  $BM$  húrok által meghatározott,  $B$ -t ill.  $A$ -t nem tartalmazó körszelet,  $D_4$  és  $D_5$  rendre a  $D_2$ -vel, ill.  $D_3$ -mal szomszédos nem korlátos tartomány, és végül  $D_6$  a megmaradó szögtartomány lezártja.



$L_1$ -et és  $L_2$ -t is három ívre bontják az  $A, B, M$  pontok. Ezek közül összesen négy ív esik a most vizsgált félsíkra: legyen ezeknek az íveknek a neve értelemszerűen  $L_1^{AM}, L_1^{BM}, L_2^{AM}, L_2^{BM}$ . A célunk bebizonyítani, hogy ezek az ívek mind különböző

$D_i$  halmazok belsejében futnak, így nem metszhetik egymást. Ekkor valóban igaz lesz az, hogy  $H$ -nak a félsíkban csak egy eleme van, mégpedig  $M$ .

Mivel  $L_1$  egy konvex idom határa, ezért az  $AM$  és  $BM$  egyenesek 2-2 pontban metszik. Ebből pedig látszik, hogy  $L_1^{AM} \subset D_2 \cup D_4$  és  $L_1^{BM} \subset D_3 \cup D_5$ . Azt is tudjuk, hogy  $M$ -ben  $L_1$  átmetszi  $C$ -t, tehát két lehetőség maradt: az egyik szerint  $L_1^{AM} \subset D_2$  és  $L_1^{BM} \subset D_5$ , a másik szerint  $L_1^{AM} \subset D_4$  és  $L_1^{BM} \subset D_3$ .

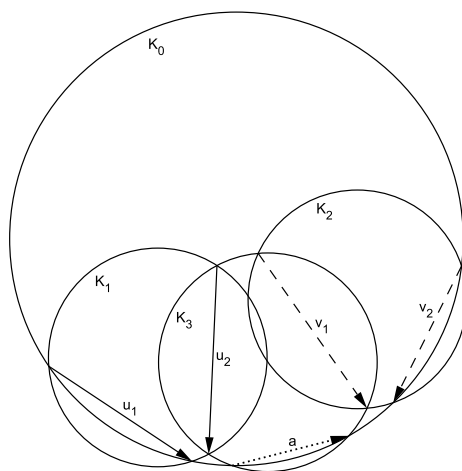
$\tilde{L}_1$   $L_1$ -től különböző levele csak  $A$ -ban metszi a kört, tehát vagy teljes egészében a körön belül van, vagy azon kívül. Tegyük fel, hogy belül van! Legyen a levél  $A$ -tól legmesszebbi pontja  $Q$ .  $A$  benne van a  $QBM$  háromszög belsejében, másrészt  $Q, B$  és  $M$  a  $C$  kör lapján vannak, tehát  $A$  nem lehet ekkor rajta  $C$  kerületén. Ellentmondásra jutottunk, tehát a másik levélnek  $C$ -n kívül kell lennie. Mivel  $A$ -ban a lemniszkáta mindkét ága átmetszi  $C$ -t, ezért  $L_1^{AM}$  (és a másik félsíkon lévő  $L_1^{AB}$  is) a  $C$  kör belsejében fut. Ez csak úgy lehet, hogy  $L_1^{AM} \subset D_2$  és  $L_1^{BM} \subset D_5$ .

Ugyanígy kapjuk  $L_2$ -re, hogy  $L_2^{AM} \subset D_4$  és  $L_2^{BM} \subset D_3$ . Valóban, a két lemniszkáta a vizsgált (nyílt) félsíkban csak az  $M$  pontban metszheti egymást. Mivel ez a bizonyítás a másik félsíkra is átvihető, a lemmát bebizonyítottuk.  $\square$

A lemma segítségével most bebizonyítjuk, hogy ha a konfigurációnk optimális, akkor szükségképpen harmadrendűen forgásszimmetrikus. Ehhez tekintsük az  $MAC$  és  $MAB$  háromszögeket. Mindegyikük olyan szakaszokat metsz ki rendre a  $K_2$ , ill.  $K_3$  körből, amik megfelelő irányítással összeadva nullvektort adnak. Másrészt, tükrözzük a  $B$  pontot az  $MA$  szakaszra, és tekintsük az  $MAB'$  háromszöget! Mivel a  $K_2$  és  $K_3$  körök egymásnak  $MA$ -ra való tükröképei, ezért a kapott  $MAB'$  háromszög –  $MAC$ -hez hasonlóan – nulla összegű vektorokban metszi a  $K_2$  kört. Ráadásul  $B'$  és  $C$   $MA$ -nak ugyanazon az oldalán vannak, tehát a lemmából következik, hogy mindenképpen  $B' = C$ . Ezért  $AB = AC$  és  $MB = MC$ .

Ha ugyanezt végiggondoljuk egy másik háromszögpárra vonatkozóan is, azt kapjuk, hogy  $AB = BC = CA$  és  $MA = MB = MC$ . Tehát  $ABC$  szabályos háromszög, és középpontja  $M$ . Mivel  $u + v + w = 0$ , ezért ezek a vektorok ugyanolyan hosszúak. Emiatt a kis körök rendre ugyanakkora szakaszokat metszenek ki a nagyból, tehát középpontjaik egyenlő távol vannak  $O_0$ -tól, ráadásul akörül harmadrendűen forgásszimmetrikusan helyezkednek el. Összefoglalva: ha egy ilyen típusú konfiguráció optimális, akkor abban a kis körök középpontjai szabályos háromszöget alkotnak, melynek középpontja  $O_0$ .

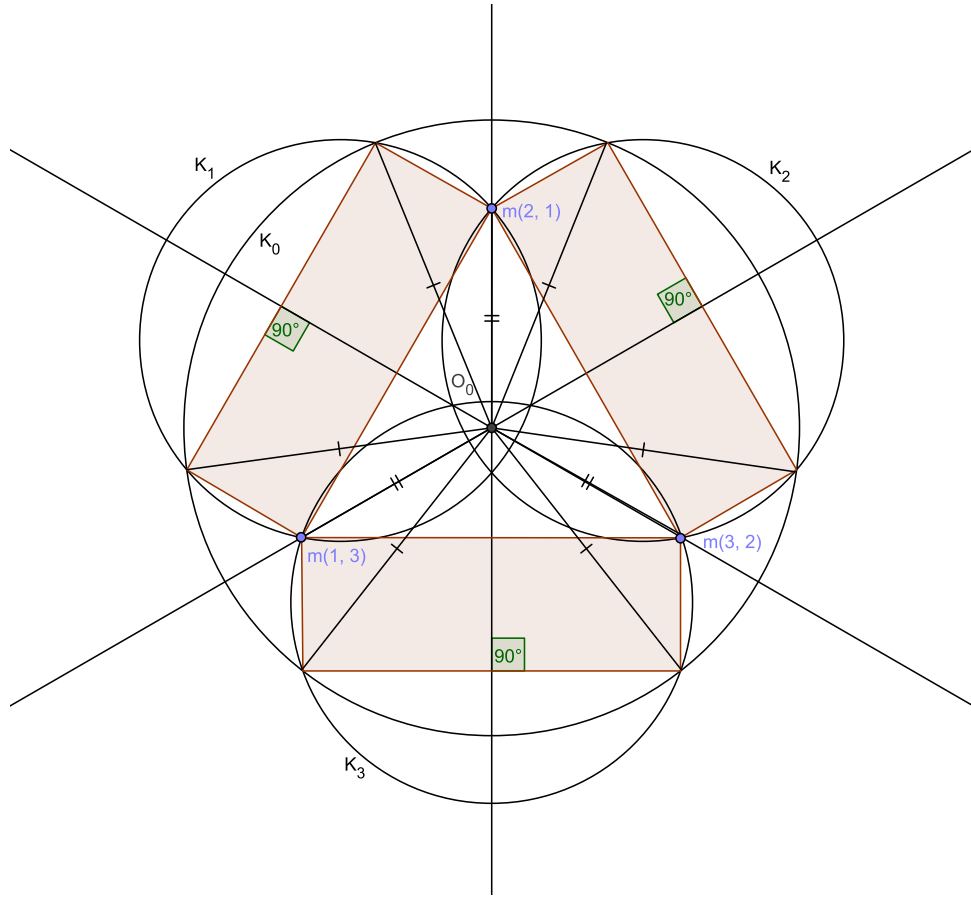
### 6.7.3. 41675. számú konfiguráció



Optimalitás esetén az ábra vektoraira  $u_1 = u_2$  és  $v_1 = v_2$ . Emiatt egy egyenesben van  $O_0, O_1, O_3$ , ill.  $O_0, O_2, O_3$  is. Mivel  $O_0$  és  $O_3$  nem eshet egybe (akkor ugyanis nem metszene  $K_0$  és  $K_3$ ), ezért mind a négy középpont egy egyenesbe esik. Ekkor az ábrán bejelölt összes vektor párhuzamos egymással. Viszont ekkor a  $K_3$  kör  $u_2$ ,  $v_1$ , ill.  $a$  vektorok által meghatározott nyílt ívei nem lehetnek diszjunktak, mivel párhuzamos vektorok határozzák meg őket. (Pedig azoknak kell lenniük, hiszen egyikük  $B_1$ -beli, de nem  $B_2$ -beli; másikuk  $B_2$ -beli, de nem  $B_1$ -beli, harmadikuk pedig  $B_1$  és  $B_2$  komplementerében van.) Ellentmondást kaptunk, tehát ez a konfiguráció nem adhat optimumot.

### 6.7.4. 45963. számú konfiguráció

Ebben az esetben a három kis kör Venn–diagram formában helyezkedik el, metszéspontjaik mind benne vannak a nagy kör belsejében.

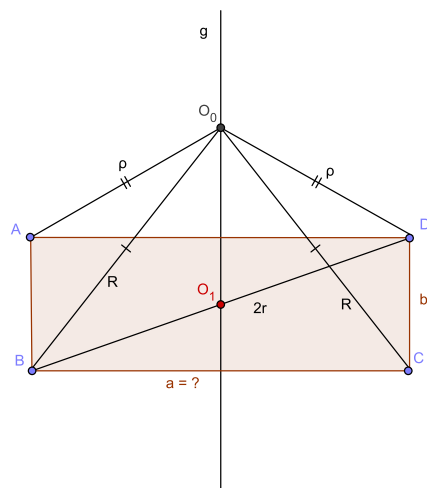


Az optimalitás miatt a bejelölt (esetleg elfajuló) négyszögeknek parallelogrammáknak kell lenniük (hogy a négy csúcsuk megfelelő előjeles összege nullvektor legyen), sőt, téglalapoknak, mivel körbe írhatóak.

Ha az egyik téglalap (pl. a  $K_1$ -be írt) elfajuló, akkor  $m(1, 3) = m(1, 0) = m(0, 3)$ , és  $m(3, 2) = m(3, 0) = m(0, 2)$ . Ekkor szükségképpen a másik két négyszög is elfajuló. Ez pedig azt jelentené, hogy a három kis kör lefedi a nagyot, amit pedig már kizártunk. Tehát egyik téglalap sem lehet elfajuló.

Jelölje  $H$  az  $m(1, 3), m(3, 2), m(2, 1)$  csúcsok által meghatározott háromszöget. Vegyük észre, hogy  $H$  köréírt körének középpontja megegyezik  $O_0$ -lal. Ez azért van, mert a háromszög oldalainak felezőmerőlegesei megegyeznek a nagy körből a kis körök által kimetszett 3 húr felezőmerőlegeseivel, amelyek viszont mindhárman átmennek a nagy kör középpontján. Ebből viszont az következik, hogy  $O_0$  egyrészt egyenlő távol van  $H$  csúcsaitól, másrészt egyenlő távol van a téglalapok maradék 6 csúcsától (mert azok a nagy körön vannak). Tudjuk továbbá, hogy a téglalapok átlói mind  $2r$  hosszúak. Célunk most az lesz, hogy bebizonyítsuk, hogy a három téglalap egybevágó, sőt, olyan módon, hogy a  $H$  háromszög szabályos.

Ha az  $O_0$  és  $m(1, 3)$  pontok távolságát  $\rho$ -val jelöljük, akkor a következő ábrát rajzolhatjuk fel:

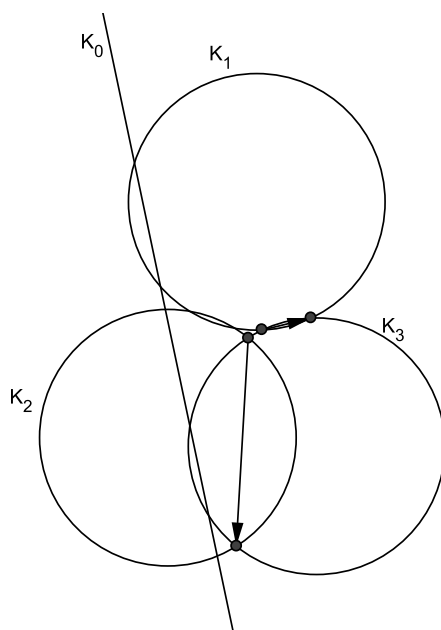


A célunk az, hogy megmutassuk: az  $a$  szakasz hossz csak egyféle értéket vehet fel. Ezt úgy tesszük meg, hogy szerkesztési eljárást adunk, amelyből azonnal látszik, hogy csak egyféle lehet a fenti ötszög.

Első lépésben meg kell szerkesztenünk a  $BDO_0$  háromszöget, amelynek oldalhosszai  $R, 2r, \rho$ . Majd meg kell szerkesztenünk a  $BD$  szakasz felezőpontját, ez lesz a téglalap, és egyben a  $K_1$  kör középpontja. A megszerkesztett pontot  $O_0$ -lal összekötve kapjuk az ötszög szimmetriatengelyét. Az ötszög tengelyes szimmetriáját kihasználva pedig innen már meg tudjuk szerkeszteni az  $A$ , ill.  $C$  pontokat. Végig egyértelmű volt, hová kell kerülnie a következő pontnak, így láthatjuk, hogy az eredeti ábrán szereplő téglalapoknak muszáj egybevágóknak lenniük.

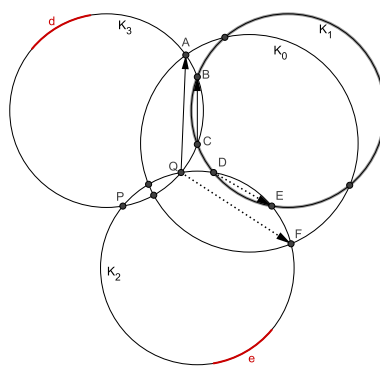
Tehát, végeredményben, ha ez az eset optimumot ad, akkor az ábra harmadrendűen szimmetrikus lesz, vagyis a három kis kör középpontja harmadrendűen forgásszimmetrikusan helyezkedik el  $O_0$  körül.

### 6.7.5. 303770. számú konfiguráció



Az ábrán  $K_0$ -t egyenesként ábrázoltam,  $D_0$ -ból így a  $K_0$ -tól jobbra lévő félsík lett.  $K_3$  a láncát a bejelölt két vektorban metszi, tehát ezeknek egyenlőknek kell lenniük. Ebből az következik, hogy a három kis kör egy egyenesbe esik. Ez viszont ellentmondás, hiszen három egy egyenesbe eső, egybevágó, páronként metsző kör csak hernyó-konfigurációt tud alkotni, az ábrán pedig lyukas konfiguráció látható.

### 6.7.6. 304650. számú konfiguráció



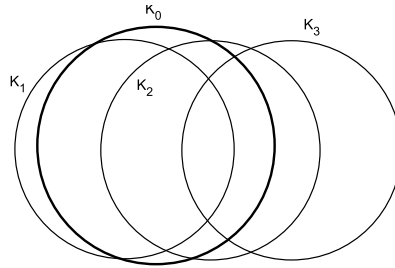
Az ábrán ugyanúgy jelölt vektorok egyenlők az optimalitás miatt.

Ha  $Q = D$ , akkor  $Q = C$  is igaz. A vektorok egyenlősége miatt  $E = F$  és  $B = A$  is igaz. Ekkor viszont a kis körök lefedik a nagyot. Ezt pedig kizártuk.

Tehát  $Q \neq D$ . Hasonlóan,  $Q \neq C$ . Ekkor az  $AQCB$ , ill.  $FEDQ$  négyszögek nem elfajulók, tehát a vektorok egyenlősége miatt téglalapok, vagyis az  $ABC$ , ill.  $DEF$  ívek biztosan félkörívek. Ebből az következik, hogy a  $K_2$ , ill.  $K_3$  körök kerületének

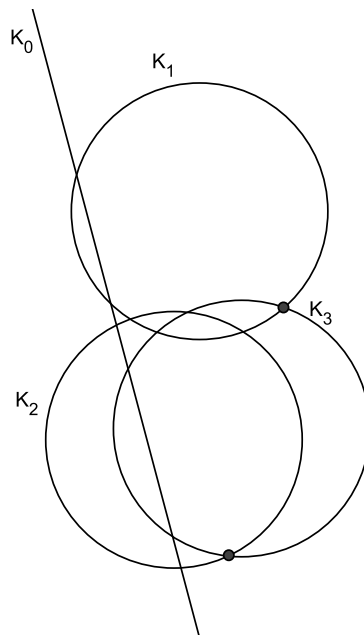
a  $PQ$  íven kívüli részéből legalább félkörnyi  $K_0$  belsejébe esik. Emiatt pedig a  $d$ , ill.  $e$  nyílt körívek (amelyek a  $P$  és  $Q$  által meghatározott ívek tükörképei  $K_2$  és  $K_3$  középpontjaira) biztosan  $B_0$ -on vannak. Innen már a 3.0.10 Lemma bizonyításában használt gondolatmenettel belátható, hogy a  $P$  pont  $B_0$ -on van. Ez pedig még határesetben sem teljesülhet. Ellentmondásra jutottunk, tehát ez a konfiguráció nem lehet optimális.

#### 6.7.7. 307870. számú konfiguráció



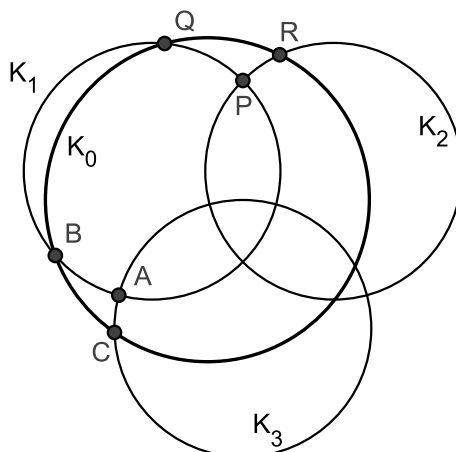
Az ábráról látszik, hogy  $K_3$  ebben a konfigurációban felesleges. Viszont van  $K_0$ -ból lefedetlen terület (hiszen feltettük, hogy a kis körök nem fedik le teljes egészében). Tehát ez a konfiguráció nem adhat optimumot.

#### 6.7.8. 308123. számú konfiguráció



Itt is egyenesként ábrázoltam  $K_0$ -t. A két, szürkével jelölt pontnak egybe kell esnie, mivel  $K_3$  csak ezekben a pontokban metszi a láncát. Tehát optimum csak határesetben léphet fel. A folytonosság miatt a szürkével jelölt pontok az  $m(2,1)$  pontban találkoznak. Ekkor viszont  $D_1$  és  $D_2$  együtt lefedi  $K_3$ -at, ami nonszensz. Vagyis ebben az esetben sem léphet fel optimum.

### 6.7.9. 309003. számú konfiguráció



Az ábrán  $K_2$  és  $K_3$  is két különböző ( $P$  és  $R$ , ill.  $A$  és  $C$ ) pontban metszi át a hozzá tartozó láncot. Tehát optimum csak határesetben lehetséges, vagyis  $P = R$ . Ekkor  $K_1$ ,  $K_2$  és  $K_0$  egy pontban metszik egymást, ami a folytonosság miatt nem lehet  $B$ , hanem csak  $Q$ . Tehát  $P = Q = R$ , ugyanígy  $A = B = C$ . Viszont ekkor a kis körök lefedik a nagyot, amit kizártunk. Tehát ez az eset sem adhat optimumot.

### 6.7.10. 320410. számú konfiguráció

Táblázatos leírás:

```

0 1 2 3
0 * 2
1 * 0 3 0
2 0 3 * 0
3 2 0 0 *
```

Ez az eset a 6. eset-hez teljesen hasonlóan elintézhető (annyi a különbség, hogy itt középen még van egy lényegtelen metszés), és ezért nem adhat optimumot.

## 6.8. Konklúzió

A fenti bizonyítás alapján kimondhatjuk az alábbi tételt az optimális elrendezés harmadrendű forgásszimmetriájáról:

**6.8.1. Tétel.** Legyen  $K_0$  egy  $R$  sugarú,  $K_1, K_2$  és  $K_3$  pedig  $r$  sugarú körök, ahol  $r$  és  $R$  pozitív számok. Ekkor a körök azon elrendezései között, melyek esetén az  $r$  sugarú körök által  $K_0$ -ból lefedett terület maximális, van  $O_0$  körül harmadrendűen forgásszimmetrikus. Sőt:

- Ha  $r \leq r_1$ , akkor a három kis kör elfér diszjunkt módon  $B_0$ -on.

- Ha  $r_1 < r < r_2$ , akkor az optimális konfiguráció vagy „lyukas”, vagy „Venn-diagram” típusú.
- Ha  $r_2 \leq r$ , akkor a három kis kör lefedi  $K_0$ -t.

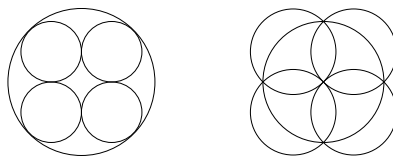
ahol  $r_1 = \frac{R}{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}$  a pakolási sugár,  $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$  a lefedési sugár.

## 7. Kör lefedése négy körrel

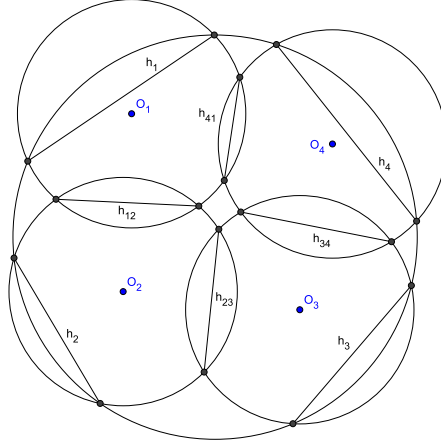
Az első kézenfekvő lépés a négy kis kör problémájának megoldása felé az, hogy felsoroljuk a lehetséges különböző átmetszési gráfokat. Feltehetjük, hogy  $r$  nagyobb, mint a pakolási sugár, tehát  $K_0$  foka legalább 2. Valamint tudjuk, hogy optimumban nincs levél a gráfban.

A felsorolás kézzel is elvégezhető, azonban egy program itt is sokat segít (nem mellékesen egy jól megírt program akárhány körre fel tudja sorolni a lehetséges gráfokat). Az általam D nyelven írt program négy kis körre 29 lehetséges gráfot sorolt fel (öt kis kör esetén ez a szám már 225). Ez sajnos viszonylag sok. Ráadásul ha még le is fixáljuk az átmetszési gráfot, a további kombinatorikai osztályozásnál is problémákba ütközünk. Ha pl. csak azt az esetet tekintjük, amikor az összes kör páronként átmetszi egymást, akkor a program meghagy több, mint kilencezer esetet, melyeket a szabályok alapján nem tudott automatikusan kiszórni. Ez persze kevesebb, mint  $2^{60}$ , de kézzel továbbra is esélytelen ennyi esetet végignézni. Várható, hogy több szabály alkalmazásával a program további segítséget nyújt majd, és sikerül talán pár tíz esetre leszűkíteni a problémát.

Megnézhetünk viszont egy fontosnak tűnő esetet. Tekintsük hát a négy kör pakolási, ill. fedési konfigurációját!



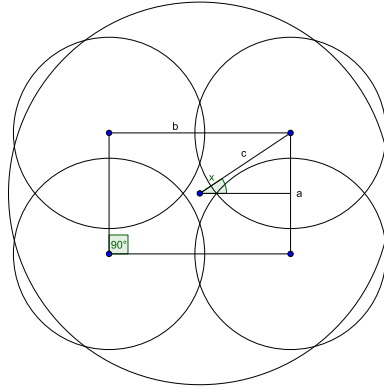
Láthatjuk, hogy valójában a pakolási és fedési konfiguráció is az alábbi elrendezés határesetek:



Ezért magától értetődőnek tűnik, hogy a dolgozat zárásaként foglalkozzunk ezzel a konfigurációval, és megvizsgáljuk, hogy ha kombinatorikailag ez a helyzet, akkor a körök elhelyezkedhetnek-e az optimális esetben forgásszimmetrikusan.

A 6.7.1 Lemma miatt tudjuk, hogy a  $h_{12}$  húr egyenesére tükrözve a  $h_1$ , ill.  $h_{41}$  húrokat, rendre a  $h_2$ , ill.  $h_{23}$  húrokat kapjuk. Ezzel analóg állításokat fogalmazhatunk meg a  $h_{23}$ ,  $h_{34}$ , ill.  $h_{41}$  húrok egyenesére való tükrözésekre vonatkozóan. Mindebből kapjuk a  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ ,  $h_{12} = h_{34}$ , ill.  $h_{23} = h_{41}$  egyenlőségeket.

Mivel két kör közös húrja és a középpontjaik távolsága egyértelműen meghatározza egymást, ezért a fentiekből következik, hogy  $O_1, O_2, O_3$  és  $O_4$  egy  $O_0$  középpontú körön vannak rajta, tehát húrnegyszöget alkotnak. Másrészt,  $O_1O_2 = O_3O_4$  és  $O_2O_3 = O_4O_1$ , vagyis ez a húrnegyszög parallelogramma, tehát téglalap.



Jelölje a középpontok által meghatározott téglalap oldalhosszait  $2a$  és  $2b$ , az  $O_0O_i$  távolságokat pedig  $c$ . Ha  $0 < x < \pi/2$  egy szögparaméter, akkor az  $a = c \sin x$ ,  $b = c \cos x$  helyettesítésekkel élhetünk.

Ahhoz, hogy a  $h_2$ ,  $h_{12}$  és  $h_{23}$  szakaszok megfelelő irányított összege nullvektor legyen, az kell, hogy összetolhatóak legyenek egy háromszöggé. A háromszög derékszögű lesz, és mivel  $O_0O_2$  merőleges  $h_2$ -re,  $h_{12} \parallel b$  és  $h_{23} \parallel a$ , ezért ez a háromszög egy  $x$  hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszög kell, hogy legyen. Ez a következő egyenleteket eredményezi ( $c$ -re és  $x$ -re):

$$\begin{aligned}\frac{h_{12}}{h_2} &= \sin x \\ \frac{h_{23}}{h_2} &= \cos x.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ha  $c$  fix, akkor  $h_2$  állandó, és  $x$  függvényében a  $h_{12}$  mennyiség szigorúan monoton csökken. Tehát az első egyenlet bal oldala szig. mon. csökken. Másrészt a jobb oldal szig. mon. nő. Tehát minden  $c$ -re maximum egy  $x$  lehet megoldás. Viszont ha egy adott  $c$ -re  $x$  megoldás, akkor  $\frac{\pi}{2} - x$  is megoldás, mivel az  $x$  és  $\frac{\pi}{2} - x$  esetén kapott két ábra egybevágó. Mindebből az következik, hogy csak  $x = \frac{\pi}{4}$  lehet a megoldás, vagyis  $a = b$ , a téglalapunk pedig egy négyzet, akármilyen  $c$  értéke.

Tehát megkaptuk, hogy ha az optimális elrendezés kombinatorikailag így néz ki (amire nagy esély van), akkor muszáj negyedrendűen forgásszimmetrikusnak lennie.

## Hivatkozások

- [1] K. BEZDEK, *Über einige kreisüberdeckungen*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, (1983), pp. 7–13.
- [2] R. CONNELLY, *Maximizing the area of unions and intersections of discs*, Discrete and Convex Geometry Workshop, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, (2008).
- [3] B. CSIKÓS, *On the volume of flowers in space forms*, Geom. Dedicata 86, (2001), pp. 59–79.
- [4] F. FODOR, *The densest packing of 19 congruent circles in a circle*, Geom. Dedicata 74, (1999), pp. 139–145.
- [5] —, *The densest packing of 12 congruent circles in a circle*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 41, (2000), pp. 401–409.
- [6] —, *The densest packing of 13 congruent circles in a circle*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 44, (2003), pp. 431–440.
- [7] Z. GÁSPÁR, T. TARNAI, AND K. HINCZ, *Bifurcations of an elastic model with nonsmooth material law*, IV European Conference on Computational Mechanics, Paris, France, (2010).
- [8] H. MELISSEN, *Densest packing of eleven congruent circles in a circle*, Geom. Dedicata 50, 50 (1994), pp. 15–25.
- [9] U. PIRL, *Der mindestabstand von  $n$  in der einheitskreisscheibe gelegenen punkten*, Math. Nachr. 40, (1969), pp. 111–124.
- [10] E. W. WEISSTEIN, *Circle packing*, MathWorld—A Wolfram Web Resource.