



**MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR**



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Új eljárás rácsos tartók topológiai optimalására: Folyadékszerű viselkedésen alapuló evolúciós eljárás

Daróczy László
I. éves gépészmérnök (MSc) hallgató

Konzulens:
Dr. Jármái Károly (DSc) - egyetemi tanár
Anyagmozgatási és Logisztikai Tanszék

Miskolc, 2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Probléma megfogalmazása.....	4
2.1.Érzékenységi számok definiálása.....	4
3. Kvázistatikus folyadék alapú optimálás	6
4. Megoldhatóság feltétele	9
5. Javasolt CPOFF függvények.....	11
6. Az algoritmus menete	14
7. Rácsos tartó tervezése.....	17
7.1.Egyik végén befalazott, másik végén hajlított rácsos tartó	17
7.2.Hídszerkezet optimálása.....	19
7.3.3D konzolos tartó	20
8. Összefoglalás.....	23
9. Köszönetnyilvánítás	23
10. Irodalomjegyzék.....	24
Függelék	25

1. Bevezetés

A topológiai optimalás területén a két – talán legjobban ismert és elterjedt – eljárás, a diszkrét értékekkel dolgozó evolúciós elven működő BESO, illetve az átmeneti értékekkel, heurisztikus elven dolgozó SIMP eljárás. Az alábbiakban ismertetésre kerül egy új, folyadékszerű viselkedésen alapuló, átmeneti értékekkel is dolgozó evolúciós topológiai optimaló eljárás, amelyről matematikai úton belátható, hogy a BESO módszer általánosításának is tekinthető.

2. Probléma megfogalmazása

Az alábbiakban a jól ismert, klasszikus optimálási problémán - a külső potenciális energia („compliance”) minimálásán - keresztül kerül ismertetésre az új módszer, ahol az alábbi módon fogalmazható meg a probléma:

$$\begin{aligned} \text{Úgy, hogy} \quad & C(x) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \rightarrow \min & (1) \\ & \sum_{i=1}^N V_i x_i - V_0 f = 0 & (2) \\ & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} & (3) \\ & 0 \leq x_{\min} \leq x \leq 1 & (4) \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{K}$ a globális merevségi mátrix, $\mathbf{f}$ a szerkezet globális terhelési vektora, $\mathbf{u}$ az elmozdulásvektor, $C(x)$ a külső potenciális energia, N az elemek száma, x_i az i . elem sűrűsége, $x_{\min}$ az elemek minimális sűrűsége, V_i az i . elem térfogata, $V_0 = \sum_{i=1}^N V_i$ a teljes tervezési tartomány térfogata, és f az elérni kívánt térfogatszázalék.

2.1 Érzékenységi számok definiálása

Az érzékenységi számok az alábbi megvalósításban [3] alapján kerülnek számításra. Az egyes elemek merevségi mátrixának számítása során felhasználjuk a SIMP (szilárd izotróp anyag büntetéssel) interpolációs sémát, ahol az egyes elemek Young-modulusát az alábbi összefüggés szerint büntetjük, [3,4]:

$$E(x_i) = E_0 x_i^p, \quad (5)$$

ahol E_0 a tömör anyag rugalmassági modulusa, míg p a büntetőparaméter (minimum 3,0). Ezek alapján definiálható (egyen-térfogatú véges elemekből álló háló esetére vonatkozó levezetéssel) az egyes elemek merevségi mátrixa:

$$\mathbf{K} = \sum_i x_i^p \mathbf{K}_i^0, \quad (6)$$

ahol $\mathbf{K}_i^0$ a teljesen tömör elem merevségi mátrixa.

A statikus szerkezet egyensúlyi állapotra vonatkozó egyenlete

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (7)$$

valamint a célfüggvény:

$$C(x) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u}. \quad (8)$$

Feltételezve, hogy csak az egyes elemek sűrűségei (az optimált változó) értékei változhatnak, arra a következtetésre jutunk, hogy:

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_i}. \quad (9)$$

Kiegészítve az egyenletet egy (vektor) λ Lagrange szorzóval, azaz egy 0 értékű $\lambda^T(\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u})$ tagot hozzáadva az egyenlethez arra jutunk, hogy

$$C(x) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \lambda^T(\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}), \quad (10)$$

továbbá

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} + \frac{d\lambda^T}{dx_i}(\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}) + \lambda^T \left(\frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} - \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \right). \quad (11)$$

Megfigyelhetjük, hogy ebben az egyenletben a harmadik tag zérus az egyensúlyi egyenlet miatt, és $\frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} = 0$ (mivel a külső terhelés vektora független az optimált változók értékétől).

Felhasználva ezeket tovább egyszerűsíthetjük az egyenletet:

$$\frac{dC}{dx_i} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{f}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}. \quad (12)$$

A $\frac{d\mathbf{u}}{dx_i}$ tag eliminálása érdekében úgy választjuk meg a Lagrange-szorzó értékét, hogy kielégítse az alábbi egyenletet:

$$\frac{1}{2} \mathbf{f}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Felhasználva a **7. egyenletet** arra jutunk, hogy

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

azaz

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \mathbf{u}. \quad (15)$$

Behelyettesítve a **15. egyenletet** a **12. egyenletbe**

$$\frac{dC}{dx_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u}. \quad (16)$$

Végül felhasználva az anyag rugalmassági modulusára alkalmazott interpolációs eljárást megkapjuk, hogy:

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i. \quad (17)$$

Ezek alapján pedig az érzékenységi számot az alábbi módon választjuk meg (annak érdekében, hogy a módszer megfogalmazása konzisztens legyen a BESO eljárásával):

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{x_i^{p-1}}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i^0 \mathbf{u}_i \quad (18)$$

amely leegyszerűsítve nem más jelent, mint a teljes szerkezet „compliance” növekedését egyetlen (teljesen) tömör cella törlése esetén.

Amennyiben minimálni szeretnénk az alakváltozási energiát, akkor a legmagasabb érzékenységgű elemeket kell megtartanunk (mert ezek törlése jelentősen növelné azt). A továbbiakban – véges elemes megfontolásokat követve – továbbra is az egyen-térfogatú véges elemeket tartalmazó modellen kerül ismertetésre a megoldás, de az algoritmus jól alkalmazható tetszőleges háló esetén is, csupán – a BESO és SIMP módszerhez hasonlóan – ki kell egészíteni a **18. egyenletet** az elemek térfogatával.

3. Kvázi-statikusan folyadék alapú optimalizálás

Ebben a fejezetben bemutatásra kerül az evolúciós eljárást alkalmazó, folyadékszerű viselkedésen alapuló eljárás. A $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ egyensúlyi egyenlet megoldása után minden lépésben egy kvázi-statikusan, kvázi-folyadék szimulációs lépés is beiktatásra kerül a topológiai optimalizálás folyamatába. Az optimalizálás alapötlete az, hogy a folyadékok a stabil egyensúly állapotára törekednek, azaz igyekeznek a magasabb potenciális energiájú helyekről az alacsonyabbak felé áramlani, általában véve pedig kiegyenlíteni az energia-eloszlást. Amennyiben egy skalár mezőt akarunk minimálni, akkor a potenciális energiát egyszerűen a skalár mező értékére kell felvinnünk, így a folyadék át fog áramlani a skalármező magasabb értékű területeiről az alacsonyabb értékű területek felé.

Az alábbi definíciók segítségével írhatjuk fel a kvázi-folyadék viselkedését:

A szilárd test sűrűsége (optimált változó):

$$\rho_p = x \quad (19)$$

A folyadék-közeg sűrűsége:

Az optimalizálási lépés elején ez megegyezik az optimált változó, azaz a szilárd testben található véges elemek sűrűségeinek értékeivel:

$$\rho_f = \rho_p = x \quad (20)$$

így teljesülnie kell annak is, hogy:

$$\rho_f \in [0,1] \quad (21)$$

Az optimalizálási eljárás egyes lépéseinek végén bevezetésre kerül egy sűrűség-tompítási eljárás (Historical Density-Dampening Scheme). Ez azért szükséges, mivel a folyadék képes egyetlen lépésben akár nagy mozgásokra is, azonban a valóságban – ha a folyadék és szilárd közeg sűrűségét teljes mértékben megfeleltetnénk egymással, akkor – a szilárd közeg sűrűsége, így a szerkezetben ébredő feszültségek is megváltoznának, ami a folyadékokra is hatással lenne viszont. Azonban – elsősorban a számítógépes kapacitások korlátoltsága miatt-, ez nem kivitelezhető.

A sűrűség-tompítási eljárás lényege, hogy kombinálja az előző és új megoldást, így megakadályozva a túl gyors változásokat a folyadék-közegben. Az eljárás az alábbi módon határozza meg az új sűrűségeket:

$$\rho_p^{new} = x = H_D \rho_p^{old} + (1 - H_D) \rho_f \quad (22)$$

ahol H_D a sűrűség-tompítási faktor ($H_D \in [0,1]$).

Megjegyzés: Bár azzal, hogy átlagoljuk az új megoldást – ami teljesít egy előírt térfogathányadot – egy korábbi – eltérő előírást teljesítő – megoldással, látszólag hibát követünk el, azonban ez nem más, mint a térfogatszázalékokra vonatkozó előírás betartatásának lassítása. $f = 0,1$ -es előírt térfogathányad esetén is 20 iteráció esetén már nem fog különbséget eredményezni az algoritmus akár 2 000 000 véges-elem esetén sem. Bár a javasolt tompítási séma előnyös a konvergencia finomítására, de az algoritmus alkalmazásának nem elengedhetetlen feltétele, igény esetén elhagyható.

A kvázistatikus elnevezés onnan ered, hogy bár egyértelmű megfeleltetést hoztunk létre a folyadék és a szerkezet szilárd anyagának sűrűsége között, ennek ellenére az optimalizálási lépés során feltételezzük, hogy a közeg sűrűségének változásának hatására a szerkezetben ébredő feszültségek változatlanok maradnak. Bár ez a megközelítés megkérdőjelezhető – és

egy teljes, nem-statikus szimuláció alkalmazásának lehetősége továbbra is a kutatás céljai között szerepel – azonban ezen feltételezés révén jelentősen csökkenthető a szükséges számítások mennyisége.

Szerkezeti nyomás: A szerkezeti feszültségekből származó „nyomás” (nem azonos a szerkezetben ébredő feszültséggel). A célfüggvény értékével egyezik meg:

$$p_s = \alpha \quad (23)$$

Szerkezetből származó potenciális mező- $U(p_s)$: A szerkezeti nyomásból ébredő, folyadékra is ható potenciális mező értéke. Ez a függvénykapcsolat határozza meg, hogy minimálunk vagy maximálunk.

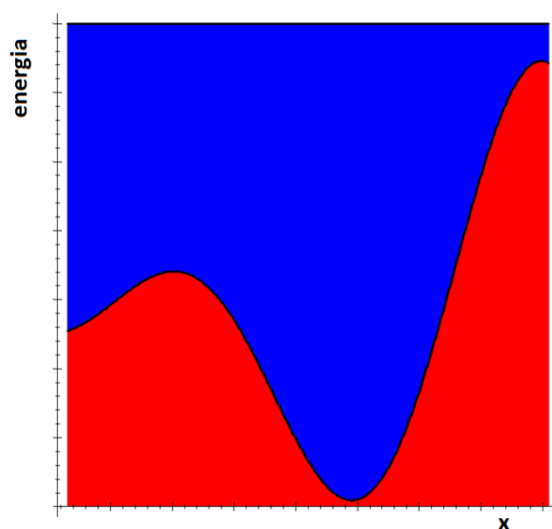
$$U(p_s) = U(p_s \equiv \alpha) \quad (24)$$

Kvázi-folyadék állapotegyenlete – $p_f(\rho_f)$: A folyadék nyomása és sűrűsége közötti kapcsolatot meghatározó függvény. A teljesen üres tartományok elkerülése érdekében meghatározott értékek közé kell esnie (x_{min} és 1). Nem lehet negatív sem.

Kvázi-folyadék egyensúlyi állapotát leíró egyenlet: A folyadék egyensúlyi állapotát leíró egyenlet. A kvázi-folyadék elnevezés onnan származik, hogy ez az összefüggés nem igaz valós folyadékokra, de hasonlít az összenyomhatatlan közeget leíró hidrosztatikai egyenletre ($p + \rho g z = const.$). Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a folyadék nyomásából és a potenciális térből származó energia összege állandó (ld. **1. ábra**).

$$p_f(\rho_f) + U(p_s) = const. \quad (25)$$

Mivel fenti képletben szereplő const. egy fontos paraméter lesz a továbbiakban, ezért a továbbiakban *EqlbrLvl*-ként fog szerepelni.



1. ábra

Kvázi-statikus egyensúlyi állapot

Piros=potenciális energia, Kék=Folyadék-közeg nyomása

Az előbbi egyenletet átrendezhető egy egyszerűbb alakba:

$$\rho_f = p_f^{-1}(EqlbrLevel - U(p_s \equiv \alpha)), \quad (26)$$

ahol p_f^{-1} az anyagtörvény. Így látható már, hogy - a már korábban említett paraméter értéke mellett - a függvény csak az érzékenységtől függ, és egyetlen egyenlettel kifejezhető a függvénykapcsolat:

$$\rho_f = \rho_f(\rho_p \equiv \alpha) \quad (27)$$

Bár elsőre nem egyértelmű a fenti formából, de az optimálás legfontosabb lépése innentől nem a sűrűségek kiszámítása lesz, hanem *EqlbrLvl* értékének megfelelő megválasztása úgy, hogy teljesítse a (2)-ben megfogalmazott korlátot (ld. 1. ábra):

$$\int_{V_{domain}} \rho_f(\alpha) dV = V_0 \cdot f \quad (28)$$

Annak érdekében, hogy (4) korlát is teljesüljön, a nyomást egy módosított alakban vesszük fel:

$$\rho_f = x_{min} + (1 - x_{min}) \cdot \rho_f^s(\alpha), \quad (29)$$

ahol $\rho_f^s(\alpha)$ a skálázott anyagtörvény, mely teljesíti azt a feltételt, hogy

$$(F1) \quad 0 \leq \rho_f^s(\alpha) \leq 1 \quad (30)$$

bármely lehetséges α esetére egy adott optimálási lépésben.

Tovább egyszerűsítve az összefüggést bevezetjük a dimenziótalanított érzékenységet:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_{min}}{\alpha_{max} - \alpha_{min}}, \quad (31)$$

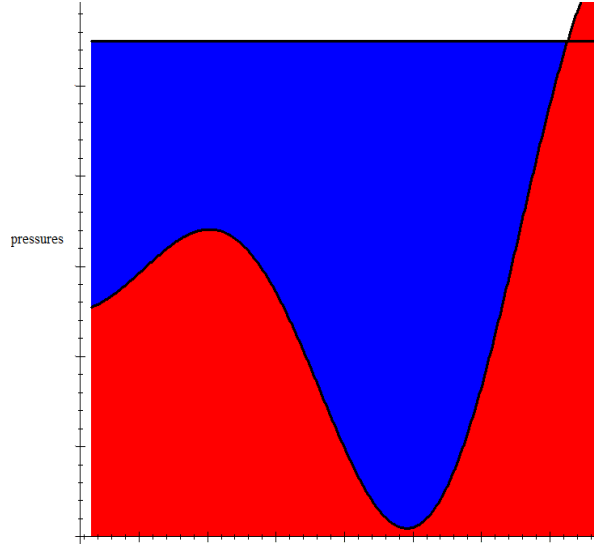
ahol α_{min} és α_{max} rendre a legkisebb és legnagyobb előforduló érzékenység egy optimálási lépésben, azaz

$$\rho_f = x_{min} + (1 - x_{min}) \cdot \rho_f^s(\bar{\alpha}). \quad (32)$$

Látható, hogy a (30) szerinti formában a skálázott dimenziótalan anyagtörvény értékkészlete és értelmezési tartománya is a $[0,1]$ tartomány. Az ilyen jellegű függvényeket a matematikában több területen fuzzy-függvényeknek nevezik. Az alábbiakban itt is ezt a jelölést fogjuk használni, mivel ez a függvény mutatja meg – fuzzy logikával –, hogy egy elem mennyire tömör.

4. Megoldhatóság feltétele

Bár annak ellenére, hogy **(F1)** feltételt kielégíti egy függvénysereg, lehetséges, hogy **(25)**, **(28)**-at mégsem elégíti egyetlen eleme sem (ld. **2. ábra**, ahol negatív nyomásokat eredményezne a függvénysereg).



2. ábra

Helytelen anyagtvörvény

Piros=potenciális energia, Kék=Folyadék-közeg nyomása

Annak érdekében, hogy a feladat megoldhatósága ezzel az eljárással is garantált legyen, bevezetjük a POFF (Possible Optimization Fuzzy Functions), azaz a Lehetséges Optimálási Fuzzy Függvények halmazát, ami a korábbi *EqlbrLvl* helyett egy *threshold* (ami speciális esetben ugyanazt a célt fogja szolgálni, mint a BESO módszer hasonló elnevezésű paramétere) nevű paraméter függvény lesz. A függvénysereg az alábbi módon jelölhető:

$$\ddot{p}_f^s(\bar{\alpha}, threshold) \quad (33)$$

Megjegyzés: Ez semmiben sem különbözik a korábbi megfogalmazástól, csupán egy eltérő paraméter szerint, eltérő módon parametrizáljuk a függvénysereget a jobb kezelhetőség érdekében. Ezek után az egyszerűbb jelölés érdekében, bárhol ahol a POFF egy paramétere hiányzik egy egyenletben, az azt fogja jelölni, hogy az egyenletnek a hiányzó paraméter tetszőleges értéke esetén teljesülnie kell.

$\ddot{p}_f^s$ -nek az **(F1)** feltétel mellett minden lehetséges paraméter esetén ki kell elégítenie az alábbi egyenletet is:

$$(\mathbf{F2}) \int_{V_{domain}} \ddot{p}_f^s(\bar{\alpha}, threshold_1) dV = \int_{V_{domain}} \ddot{p}_f^s(\bar{\alpha}, threshold_2) dV = V_0 \cdot f \quad (34)$$

akkor és csakis akkor, ha $threshold_1 = threshold_2$ és $0 < threshold_2 < 1$,

azaz egy és csakis egy *threshold* érték létezik a dimenziótalan optimált változó értékkészletén, amire a térfogatra vonatkozó feltétel teljesíthető. Ez a feltétel fogja biztosítani a megoldás egyértelműségét, ami programozási oldalról kívánatos.

A továbbiakban a maximálásra (azaz az korábban definiált érzékenységi számok maximálására) vonatkozó megfogalmazás kerül ismertetésre. A következő kiegészítő feltételeket definiáljuk:

$$(F3) \quad \ddot{\rho}_f^s(\bar{\alpha} = 0) = 0 \quad (35)$$

$$(F4) \quad \ddot{\rho}_f^s(\bar{\alpha} = 1) = 1 \quad (36)$$

$$(F5) \quad 0 \leq \frac{d\ddot{\rho}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha} = 0) \ll 1 \quad (37)$$

$$(F6) \quad 0 \leq \frac{d\ddot{\rho}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha} = 1) \ll 1 \quad (38)$$

$$(F7) \quad \ddot{\rho}_f^s(\bar{\alpha}_1) > \ddot{\rho}_f^s(\bar{\alpha}_2) \text{ akkor és csakis akkor ha } \bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2 \quad (39)$$

Bár (F5), (F6) feltételek helyett eltérő feltételeket is választhattunk volna, de ez sokkal reálisabb és logikusabb viselkedést eredményez a folyadékszerű viselkedéshez. Végül annak érdekében, hogy megfelelően szabályozható legyen az eljárás, bevezetésre kerül a CPOFF (Controllable Possible Optimization Fuzzy Functions), azaz a Vezérelhető Lehetséges Optimalási Fuzzy Függvények halmaza, mely kiegészül a *threshold* mellett egy további β paraméterrel, mely a függvény meredekségét fogja meghatározni *threshold* környezetében. A CPOFF függvényseregnek a korábban megfogalmazott (F1), (F2), (F3), (F4), (F5), (F6), (F7) feltételek mellett teljesítenie kell

$$(F8) \quad \frac{d\ddot{\rho}_f^s(\bar{\alpha}=\text{threshold}_1, \text{threshold}_1, \beta_1)}{d\bar{\alpha}} > \frac{d\ddot{\rho}_f^s(\bar{\alpha}=\text{threshold}_1, \text{threshold}_1, \beta_2)}{d\bar{\alpha}} \quad \text{akkor és csakis akkor ha } \beta_1 > \beta_2. \quad (40)$$

(A megoldás egyértelműségének érdekében.)

5. Javasolt CPOFF függvények

A korábban megfogalmazott **(F1-8)** feltételek mellett további alfeltételeket is meghatározhatunk, amelynek segítségével különböző tulajdonságú, más-más célra alkalmas függvényhalmazokat származtathatunk. A következőekben ilyen függvények kerülnek ismertetésre.

Inverz hatványfüggvény (Inverse-power function; rövidítve: inv.pow.):

Ez a függvény az alábbi alfeltételeket elégíti ki:

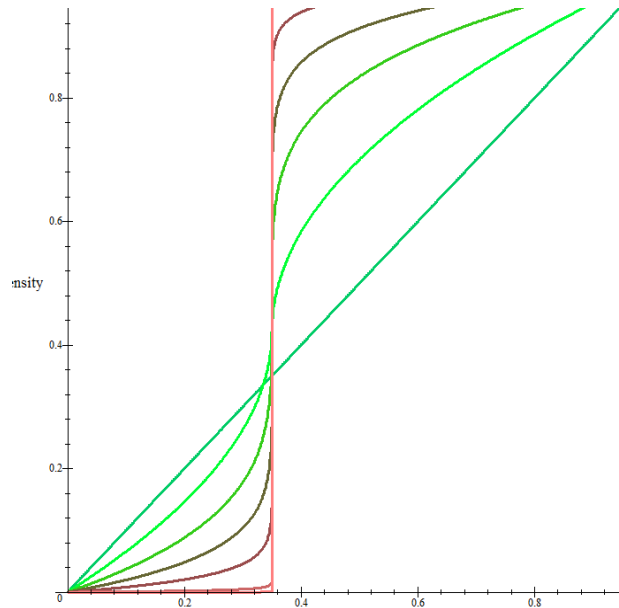
$$(F9) \quad \frac{d\ddot{p}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}_1 = \text{Threshold}) > \frac{d\ddot{p}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}_2 \neq \text{Threshold}) \quad (41)$$

$$(F10) \quad \frac{d\ddot{p}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha} = \text{Threshold}) = \infty, \text{ ha } \beta > 1.0 \quad (42)$$

Egy megfelelő alak az alábbiak szerint fogalmazható meg: (43)

$$\ddot{p}_{f \text{ inv.pow.}}^s(\bar{\alpha}, \text{Threshold}, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{(\text{Threshold})^{(1/\beta)} + (1 - \text{Threshold})^{(1/\beta)}} \left(-(\text{Threshold} - \bar{\alpha})^{(1-\text{Threshold})^{(1/\beta)}} + \text{Threshold}^{(1-\text{Threshold})^{(1/\beta)}} \right), & \text{ha } 0 \leq \bar{\alpha} < \text{Threshold} \\ \frac{1}{(\text{Threshold})^{(1/\beta)} + (1 - \text{Threshold})^{(1/\beta)}} \left(1 + \text{Threshold}^{(1-\text{Threshold})^{(1/\beta)}} \right), & \text{ha } \bar{\alpha} = \text{Threshold} \\ \frac{1}{(\text{Threshold})^{(1/\beta)} + (1 - \text{Threshold})^{(1/\beta)}} \left((\bar{\alpha} - \text{Threshold})^{(1-\text{Threshold})^{(1/\beta)}} + \text{Threshold}^{(1-\text{Threshold})^{(1/\beta)}} \right), & \text{ha } 1 \geq \bar{\alpha} > \text{Threshold} \end{cases}$$

A függvény folytonos a teljes értelmezési tartományán $([0,1])$, és az első derivált értéke is folytonos az $\bar{\alpha} = \text{Threshold}$ érték kivételével, ahol az értéke végtelen.



3. ábra

Inverz hatványfüggvény: $\beta = 1, 2, 4, 8, 20, 200, 10000$; $\text{Threshold} = 0.35$

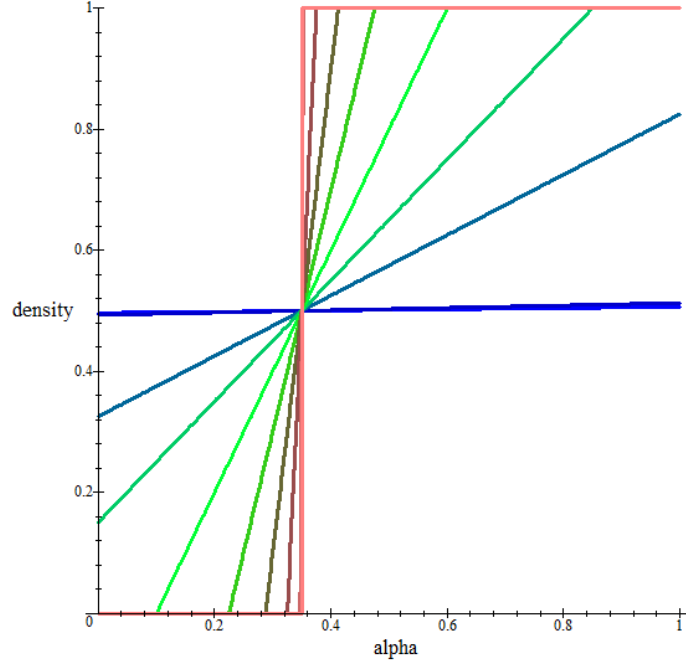
Szakaszosan lineáris fuzzyfikáló függvény (Piecewise linear fuzzyfication function, röviden: pcw.lin.):

Ez a függvény az alábbi alfeltételeket elégíti ki:

$$(F9) \quad \frac{d\ddot{p}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}_1 = \text{Threshold}) = \text{konst.} \quad (44)$$

Egy megfelelő alak az alábbiak szerint fogalmazható meg:

$$\ddot{p}_{f_{pcw.lin.}}^s(\bar{\alpha}, Threshold, \beta) = \begin{cases} 0 & , ha 0 \leq \bar{\alpha} < Threshold - \frac{1}{2\beta} \\ \beta(\bar{\alpha} - Threshold) + 0.5 & , ha Threshold - \frac{1}{2\beta} < \bar{\alpha} < Threshold + \frac{1}{2\beta} \\ 1 & , ha 1 \geq \bar{\alpha} > Threshold + \frac{1}{2\beta} \end{cases} \quad (45)$$



4. ábra

Szakaszosan lineáris fuzzyfikáló függvény: $\beta = 1, 2, 4, 8, 20, 200, 10000$; $threshold = 0.35$

A függvény folytonos a teljes értelmezési tartományán $([0,1])$, de az első deriváltjának szakadása van az $\bar{\alpha} = Threshold - \frac{1}{2\beta}$ és $\bar{\alpha} = Threshold + \frac{1}{2\beta}$ pontban.

Gauss-eloszlású fuzzyfikáló függvény:

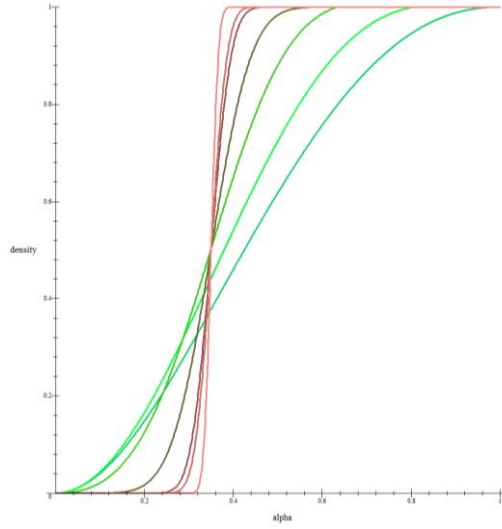
Ez a függvény az alábbi alfeltételeket elégíti ki:

$$(F9) \quad \frac{d\ddot{p}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha} = 0) = 0 \quad (46)$$

$$(F10) \quad \frac{d\ddot{p}_f^s}{d\bar{\alpha}}(\bar{\alpha} = 1) = 0 \quad (47)$$

$$\ddot{p}_{f_{gab.}}^s(\bar{\alpha}, th, \beta) = \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{\beta \cdot (e^{-\beta^2(x-th)^2} - e^{-\beta^2 th^2}) - \frac{sgn(x-th) + 1}{2} \cdot \frac{(x-th)^2}{(1-th)^2} \cdot \beta(e^{-\beta^2(1-th)^2} - e^{-\beta^2 th^2})}{\int_0^1 \left(\beta \cdot (e^{-\beta^2(x-th)^2} - e^{-\beta^2 th^2}) - \frac{sgn(x-th) + 1}{2} \cdot \frac{(x-th)^2}{(1-th)^2} \cdot \beta(e^{-\beta^2(1-th)^2} - e^{-\beta^2 th^2}) \right) dx} dx \quad (48)$$

Megjegyzés: Ez a függvény zárt alakban nem állítható elő, kiértékelését numerikusan vagy beprogramozott táblázatok kell elvégezni. A függvény folytonos a teljes értelmezési tartományán $([0,1])$, akárcsak első deriváltja.

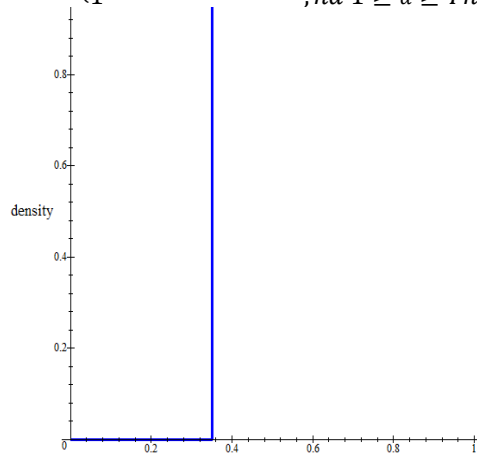


5. ábra

Gauss-eloszlású fuzzyfikáló függvény: $\beta = 0.05, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 25, 55$; $threshold = 0.35$

Diszkrét lineáris fuzzyfikáló függvény (rövidítve: dis.):

$$\ddot{\rho}_{f_{dis.}}^s(\bar{\alpha}, Threshold, \beta) = \begin{cases} 0 & , ha 0 \leq \bar{\alpha} < Threshold \\ 1 & , ha 1 \geq \bar{\alpha} \geq Threshold \end{cases} \quad (49)$$



6. ábra

Diszkrét lineáris fuzzyfikáló függvény: $threshold = 0.35$

A függvény folytonos a teljes értelmezési tartományán ($[0,1]$), de az első deriváltjának szakadása van az $\bar{\alpha} = Threshold$ pontban.

Erre a függvényre a β paraméter nincs hatással, így tulajdonképpen ez egy POFF csak.

A teljesség igénye nélkül belátható azonban, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ddot{\rho}_{f_{inv.pow.}}^s(\bar{\alpha}, Threshold, \beta) \right) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ddot{\rho}_{f_{gdb.}}^s(\bar{\alpha}, Threshold, \beta) \right) = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ddot{\rho}_{f_{pcw.lin.}}^s(\bar{\alpha}, Threshold, \beta) \right) = \ddot{\rho}_{f_{dis.}}^s(\bar{\alpha}, Threshold) \end{aligned} \quad (50)$$

azaz az új modell határesetben a diszkrét értékekkel dolgozó BESO eljárást adja vissza, így a BESO eljárás az új eljárás egy határesetének tekinthető.

6. Az algoritmus menete

Bár az optimalizálás algoritmusai már jól átlátható és megérthető, de a teljesség érdekében még mindig hátra van a teljes folyamat ismertetése. A jobb konvergencia és hálófüggetlenség érdekében a szakirodalomban már elterjedt szűrők közül többet is felhasználunk.

Az algoritmus teljes menete az alábbiak szerint foglalható össze:

0a. lépés: Probléma meghatározása (terhelések, megfogások, térfogathányad definiálása).

0b. lépés: Véges-elemes modell legelső megoldása.

1. lépés: Elemek érzékenységeinek számítása **(18)** egyenlet alapján.

2. lépés: Hálófüggetlenségi szűrő alkalmazása. **[3,5,7,8]**:

A QSQF algoritmus tényleges végrehajtása előtt érdemes elvégezni a hálófüggetlenségi szűrést, ami biztosítja (vagy inkább elősegíti), hogy két különböző felbontású végeselem háló esetén ne két különböző megoldást kapjunk. Ezen szűrők alkalmazása nem igényel különösebb kutatást és elemzést, mivel a szakirodalom már évek óta (sikerrel) alkalmazza, ezért egy új eljárás kifejlesztése helyett itt is ezek alkalmazása került előtérbe. Bár a hálófüggetlenségi szűrőknek több változata is létezik (mint **(51)** **[7]** vagy **(53)** **[3]**), de az alábbi algoritmusban a BESO eljárásban is alkalmazott **(51)** szűrő került alkalmazásra:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^K w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^K w(r_{ij})}, \quad (51)$$

ahol a súlyok

$$w(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, K), \quad (52)$$

ahol α_j^n a számított érzékenységi számok, α_i a szűrt értékek, $w(r_{ij})$ a súlyok a szűrés során, r_{ij} az i. és j. cella távolsága, r_{min} a szűrő sugara. A súlyozást csak az i. elem körüli, r_{min} sugarú tartományban kell elvégezni.

A teljesség kedvéért a SIMP által alkalmazott szűrés **[5,6]** (bár általában egy másik jelöléssel):

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^K x_i w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^K x_i w(r_{ij})}, \quad (53)$$

ahol a súlyok

$$w(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, K), \quad (54)$$

A tesztek során az **(51)** szűrő sikeresen volt alkalmazva, az **(53)** szűrő tesztelése még mindig hátravan.

3. lépés: Érzékenységi számok simítása az előzmények alapján. **[3]**

$$\alpha^{new} = H_s \alpha + (1 - H_s) \alpha^{old}, \quad (55)$$

ahol H_s a stabilizációs szűrő értéke. Azaz az új érzékenységi számok az előző lépésben, és az új, számított értékek súlyozott átlaga lesz.

Ez a szűrő a BESO eljárás esetén $H_s = 0.5$ értékkel kerül alkalmazásra **[8]**.

4. lépés: *threshold* paraméter meghatározása (pl. intervallumfelezési eljárással) – QSQF ciklus.

5. lépés: Új sűrűségek számítása – optimált változó értékeinek frissítése.

6. lépés: Sűrűség tompítási séma alkalmazása (ld. **(22)**). Ez akadályozza meg a túlzott, hirtelen gyors változásokat az optimalizálás folyamán.

6./2.* lépés: Az össz-sűrűség növekedés korlátozásán alapuló AR_{max} értékét felhasználó eljárás alkalmazása 4-5-6. lépés helyett.

Bár a tesztek során alkalmazott sűrűségkompítási eljárás hibátlanul működött, ennek ellenére javaslat szintjén ismertetésre kerül egy másik módszer is, ami nem csak globálisan, de lokálisan is kontrollálni tudja a folyadék-közeg mozgását. Az alapötlet az, hogy a folyadékközeg összes tartományának nem kell mozognia az egyes lépések között, csak amelyekre megfelelően nagy hajtóerő hat.

Ezért (a BESO eljáráshoz hasonlóan) bevezetünk egy kiegészítő AR_{max} kritériumot annak érdekében, hogy maximáljuk az össz-sűrűségnövekedést a teljes folyadékközegben. CFD szimulációkban is előfordul hasonló kritérium, ugyanis ha a folyadék túl gyorsan változik, akkor csökkenteni kell az időlépcső értékét a pontosság növelése érdekében. Bár itt nincs közvetlenül időlépcső definiálva, de az alábbi eljárás ahhoz hasonló lesz eredményét tekintve.

Egyetlen cella nyomásnövekedése – az egységugrás-függvény egy módosított alakját használva:

$$d\rho_{inc} = \frac{(\rho^{new} - \rho^{new}) + |\rho^{new} - \rho^{new}|}{2} dV, \quad (56)$$

így az össz-sűrűségnövekedés

$$\rho_{inc} = \int \frac{(\rho^{new} - \rho^{new}) + |\rho^{new} - \rho^{new}|}{2} dV, \quad (57)$$

Amennyiben a sűrűségek frissítése folyamán a

$$\rho_{inc} > AR_{max} V \quad (58)$$

feltételt megsérti a program, akkor a *threshold* paraméter helyett egy $threshold_{inc}$ paramétert definiálunk, amelyre a feltétel nem kerül megsértésre, és ennek megfelelően frissítjük a sűrűségeket.

A következő lépésben ezek után definiálunk egy $threshold_{dec}$ paramétert, amire a térfogatra vonatkozó előírás teljesül, amennyiben csak azokat a sűrűségeket frissítjük, amelyek csökkennének.

Ez a megfogalmazás egyben megfelel a következő viselkedésnek is: amennyiben meghatározunk egy kvázi átlagnyomást, akkor csak azok a folyadéktartományok lesznek képesek a mozgásra, amelyekre elegendő hajtóerő hat, azaz a nyomáskülönbség meghalad egy meghatározott értéket. Ahol a nyomáskülönbség kicsi, ott nem történik változás. Ez a definíció, ha nem is egyezik meg, de hasonlít a Bingham-közeg viselkedésére (bár ott nem a nyomáskülönbség, hanem a nyíróerő a meghatározó érték).

Megjegyzés: Teljesen diszkrét esetben ($\beta = \infty$), ez a definíció megegyezik a BESO eljárásnál is alkalmazott AR_{max} paraméter szerepével (azaz az ösztérfogat százalékában kifejezett azon elemek számával, amelyeket a $0/x_{min}$ -ről 1-re állíthatunk egyetlen lépésben)

7. lépés: Véges-elemes feladat megoldása ((3) egyenlet).

8. lépés: A térfogathányadra vonatkozó előírás fokozatos közelítése.

$$V^{k+1} = \max \left(V_{fin}, V^k \left(1 - \frac{ER}{100} \right) \right), \quad (59)$$

ahol $V_{fin} = f \cdot V_0$ az elérni kívánt térfogathányad, ER az evolúciós ráta.

Bár az előírt térfogat közvetlenül, egyetlen lépésben is bekapcsolható lenne az algoritmus megfelelő paraméterezése esetén, de egy lépcsőzetes előrehaladás jelentősen növeli a konvergenciát a BESO eljárás esetén is (ER_{max}).

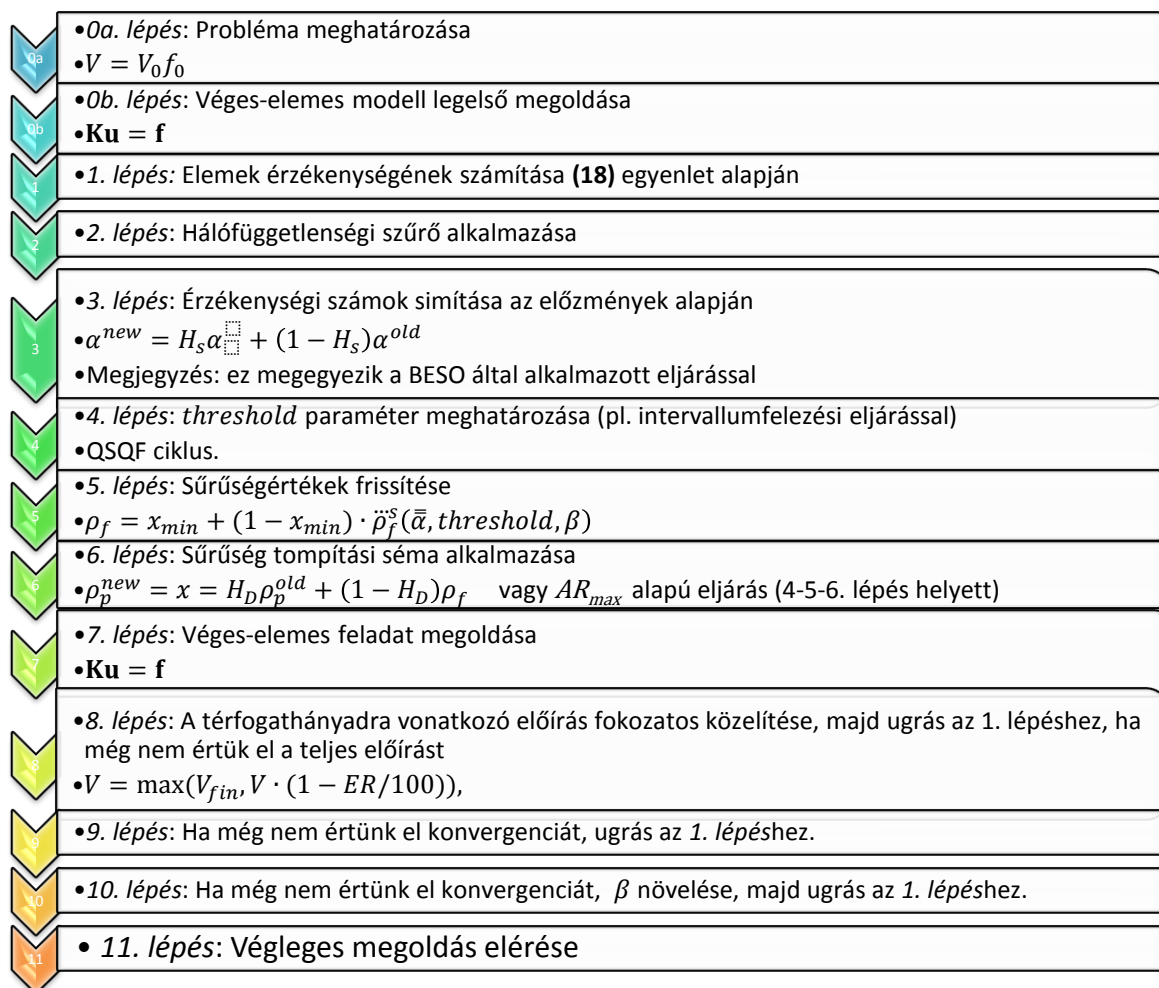
9. lépés: Ha még nem értünk el konvergenciát, ugrás az 1. lépéshez.

10. lépés: Ha még nem értünk el konvergenciát, β növelése, majd ugrás az 1. lépéshez.

Megjegyzés: β növelése megoldható lenne a 8. és 9. lépés között is, ez csak implementáció kérdése.

11. lépés: Végleges megoldás elérése. (50) alapján könnyen belátható, hogy az algoritmus határesetben a BESO-t adja vissza.

A folyamatábra összefoglalva a **7. ábrán** található meg:



7. ábra
 Javasolt folyamatábra QSQF optimalizálásra

7. Rácsos tartó tervezése

Az alábbiakban bemutatásra kerül a korábbi eljárások – SIMP és BESO – eredményeinek összehasonlítása az új eljárás által szolgáltatott eredményekkel néhány klasszikus, rácsos tartó optimalizációs feladatán keresztül.

A véges-elem modell prekondicionált konjugált gradiens módszerrel került megoldásra minden esetben, az előírt reziduális hiba 10^{-6} - 10^{-10} között került meghatározásra feladattól függően. Az eredmények egy hajlított tartó (2/3D) mintáján keresztül (sikeresen) összehasonlításra is kerültek az ADINA R&D Inc. ADINA® nevű véges-elemes szoftverével is.

A megoldás keresése során – a biztos konvergencia érdekében – minden esetben 200 iteráció lett lefuttatva. A zárójelben szereplő érték pedig azt jelenti, hogy az optimált változó mikor ért (és maradt végleg) a legutolsó eredmény $\pm 1\%$ -os környezetében.

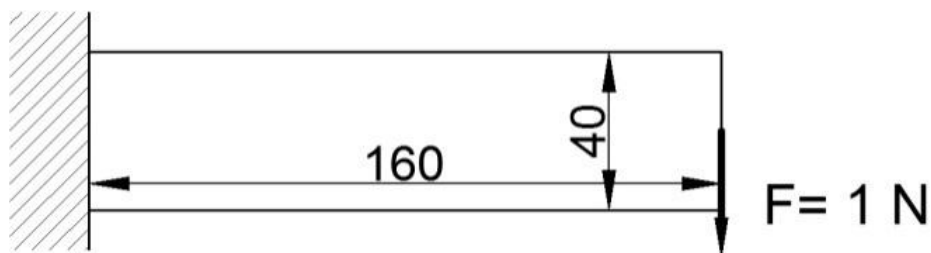
7.1 Egyik végén befalazott, másik végén hajlított rácsos tartó

Mivel a lineáris rugalmasságtan keretein belül – ahol dolgozunk – a kialakuló szerkezet független a Young-modulustól, ezért a szakirodalomban – a könnyű összehasonlíthatóság érdekében gyakran alkalmaznak kis szilárdságú, de kerek számokkal kifejezhető szilárdságú anyagokat és terheléseket.

Ennek megfelelően itt is $E = 1 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$ anyagú, $160 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ méretű, 160×40 véges-elem hálóval diszkretizált hálót alkalmazunk, a terhelés pedig $F = -1 \text{ N}$, az előírt térfogathányad pedig $V_0 = 0.5$, végül $x_{\min} = 0.001$, $r_{\min} = 3.0 \text{ mm}$.

A SIMP és soft-kill BESO esetén számított értékek megegyeznek [3]-ban szereplő értékekkel. A feladat, illetve az egyes eredmények a 7-8-9-10-11-12-13. ábrákon találhatóak meg. Érdekes megfigyelni, hogy – ha bár csak kis mértékben, $0,55\%$ -kal – de az új optimalizációs eljárás egy esetben egy eltérő topológiájú, de alacsonyabb „compliance”-t képviselő megoldást adott vissza, ráadásul kisebb iteráció-számmal, ami pozitív kilátásokat támaszt az algoritmus hasznosságát illetően.

Megjegyzés: A SIMP esetében az átmeneti sűrűségeket is tartalmazó megoldás miatt magasabb jelentősen az optimált érték.



7. ábra. 2D konzolos tartó problémája



9. ábra. SIMP megoldása (201,2 Nmm; 200(32))



10. ábra. BESO megoldása (181,4 Nmm; 200(33))
ER=2,0%; AR_{max}=50,0%



11. ábra. QSQF megoldása (181,3 Nmm; 200(31), pcw.), $V_0=0,55$; ER=1,5%; $H_s=0,5$;
 $H_d=0,5$ (it.<30); $\beta=4,6,8\dots$



12. ábra. QSQF megoldása (182 Nmm; 200(52), pcw.)
 $V_0=0,55$; ER=1,5%; $H_s=0,5$; $H_d=0,5$ (it.<30); $\beta=4,5,6\dots$

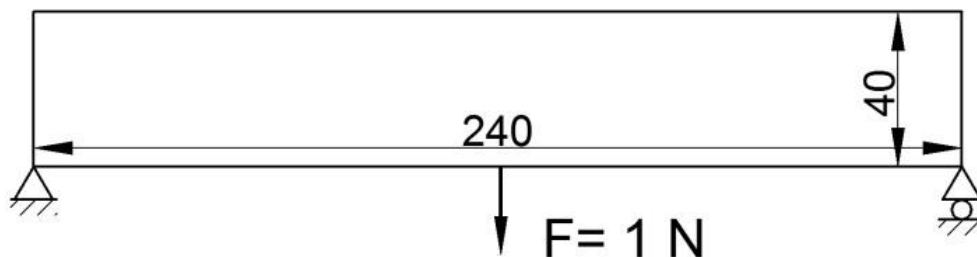


13. ábra. QSQF megoldása (184 Nmm; 200(52), inv.pow), $V_0=0,7$; ER=1,5%; $H_s=0,5$;
 $H_d=0,4$ (it.<40); $\beta=4,5,6\dots$

7.2 Hídszerkezet optimalálása

Itt $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ anyagú, $240 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ méretű, 240×40 véges-elem hálóval diszkretizált mezőt alkalmazunk, amin a terhelés $F = -100 \text{ N}$, az előírt térfogathányad pedig $V_0 = 0.5$, végül $x_{\min} = 0.001$, $r_{\min} = 6.0 \text{ mm}$. A soft-kill BESO esetén számított értékek nagyon közel állnak [3]-ban szereplő értékekkel.

A feladat, illetve az egyes eredmények a **14-15-16-17-18. ábrákon** találhatóak meg.



14. ábra. Hídszerkezet problémája



15. ábra. SIMP megoldása (2,551 Nmm; 200(30))
 $r_{\min}=3,0 \text{ mm}$



16. ábra. BESO megoldása (2,365 Nmm; 200(37))
 $ER=5\%$; $AR_{\max}=5\%$



17. ábra. QSQF megoldása (2.41 Nmm; 200(93), pcw.)
 $V_0=0,7$; $ER=5\%$; $H_s=0,5$; $H_d=0,2$ (it. < 30); $\beta=5,6...$



18. ábra. QSQF megoldása (2,38 Nmm; 200(79), inv.pow)
 $V_0=0,7$; $ER=5\%$; $H_s=0,5$; $H_d=0,4$ (it. < 40); $\beta=3,5,7...$

Érdemes megfigyelni, hogy az új eljárás a korábbiakhoz hasonló topológiát javasolt, de azoknál 1,19 ill. 0,6%-kal magasabb értékkel, és magas iteráció-számokkal. Ennek ellenére ez

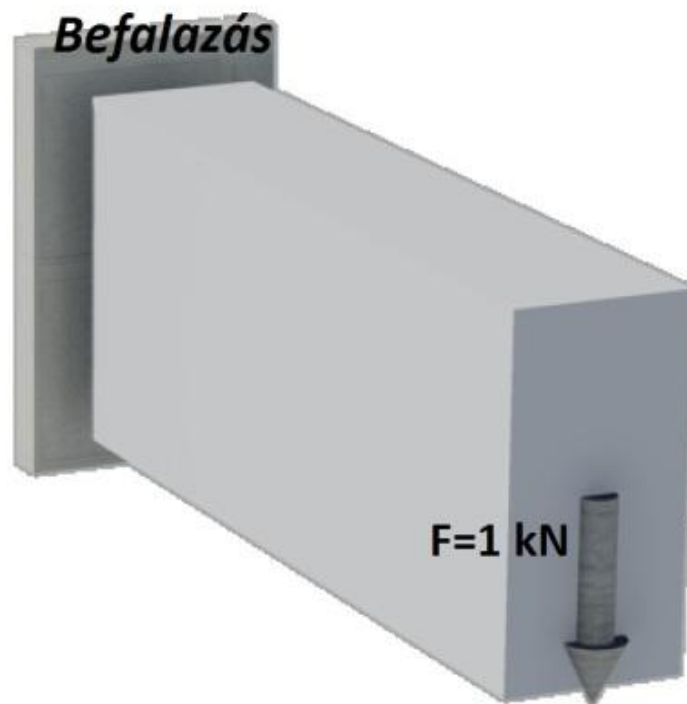
nem az algoritmus hibájának tekinthető, mint inkább a megfelelő tapasztalat hiányának a paraméterek megválasztásánál (hiszen a határesetben az algoritmus a soft-kill BESO-t adja vissza).

7.3 3D konzolos tartó

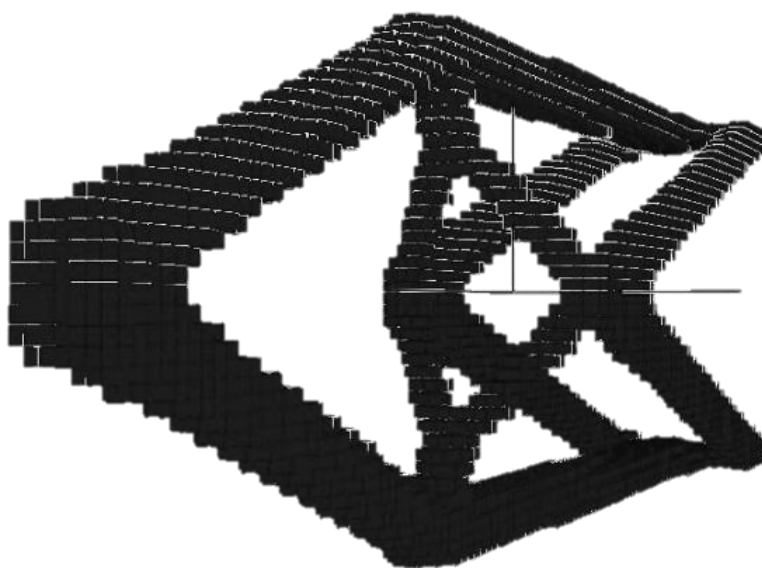
Ebben az esetben $E = 10 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ anyagú, $100 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ méretű, $100 \times 20 \times 40$ véges-elem hálóval diszkrétizált mezőt alkalmazunk, ahol a terhelés $F = -1000 \text{ N}$, az előírt térfogathányad pedig $V_0 = 0.1$, végül $r_{\min} = 3.0 \text{ mm}$. Az előző két esettel ellentétben itt a megoldás gyorsítása érdekében $x_{\min} = 0.0025$ érték került alkalmazásra.

A feladat, illetve az egyes eredmények a **19-20-21-22-23. ábrákon** találhatóak meg.

Érdekes megfigyelni, hogy az új eljárás – a 2D-hez hasonlóan – itt is tudott alternatív, emellett 1,2%-kal jobb topológiát javasolni. Annak érdekében, hogy a BESO esetében is bemutatásra kerüljön az eredmények paraméterektől való függése, itt két különbözően paraméterezett, BESO eljárással nyert megoldás is bemutatásra került.

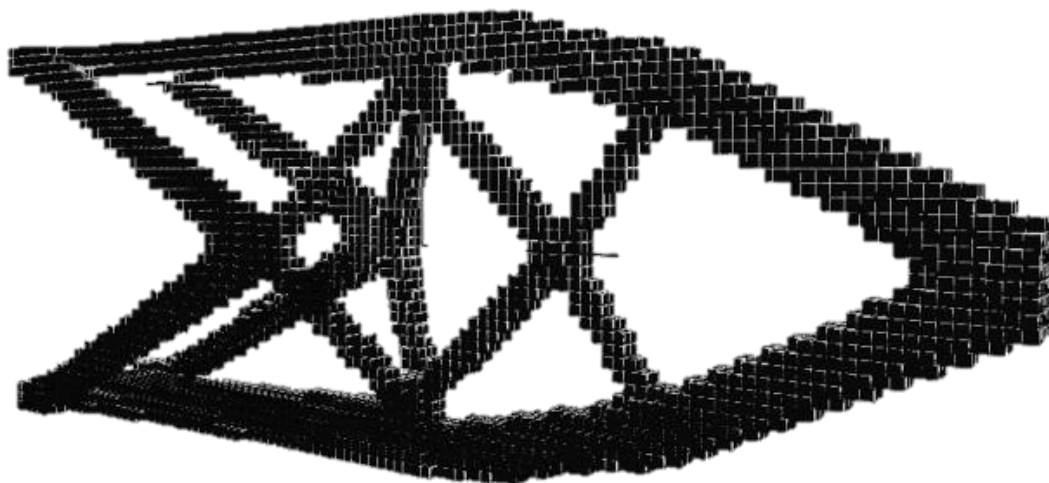


19. ábra. 3D konzolos tartó problémája

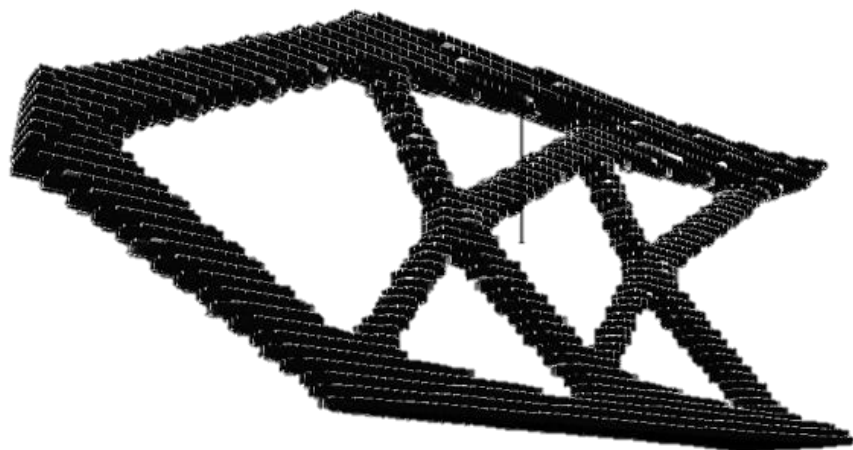


20. ábra. BESO megoldása (1272 Nmm; 200(90))
 $ER=2,5\%$; $AR_{max}=10,0\%$

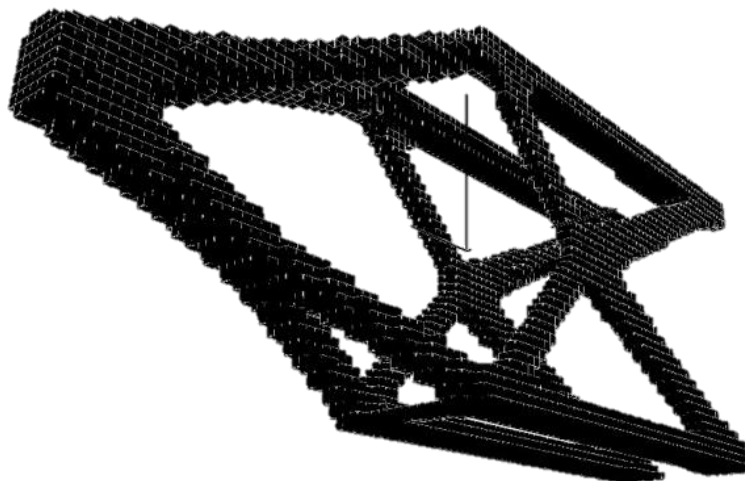
A BESO megoldása (ld. **20. ábra**) topológiaiilag megegyezik, és méreteiben is hasonló volt a SIMP eredményéhez, bár az eltérő modell miatt utóbbi magas „compliance” értéket szolgáltatott (2089,6 Nmm; 200(160)).



21. ábra. BESO megoldása (1303 Nmm; 200(168))
 $ER=3,0\%$; $AR_{max}=50,0\%$



22. ábra. QSQF megoldása (1255 Nmm; 200(144); pcw.)
 $V_0=0,3$; $ER=3,0\%$; $\beta=4,5,\dots$; $H_s=0,5$, $H_d=0,5$ (it. <140)



23. ábra. QSQF megoldása (1417 Nmm; 200; inv. pow.)
 $ER=2,5\%$; $H_s=0,55$, $H_d=0,55$ (it. <60)

A függelékben ezen eredmények mellett további eredmények is találhatóak összefoglalva.

8. Összefoglalás

A cikkben bemutatásra került eljárás – a bemutatott eredmények alapján – egy ígéretes, evolúciós alapon megvalósuló topológiai optimáló eljárás. Az új eljárás határesetben nem csak egy régi módszert ad vissza (BESO), de rendkívüli rugalmasságának hála nagy lehetőségek rejlenek benne. A folytonos, fuzzyfikációs függvényeknek hála képes átmeneti sűrűségértékekkel is dolgozni, de a β érték lassú növelésével egy BESO-szerű diszkrét megoldást is vissza tud adni.

A QSQF eljárás fő előnye azonban a nem a korábbiaktól eltérő megoldás visszaadása, hanem a megoldás eltérő útja. Mivel az algoritmus átmeneti sűrűségeket is tartalmazó megoldásokon keresztül konvergál, ezért kevésbé érzékeny kerekítési hibákra (pl. a véges-elem módszereknél gyakran alkalmazott iteratív megoldókéra), és a rudak hirtelen elvágása helyett inkább lassan és folyamatosan tünteti el azokat, ha tényleg feleslegesek.

Az iterációk folyamán általában $\beta < 5 - 10$ (a CPOFF-tól függően) értékek alkalmazása inkább nagyobb, “elmosódottabb” tartományokat adott vissza, míg $\beta > 25 - 30$ értékek már elegendőnek bizonyultak a teljesen tömör és üres tartományok szétválasztására. Bár a tesztek folyamán folyamatosan növelve voltak a β értékek, de $\beta \gg 1$ is használhatóak rögtön, ami BESO-szerű viselkedést fog eredményezni. Ebben az esetben azonban ajánlott $H_D = 0$ használata.

Bár még sok fejlesztés és tesztelés szükséges az algoritmus jobb megismeréséhez, de már a jelenlegi formájában is hatékonyan alkalmazható.

9. Köszönetnyilvánítás

A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg, valamint az Országos Tudományos Kutatási Alap OTKA T 75678 támogatásával.

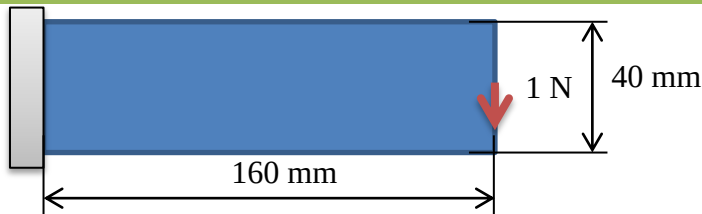
Emellett külön köszönet jár Dr. Jármay Károlynak a tanulmány elkészítése során nyújtott támogatásáért.

10. Irodalomjegyzék

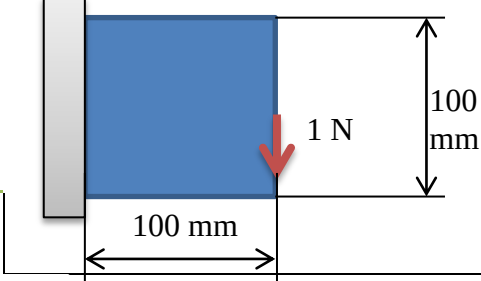
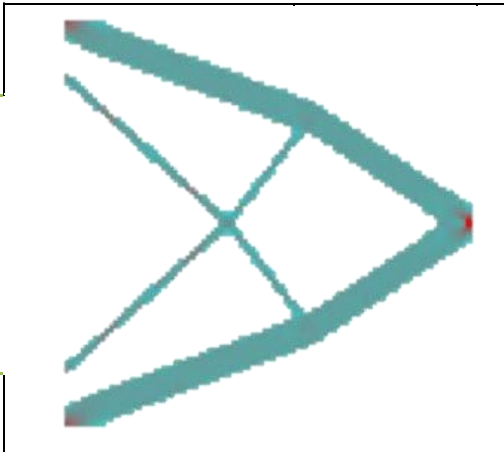
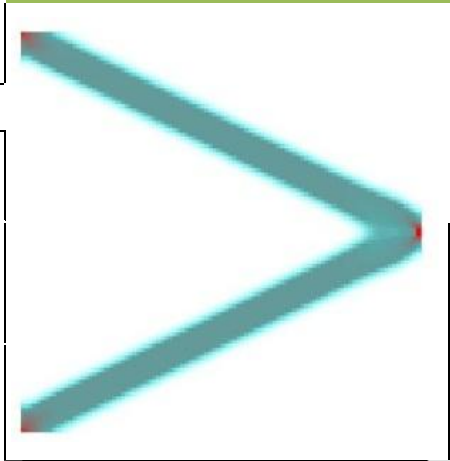
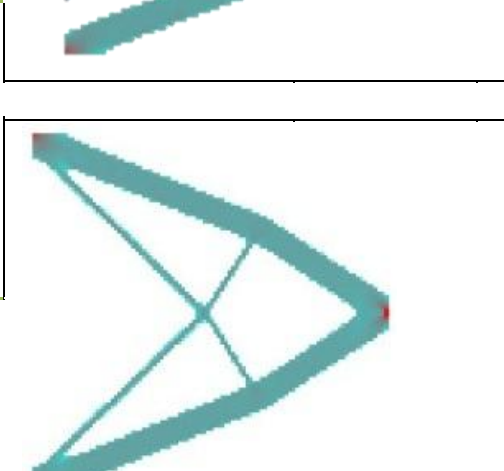
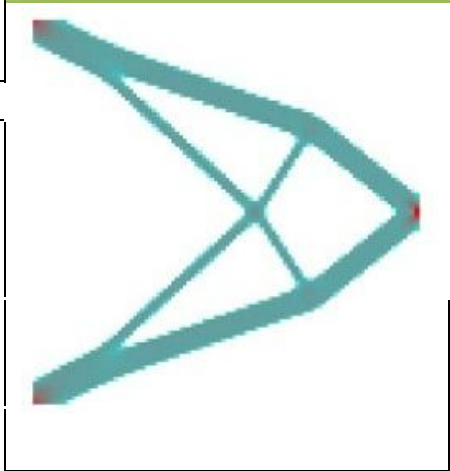
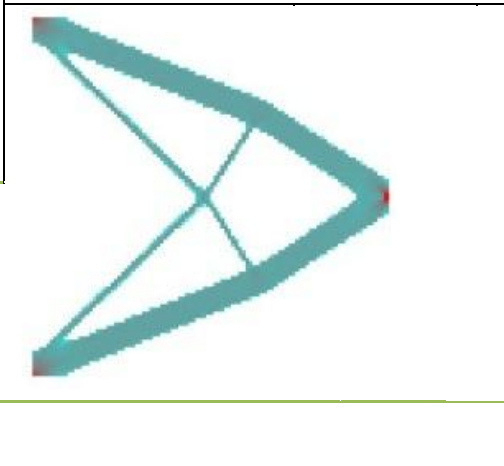
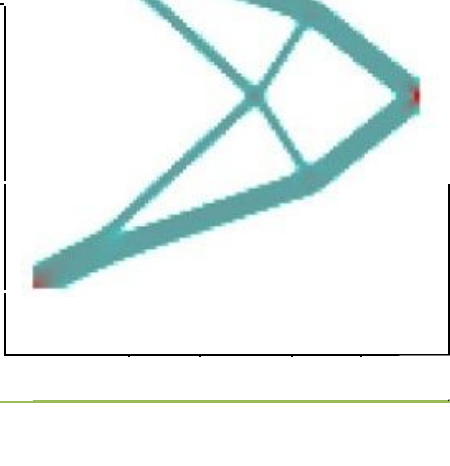
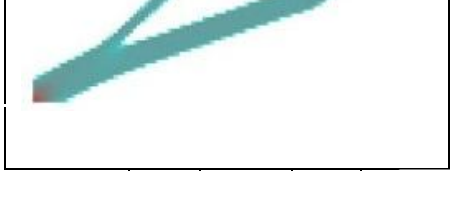
- [1] Zhou, M., Rozvany, G. I., N.: On the validity of ESO type methods in topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization, Volume 21, Number 1, 80-83, 2001.
- [2] Querin, O.M., Steven G.P., Xie, Y. M.: Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm. Engineering Computations, Volume 15, Number 8, 1031-1048. 1998.
- [3] Huang, X., Xie, Y. M.: Evolutionary Topology Optimization of continuum Structures – Methods and Applications. Wiley, 2010.
- [4] Zhou, M., Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II: Topological, geometry and generalized shape optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89. 1991
- [5] Sigmund, O.: A 99 line topology optimization code written in Matlab. Structural and Multidisciplinary Optimization. Volume 21, Number 2, 120-127. 2001
- [6] Bendshoe, M. P., Sigmund, O.: Topology Optimization – Theory, Methods and Applications. Springer, 1995.
- [7] Sigmund, O., Petersson, J.: Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh independencies, and local minima. Structural and Multidisciplinary Optimization, Volume 16, Number 1, 68-75. 1998.
- [8] Huang, X., Xie, Y.M.: Convergent and mesh independent solutions for bi-directional evolutionary structural optimization method. Finite Elements in Analysis and Design, Volume 43, Number 14, 1039-1049. 2007.

Függelék

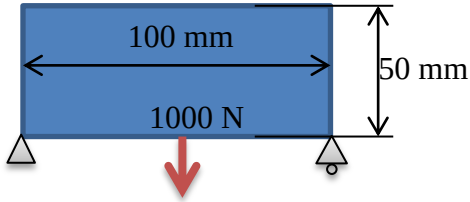
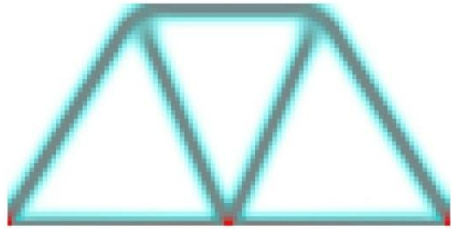
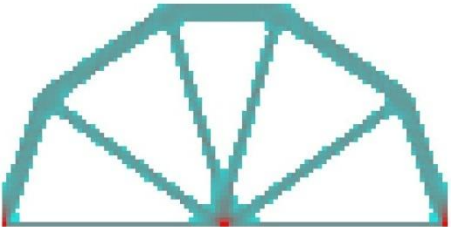
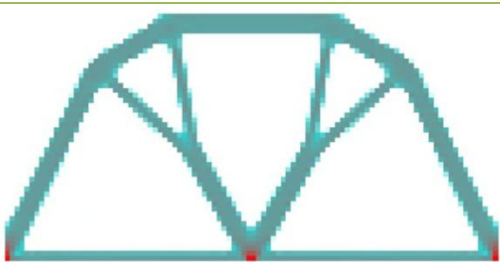
1. eset: Konvergenciafeltétel: $C_{it.szám} = C_{200} \pm 1\%$

	Paraméterek	It. szám:	Feladat/Eredmények	Compliance
Feladat	$F = -1 \text{ N}$ $E = 1 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$ $160\text{mm} \times 40 \text{ mm}$ 50% térf.hányad	-		
SIMP (&OC)	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $x_{min} = 0.001$	200 (32)		201.2 Nmm
Soft-kill BESO	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2.0 \%$ $AR_{max} = 50.0 \%$ $x_{min} = 0.001$	200 (33)		181.4 Nmm
QSQF	$V_0 = 0.55$ $p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 1.5 \%$ $x_{min} = 0.001$ $H_s = 0.5$ $H_d = 0.5 \text{ (it. < 30)}$ pcw.lin	200 (31)		$\beta = 4,6,8 \dots$ 181.3 Nmm
		200 (52)		$\beta = 4,5,6 \dots$ 182 Nmm
QSQF	$V_0 = 0.7, ER = 1.5 \%$ $p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $x_{min} = 0.001$ $H_s = 0.5$ $H_d = 0.4 \text{ (it. < 45)}$ inv.pow: $\beta = 4,5, \dots$	200 (124)		184.0 Nmm

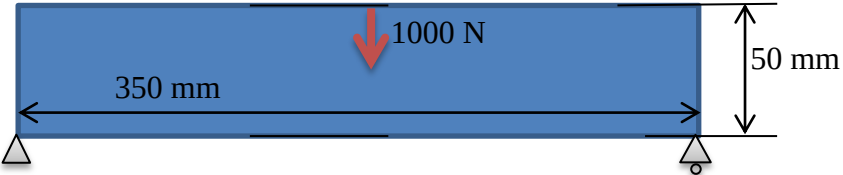
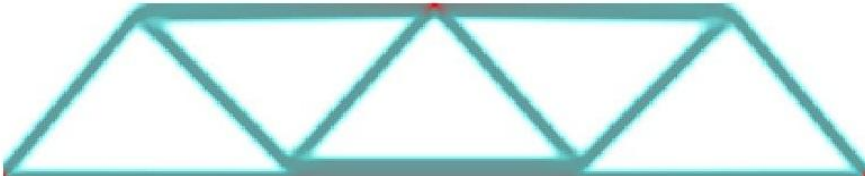
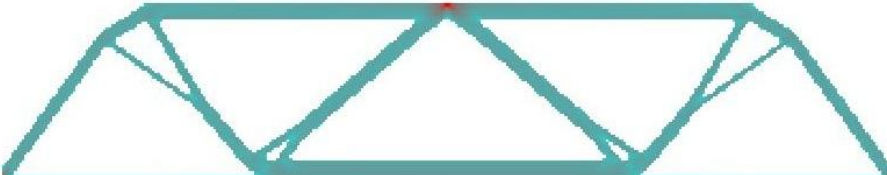
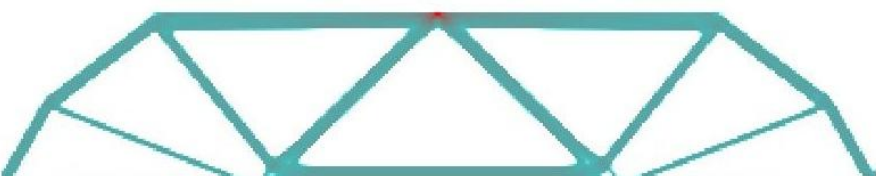
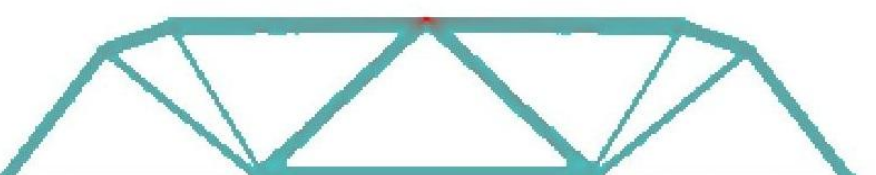
2. eset: $C_{it} \approx C_{it-1} \pm 0.5\%$ és állandósult topológia

	Paraméterek	It. szám:	Feladat/Eredmények		
Feladat	$F = 100 \text{ N}$ $E = 1 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$ $100\text{mm} \times 100 \text{ mm}$ 20% térf.hányad	-			
SIMP (&OC)	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $x_{min} = 0.0025$	(54)			191.3 Nmm
Soft-kill BESO	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 1.5 \%$ $AR_{max} = 3.0 \%$ $x_{min} = 0.0025$	(97)			171.05 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 1.5 \%$ $x_{min} = 0.0025$ $H_d = H_s = 0.55$ pcw.lin.	(100)			173.6 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 1.5 \%$ $x_{min} = 0.0025$ inv.pow. $\beta = 4,5, \dots$	(179)			177.1 Nmm

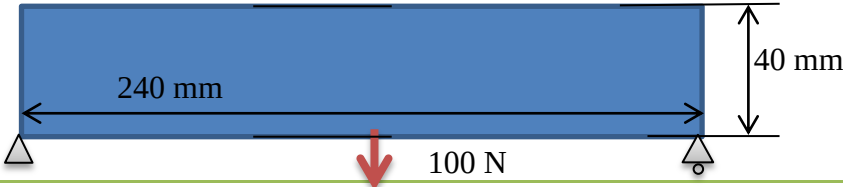
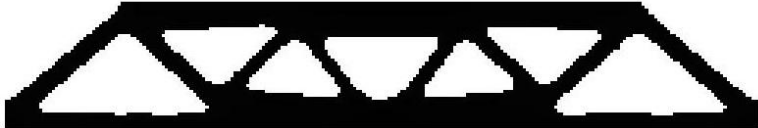
Case 3: $C_{it} \approx C_{it-1} \pm 0.5\%$ és állandósult topológia

	Paraméterek	It. szám:	Feladat/Eredmények	Compliance
Feladat	$F = 1000 \text{ N}$ $E = 100 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $100\text{mm} \times 50 \text{ mm}$ 25% térf.hányad	-		
SIMP (&OC)	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $x_{min} = 0.0025$	(120)		176 Nmm
Soft-kill BESO	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2 \%$ $AR_{max} = 5.0 \%$ $x_{min} = 0.0025$	(100)		126.3 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 1.5 \%$ $x_{min} = 0.0025$ $H_d = H_s = 0.55$ pcw.lin.	(100)		133 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2\%$ $H_d = H_s = 0.6$ $x_{min} = 0.0025$ pcw.lin	(120)		129.3 Nmm

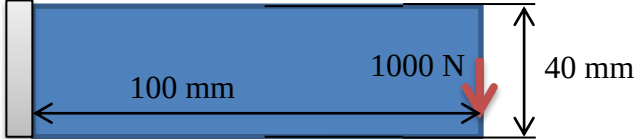
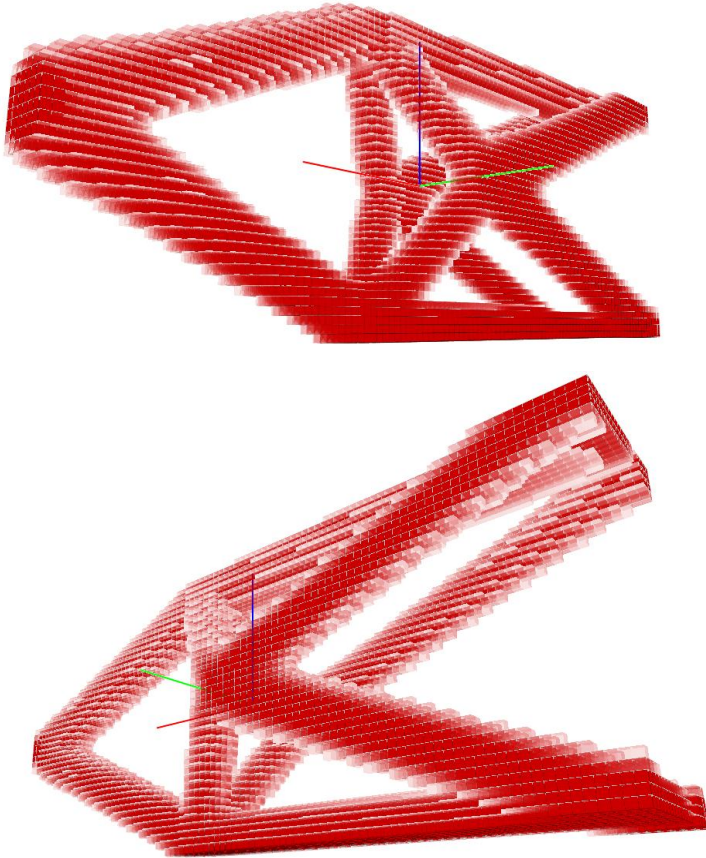
4. eset: $C_{it} \approx C_{it-1} \pm 0.5\%$ és állandósult topológia

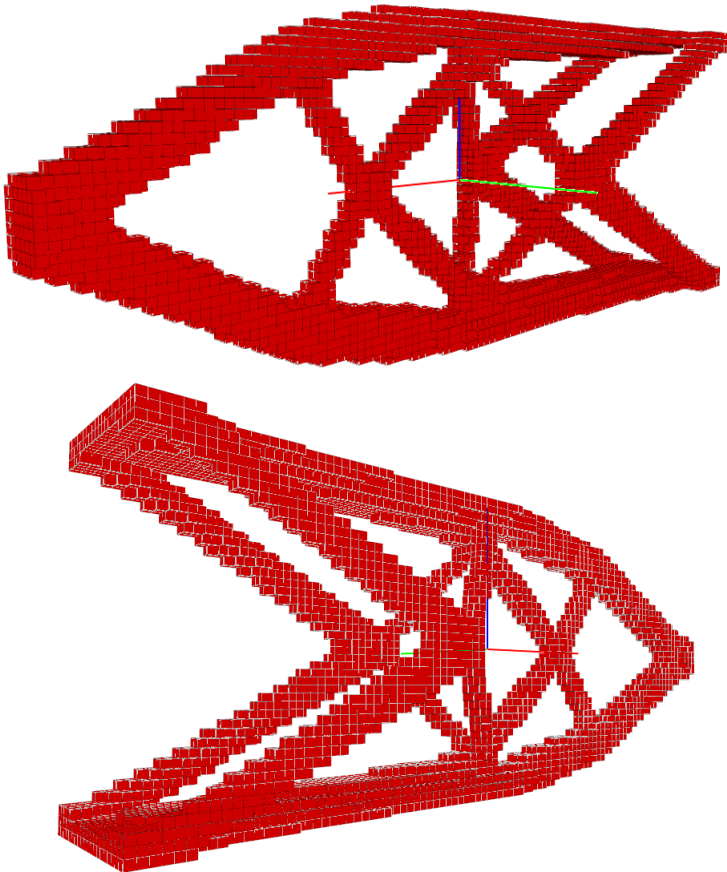
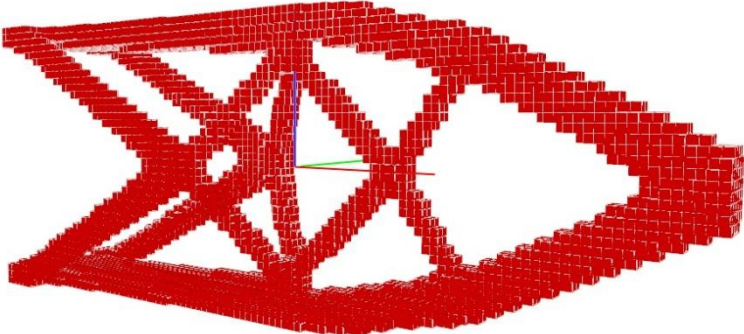
	Paraméterek	It. szám:	Feladat/Eredmények	Compliance
Feladat	$F = 1 \text{ N}$ $E = 1 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$ $350\text{mm} \times 50 \text{ mm}$ 25% térf.hányad	-		
SIMP (&OC)	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $x_{min} = 0.0025$	(110)		657 Nmm
Soft-kill BESO	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2 \%$ $AR_{max} = 5.0 \%$ $x_{min} = 0.0025$	(100)		571.2 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2 \%$ $x_{min} = 0.0025$ $H_d = H_s = 0.55$ pcw.lin.	(145)		571.8 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2\%$ $H_d = H_s = 0.6$ $H_d = 0.0$ (60. iteráció után) $x_{min} = 0.0025$ inv.pow. $\beta = 4,5, \dots$	(121)		582 Nmm

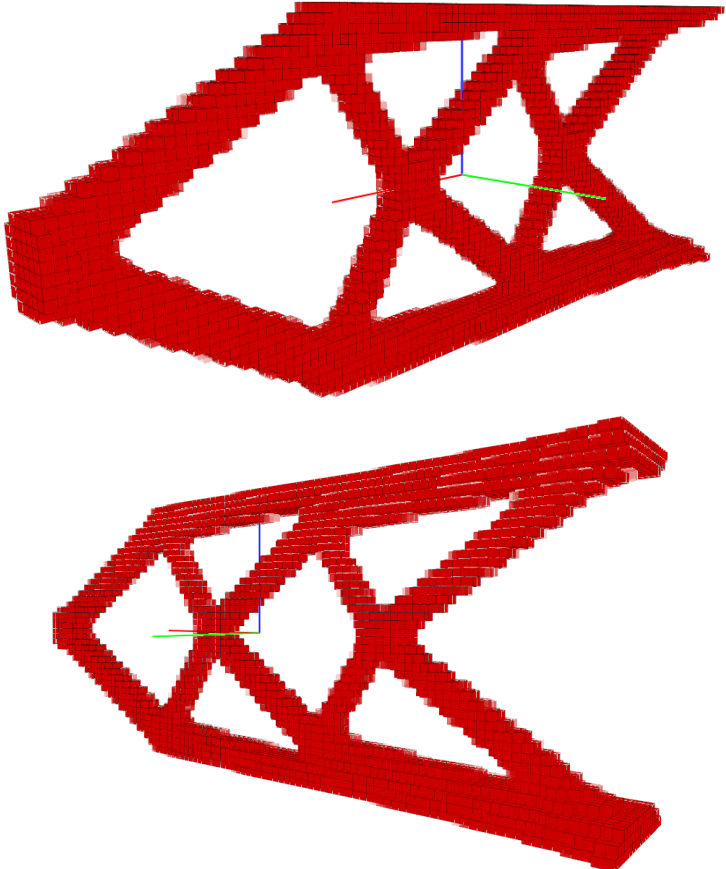
4b. eset: Konvergenciafeltétel: $C_{it.szám} = C_{200} \pm 1\%$

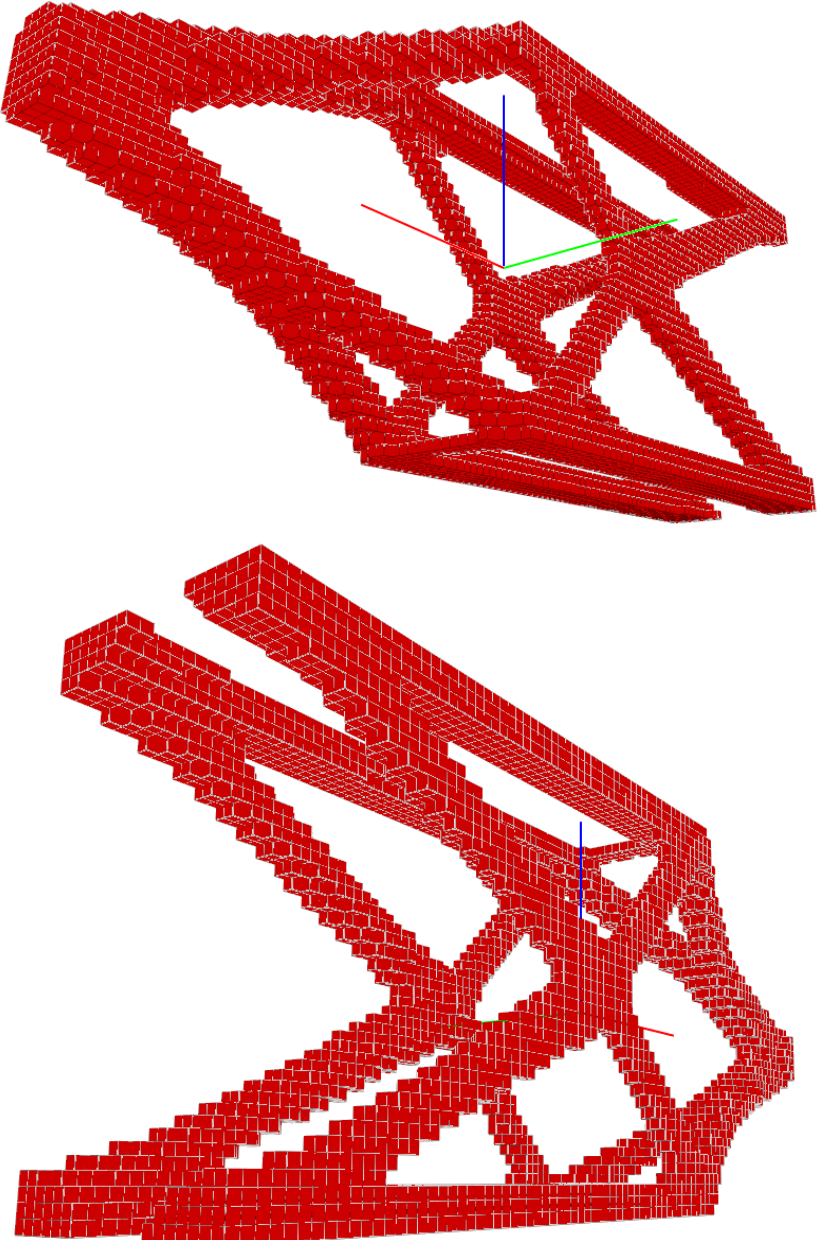
	Paraméterek	It. szám:	Feladat/Eredmények	Compliance
Feladat	$F = 100 \text{ N}$ $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $240\text{mm} \times 40 \text{ mm}$ 50% térf.hányad	-		
SIMP (&OC)	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $x_{min} = 0.001$	200 (30)		2.551 Nmm
Soft-kill BESO	$p = 3.0$ $r_{min} = 6.0 \text{ mm}$ $ER = 5 \%$ $AR_{max} = 5.0 \%$ $x_{min} = 0.001$	200 (37)		2.365 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 6.0 \text{ mm}$ $V_0 = 0.7$; $ER = 5 \%$ $x_{min} = 0.001$ $H_d = 0.2$ (it. < 40); $H_s = 0.5$ inv.pow: $\beta = 5, 6, \dots$	200 (93)		2.41 Nmm
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 6.0 \text{ mm}$ $ER = 5\%$ $AR_{max} = 15.0 \%$ $H_s = 0.5$ $H_d = 0.4$ (it. < 40) $x_{min} = 0.001$ pcw.lin: $\beta = 3, 5, 7, \dots$	200 (79)		2.38 Nmm

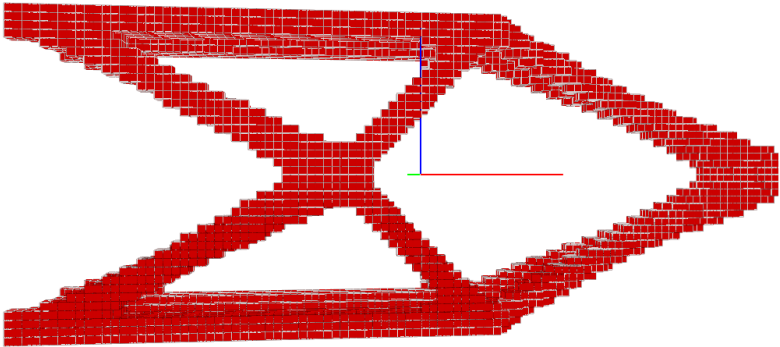
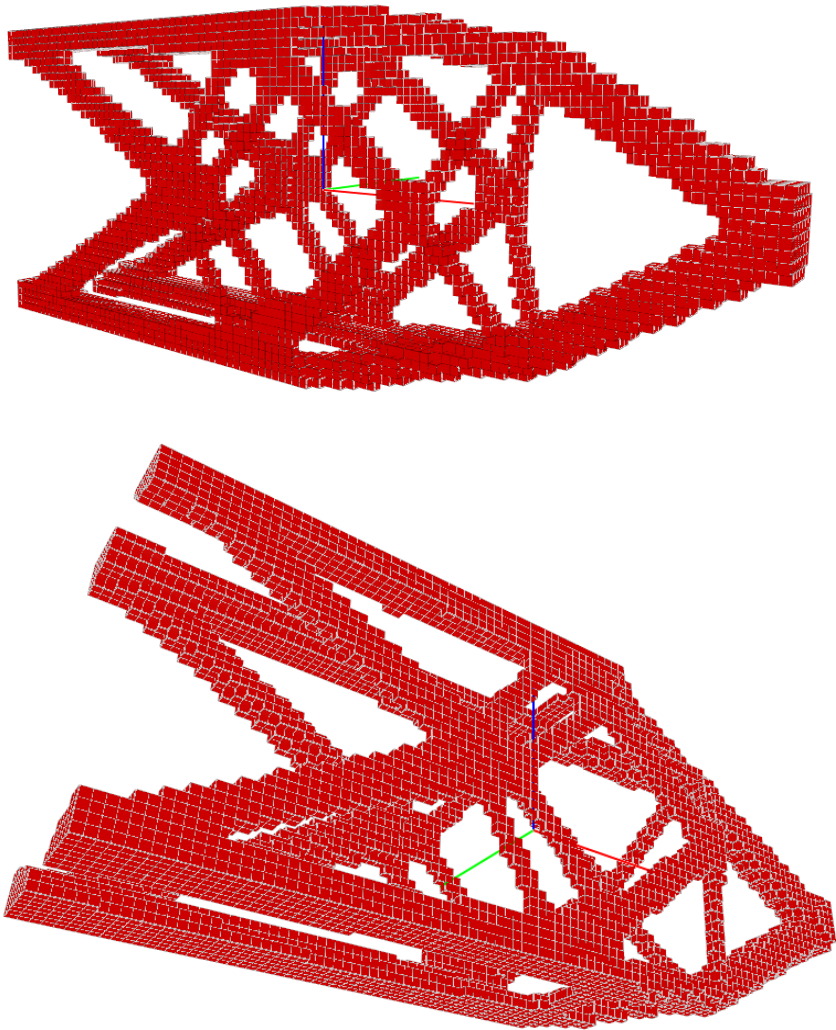
5. eset: Konvergenciafeltétel: $C_{it.szám} = C_{200} \pm 1\%$

	Paraméterek	It. szám:	Feladat/Eredmények	Compliance
Feladat	$F = 1000 \text{ N}$ $E = 10 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $100 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ 10% térf.hányad	-		
SIMP (&OC)	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $x_{min} = 0.001$	200 (160)		2089.6 Nmm

Soft-kill BESO	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 3 \%$ $AR_{max} = 50.0 \%$ $x_{min} = 0.001$	200 (168)		1303 Nmm
Soft-kill BESO2	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2.5 \%$ $AR_{max} = 10.0 \%$ $x_{min} = 0.001$	200 (90)		1272 Nmm

QSQF	$p = 3.0$ $V_0 = 0.3$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 3 \%$ $x_{min} = 0.001$ $H_s = 0.5$ $H_d = 0.5$ $(it. < 140)$ pcw.lin: $\beta = 4, 5, \dots$	200 (144)		1255 Nmm
-------------	--	-----------	---	----------

QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2.5\%$ $H_d = H_s = 0.55$ $H_d = 0.0$ (60. iteráció után). $x_{min} = 0.001$ inv.pow. $\beta = 4,5, \dots$	200* (eltérő konvergencia- kritérium)		1417 Nmm
--------------------	---	---	--	-----------------

				
QSQF	$p = 3.0$ $r_{min} = 3.0 \text{ mm}$ $ER = 2.5\%$ $H_d = H_s = 0.5$ $H_d = 0.0$ (140. iteráció után) $x_{min} = 0.0025$ inv.pow. $\beta = 4,5, \dots$	160* (eltérő konvergencia- kritérium)		1440 Nmm 1414 Nmm*

200*
(eltérő
konvergencia-
kritérium)

