



MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Négy szabadságfokú robot kinematikai és dinamikai vizsgálata

Olasz Attila

I. éves mechatronikai MSc mérnök hallgató

Konzulens:

Dr. Szabó Tamás

egyetemi docens

Robert Bosch Mechatronikai Tanszék

Miskolc, 2011

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETŐ	3
2. A ROBOT BEMUTATÁSA	4
3. A ROBOT DIREKT KINEMATIKAI ELEMZÉSE	6
3.1. <i>A nyitott láncú robot helyzetének leírása Denavit-Hartenberg paraméterekkel</i>	6
3.2. <i>A robot sebesség- és gyorsulásállapota</i>	8
4. A ROBOT INVERZ KINEMATIKAI FELADATA	10
4.1. <i>Az inverz helyzet meghatározása geometriai úton</i>	10
5. A ROBOT DINAMIKAI FELADATÁNAK VIZSGÁLATA	13
6. PÉLDA A KINEMATIKAI ÉS DINAMIKAI VIZSGÁLATRA	16
6.1. <i>Sebességek és gyorsulások kiszámítása</i>	17
6.2. <i>Szögelfordulások és szögsebességek kirajzolása</i>	18
6.3. <i>Nyomatékok kirajzolása</i>	22
7. ÖSSZEFOGLALÁS	25
IRODALOMJEGYZÉK	26

1. BEVEZETŐ

A Miskolci Egyetem Szerszámgépek Tanszéke rendelkezik egy saját készítésű, hidraulikusan vezérelt robottal, mely négy szabadságfokú. A dolgozatban az adott robot direkt kinematikai és az inverz kinematikai feladat analitikus megoldásával, valamint a dinamikai feladatával foglalkozunk. A kinematikai leíráshoz a Denavit-Hartenberg paramétereket alkalmazzuk. A robot négy szabadságfokú mozgását négy csukló valósítja meg, melynek szimbolikus jelölése: RRRR (R - Rotation). A kinematikai leírás végső célja a robot vezérlés működtetése.

A dolgozat lényegi része négy pontban kerül kidolgozásra. Az első pontban a Denavit-Hartenberg paraméterek felhasználásával előállítjuk a robot helyzetét meghatározó helyzetmátrixokat. A helyzet ismeretében származtatjuk a sebesség- és gyorsulásállapotokat. A második pontban a robot inverz kinematikai feladatát analitikusan vizsgáljuk. A csuklók szögét egyszerű geometriai megfontolások alapján állítjuk elő trigonometrikus függvények segítségével. A harmadik pont a robot dinamikai vizsgálatát mutatja be a Newton-Euler egyenletek felhasználásával. A robot tagokat merevnek tekintjük.

Az utolsó pontban a fent ismertetett elméletek alapján bemutatjuk azokat a számítógépi programokat, amelyek a kidolgozott elméletek alapján készültek Scilab programrendszer alatt. A programok a robot kiszolgáló feladatok során végzett mozgását szimulálják.

Először az inverz kinematikai feladatot oldják meg oly módon, hogy egyenként időlépéseket feltételezve előállítják a robot helyzetét meghatározó csuklók szögelfordulásait diszkrét időpontokban. A kiszámolt adatok alapján vezérelhető a robot csuklóinak szögelfordulása az adott mozgás megvalósítása céljából.

Másodszor, a középponti differencia módszerét alkalmazva meghatározzuk a csuklók szögsebességeit és szöggyorsulásait. Ezek ismeretében előállítjuk a robot sebesség- és gyorsulásállapotát a direkt kinematikai feladat összefüggéseinek felhasználásával. A sebességek és gyorsulások ismeretében vizsgáljuk a robot dinamikai feladatát. A kapott értékek mutatják meg számunkra azt, hogy a robot adott mozgása során az egyes csuklóban mekkora nyomatékértékek ébrednek. Az eredményeket, azaz a robot helyzetét, a csuklók szögelfordulásait, szögsebességeit és nyomatékait grafikusán szemléltetjük.

A dolgozat elsődleges célja, hogy a fejlesztés alatt álló hidraulikus robot vezérléséhez szolgáltatssa az alapjelet. Emellett, további cél egy olyan program elkészítése, mely a robot egy előírt pályán való haladását szimulálja és a mozgás során a csuklóban fellépő nyomatékokat meghatározza.

2. A ROBOT BEMUTATÁSA

A hidraulikus vezérlésű robot az 1. ábrán látható négy csukló segítségével valósítja meg a mozgásokat.



a.



b.

1. ábra

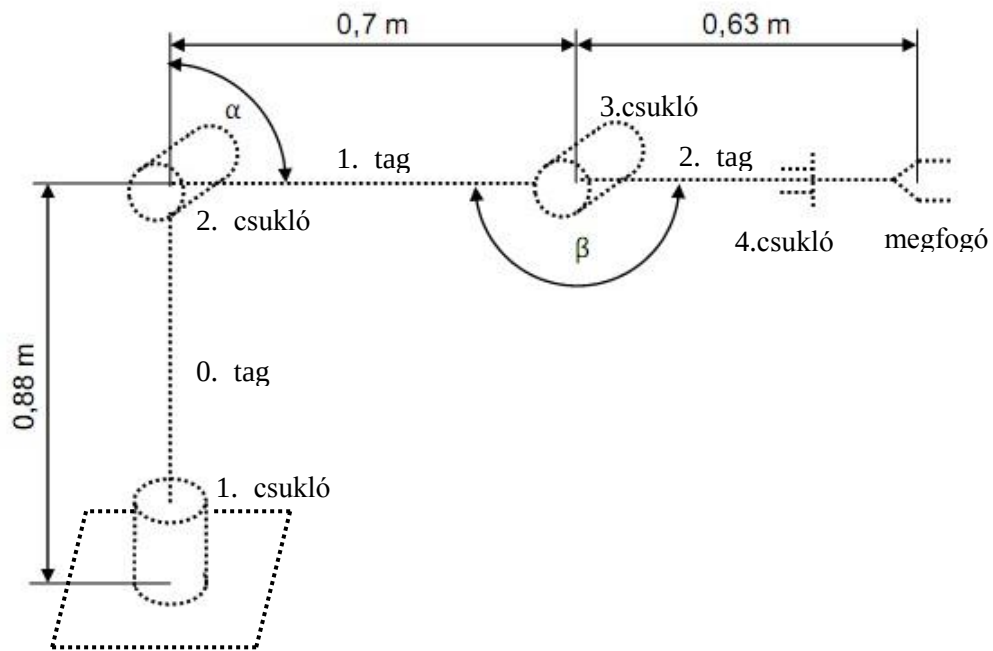
A vizsgált hidraulikus robot két helyzetben

Az ábrán látható robot alapján készítettünk egy egyszerűsített vázlatot (2. ábra), amely megmutatja a robot csuklóinak helyzetét és az egyes karok méretét.

A mechanizmus a mozgása során nem tudja lefedni az egész szögtartományt, csak az $\alpha = 0 \dots 90^\circ$ és $\beta = 90 \dots 180^\circ$ intervallumot. Ebből következik, hogy a robot csak korlátozott mozgásmegvalósításra képes.

Az egyes csuklók és tagok tömegét a [3] irodalomból vettük át:

- az első tag tömege: $m_1 = 20 \text{ kg}$
- a harmadik csukló tömege: $m_2 = 15 \text{ kg}$
- a második tag tömege: $m_3 = 12 \text{ kg}$
- a negyedik csukló tömege: $m_4 = 5 \text{ kg}$
- a megfogó tömege: $m_5 = 5 \text{ kg}$.



2. ábra

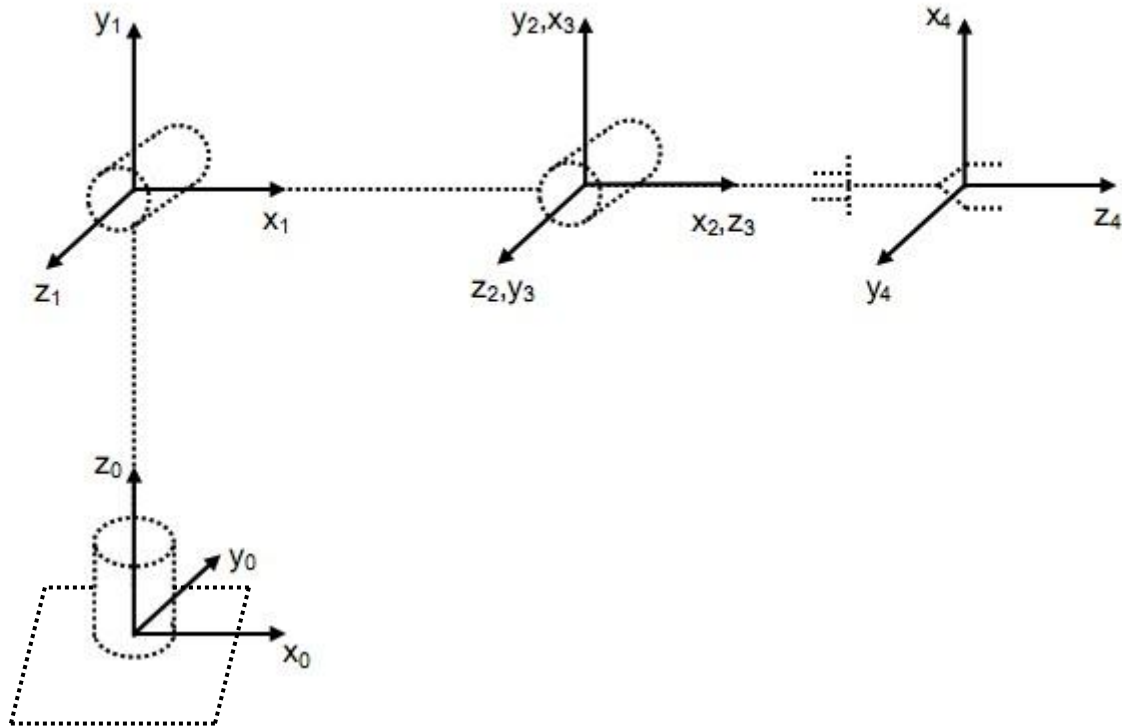
A robot egyszerűsített modellje

A 2. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy ez egy RRRR felépítésű robot, hiszen a mozgásokat négy csuklóval valósíthatjuk meg. Az ilyen egyszerű robotot szokás könyök-manipulátornak (elbow manipulator, [2]) is nevezni.

3. A ROBOT DIREKT KINEMATIKAI ELEMZÉSE

3.1. A nyitott láncú robot helyzetének leírása Denavit-Hartenberg paraméterekkel

A robotkarok egymáshoz viszonyított helyzetének megadása érdekében minden robotkarhoz rögzítünk egy ún. belső koordinátarendszert. A karok egymáshoz viszonyított helyzetét a 3. ábrán látható koordinátarendszerek közötti transzformációval írjuk le.



3. ábra

A robot belső koordinátarendszere

A koordináta-rendszerek helyzetének leírására az ún. Denavit-Hartenberg paramétereket használjuk ([1]), melyek értelmezése a következő:

- s_k a z_{k-1} és x_k tengelyek metszéspontjának z_{k-1} koordinátája;
- Θ_k a z_{k-1} tengely körüli forgás előjeles szöge, amely az x_{k-1} tengelyt az x_k tengelybe viszi;
- α_k az x_k tengely körüli forgás előjeles szöge, amely a z_{k-1} tengelyt a z_k tengelybe viszi;
- a_k a z_{k-1} és z_k tengelyek távolsága (normáltranszverzális hossza).

A Denavit-Hartenberg paraméterek rendre a következő négy egymás utáni merevtestszerű relatív mozgásnak felelnek meg:

1. eltolás a z_{k-1} tengely irányában (s_k értékkel);
2. forgás a z_{k-1} tengely körül (Θ_k szöggel);
3. forgás az x_k tengely körül (α_k értékkel);
4. eltolás az x_k tengely irányában (a_k értékkel).

Ezek a mozgások a fentiek szerint a $\underline{\underline{H}}_{s_k}$, $\underline{\underline{H}}_{\Theta_k}$, $\underline{\underline{H}}_{\alpha_k}$, $\underline{\underline{H}}_{a_k}$ transzformációs mátrixokkal írhatók le, melyeknek az ugyanebben a sorrendben vett szorzata a

$$\underline{\underline{H}}_{k-1,k} = \underline{\underline{H}}_{s_k} \underline{\underline{H}}_{\Theta_k} \underline{\underline{H}}_{\alpha_k} \underline{\underline{H}}_{a_k} \quad (1)$$

$$\underline{\underline{H}}_{k-1,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Theta_k & -s\Theta_k & 0 & 0 \\ s\Theta_k & c\Theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_k & -s\alpha_k & 0 \\ 0 & s\alpha_k & c\alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kifejezéssel írható le ([1]).

A mátrixszorzásokat elvégezve a következő egyszerűbb alakhoz jutunk, ahol a $c = \cos$, $s = \sin$ rövidítéseket alkalmazzuk:

$$\underline{\underline{H}}_{k-1,k} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{h}} & \underline{\underline{r}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{k-1,k} = \begin{bmatrix} c\Theta_k & -s\Theta_k c\alpha_k & s\Theta_k s\alpha_k & a_k c\Theta_k \\ s\Theta_k & c\Theta_k c\alpha_k & -c\Theta_k s\alpha_k & a_k s\Theta_k \\ 0 & s\alpha_k & c\alpha_k & s_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ezek alapján meghatározzuk a robot egyes koordinátarendszereinek transzformációját megvalósító Denavit-Hartenberg mátrixokat, melyek rendre a következőképpen alakulnak:

$$\underline{\underline{H}}_{01} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_{01}) & -\sin(\Theta_{01})\cos(\alpha_{01}) & \sin(\Theta_{01})\sin(\alpha_{01}) & a_{01}\cos(\Theta_{01}) \\ \sin(\Theta_{01}) & \cos(\Theta_{01})\cos(\alpha_{01}) & -\cos(\Theta_{01})\sin(\alpha_{01}) & a_{01}\sin(\Theta_{01}) \\ 0 & \sin(\alpha_{01}) & \cos(\alpha_{01}) & s_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{\underline{H}}_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_{12}) & -\sin(\Theta_{12})\cos(\alpha_{12}) & \sin(\Theta_{12})\sin(\alpha_{12}) & a_{12}\cos(\Theta_{12}) \\ \sin(\Theta_{12}) & \cos(\Theta_{12})\cos(\alpha_{12}) & -\cos(\Theta_{12})\sin(\alpha_{12}) & a_{12}\sin(\Theta_{12}) \\ 0 & \sin(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{12}) & s_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{\underline{H}}_{23} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_{23}) & -\sin(\Theta_{23})\cos(\alpha_{23}) & \sin(\Theta_{23})\sin(\alpha_{23}) & a_{23}\cos(\Theta_{23}) \\ \sin(\Theta_{23}) & \cos(\Theta_{23})\cos(\alpha_{23}) & -\cos(\Theta_{23})\sin(\alpha_{23}) & a_{23}\sin(\Theta_{23}) \\ 0 & \sin(\alpha_{23}) & \cos(\alpha_{23}) & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{H}}_{34} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta_{34}) & -\sin(\Theta_{34})\cos(\alpha_{34}) & \sin(\Theta_{34})\sin(\alpha_{34}) & a_{34}\cos(\Theta_{34}) \\ \sin(\Theta_{34}) & \cos(\Theta_{34})\cos(\alpha_{34}) & -\cos(\Theta_{34})\sin(\alpha_{34}) & a_{34}\sin(\Theta_{34}) \\ 0 & \sin(\alpha_{34}) & \cos(\alpha_{34}) & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A k -adik tag állványhoz viszonyított helyzete a relatív helyzetmátrixok szorzataként nyert

$$\underline{\underline{H}}_{0k} = \underline{\underline{H}}_{01}\underline{\underline{H}}_{12}\dots\underline{\underline{H}}_{k-1,k} = \prod_{j=1}^k \underline{\underline{H}}_{j-1,j} \quad (7)$$

helyzetmátrixszal adható meg. Ebből $k=n$ behelyettesítésével a zárótag $\underline{\underline{H}}_{0n}$ helyzetmátrixát kapjuk, ahol esetünkben $n=4$. Az állványhoz képesti helyzetmátrixokat a négy tagra az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{H}}_{02} &= \underline{\underline{H}}_{01}\underline{\underline{H}}_{12} \\ \underline{\underline{H}}_{03} &= \underline{\underline{H}}_{01}\underline{\underline{H}}_{12}\underline{\underline{H}}_{23} = \underline{\underline{H}}_{02}\underline{\underline{H}}_{23} \\ \underline{\underline{H}}_{04} &= \underline{\underline{H}}_{01}\underline{\underline{H}}_{12}\underline{\underline{H}}_{23}\underline{\underline{H}}_{34} = \underline{\underline{H}}_{03}\underline{\underline{H}}_{34}. \end{aligned} \quad (8)$$

A zárótag bármely $\underline{R}_n$ helyvektorának az állványhoz kötött koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái az $\underline{R}_0 = \underline{\underline{H}}_{0n}\underline{R}_n$ összefüggéssel számíthatók.

3.2. A robot sebesség- és gyorsulásállapota

A robot zárótagjának sebesség- és gyorsulásállapotát az $\underline{R}_0 = \underline{\underline{H}}_{0n}\underline{R}_n$ összefüggés idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$\underline{R}_0 = \underline{\underline{H}}_{0n}\underline{R}_n, \quad \text{ahol} \quad \underline{\underline{H}}_{0n} = \begin{bmatrix} \underline{h}_{0n} & \underline{r}_{0n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{V}_0 = \dot{\underline{\underline{H}}}_{0n}\underline{R}_n, \quad \text{ahol} \quad \dot{\underline{\underline{H}}}_{0n} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{h}}_{0n} & \underline{v}_{0n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{A}_0 = \ddot{\underline{\underline{H}}}_{0n}\underline{R}_n, \quad \text{ahol} \quad \ddot{\underline{\underline{H}}}_{0n} = \begin{bmatrix} \ddot{\underline{h}}_{0n} & \underline{a}_{0n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Megjegyezzük, hogy $\underline{v}_{0n} = \dot{\underline{r}}_{0n}$ a zárótaghoz kötött koordinátarendszer origójának sebességkoordinátáit, míg a $\underline{a}_{0n} = \dot{\underline{v}}_{0n} = \ddot{\underline{r}}_{0n}$ a koordinátarendszer origójának gyorsuláskoordinátáit jelenti. A $\underline{\dot{H}}_{0n}$, illetve a $\underline{\ddot{H}}_{0n}$ mátrixot a zárótag sebességállapot- és gyorsulásállapot-mátrixának nevezzük. A zárótaghoz kötött pontok esetében $\underline{R}_n = \text{állandó}$ (az időnek nem függvénye).

A $\underline{H}_{k-1,k}$ mátrix felhasználásával igazolható, hogy

$$\frac{\partial \underline{H}_{k-1,k}}{\partial \Theta_k} = \frac{\partial \underline{\dot{H}}_{k-1,k}}{\partial \dot{\Theta}_k} = \underline{D}_k \underline{H}_{k-1,k} \quad \text{és} \quad \underline{\dot{H}}_{k-1,k} = \dot{\Theta}_k \underline{D}_k \underline{H}_{k-1,k}, \quad (12), (13)$$

ahol $\underline{D}_k$ az ún. deriváló mátrix, csukló esetén az alábbi alakú:

$$\underline{D}_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

A Θ_k általános koordináta, a $\dot{\Theta}_k = \omega_k$ koordinátasebesség és a $\ddot{\Theta}_k = \varepsilon_k$ koordinátagyorsulás ismeretében bármely közbenső tagok, illetve a zárótag helyzet-, sebességállapot- és gyorsulásállapot-mátrixai az állványtól kiindulva, lépésenként, az alábbi formulákkal számíthatók:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{0k} &= \underline{H}_{0,k-1} \underline{H}_{k-1,k} \\ \underline{\dot{H}}_{0k} &= \left(\underline{\dot{H}}_{0,k-1} + \underline{H}_{0,k-1} \underline{D}_k \dot{\Theta}_k \right) \underline{H}_{k-1,k} \\ \underline{\ddot{H}}_{0k} &= \left[\underline{\ddot{H}}_{0,k-1} + \left(2 \underline{\dot{H}}_{0,k-1} + \underline{H}_{0,k-1} \underline{D}_k \dot{\Theta}_k \right) \underline{D}_k \dot{\Theta}_k + \underline{H}_{0,k-1} \underline{D}_k \ddot{\Theta}_k \right] \underline{H}_{k-1,k} \end{aligned} \quad (15)$$

4. A ROBOT INVERZ KINEMATIKAI FELADATA

Az előző fejezetben a robot direkt kinematikai feladatát elemeztük, mely során előállítottuk a zárótag helyzetét és orientációját a Θ_k függvényében.

Ebben a fejezetben a robot inverz kinematikai feladatával foglalkozunk, azaz a zárótaghoz kötött koordináta-rendszer origójának helyzetének és a koordináta-rendszer $\underline{R}$ orientációjának ismeretében keressük az egyes csuklók Θ_k szögelfordulásait.

Az inverz kinematikai feladatot általános esetben numerikusan szokás kezelni ([2]). Az ipari robotok gyakran hat szabadságfokúak, az első három csukló a zárótag helyzetét határozza meg, míg az utolsó három a zárótag orientációját. A robot helyzetét és orientációját egymástól függetlenül vizsgálhatjuk. Azoknál a robotoknál, melyeknek hat csuklója van, és az utolsó három csukló tengelye egy pontban keresztezi egymást - így gömbcsuklót alkotnak - a feladatot felbontjuk inverz kinematikai helyzetre és inverz kinematikai orientációra. Az általunk vizsgált robot négy szabadságfokú, így a kinematikai szétválasztás nem szükséges. A negyedik csukló szögelfordulása a zárótag koordináta-rendszer origójának helyzetét nem befolyásolja. Így az első három csukló szögelfordulását kell meghatároznunk.

4.1. Az inverz helyzet meghatározása geometriai úton

Az inverz pozíció meghatározásához a háromszögek geometriai összefüggéseit fogjuk alkalmazni.

Általában az inverz kinematikai feladat bonyolultsága attól függ, hogy mennyi nulla értékű Denavit-Hartenberg paraméter van. Minél több ezek száma, annál könnyebb megoldani az inverz feladatot. A legtöbb manipulátor esetében az s_k értéke nulla, az α_k értéke pedig vagy nulla vagy $\pm \pi/2$. A mi esetünkben ezek az értékek a következőképpen alakulnak:

$s_1 = 0.880 \text{ m}$	$a_1 = 0 \text{ m}$	$\alpha_1 = \pi/2$
$s_2 = 0 \text{ m}$	$a_2 = 0.700 \text{ m}$	$\alpha_2 = 0$
$s_3 = 0 \text{ m}$	$a_3 = 0 \text{ m}$	$\alpha_3 = \pi/2$
$s_4 = 0.630 \text{ m}$	$a_4 = 0 \text{ m}$	$\alpha_4 = 0$

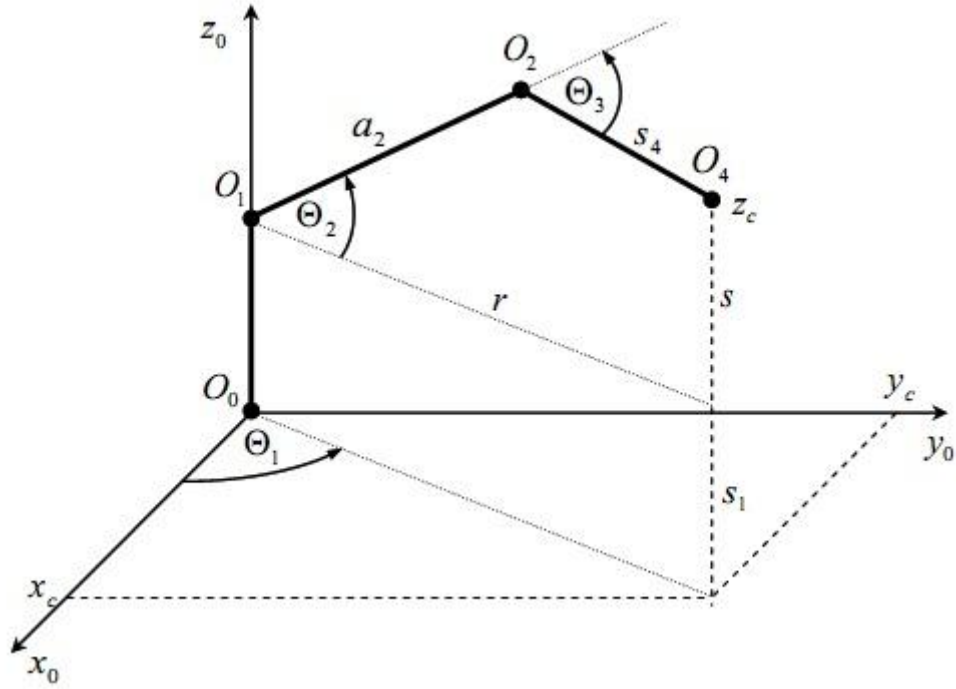
Látható, hogy az értékek többsége számunkra kedvezőek, így valóban a geometriai megközelítést célszerű alkalmazni.

A szögek meghatározásához a trigonometrikus függvényeket hívjuk segítségül. A Θ_1 kiszámítását a 5. ábra alapján végezzük el, mely a csuklókat és a tagokat az $x_0 - y_0$ síkban ábrázolja.

A Θ_1 -re a következő trigonometrikus alakot írhatjuk fel:

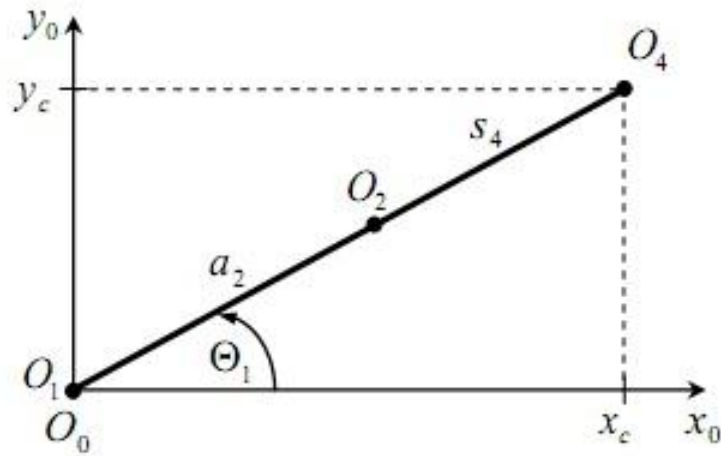
$$\Theta_1 = a \tan 2(y_c, x_c). \quad (16)$$

Az $a \tan 2$ függvény alkalmas arra, hogy egy síkvektor y és x koordinátaiból kiszámítsuk a vektor irányszögét.



4. ábra

A robot az $x_0 - y_0 - z_0$ térben



5. ábra

A robot felülnézeti képe

A robot egy tetszőleges helyzetét szemlélteti az 5. ábra. Az O_1 , O_2 és O_4 pontok által meghatározott háromszögre a koszinusztételt alkalmazzuk. Megjegyezzük, hogy a háromszög O_2 pontjában lévő szög negatív koszinusza megegyezik a Θ_3 szög koszinuszával. Így

$$\cos\Theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - s_4^2}{2a_2s_4} \quad (17)$$

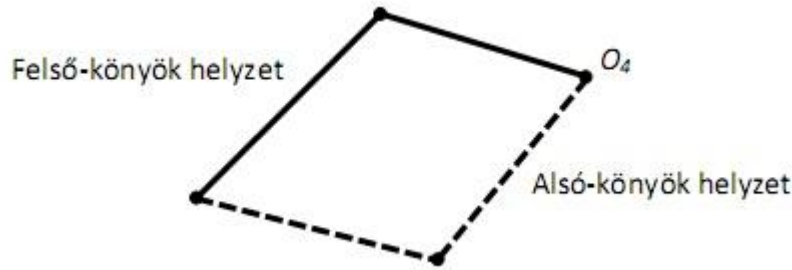
Mivel $r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ és $s = z_c - s_1$, az előző egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\cos\Theta_3 = \frac{r^2 + (z_c - s_1)^2 - a_2^2 - s_4^2}{2a_2s_4} = D \quad (18)$$

Ezek után a Θ_3 a következő formulával adható meg:

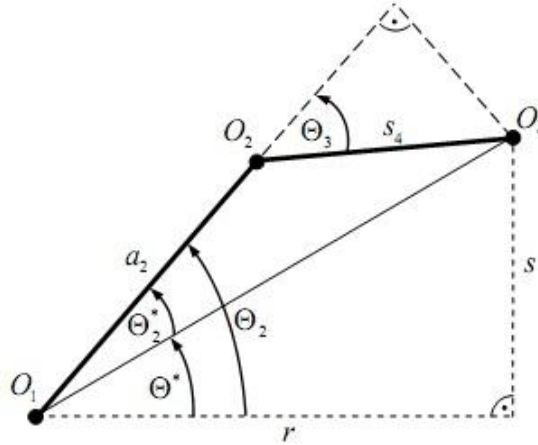
$$\Theta_3 = a \tan 2(\pm \sqrt{1 - D^2}, D) \quad (19)$$

Azért lehetséges két megoldás, mert a kar állhat felső-könyök helyzetben vagy alsó-könyök helyzetben, attól függően, hogy a célpontot felülről vagy alulról szeretnénk megközelíteni (6. ábra). Felső-könyök állás esetén $\Theta_3 = a \tan 2(-\sqrt{1 - D^2}, D)$, alsó-könyök állás esetén pedig $\Theta_3 = a \tan 2(+\sqrt{1 - D^2}, D)$.



6. ábra
Könyök helyzetek

Az előzőhöz hasonlóan a Θ_2 -t is geometriai úton kaphatjuk meg a 7. ábra alapján.



7. ábra

A második tag helyzetének geometriai viszonyai

$$\Theta_2 = \Theta^* - \Theta_2^* \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= a \tan 2(s, r) - a \tan 2(s_4 \sin \Theta_3, a_2 + s_4 \cos \Theta_3) = \\ &= a \tan 2(z_c - s_1, \sqrt{x_c^2 + y_c^2}) - a \tan 2(s_4 \sin \Theta_3, a_2 + s_4 \cos \Theta_3) \end{aligned} \quad (21)$$

5. A ROBOT DINAMIKAI FELADATÁNAK VIZSGÁLATA

Ebben a fejezetben a kinematikai mennyiségek ismeretében a robotra ható nyomatékokat határozzuk meg.

A dinamika alaptétele értelmében ismeretes, hogy a test kinetikai vektorrendszere és a testre ható erőrendszer egyenértékű egymással ([1]). Ennek feltétele valamely „A” pontra redukált $(\vec{K}; \vec{D}_A)_A$ és $(\vec{F}; \vec{M}_A)_A$ vektorkettősök egyenlősége, azaz

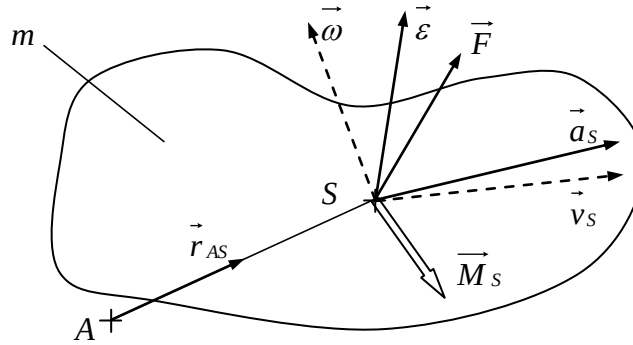
$$\vec{K} = m \cdot \vec{a}_S = \vec{F} \quad (22)$$

és

$$\vec{D}_A = \underline{\underline{J}}_S \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}_S \vec{\omega} + \vec{r}_{AS} \times \vec{a}_S m = \vec{M}_A, \quad (23)$$

ahol $\vec{M}_A = \vec{M}_S + \vec{r}_{AS} \times \vec{F}$.

A fentiekben a $\vec{K}$ a test kinetikai vektorát, a $\vec{D}_A$ a kinetikai vektorrendszer „A” pontra számított nyomatékát (a perdület idő szerinti deriváltját), a $\underline{\underline{J}}_S$ a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi tenzort, „m” a test tömegét jelenti.



8. ábra

Merev test sebesség- és gyorsulásállapota

Továbbiakban egy tetszőleges i-edik robottagra felírjuk a (22), (23) Newton-Euler féle mozgásegyenleteket, feltételezve, hogy azt csak az (i-1)-edik tagról átadódó ismeretlen, az (i+1)-edik tagról átadódó ismert erőrendszer és a súlyerő terheli (9. ábra). Mind a kinetikai vektorrendszert, mind az erőrendszereket az (i-1)-edik taghoz kötött koordináta-rendszer O_{i-1} jelű origójába redukálva írjuk fel.

Az i-edik tagra a Newton-Euler egyenletek:

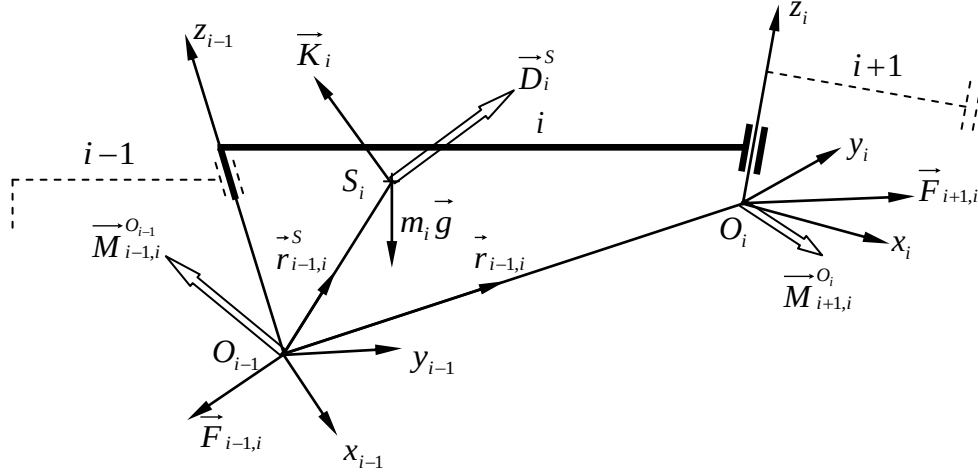
$$\vec{K}_i = \vec{F}_{i-1,i} + \vec{F}_{i+1,i} + m_i \vec{g} \quad (24)$$

$$\vec{D}_i^{O_{i-1}} = \vec{M}_{i-1,i}^{O_{i-1}} + \vec{M}_{i+1,i}^{O_i} + \vec{r}_{i-1,i} \times \vec{F}_{i+1,i} + \vec{r}_{i-1,i} \times \vec{g} m_i. \quad (25)$$

A kinematikai vektorrendszer elemei:

$$\vec{K}_i = m_i \vec{a}_i^S \quad (26)$$

$$\vec{D}_i^{O_{i-1}} = \vec{D}_i^S + \vec{r}_{i-1,i}^S \times \vec{K}_i = \underline{J}_{Si} \vec{\varepsilon}_i + \vec{\omega}_i \times \underline{J}_{Si} \vec{\omega}_i + \vec{r}_{i-1,i}^S \times \vec{a}_i^S m_i. \quad (27)$$



9. ábra

Az i -edik robottag erő- és nyomatékrendszere

A (24) és (25) egyenletekben az ismeretlen tagokat az alábbi módon is kifejezhetjük:

$$\vec{F}_{i-1,i} = -\vec{F}_{i,i-1}, \quad (28)$$

$$\vec{M}_{i-1,i}^{O_{i-1}} = -\vec{M}_{i,i-1}^{O_{i-1}}. \quad (29)$$

Valamennyi vektort az állványhoz kötött, globális koordináta-rendszerben felírva (amit az illető mennyiség jele fölé írt 0-val jelölünk) és a mátrixos írásmódot felhasználva a (24), (26) és (28) egyenletekből az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\underline{\vec{F}}_{i,i-1}^0 = \underline{\vec{F}}_{i+1,i}^0 + m_i \begin{pmatrix} 0 & 0^S \\ \underline{g} - \underline{a}_{0i} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Az előzőhöz hasonlóan a (25), (27) és (29) egyenletekből az

$$\underline{\vec{M}}_{i,i-1}^{O_{i-1}} = \underline{\vec{M}}_{i+1,i}^{O_i} + \underline{r}_{i-1,i}^0 \underline{\vec{F}}_{i+1,i}^0 + \underline{r}_{i-1,i}^{0S} \begin{pmatrix} 0 & 0^S \\ \underline{g} - \underline{a}_{0i} \end{pmatrix} m_i - \underline{J}_{Si}^0 \underline{\varepsilon}_{0i} - \underline{\omega}_{0i} \underline{J}_{Si}^0 \underline{\omega}_{0i} \quad (31)$$

összefüggést nyerjük, ahol a helyvektorral történő szorzást az alábbi mátrixokkal fejezzük ki:

$${}^0_{=i-1,i} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{i-1,i,3} & r_{i-1,i,2} \\ r_{i-1,i,3} & 0 & -r_{i-1,i,1} \\ -r_{i-1,i,2} & r_{i-1,i,1} & 0 \end{bmatrix}^0, \quad (32)$$

$${}^0^S_{=i-1,i} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{i-1,i,3}^S & r_{i-1,i,2}^S \\ r_{i-1,i,3}^S & 0 & -r_{i-1,i,1}^S \\ -r_{i-1,i,2}^S & r_{i-1,i,1}^S & 0 \end{bmatrix}^0. \quad (33)$$

A tehetetlenségi tenzor az állvány koordinátarendszerében is megadható:

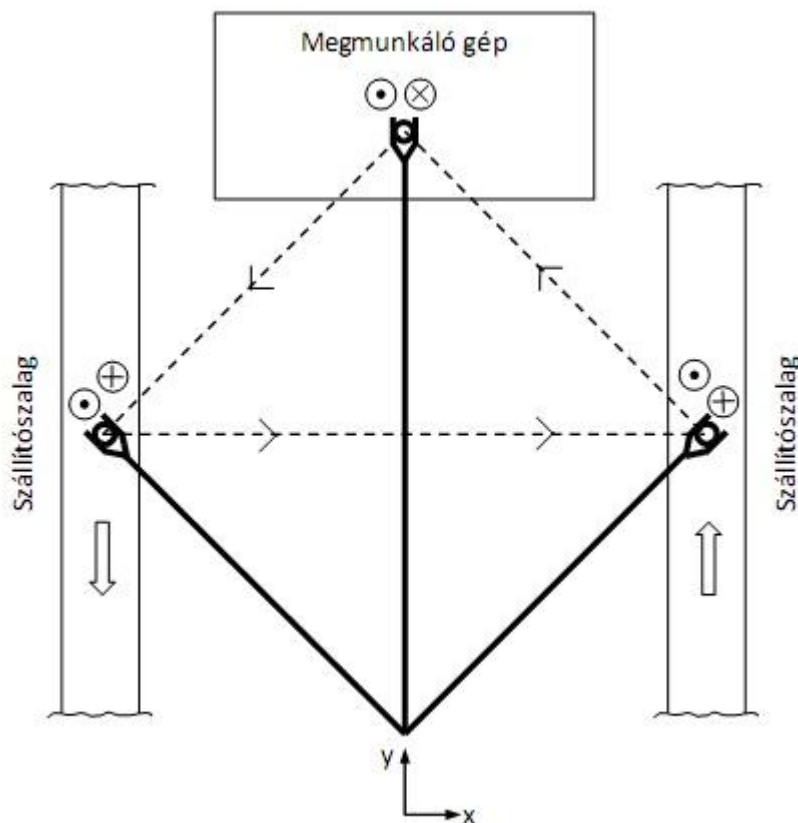
$${}^0_{=Si} \mathbf{J} = \mathbf{h}_{=0i} \mathbf{J}_{=Si} \mathbf{h}_{=0i}^T. \quad (34)$$

Alkalmazva a (30) és (31) formulákat a robot tagjaira meghatározható minden csuklóban a meghajtó nyomaték. Kiegészítve a kinematikai programot a dinamikai számításokkal egy futáson belül elvégezhetjük a robot teljes kinematikai és dinamikai elemzését.

6. PÉLDA A KINEMATIKAI ÉS DINAMIKAI VIZSGÁLATRA

Az előző fejezetekben ismertetett elméletek alapján számítógépi programokat készítettünk SCILAB 5.2.1 rendszer alatt ([5]). A programok alkalmasak a zárótag előírt pályája és orientációja alapján a robot helyzeteinek, sebességállapotainak és nyomatékainak meghatározására. A továbbiakban három olyan mintafeladatot vizsgálunk, amelyben előírjuk a robot zárótagjának pályáját.

Az első esetben (I. feladat), a 10. ábrának megfelelően, a robot egy háromszög alakú pályán halad végig. Alaphelyzetéből elindul a szállítószalag felé, ahol egy z tengelyirányú mozgással megfog egy munkadarabot. A munkadarabot egy egyenes mentén elviszi a megmunkáló gépbe. A megmunkálás után egy másik szállítószalagra viszi a munkadarabot - szintén egy egyenes pálya mentén - ahol az alkatrész távozik a munkatérből. A robot a mozgása során végig felső-könyök helyzetben mozog.

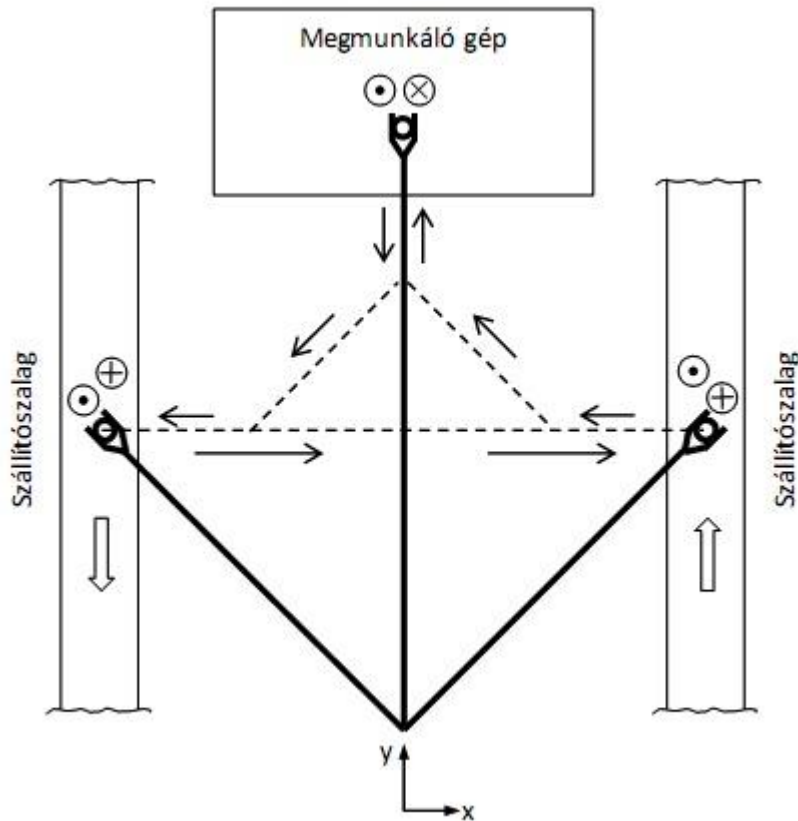


10. ábra

A robot pályája az I. feladat során

A második esetben (II. feladat) a robot hasonló pályát jár be, viszont a mozgása során alsó-könyök helyzetben áll, azaz alulról hajtja végre a folyamatot. Ez a megoldás a valóságban nem végrehajtható, mivel a robot harmadik csuklója nem képes ekkora szögelfordulást megvalósítani. A feladat viszont jó példa egy hasonló, négy szabadságfokú autóipari szerelőrobot mozgásának modellezésére és vizsgálatára.

A harmadik esetben (III. feladat) az első példával megegyező feladatot végeztünk el a robottal valósághűen. Az egyenes mozgás során a robot beleütközhet a megmunkáló gépbe és egyéb berendezésekbe is, ezért a robot a feladatot a 11. ábrának megfelelően hajtja végre.

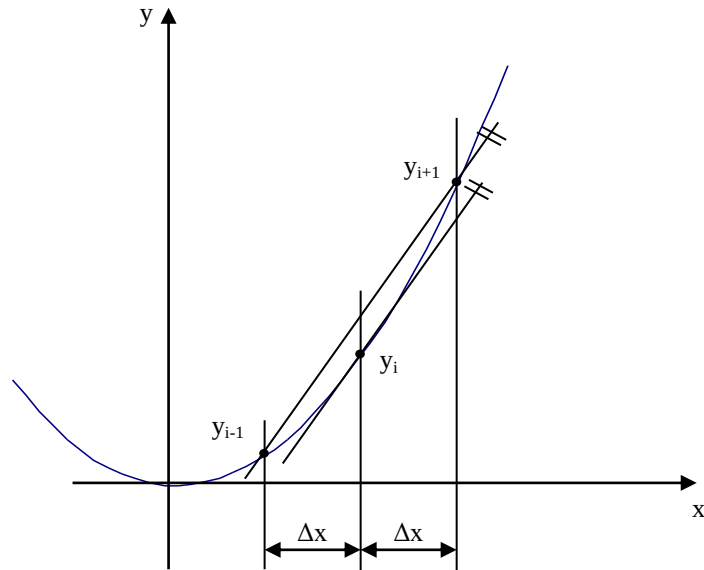


11. ábra
A robot pályája a III. feladat során

A mozgások során a csuklók elfordulásait minden időpillanatban kimentjük, majd a középponti differencia módszer alkalmazásával a szögsebességeket és szöggyorsulásokat meghatározzuk.

6.1. Sebességek és gyorsulások kiszámítása

A sebességek és gyorsulások kiszámításánál abból indulunk ki, hogy az egyes csuklóknál a szögelfordulások egyenlő időközönként adódtak. Továbbá feltételezzük, hogy a diszkrét pontokban adott függvények három egymást követő pontra támaszkodó parabolaívvel közelíthetők. Ebben az esetben a numerikus eljárásoknál ismert ún. középponti differencia módszert alkalmazhatjuk a szögsebesség és szöggyorsulás közelítő meghatározására ([4]).



12. ábra
Középponti differencia módszer

Az eljárás alapgondolata, hogy az elmozdulás-idő függvényt két időlépés tartományán parabola ívvel közelítjük (12. ábra). Mivel a parabola szelője és a parabola felezőpontjához tartozó érintő párhuzamos, ebből a geometriai megfontolásból felírhatjuk a felezőpontban az idő szerinti első deriváltat, azaz a sebességet:

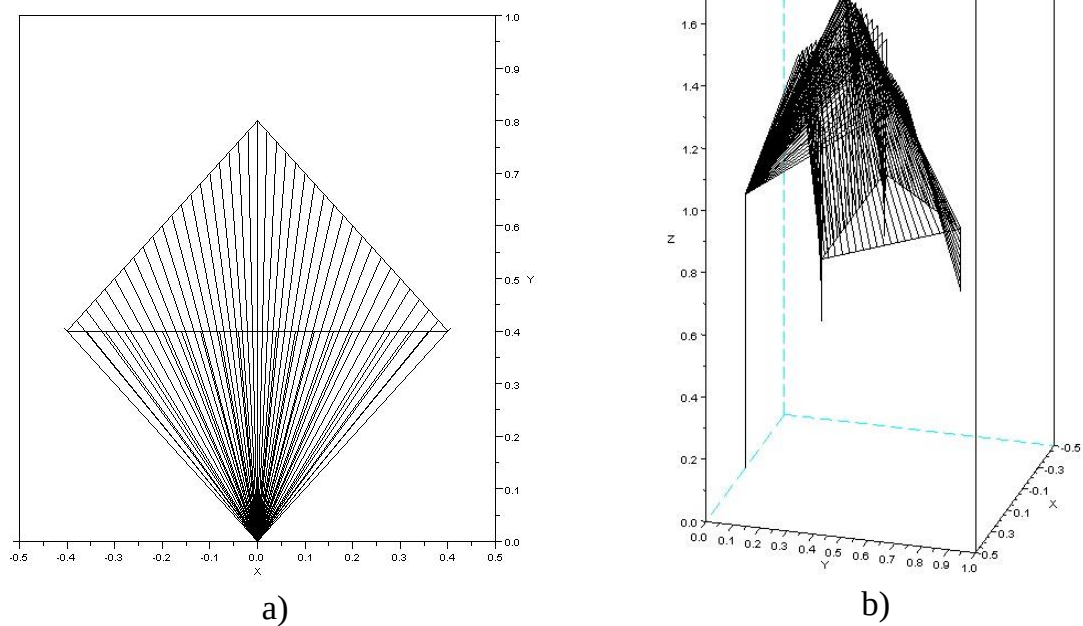
$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (35)$$

A gyorsulás hasonló megfontolások alapján a következő alakban írható fel:

$$y''_i = \frac{(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}))}{\Delta x^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (36)$$

6.2. Szögelfordulások és szögsebességek kirajzolása

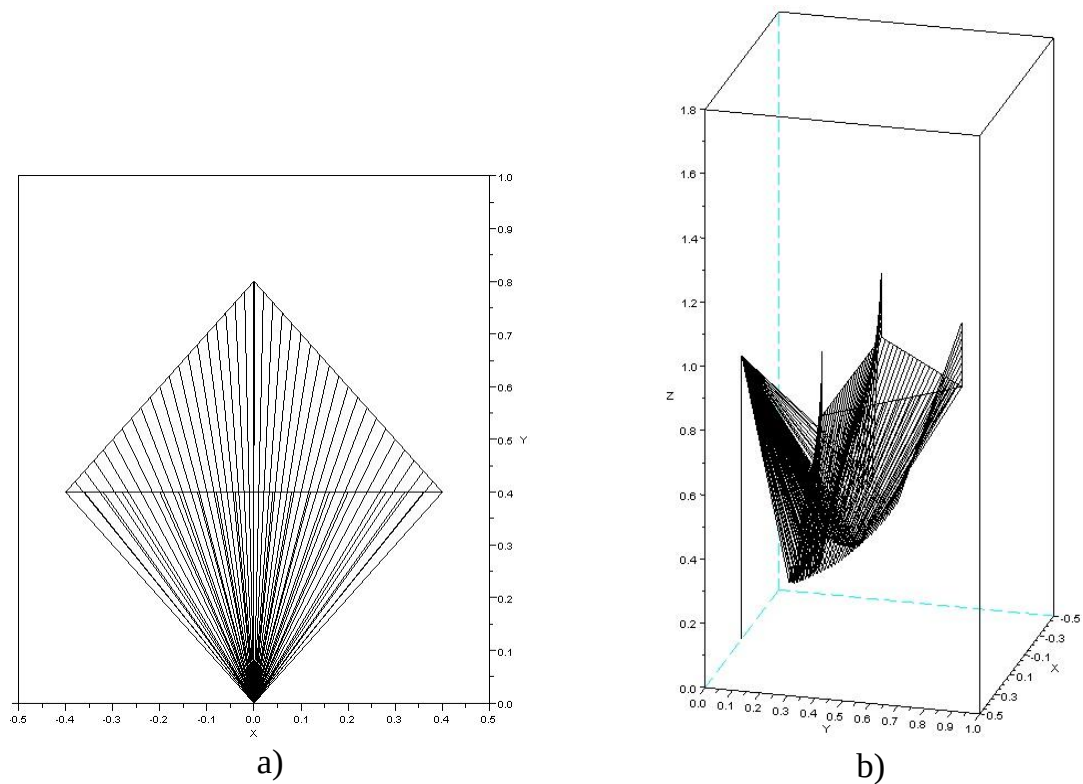
Az adatok beprogramozása után sikerült kirajzoltatnunk a robot útját mind a három esetben. A kapott eredményt a 13., 14. és a 15. ábrák szemléltetik.



13. ábra

A robot pályája a program által kirajzolva az I. feladat esetén

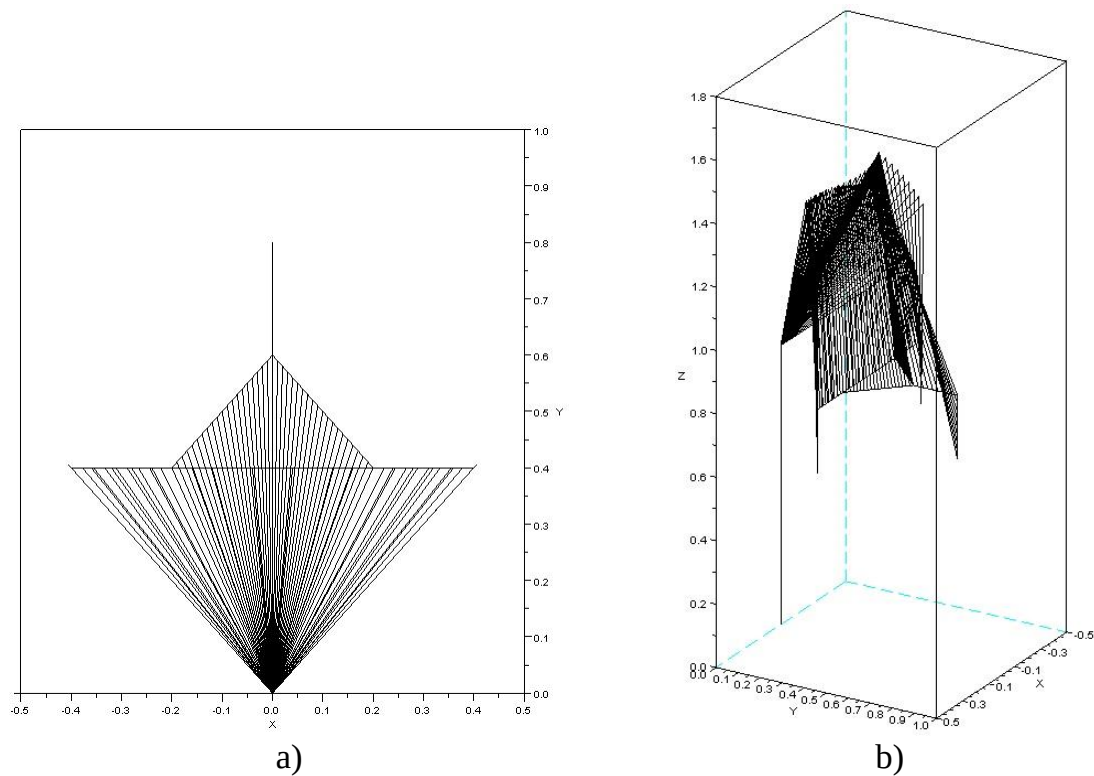
a) x-y síkban b) térben



14. ábra

A robot pályája a program által kirajzolva a II. feladat esetén

a) x-y síkban b) térben

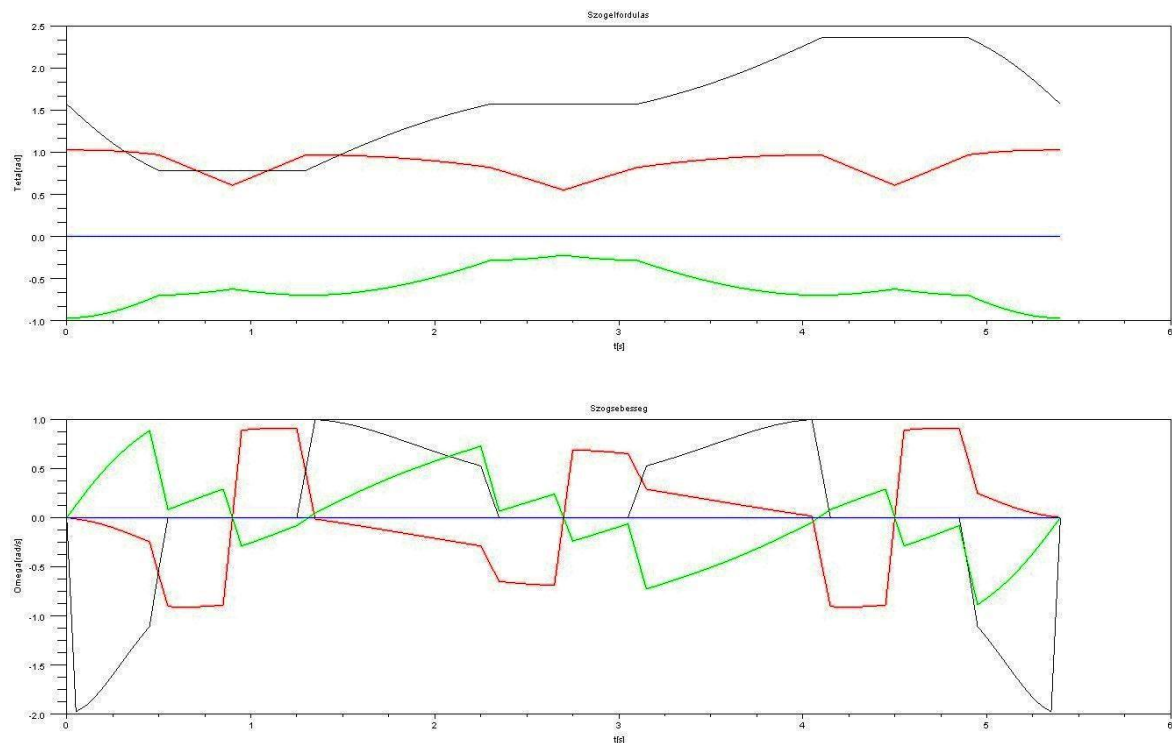


15. ábra

A robot pályája a program által kirajzolva a III. feladat esetén

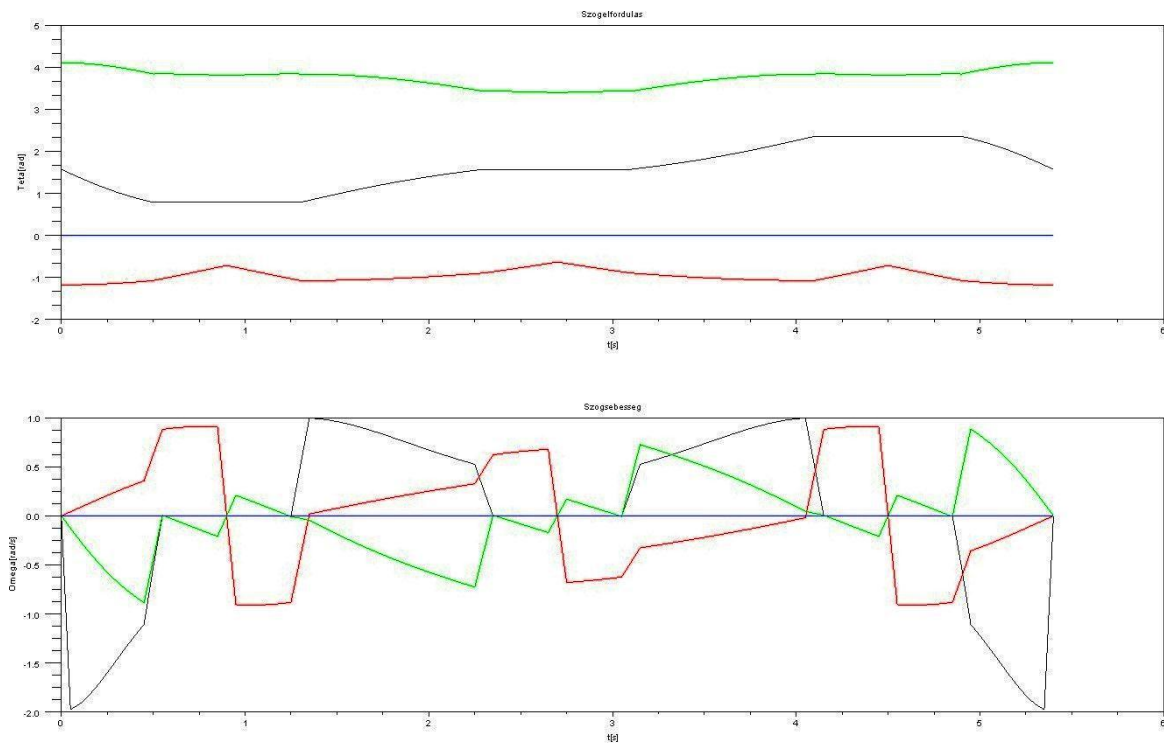
a) x-y síkban b) térben

A robot elfordulásának a szögei a mozgás során mekkorát változnak, és ezek a változások mekkora sebesség különbségeket eredményeznek, a 16., 17. és 18. ábrákon láthatók.



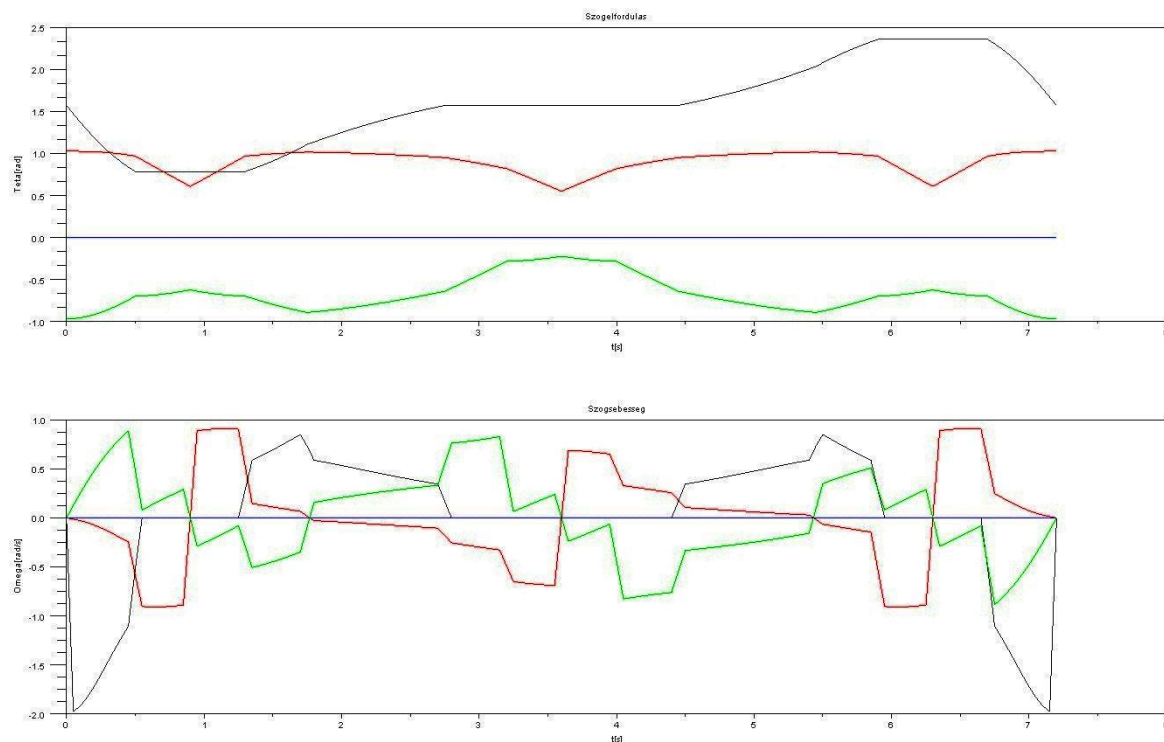
16. ábra

A csuklók elfordulásának nagysága és sebességük az I. feladat esetén



17. ábra

A csuklók elfordulásának nagysága és sebességük a II. feladat esetén



18. ábra

A csuklók elfordulásának nagysága és sebességük a III. feladat esetén

Az ábrákon a csuklók jelölésére a következő színeket alkalmaztuk:

- 1. csukló: fekete
- 2. csukló: piros
- 3. csukló: zöld
- 4. csukló: kék

Az ábrákból kitűnik, hogy a legnagyobb elfordulásokat az I. feladat esetén az 1. csukló végzi, a II. feladat esetén pedig a 3. csukló. A sebesség ábrán is jól elkülöníthető, hogy a robot mikor rajzolja az egyenes szakaszokat és mikor teszi le vagy emeli fel a munkadarabot. A felső- és alsó-könyök állásnál az egyes csukló adatai megegyeznek, a második csukló értékei csak előjelben különböznek egymástól. A harmadik csukló esetén figyelhető meg a legnagyobb különbség. A sebesség ábrákon szakadások figyelhetők meg a hirtelen nagy irányváltoztatások helyén. Ez azzal magyarázható, hogy a szögelfordulás függvény az eredeti feltételezéseknek megfelelően ugyan folytonos, de a deriváltjai nem, ezért a középponti differencia módszer ezekben a pontokban pontatlan eredményt szolgáltat.

A III. feladat esetén az csuklók elfordulásának nagysága megegyezik a felső-könyök állás esetén kapott eredményekkel. Csak a harmadik csuklóban látható egy kis eltérés a pályamódosítás miatt. A sebesség ábrán több szakadás figyelhető meg a több irányváltozásnak köszönhetően. Megfigyelhetjük, hogy időben hosszabb ideig zajlott a folyamat, mint az első két feladat esetében, mivel a robotnak több utat kell bejárnia.

6.3. Nyomatékok kirajzolása

A program készítésénél a tömegeket, a tehetetlenségi tenzorokat és a tagok súlypontjának helyeit a [3] irodalom alapján írtuk fel.

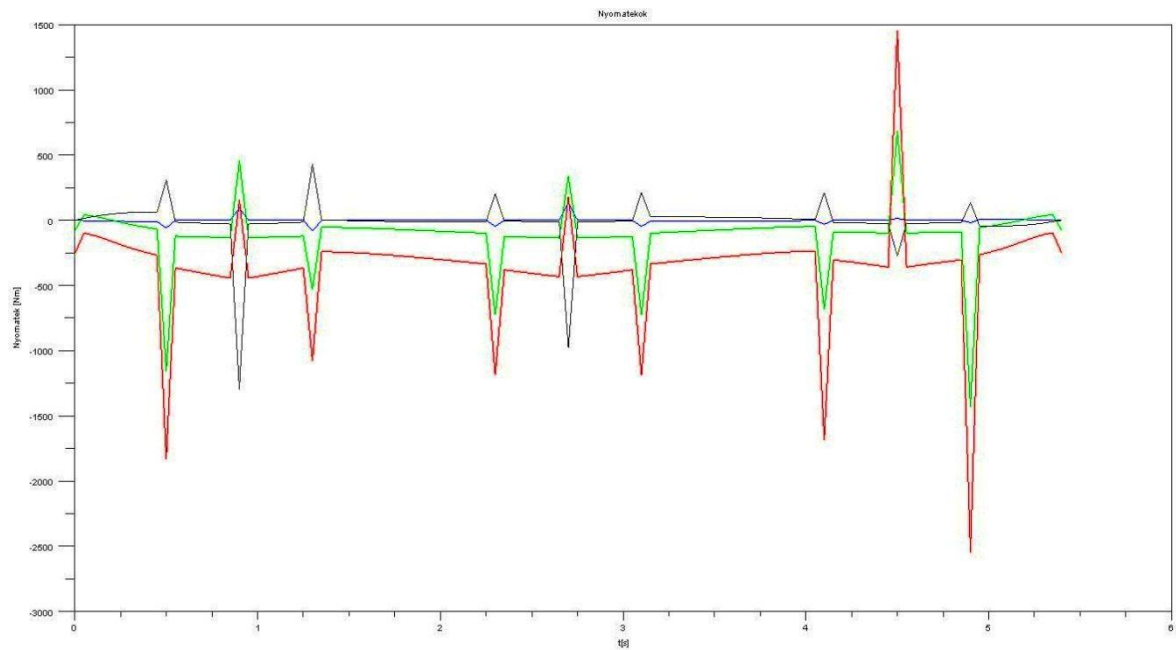
Az alkalmazott paramétereket a 1. táblázatba gyűjtöttük ki.

1. táblázat

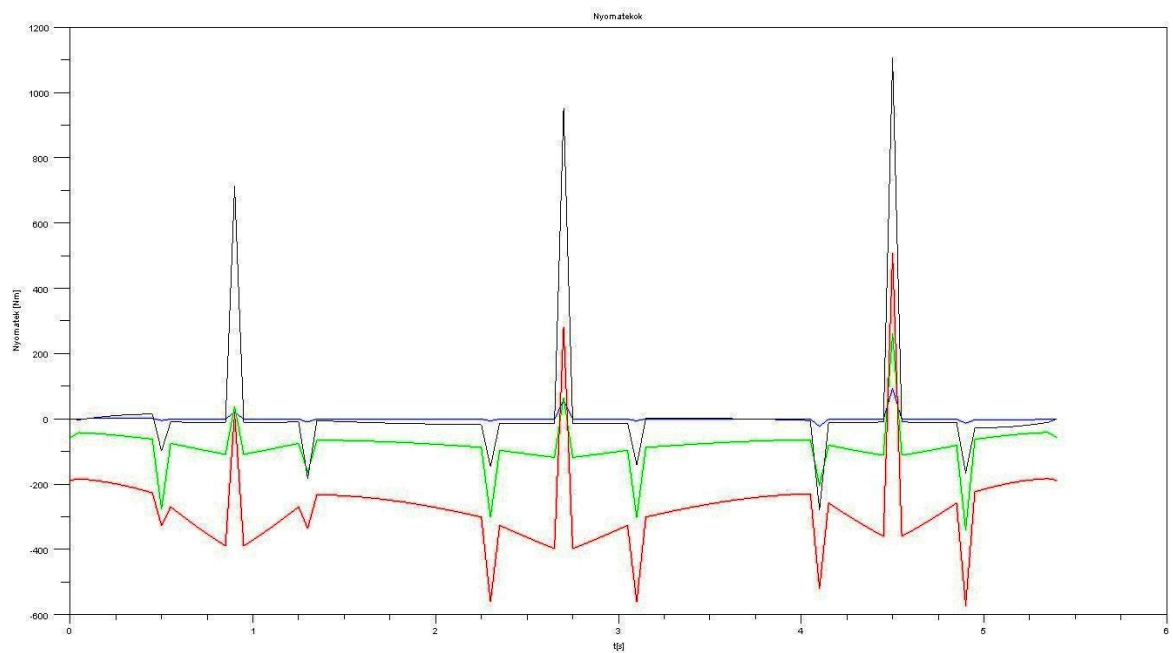
A programozás során alkalmazott értékek

Tag	Tömeg [kg]	J_x [kgm ²]	J_y [kgm ²]	J_z [kgm ²]
0.	5	0.03645	0.003542	0.03645
1.	35	0.063	2.829	2.829
2.	17	1.549	1.549	0.00354
3.	5	0	0	0

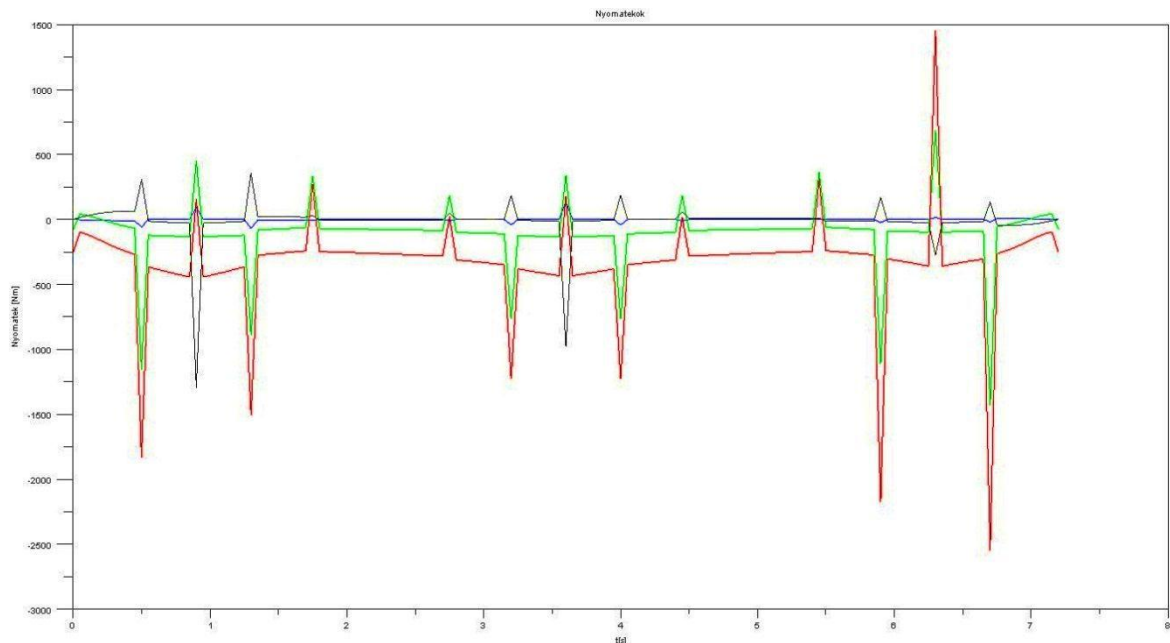
A fenti adatokkal kiegészítettük a kinematikai programot, majd a program futtatása után az alábbi eredményeket kaptuk a három esetre.



19. ábra
A csuklókból ébredő nyomatékok az I. feladat esetén



20. ábra
A csuklókból ébredő nyomatékok a II. feladat esetén



21. ábra

A csuklóknál ébredő nyomatékok a III. feladat esetén

Az ábrákon a csuklók jelölésére a következő színeket alkalmaztuk:

- **1. csukló: fekete** - **2. csukló: piros** - **3. csukló: zöld**
- **4. csukló: kék**

A 19., 20. és a 21. ábrákból látható, hogy mindhárom esetben ugyanazokban a csuklóknál ébrednek a legnagyobb nyomatékok, azaz a 2.-ban és a 3.-ban. Abszolút értékben számolva a legnagyobb nyomaték a 2. csuklóban ébred, mely kb. 450 Nm nagyságú. Azért ébred ebben a csuklóban ekkora nyomaték, mert távol van az utolsó, gyors tagoktól. Megjegyezzük, hogy a kiértékelésnél a lokális csúcsoktól eltekintettünk, mert ott a sebességekben mutatózó szakadások miatt a gyorsulás értékek pontatlanul kerültek meghatározásra a középponti differencia módszer alapján.

Ezeknek a nyomatékoknak az ismerete azért is szükséges, hogy a hidraulikus motorok maximális terhelhetőségével összevethessük.

7. ÖSSZEFOGLALÁS

A TDK dolgozatban egy négy szabadságfokú hidraulikus robot kinematikai és dinamikai feladatával foglalkoztunk. Az inverz kinematikai feladat megoldására zárt alakú formulákat dolgoztunk ki, amely gyorsabb megoldással szolgál az általában alkalmazott numerikus módszereknél. A bemutatott elméletek alapján egy számítógépi programot készítettünk a robot mozgásainak leírására. A csuklók szögelfordulásain kívül meghatároztuk a szögsebességeket és nyomatékokat is. A kapott eredményeket grafikus formában is szemléltettük. A direkt kinematika segítségével kapott eredmények azért is fontosak, mert ez szolgáltatja a robot vezérlése számára az alapjelet.

Az elkészített tanulmányt a jövőben szimulációs és rezgéstani feladatok irányába kívánjuk továbbfejleszteni.

Köszönetnyilvánítás:

A kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Király B.: **Ipari robotok kinematikai és dinamikai elemzése**, Oktatási segédlet, Miskolci Egyetem, Miskolc, 1995.
- [2] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, M. Vidyasagar: **Robot Modeling and Control**
- [3] Killer L.: **Hidraulikus robotkar átalakítása**, Szakdolgozat, SZG-2009-07., Szerszámgépek Tanszéke, 2007.
- [4] Páczelt I., Szabó T., Baksa A.: **A végelelem-módszer alapjai**, 2007.
- [5] [Scilab 5.2.1 hivatalos weboldala](#)