



MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Hatványközeg hasonlósági megoldásai konvektív felületi peremfeltétellel

Csáti Zoltán
III. éves BSc gépészmérnök hallgató

Konzulens:
Vadászné dr. Bognár Gabriella
egyetemi docens
Gépészmérnöki és Informatikai Kar

Miskolc, 2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	3
2. Az alapegyenletek származtatása.....	5
3. Hasonlósági egyenletek származtatása	9
4. Az egyenletek numerikus megoldása	17
5. Összefoglaló, következtetések és további célok	23
6. Irodalomjegyzék.....	25

1. Bevezetés

Szabad áramlás hatására síklap felett kialakuló hidrodinamikus és termikus határréteg vizsgálata klasszikus feladat az áramlástanban [2]. Csaknem 150 évvel ezelőtt Leonhard Euler leírta a folyadékáramlást két kapcsolt nemlineáris parciális differenciálegyenlettel térben változó háromdimenziós nyomás- és sebességtérre. Euler egyenletében nem volt figyelembe véve a folyadékreszek mozgásakor fellépő súrlódási erő. 1822-ben Claude-Louis Navier [16] és tőle függetlenül 1845-ben George Stokes [22] levezette a róluk elnevezett Navier-Stokes egyenletet, egy másodrendű elliptikus parciális differenciálegyenletet, amelyre eddig nem sikerült analitikus megoldást adni. Súrlódásmentes esetben a Navier-Stokes egyenlet az Euler egyenletbe megy át. 1904-ben Ludwig Prandtl vezette be a határréteg fogalmát [17]. Ez alapján az áramlási tér két részre osztható: a felület körüli vékony rétegre, az úgynevezett határrétegre, ahol a súrlódásnak döntő szerepe van és a test felületétől távolabb eső részre, ahol a súrlódás hatása elhanyagolható. A test felületén a sebesség zérus a tapadás törvényének értelmében, a határrétegben rohamosan növekszik, míg azon kívül a sebesség közel állandó [6]. Prandtl elméletének segítségével lehetővé vált, hogy a Navier-Stokes egyenleteket az egyszerűbb parabolikus típusú határréteg-egyenletté alakítsuk. 1908-ban Heinrich Blasius megoldást közölt síklap és körhenger körüli lamináris határréteg áramlásra [3]. 1921-ben Kármán Tódor [12] és Pohlhausen kifejlesztett egy közelítő módszert, amelyet sikerrel alkalmaztak határréteg áramlásoknál. Folyadékmozgással kapcsolatos problémákra egzakt megoldást adni igen nehéz, sokszor nem is lehetséges még egyszerű geometria és konstans fizikai tulajdonságok mellett sem. A hasonlósági megoldás fogalmát először Blasius vezette be, amikor Prandtl határréteg elméletére megoldást adott [3]. A hasonlósági megoldás bevezetése olyan eljárás, amely során a változók száma csökkenthető koordináta-transzformációval. A hasonlósági analízis előnye az,

hogy a parciális differenciálegyenletek közönséges differenciálegyenletekké redukálhatók, amelyeket numerikusan megoldhatunk. Hasonlósági analízis ott alkalmazható, ahol a tulajdonságokat inkább a változás folyamata, mint a geometria határozza meg. Ez jellemző például a tranziens diffúzóra és kétdimenziós állandósult áramlások sebességének, hőmérsékletének és/vagy koncentrációjának eloszlására. Hasonlósági megoldásokat csak bizonyos geometriák és peremfeltételek esetén állíthatunk elő [17]. Hasonlósági megoldás létezik termikus határrétegre is. Nem-newtoni folyadékra vonatkozó határrétegegyenletet először Schowalter és Acrivos vizsgálták [1], [19].

A nem-newtoni folyadékoknak egyre jelentősebb szerepe van az iparban a műanyagok egyre szélesebb körű elterjedésével. A vizsgált modell felhasználható a mérnöki gyakorlat során például lehűlő polimer lemeztáblák, hártyák, papírgyártás, üvegfújás, műanyagok extrudálása esetén [10]. A konvektív hőátadás igen fontos az olyan folyamatoknál, ahol magas hőmérséklet lép fel; jellemzően gázturbináknál, atomerőműveknél, hőenergia tárolókban. Alkalmas még a felületen történő szívás (szennyeződések eltávolítása) és injektálás (adalékanyagok felületre juttatása, felület hűtése) szimulálására.

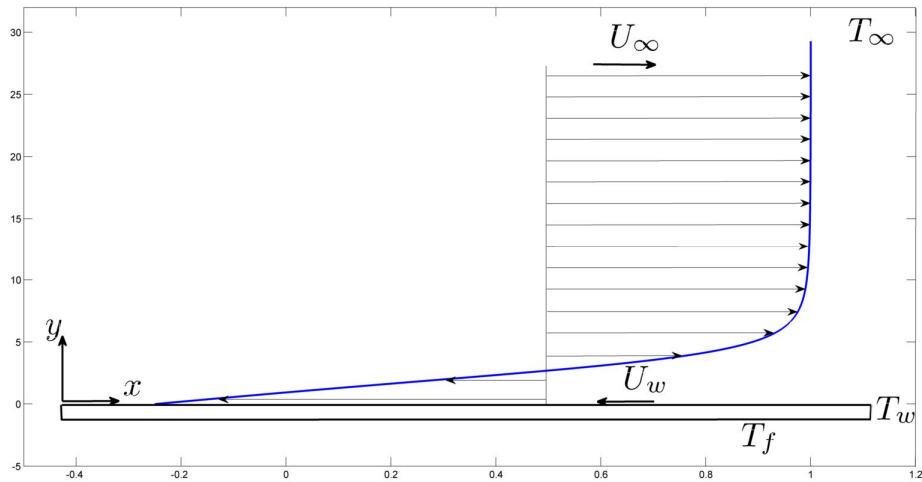
Jelen dolgozatban arra az esetre kerestünk módszert, amikor a síklap impermeábilis, alulról folyadék melegíti, állandó sebességgel mozog az áramlás vízszintes komponensének irányában (azzal megegyező vagy ellentétes irányban) és az áramlási iránnyal párhuzamos kiterjedése végtelen. Az áramló közeg viszkózus, összenyomhatatlan nem-newtoni folyadék. A vizsgálatot állandósult állapotban és konvektív felületi peremfeltétel mellett végezzük, valamint feltételeztük, hogy a fal felületén kialakuló határréteg lamináris.

Az elemzés célja meghatározni a sebesség és hőmérséklet eloszlását a lamináris határrétegben, ahol a súrlódásnak döntő szerepe van.

Számított eredményeinket összehasonlítottuk newtoni közeg és rögzített síklap esetén az irodalomban ismert adatokkal Aziz [2] és Ishak [10] dolgozatai alapján.

2. Az alapegyenletek származtatása

Vegyük fel a koordináta-rendszer x tengelyét a síklap áramló folyadékkal érintkező felületére illesztve, az áramlási irányt pozitívnak véve, az y tengelyt erre merőlegesen (lásd 1. ábra). A közeg u áramlási sebessége a helykoordináták függvénye, mert a folyamatot időben állandónak tekintjük. Az áramló folyadék hőmérséklete T_∞ és sebessége U_∞ , a síklapot alulról melegítő közeg hőmérsékletét T_f -vel és a fal hőmérsékletét T_w -vel jelöljük.



1. ábra

A következőkben a határréteg áramlását leíró egyenletet adjuk meg, melyet a Navier-Stokes tételből származtatnak számos feltétel figyelembe vételével [2], [6], [10]:

- síkbeli áramlással számolunk, azaz $\vec{v}(x, y) = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$,
- a falra merőleges sebességkomponens lényegesen kisebb a fallal párhuzamos komponensnél: $v \ll u$,

- a sebességkomponensek falra merőleges változása lényegesen nagyobb a fallal párhuzamos változásnál: $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y}$,
- az áramlás stacionárius,
- a ρ sűrűség állandó, a közeg összenyomhatatlan,
- a térerősséggel nem számolunk.

Ezen feltevések alkalmazásával a kontinuitási egyenlet és a Navier-Stokes egyenletek az alábbiak szerint írhatóak:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right), \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right), \quad (2.3)$$

ahol p a nyomást, ρ a folyadék sűrűségét jelöli és τ_{yx} az y normálisú síkon x irányban ébredő nyírófeszültséget.

A (2.3) egyenlet a feltevések miatt tovább egyszerűsödik, ugyanis $\frac{\partial p}{\partial y} \cong 0$ (lásd

[15]). Elhanyagoltuk (2.2)-ből a nyomás x irányú megváltozását is, tehát a nyomásgradienssel nem számoltunk. Végül felírhatjuk a mozgásegyenletet végső alakjában állandósult, kétdimenziós, lamináris áramlásnál összenyomhatatlan folyadéokra:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Célunk nem-newtoni folyadék áramlásának vizsgálata.

Ismert, hogy Newton viszkozitási törvényének értelmében a nyírófeszültség és a deformációsebesség között a $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ összefüggés érvényes. Newtoni

folyadékokra a μ dinamikai viszkozitás állandó. Ebben a dolgozatban olyan nem-

newtoni közeget vizsgáltunk, melyre $\mu = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}$ érvényes az Ostwald-de Waele

hatványtörvény alapján, ahol K és n pozitív állandók, a konzisztencia indexet és a hatványtörvény kitevőt jelölik (lásd [6], [15]). Az $n < 1$ értékeknél a folyadékot pszeudoplasztikusnak, $n = 1$ esetén newtoninak, $n > 1$ -nél dilatálónak nevezik. Pszeudoplasztikus folyadék például a polimer olvadékok, a láva vagy a mindennapokban előforduló festékek és ketchup. Dilatáló folyadék például a víz és homok elegye.

A csúsztatófeszültségre ekkor a

$$\tau_{yx} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.5)$$

összefüggés áll fenn.

A kinematikai viszkozitás a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa, tehát

$$\nu = \gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}, \text{ ahol } \gamma = \frac{K}{\rho}. \quad (2.6)$$

Az energiaegyenlet [2] és [10] alapján az alábbi alakba egyszerűsíthető:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_t \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (2.7)$$

ahol T a folyadék hőmérséklete a határrétegben és α_t a hővezetési tényező,

melyet Yao, Fang és Zhong [23] dolgozata alapján $\alpha_t = \omega \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}$ alakban vesszük

fel ω pozitív konstanssal.

A (2.1), (2.4) és (2.7) differenciálegyenlethez szükséges peremfeltételeket a következő gondolatmenet segítségével adjuk meg.

Feltesszük, hogy a síklap felületétől elegendő távolságra a folyadék sebessége és hőmérséklete állandó értékre áll be, nagyságuk ennek megfelelően U_∞ és T_∞ . A lemez folyadékhoz viszonyított x irányú relatív sebessége a lap felületén nem zérus, mert a síklap állandó sebességgel mozog a közegben [4], [11]. A v sebességkomponensre igaz, hogy nagysága a felületen nulla, mivel a lap impermeábilis, így nincs átáramlás az alsó T_f hőmérsékletű folyadéktérből a felsőbe:

$$u(x,0) = -U_w \quad (2.8)$$

$$v(x,0) = 0 \quad (2.9)$$

$$u(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U_\infty \quad (2.10)$$

$$-k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_f (T_f - T_w) \quad (2.11)$$

$$T(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_\infty, \quad (2.12)$$

ahol U_w a síklap sebessége, $h_f = h_f(x)$ a hőátadási tényező, T_w a fal hőmérséklete, melyre fennállnak az alábbi összefüggések: $T_f > T_w > T_\infty$.

A következő fejezetben a (2.1), (2.4), (2.7) differenciálegyenlet-rendszer megoldását vizsgáljuk a (2.8)-(2.12) peremfeltételekkel hasonlósági megoldásokat alkalmazva.

3. Hasonlósági egyenletek származtatása

Először a mozgásegyenlet alakját adjuk meg hasonlósági változók bevezetésével. A (2.4) egyenletet a nyírófeszültség helyett a sebességkoordinátákkal írjuk fel úgy, hogy alkalmazzuk a (2.5) és (2.6) összefüggéseket:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Vezessük be a $\psi(x, y)$ áramfüggvényt $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ alapján. Így a fenti egyenlet a következő lesz:

$$\psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} = \gamma \left(\left| \psi_{yy} \right|^{n-1} \psi_{yy} \right)_y \quad (3.1)$$

és ψ -vel a kontinuitási egyenlet automatikusan teljesül.

Az alsó indexek az adott változó szerinti parciális deriválást jelölik. Vezessük be az η hasonlósági változót és keressük az áramfüggvényt a következő alakban:

$$\eta = a \frac{y}{x^\beta},$$

$$\psi = b x^{-\alpha} f(\eta),$$

ahol a , b , α , β konstansok, melyeket az alábbiakban ismertett módon választunk meg.

Állítsuk elő a (3.1) egyenlethez a deriváltakat.

$$\psi_x = -b x^{-\alpha-1} [\alpha f + \beta \eta f']$$

$$\psi_y = a b x^{-\alpha-\beta} f'$$

$$\psi_{yy} = a^2 b x^{-\alpha-2\beta} f''$$

$$\psi_{yx} = -abx^{-\alpha-\beta-1}[(\alpha + \beta) f' + \beta \eta f''],$$

ahol f' , f'' az f függvény η változó szerinti első illetve második deriváltját jelöli.

Ezeket felhasználva a (3.1) differenciálegyenlet

$$\begin{aligned} & abx^{-\alpha-\beta} f' \left(-abx^{-\alpha-\beta-1} \right) [(\alpha + \beta) f' + \beta \eta f''] + bx^{-\alpha-1} [\alpha f + \beta \eta f'] a^2 b x^{-\alpha-2\beta} f'' = \\ & = \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| a^2 b x^{-\alpha-2\beta} f'' \right|^{n-1} a^2 b x^{-\alpha-2\beta} f'' \right]. \end{aligned}$$

Egyszerűsítés után az egyenlet:

$$a^2 b^2 x^{-2\alpha-2\beta-1} [\alpha f f'' - (\alpha + \beta) f'^2] = \gamma (a^2 b)^n x^{(-\alpha-2\beta)n} \frac{a}{x^\beta} \left[|f''|^{n-1} f'' \right] \quad (3.2)$$

Ha mindkét oldalon az x kitevői megegyeznek:

$$-2\alpha - 2\beta - 1 = (-\alpha - 2\beta)n - \beta \Rightarrow (2n - 1)\beta + (n - 2)\alpha = 1. \quad (3.3)$$

A (3.2) differenciálegyenlet bal és jobb oldalán lévő konstans szorzók egyenlőségéből az a , b és γ paraméterekre

$$a^2 b^2 = \gamma (a^2 b)^n a \Rightarrow \gamma a^{2n-1} b^{n-2} = 1 \quad (3.4)$$

A peremfeltételeket a ψ áramfüggvényre felírva további kapcsolatot létesíthetünk a paraméterek között.

A (2.10) peremfeltétel ha $y \rightarrow \infty$, tehát $\eta \rightarrow \infty$:

$$\psi_y(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y(x, y) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = abx^{-\alpha-\beta} f'(\eta) = U_\infty.$$

Tehát így $abx^{-\alpha-\beta} \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = U_\infty.$

Válasszuk $f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$ -nek, valamint legyen

$$\alpha + \beta = 0. \quad (3.5)$$

$$\text{Innen következik, hogy } ab = U_{\infty}. \quad (3.6)$$

Azonban az $\alpha + \beta = 0$ egyenletből és (3.3)-ból

$$\beta = -\alpha = \frac{1}{n+1}. \quad (3.7)$$

A (2.9) peremfeltétel új alakja ekkor az $y=0$ ($\eta=0$) helyen

$$-\psi_x(x,0) = \frac{b}{n+1} x^{-\frac{n}{n+1}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] = 0.$$

A fenti egyenlet $\eta=0$ esetén, tetszőleges x -re fennáll, ha

$$f(0) = 0. \quad (3.7)$$

Végül a (2.8)-at átírva kapjuk meg a mozgásegyenlet hasonlósági alakjához tartozó harmadik peremfeltételt:

$$\psi_y(x,0) = abx^{-\alpha-\beta} f'(0) = -U_w.$$

Felhasználva (3.5)-öt és (3.6)-ot

$$f'(0) = -\frac{U_w}{U_{\infty}}. \quad (3.8)$$

Jelöljük a sebességek hányadosát λ -val, azaz $\lambda = \frac{U_w}{U_{\infty}}$.

A λ paraméter pozitív, ha U_w és U_{∞} előjele megegyezik, tehát a síklap az áramlás irányával szemben mozog; negatív, ha a síklap mozgása és az áramlás iránya megegyezik, míg $\lambda = 0$, ha a síklap áll.

A fentiek alapján összefoglaljuk a paraméterekre kapott értékeket:

$$\alpha = -\frac{1}{n+1}$$

$$\beta = \frac{1}{n+1}$$

$$a = \gamma^{-\frac{1}{n+1}} U_{\infty}^{\frac{2-n}{n+1}}$$

$$b = \gamma^{\frac{1}{n+1}} U_{\infty}^{\frac{2n-1}{n+1}}$$

Ezen értékekkel a hasonlósági változó és az áramfüggvény alakja:

$$\eta = a \frac{y}{x^{\beta}} = \eta = \gamma^{-\frac{1}{n+1}} U_{\infty}^{\frac{2-n}{n+1}} \frac{y}{\frac{1}{x^{n+1}}} \quad (3.9)$$

$$\psi(x, y) = bx^{-\alpha} f(\eta) = \gamma^{\frac{1}{n+1}} U_{\infty}^{\frac{2n-1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}} f(\eta)$$

Az eredeti sebesség összetevők a dimenziómentes változókkal:

$$u(x, y) = U_{\infty} f'(\eta)$$

$$v(x, y) = \frac{U_{\infty}}{n+1} \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)),$$

ahol

$$\eta = \text{Re}_x^{\frac{1}{n+1}} \frac{y}{x} \quad \text{és} \quad \text{Re}_x = \frac{U_{\infty}^{2-n} x^n}{\gamma}$$

a lokális Reynolds-számot jelöli.

Tehát a megoldandó (3.1) mozgásegyenlet a peremfeltételekkel együtt az alábbi alakban írható fel:

$$\left[|f'''|^{n-1} f''' \right]' + \frac{1}{n+1} f f'' = 0 \quad (3.10)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\lambda, \quad f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1. \quad (3.11)$$

Az f értéke λ -tól és n -től függően változik. Ha $\lambda = 0$ és $n = 1$, akkor (3.10), (3.11) a Blasius problémával egyezik meg [3]. Newtoni folyadékokra először Steinheuer mutatta meg 1968-ban, hogy a (3.10), (3.11) peremértékfeladatnak csak akkor van megoldása, ha $\lambda < \lambda_{krit}$ és λ_{krit} numerikus értékét 0.3541-ben adta meg [21]. Később ugyanezt a problémát az 1970-es években Klemp és Acrivos vizsgálták ([13], [14]), a megoldások létezését és unicitását Hussaini és Lakin [7] valamint Hussaini, Lakin és Nachman [8] tanulmányozták 1986-ban illetve 1987-ben newtoni közegekre. Hatványtörvény szerinti nem-newtoni folyadékok esetén szintén meghatározható ez a kritikus λ érték, mely függ az n hatványkitevőtől ([4], [11]). Számításaink során figyelembe fogjuk venni ezt a kritikus számot a λ értékek megválasztása során úgy, hogy $\lambda < \lambda_{krit}(n)$ legyen.

n	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
λ_{krit}	0.3269	0.3333	0.3391	0.3445	0.3495	0.3541	0.3584	0.3624	0.3661	0.3696	0.3728

1. táblázat: λ_{krit} értékei [4] alapján

Rátérünk a (2.7) energiaegyenlet hasonlósági változókkal való felírására.

A $T(x, y)$ hőmérséklet helyett vezessük be a dimenziómentes w függvényt a

$$w(x, y) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_f - T_\infty}$$

alakban.

Alkalmazva a $\Theta(\eta) = w(x, y)$ dimenziómentes hőmérsékletet:

$$T = T_\infty + \Theta(\eta)(T_f - T_\infty). \quad (3.12)$$

A (2.11) peremfeltételhez előállítjuk a T hőmérséklet y szerinti parciális deriváltját:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Theta'(\eta) \frac{\gamma^{-\frac{1}{n+1}} U_\infty^{\frac{2-n}{n+1}}}{x^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Ezt behelyettesítjük (2.11)-be:

$$-k \frac{\gamma^{-\frac{1}{n+1}} U_\infty^{\frac{2-n}{n+1}}}{x^{\frac{1}{n+1}}} \Theta'(0) = h_f(x)(T_f - T_w),$$

azaz

$$\Theta'(0) = -x^{\frac{1}{n+1}} h_f(x) \frac{\gamma^{\frac{1}{n+1}}}{k U_\infty^{\frac{2-n}{n+1}}} (T_f - T_w).$$

Tehát hasonlósági megoldás csak akkor létezhet, ha $h_f = c x^{-\frac{1}{n+1}}$, ahol c konstans. Ez az összefüggés hasonló szerkezetű Aziz [2] által newtoni közegre levezetett képlettel. Ő arra a következtetésre jutott $n = 1$ esetén, hogy hasonlósági megoldás a termikus határrétegre jelen dolgozattal azonos feltételek mellett

csak akkor létezik, ha h_f arányos $x^{-\frac{1}{2}}$ -nel. A numerikus megoldásai azonban nem voltak elég pontosak, ezeket Ishak később javította [10]. Alkalmazzuk (3.12)-t, amellyel:

$$\Theta'(0) = -\frac{c}{k} \left(\frac{\gamma}{U_\infty^{2-n}} \right)^{\frac{1}{n+1}} (T_f - T_\infty) [1 - \Theta(0)] = -\bar{a} [1 - \Theta(0)], \quad (3.13)$$

$$\text{az } \bar{a} = \frac{c}{k} \left(\frac{\gamma}{U_\infty^{2-n}} \right)^{\frac{1}{n+1}} (T_f - T_\infty) \text{ jelölést alkalmazva.}$$

A (2.12) peremfeltételre az előzőek alapján:

$$\Theta(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 0. \quad (3.14)$$

A (2.7) energiaegyenlet átírása ψ és w dimenziómentes változókkal és

$$\text{felhasználva, hogy } \alpha_t = \omega \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} = \omega \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|^{n-1} :$$

$$\psi_y \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial w}{\partial y} = \omega \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \psi_{yy} \right|^{n-1} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3.15)$$

Számítsuk ki w deriváltjait:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\beta}{x} \eta \Theta'(\eta),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{a}{x^\beta} \Theta'(\eta).$$

Így a (3.15) differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned}
 & abx^{-\alpha-\beta} f' \left(-\frac{b}{x} \eta \right) \Theta' + bx^{-\alpha-1} [\alpha f + \beta \eta f'] \frac{a}{x^\beta} \Theta' = \\
 & = \omega \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left| a^2 bx^{-\alpha-2\beta} f'' \right|^{n-1} \frac{a}{x^\beta} \Theta' \right] \frac{a}{x^\beta}.
 \end{aligned}$$

Egyszerűsítés után:

$$\frac{1}{\omega} abx^{-\alpha-\beta-1} \alpha f \Theta' = \left(a^2 b \right)^{n-1} \left| x^{-\alpha-2\beta} \right|^{n-1} \left(\frac{a}{x^\beta} \right)^2 \left[\left| f'' \right|^{n-1} \Theta' \right]'.$$

Az $\alpha = -\frac{1}{n+1}$ és $\beta = \frac{1}{n+1}$ értékekkel fenti egyenlet:

$$\frac{1}{\omega(n+1)} f \Theta' + a^{2n-1} b^{n-2} \left[\left| f'' \right|^{n-1} \Theta' \right]' = 0, \quad (3.16)$$

továbbá

$$a^{2n-1} b^{n-2} = \left(\gamma^{-\frac{1}{n+1}} U_\infty^{\frac{2-n}{n+1}} \right)^{2n-1} \left(\gamma^{\frac{1}{n+1}} U_\infty^{\frac{2n-1}{n+1}} \right)^{n-2} = \frac{1}{\gamma},$$

melyet behelyettesítve (3.16)-ba kapjuk az energiaegyenlet és a hozzá tartozó peremfeltételek végső alakját:

$$\frac{\text{Pr}}{(n+1)} f \Theta' + \left[\left| f'' \right|^{n-1} \Theta' \right]' = 0 \quad (3.17)$$

$$\Theta'(0) = -\bar{a} (1 - \Theta(0)), \quad \Theta(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 0, \quad (3.18)$$

ahol $\text{Pr} = \frac{\gamma}{\omega}$ a Prandtl számot jelöli.

4. Az egyenletek numerikus megoldása

Célunk a (3.10)-(3.17) kapcsolt differenciálegyenletekből álló peremértékfeladat numerikus megoldása. Egzakt analitikus megoldás tudomásunk szerint nincs, ezért numerikus módszerrel dolgozunk. A számítást a Maple 15 alapértelmezett peremértékfeladat megoldójával végeztük, amely a véges differenciák módszerét használja Richardson extrapolációs módszerrel kiegészítve. Eredetileg a MATLAB R2011a bvp5c kollokációs módszerét próbáltuk alkalmazni [20], de a $\Theta(\eta)$ függvényre nem adott megoldást.

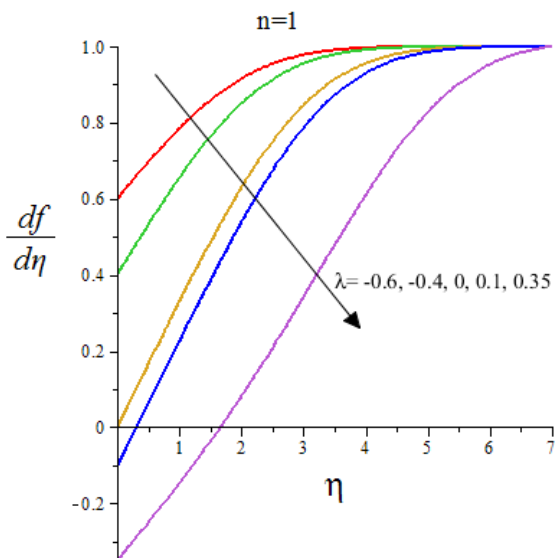
A megoldásokat a differenciálegyenletekben és a peremfeltételekben szereplő négy paraméter (n , Pr , λ , $\bar{a}$) közül egy változtatásával, a többi fix értékre való állításával nyertük.

A sebesség u komponensével arányos f' , mivel $f'(\eta) = \frac{u(x,y)}{U_\infty}$. A $\Theta(\eta)$

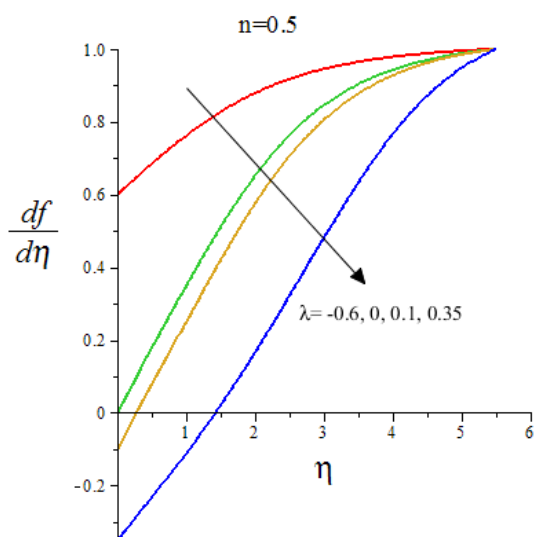
grafikonokból a $T(x,y)$ hőmérséklet változásokra következtethetünk, továbbá $\Theta(0)$ -ból a fal hőmérséklete számítható $T_w = T_\infty + \Theta(0)(T_f - T_\infty)$ alapján.

Először $f'(\eta)$ -ra és a határréteg η vastagságára vizsgáljuk n és λ változtatásának hatását. Utána n , Pr , λ és $\bar{a}$ hatásait vizsgáljuk $\Theta(\eta)$ -ra vonatkozóan.

Nézzük először a λ változtatásával járó eredményeket. A [4], [8] és [11] dolgozatok alapján λ nem vehet fel akármekkora értéket. A dolgozatokból látszik, hogy n csökkentésével csökken az λ_{krit} érték, amely esetén még létezik megoldás. Ennek figyelembevételével a három másik paraméter változtatásával kapott integrálgörbék közül néhányat bemutatunk a következő ábrákon $\Theta(\eta)$ -ra és $f'(\eta)$ -ra.



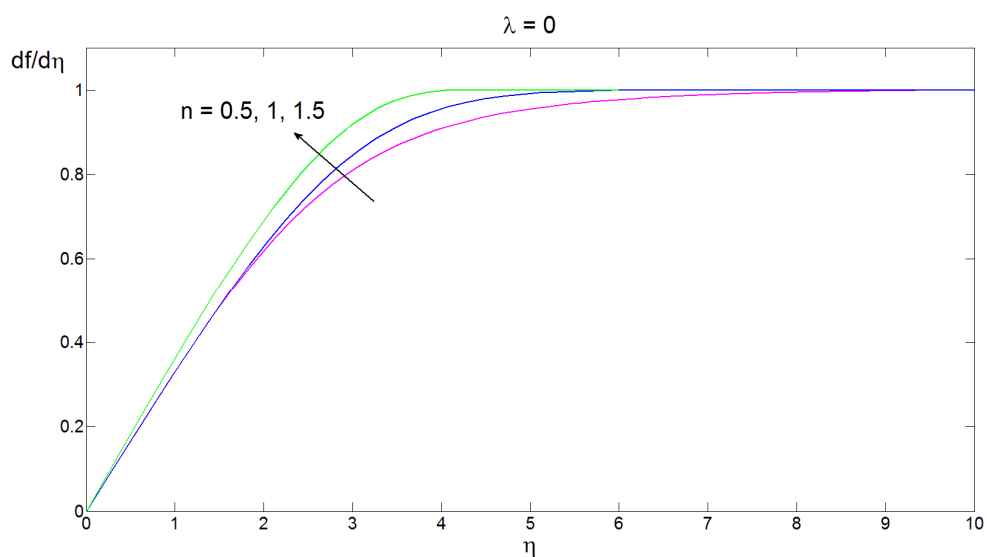
2. ábra



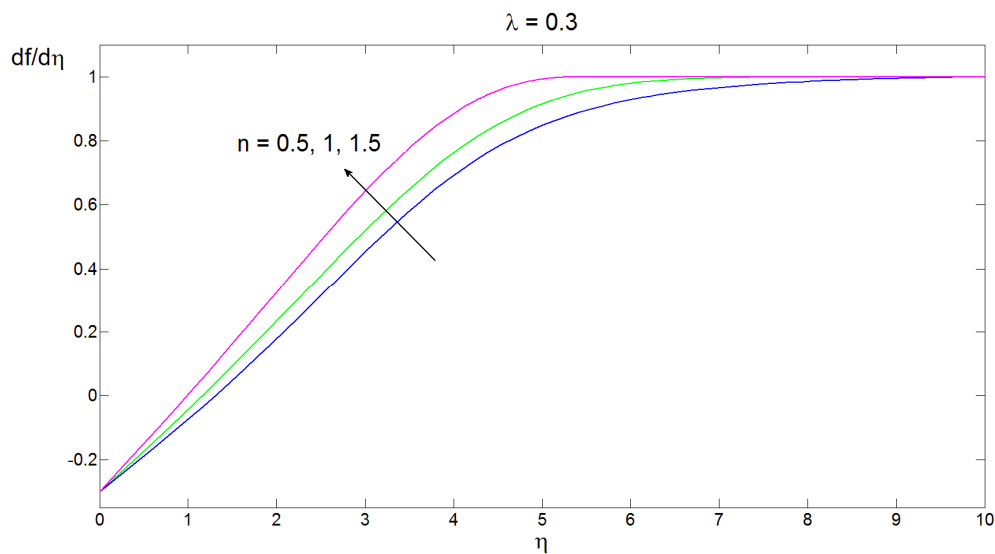
3. ábra

A 2-3. ábrán λ hatását láthatjuk $f'(\eta)$ -ra nézve. A 2. ábrán egy newtoni, a 3. ábrán egy pszeudoplasztikus folyadékra. Megállapíthatjuk, hogy a határréteg vastagságát növeli λ értékének emelése.

Nézzük most n változtatásának eredményét az $f'(\eta)$ grafikonjára.



4. ábra

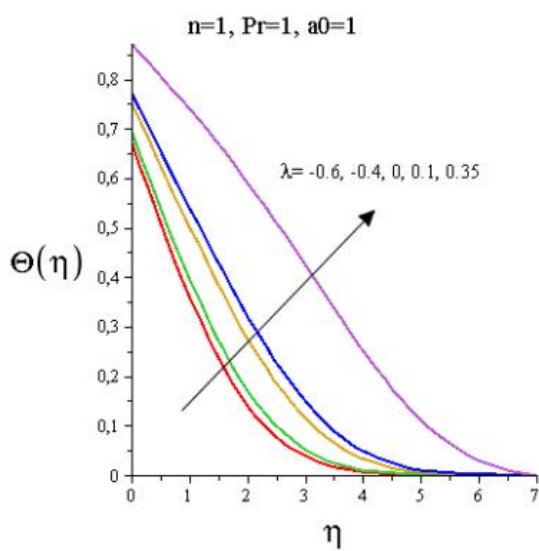


5. ábra

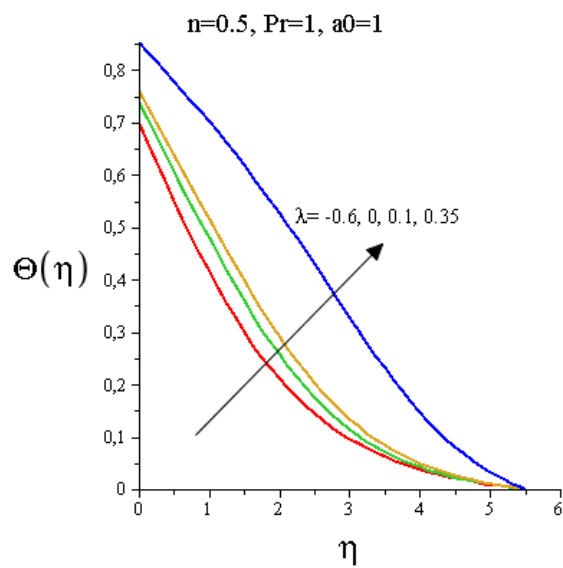
A 4. ábra álló síklap, az 5. ábra az áramlás irányával szemben mozgó lap felett kialakuló határrétegbeli sebességeloszlást mutatja pszeudoplasztikus folyadéokra.

A továbbiakban a paraméterek $\Theta(\eta)$ -ra gyakorolt hatását mutatjuk meg. Az ábrákon $\bar{a}$ -t a_0 -val jelöltük.

Vegyük először λ módosításának hatását.



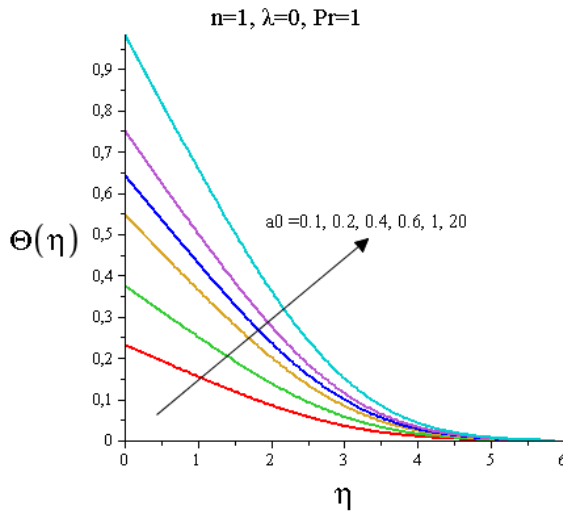
6. ábra



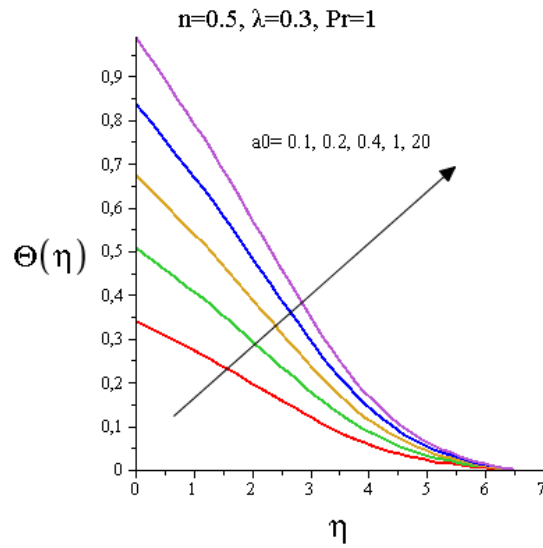
7. ábra

A 6. és 7. ábrán a 2. és 3. ábrához hasonlóan egy newtoni és egy nem-newtoni közeget szemléltetünk $\Theta(\eta)$ -ra nézve. Megállapítható, hogy λ növelése mind a termikus határréteg vastagságát, mind $\Theta(0)$ -t, így a fal hőmérsékletét növeli.

A következő két grafikon az $\bar{a}$ változtatásának hatását mutatja a 8. ábrán newtoni folyadékokra, álló lap, a 9. ábrán nem-newtoni közegre mozgó lap esetén. Az $\bar{a}$ növelése a $\Theta(0)$ értékét növeli, tehát a fal hőmérséklete nő.



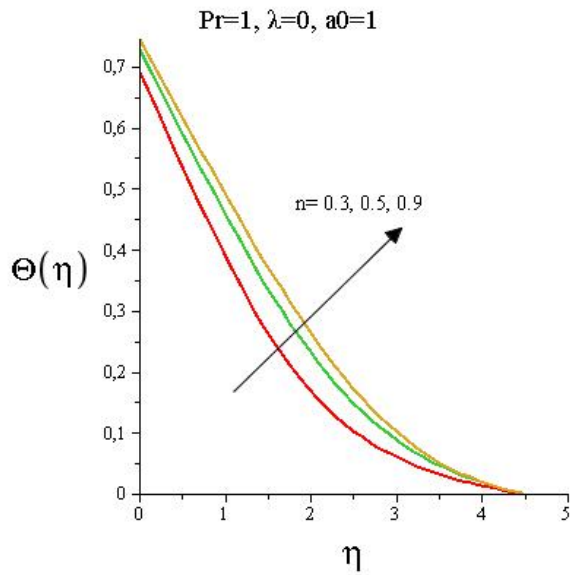
8. ábra



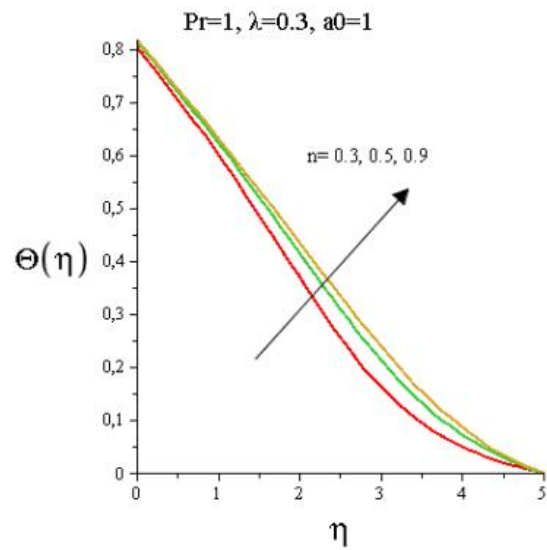
9. ábra

Az $\bar{a}$ változtatása a termikus határréteg vastagságát nem befolyásolja. Ugyanezt a megállapítást tette newtoni folyadékokra Aziz [2].

Változtassuk most az n hatványtörvény kitevőt. Az eredményeket a 10. és a 11. ábra mutatja. Az n növelése a fal hőmérsékletét növeli.

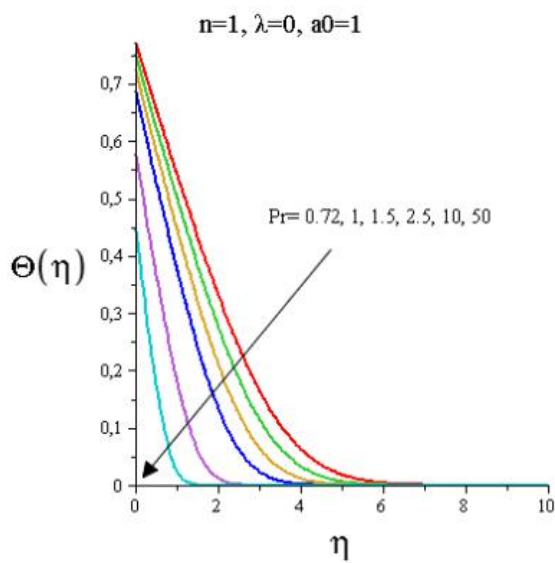


10. ábra

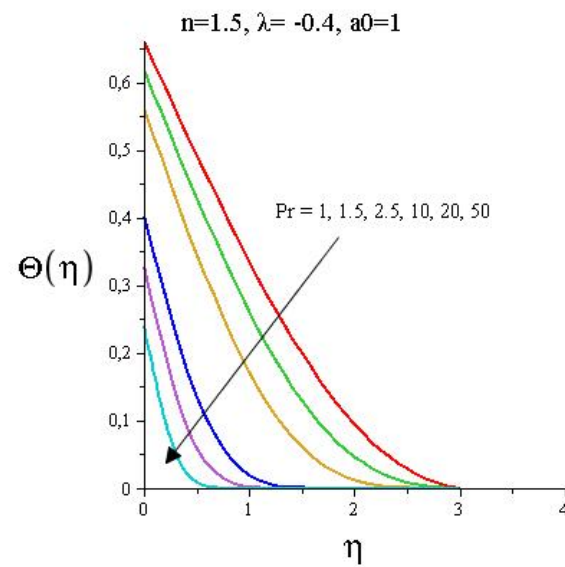


11. ábra

Végül a Prandtl számot módosítjuk a többi paraméter fix értéken tartása mellett.



12. ábra



13. ábra

A 12. és 13. ábra a kapott görbékét ábrázolja különböző Prandtl számok mellett. A 12. ábra álló síklap felett áramló newtoni folyadékot, míg a 13. ábra mozgó lap

felett áramló dilatáló közeget szemléltet. Látható, hogy a Prandtl szám növelése a termikus határreteg vastagságát és a fal hőmérsékletét jelentősen csökkenti.

A 2. táblázatban megadtuk $\Theta(0)$ értékeit különböző paraméterek mellett. Mivel a célunk nem-newtoni folyadék vizsgálata volt mozgó síklap esetén, ezért ezek hatásait számoltuk.

	Pr = 0.72, $n = 0.5$		Pr = 0.72, $n = 1$		Pr = 0.72, $n = 1.5$	
$\bar{a}$	$\lambda = -0.4$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = -0.4$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = -0.4$	$\lambda = 0.2$
0.1	0.202980	0.276683	0.207237	0.831796	0.184380	0.273179
0.5	0.560123	0.656664	0.566548	0.961128	0.530583	0.652690
1	0.718050	0.792754	0.723307	0.980179	0.693308	0.789852
5	0.927186	0.950313	0.928930	0.995972	0.918719	0.949476
10	0.962218	0.974523	0.963156	0.997982	0.957638	0.974083
20	0.980745	0.987097	0.981232	0.998990	0.978361	0.986872

2. táblázat: $\Theta(0)$ értékei különböző n , λ , $\bar{a}$ esetén

Számításaink $n = 1$, $\lambda = 0$, és $\bar{a}$ változtatása esetén megegyeznek Aziz [2] és Ishak [10] értékeivel (lásd 3. táblázat).

$\bar{a}$	Pr = 0.72, $n = 1$, $\lambda = 0$
0.1	0.251498
0.5	0.626867
1	0.770643
5	0.943821
10	0.971098
20	0.985337

3. táblázat: $\Theta(0)$ értékei Pr = 0.72, $n = 1$, $\lambda = 0$ esetén $\bar{a}$ változtatásával

5. Összefoglaló, következtetések és további célok

Állandósult áramlásba helyezett síklap felületén létrejövő hidrodinamikus és termikus határréteget vizsgáltuk úgy, hogy a nem áteresztő lemezt alulról a lemez hőmérsékleténél melegebb folyadék hevítette. Elemeztük azt az esetet amikor a síklap állt és azt is, amikor mozgott a folyadékhoz képest, úgy, hogy közben konvektív felületi peremfeltételt feltételeztünk. A (3.10)-(3.17) egyenletrendszer megoldva meghatároztuk a dimenziómentes sebesség és a hőmérséklet eloszlását a megfelelő határrétegekben.

Megállapítottuk, hogy hasonlósági megoldás csak akkor létezik nem-newtoni

folyadék hőmérsékletmezőjére, ha $h_f(x) = cx^{-\frac{1}{n+1}}$.

Az $\bar{a}$, λ , n , Pr paraméterek $\Theta(\eta)$ -ra és $f'(\eta)$ -ra kifejtett hatásait külön-külön néztük. Hatásuk összeadódott, összefoglalásként megadjuk legfőbb jellemzőjüket.

1. λ változtatásának hatása

- az $f'(0) = -\lambda$ peremfeltétel miatt $f'(\eta)$ grafikonjának kezdőpontja eltolódott a függőleges tengely mentén
- a $\Theta(\eta)$ konvexitása megváltozott az említett λ_{krit} értékhez közelítve λ -t
- a $\Theta(0)$ értékek növekedtek, $f'(0)$ értékek csökkentek a peremfeltétel miatt, ahogy λ -t növeltük
- a λ növelése mind a dinamikus, mind a termikus határréteg vastagságát növeli

2. $\bar{a}$ változtatásának hatása

- az $f'(\eta)$ -t nem befolyásolta, mert sem a mozgásegyenletben, sem az ahhoz tartozó peremfeltételekben nem szerepel $\bar{a}$
- növelése a $\Theta(0)$ értékét növeli

- $\bar{a} = 20$ felett azt tapasztaltuk, hogy a változás minimális
3. Pr változtatásának hatása
- az $f'(\eta)$ -t nem befolyásolta, mert sem a mozgásegyenletben, sem az ahhoz tartozó peremfeltételekben a Prandtl szám nem szerepel
 - a termikus határréteg vastagságát a Pr növelése csökkenti
4. n változtatásának hatása
- n csökkentésével mindkét határréteg vastagsága csökken, amint ez a 4., 5. és 10., 11. ábrán látható

További céljaink, hogy

- a fenti vizsgálatainkat permeábilis lapra is elvégezzük és a permeabilitás hatását is elemezzük, valamint
- a (2.1) (2.4) és (2.7) parciális differenciálegyenlet-rendszert a hozzá tartozó (2.8)-(2.12) peremfeltételekkel végeselem módszerrel megoldjuk, anélkül, hogy hasonlósági transzformációt alkalmaznánk és összevetjük az így kapott megoldásokat a jelenlegi eredményekkel.

6. Irodalomjegyzék

- [1] Acrivos, A., Shah, M. J., Petersen, E. E.: Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external bodies. *AIChE J.* **6** (1960), 312.
- [2] Aziz A.: A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **14** (2009), 1064-1068.
- [3] Blasius H.: Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.*, **56** (1908), 1-37.
- [4] Bognár G. : On similarity solutions of boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids, *IMA Journal of Applied Mathematics* (2011) 1-17.
- [5] Bognár G., Hriczó K. : Similarity Solutions to Thermal Boundary Layer Model of a non-Newtonian Fluid with a Convective Surface Boundary Condition, *Acta Polytechnica Hungarica* (megjelenés alatt)
- [6] F. M. White: *Viscous Fluid Flow*, second ed., McGraw Hill, New York, 1991.
- [7] Hussaini M.Y., Lakin W. D : Existence and non-uniqueness of similarity solutions of a boundary-layer problem. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **39** (1986), 15-24.
- [8] Hussaini M.Y., Lakin W. D, Nachman, A. : On similarity solutions of a boundary layer problem with an upstream moving wall, *SIAM J. Appl. Math.* **47** (1987), 699-709.
- [9] Ishak A., Yacob N. A., Bachok N. : Radiation effects on the thermal boundary layer flow over a moving plate with convective boundary condition, *Meccanica* **46** (2011), 795-801.

- [10] Ishak A.: Similarity solutions for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition, *Appl. Math. Comput.* **217** (2010), 837-842.
- [11] Ishak A., Bachok N. : Power-law Fluid Flow on a Moving Wall, *European Journal of Scientific Research* **34** (2009), 55-60
- [12] Von Kármán T.: Über laminare and turbulente Reibung, *ZAMM*, **1** (1921), 244-247.
- [13] Klemp J. B., Acrivos A. A. : A method for integrating the boundary-layer equations through a region of reverse flow, *J. Fluid Mech.* **53** (1972), 177-199.
- [14] Klemp J. B., Acrivos A. A. : A moving-wall boundary layer with reverse flow, *J. Fluid Mech.* **76** (1976), 363-381.
- [15] Lajos T. : *Az áramlástan alapjai*, 3. kiadás, Budapest, 2008.
- [16] Navier J-C.M.: Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mém. de l'Acad. d. Sci.* **6** (1827), 389-416.
- [17] Prandtl L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904, S. 484-491, Teubner, Leipzig, 1905.
- [18] Schlichting H., Gersten K. : *Boundary layer theory*, Springer, Berlin, 2000
- [19] Schowalter, W. R.: The application of boundary-layer theory to power-law pseudoplastic fluids: similar solutions. *AIChE J.* **6** (1960), 24.
- [20] Shampine L. F., Gladwell I., Thompson F. : Solving ODEs with MATLAB, Chambridge, New York, 2003.
- [21] Steinheuer J. : Die Lösung der Blasiuschen Grenzschichtdifferentialgleichung, *Abhandlg. der Braunschweigischen Wiss. Ges.* **20** (1968), 96-125.

- [22] Stokes G.G.: On the theories of the internal friction of fluids on the motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Trans. Cambr. Phil. Soc.* **8** (1849), 287-319.
- [23] Yao S., Fang T., Zhong Y. : Heat transfer of a generalized stretching/shrinking wall problem with convective boundary conditions, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** (2011), pp. 752-760

Köszönetnyilvánítás: "A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg"