



MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Heterogén anyagú lapos görbe rudak stabilitásvizsgálata

Kiss László

II. éves MSc gépészmérnök hallgató

Konzulens:

Szeidl György

egyetemi tanár

Mechanikai Tanszék

Miskolc, 2011

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	1
2. Feltevések, alapvető összefüggések	2
2.1. Egyszerűsítő feltevések	2
2.2. Az alkalmazott koordináta-rendszer	2
2.3. Az elmozdulásvektor	3
2.4. Az alakváltozási viszonyok	4
2.5. Rúderő, hajlítónyomaték	4
3. A virtuális munka elv	5
3.1. Egyenletek a stabilitásvesztés előtti állapotra	5
3.2. Egyenletek követő terhelésre	7
3.3. Linearizált egyenletek	10
4. A stabilitásvizsgálat egyenletei merev terhelésre	11
4.1. Bevezető megjegyzések	11
4.2. Egyenletek a stabilitásvesztés előtt folyamatra	12
4.3. Stabilitásvesztés a középvonal hosszváltozása nélkül	12
4.4. Stabilitásvesztés a középvonal hosszváltozásával	13
5. Stabilitásvizsgálat vegyes peremfeltételek esetén	14
5.1. Megoldás a stabilitásvesztés előtti állapotra	14
5.2. Lineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} = 0$ feltevés mellett	17
5.3. Lineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} \neq 0$ feltevés mellett	19
5.4. Nemlineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} = 0$ feltevés mellett	21
5.5. Egy nemlineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} \neq 0$ feltevés mellett	22
5.6. Differenciálegyenletek dinamikus stabilitásvesztés esetére	23
6. Következtetések, eredmények	24
A. függelék Integrálátalakítások	26
A.1. A (11) baloldalán álló integrál átalakítása	26
A.2. A (29) egyenlet átalakítása	26
A.3. A (60) képlet levezetése röviden	28
A.4. A (79) alatti integrál számításának vázlata	29
Hivatkozások	30

1. BEVEZETÉS

A dolgozat témája keresztmetszeti inhomogenitású lapos, állandó görbületi sugarú síkbeli rudak (röviden lapos ívek) stabilitásának vizsgálata. Keresztmetszeti inhomogenitás alatt azt értjük, hogy a rúd anyagjellemzői csak a keresztmetszeti koordinátáktól függenek. Laposnak pedig akkor tekinthető egy rúd, ha a támasztávolság negyedénél nem nagyobb a rúd magassága.

A műszaki mechanika szakirodalmának csak egy kisebb része fordítja figyelmét a síkgörbe rudak stabilitási kérdéseire, holott a gyakorlati életben egyre inkább szükség van hasonló vizsgálatokra. Gondoljunk itt például az ívelt kialakítású hídszerkezetekre, ahol a teherhordó rudakat saját súlyuk és emellett az úttest súlya is terheli.

Ausztráliában az utóbbi évtizedben Y.-L. Pi, M. A. Bradford és munkatársaik több cikkben vizsgálták lapos ívek stabilitási kérdéseit, ha a rúd szimmetriatengelye mentén működő koncentrált, illetve sugárirányú megoszló erőrendszer a rúd terhelése [1, 2, 2002], [3, 2007], [4, 2008]. Az idézett három tanulmány homogén izotrop anyagú rudat és szimmetrikus támaszelrendezést tételez fel. Az eredmények azt mutatják, hogy a lapos rudak viselkedésének leírásához ajánlott nemlineáris modellt alkalmazni és a stabilitásvesztés előtti deformációk figyelembevétele is célszerű. A klasszikus rúdelmélet – lásd [5, 1961], [6, 1976] – viszont nem számol ezekkel és így pontatlanabb eredményt ad a megengedhető legnagyobb terhelésre.

M. A. Bradford és szerzőtársai [1, 2, 2002], [3, 2007], [4, 2008] nem foglalkoztak a vegyes peremfeltételek esetével. Ennek figyelembevételével az a dolgozat fő célkitűzése, hogy keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező lapos ívek esetén (a) vegyes peremfeltételek (a rúd egyik vége csuklóval van megtámasztva, a másik vége befogott) feltételezése és (b) a rúd középvonalán működő koncentrált erő, mint terhelés esetén formulát vezessen le a kritikus terhelésre mind a lineáris, mind pedig a nemlineáris elmélet alapján. Az elérni vélt eredmények két tekintetben is meghaladják M. A. Bradford és szerzőtársai eredményeit: (a) a rúd anyaga nem homogén és (b) vegyesek a peremfeltételek.

A fentiekkel összhangban a dolgozat írása során feltételeztük, hogy a rúd rugalmasági modulusa csak az η, ζ keresztmetszeti koordináták függvénye: $E = E(\eta, \zeta)$. Ez a függvény folytonos, vagy résztartományonként folytonos a keresztmetszet felett.

A teljes szöveget hat szakaszba szerveztük. A 2. FELTEVÉSEK, ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEK című szakasz röviden ismerteti a kitűzött feladattal kapcsolatos alapvető összefüggéseket és a rúdelméletben szokásos egyszerűsítő feltevéseket. A 3. A VIRTUÁLIS MUNKA ELV című szakasz az egyensúlyi egyenletek és dinamikai peremfeltételek levezetése a stabilitásvesztés előtti és stabilitásvesztés utáni állapotra mindkét végén rugalmasan (spirálrugóval és csuklóval) megtámasztott, továbbá koncentrált és megoszló erőkkel terhelt rúd esetén. A gondolatmenet a koncentrált erőt tekintve követő terhelés feltételezése mellett kerül bemutatásra. A 4. STABILITÁSVIZSGÁLAT EGYENLETEI MEREV TERHELÉSRE című szakasz merev koncentrált erő esetén tekinti át a feladat megoldását adó egyenleteket. A STABILITÁSVIZSGÁLAT VEGYES PEREMFELTÉTELEK ESETÉN című 5. szakasz meghatározza a kritikus terhelés értékét

lineáris (zárt alakú a megoldás) és nemlineáris modell felhasználásával is. A dolgozatot az eredményeket kiértékelő KÖVETKEZTETÉSEK, EREDMÉNYEK, a hosszabb átalakításokat tartalmazó FÜGGELÉK és végül a HIVATKOZÁSOK jegyzéke zárja.

2. FELTEVÉSEK, ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEK

2.1. Egyszerűsítő feltevések

A feladat megoldása során az alábbi lényegesebb egyszerűsítő megfontolásokkal élünk:

1. A vonatkozó egyenletek felírásakor kontinuummechanikai szóhasználatkal élve az ún. Lagrange-féle leírasmódot alkalmazzuk (az egyenleteket a kezdeti állapotra vonatkoztatva írjuk fel).
2. A kinematikai egyenletek felírásakor a rúdelméletben megszokott keretek között figyelembe vesszük a nemlineáris tagokat is.
3. A vonalelem és a keresztmetszeti felületelem számításakor elhagyjuk a nemlinearitást kifejező tagokat.
4. A rúd anyaga inhomogén, azaz a rugalmassági állandók a rúdkeresztmetszet helykoordinátáinak függvényei, de függetlenek a rúd középvonala mentén mért koordinátától (keresztmetszeti inhomogenitás esete forog fenn).
5. A rúd úgynevezett E -vel súlyozott középvonalának síkja tartalmazza a rúdszelvény egyik tehetetlenségi főtengelyét.
6. A rúd E -vel súlyozott középvonala az alakváltozás során saját síkjában marad.
7. A középvonal irányú normálfeszültség eleget tesz a

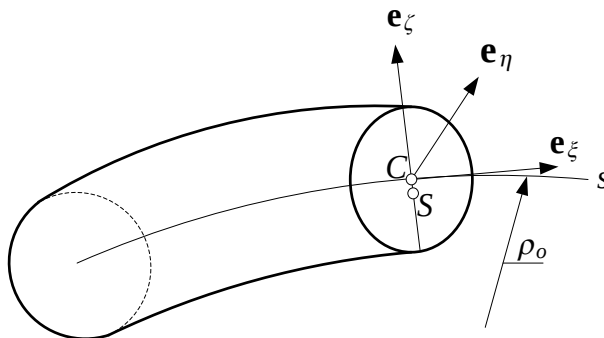
$$\sigma_\xi \gg \sigma_\eta, \sigma_\zeta$$

relációnak (ez a feltevés általános rúdszerű testek mechanikai vizsgálataiban).

8. Az anyagegyenlet lineáris, a hőmérsékleti hatásoktól pedig eltekintünk.
9. A rúd állandó keresztmetszetű.
10. A rúd lapos, vagyis a támasztávolság negyedénél nem nagyobb a rúd magassága.

2.2. Az alkalmazott koordináta-rendszer

Az 1. ábra a rúd középvonalához kötött és célszerűen választott koordináta-rendszert szemlélteti.



1. ábra. Az alkalmazott görbevonalú koordináta-rendszer

Az ábrán:

- Az $\mathbf{e}_\xi$ egységvektor a rúd E -vel súlyozott középvonalának érintője.
- Az $\mathbf{e}_\eta$ egységvektor merőleges a rúd középvonalának síkjára és nyilvánvaló, hogy $\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_\zeta$.
- A rúd E -vel súlyozott középvonala a rúd szimmetriasíkjában fekszik, helyét pedig az

$$S_{e\eta} = \int_A E(\eta, \zeta) \zeta \, dA = 0 \quad (1)$$

feltétel határozza meg – a képletben $S_{e\eta}$ az E -vel súlyozott statikai nyomaték az η tengelyre.

- A ρ_o sugár a rúd E -vel súlyozott középvonalának görbületi sugara.
- Az s a rúd E -vel súlyozott középvonala mentén mért ívkoordináta.
- A C pont – összhangban a fentebb mondottakkal – a rúd kiragadott keresztmetszetének E -vel súlyozott középpontja (itt dőfi az s ívkoordináta a rúd kiragadott keresztmetszetét – S a keresztmetszet, mint síkidom geometriai középpontját jelöli).

Leolvasható az 1. ábráról, hogy zérus az η és ζ koordináták értéke az rúd E -vel súlyozott középvonalán. Elemi átalakításokkal adódik, hogy

$$\frac{d\mathbf{e}_\xi}{ds} = -\frac{1}{\rho_o} \mathbf{e}_\zeta ; \quad \frac{d\mathbf{e}_\zeta}{ds} = \frac{1}{\rho_o} \mathbf{e}_\xi. \quad (2)$$

A ∇ operátor fenti vonatkoztatási rendszerben érvényes, s későbbi számításokban előnyösnek bizonyuló alakja:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} \mathbf{e}_\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{e}_\zeta. \quad (3)$$

A továbbiakban az E -vel súlyozott középvonal kifejezés helyett egyszerűen a középvonal kifejezést használjuk, de ezen mindig az E -vel súlyozott középvonalat értjük anélkül, hogy erre külön is felhívni a figyelmet.

2.3. Az elmozdulásvektor

A rúd egy tetszőleges pontjának elmozdulásvektora az

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \psi_{o\eta} \zeta \mathbf{e}_\xi$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{u}_o = u_o \mathbf{e}_\xi + w_o \mathbf{e}_\zeta$ a középvonal elmozdulása, $\psi_{o\eta}$ pedig a középvonal elfordulása. A

$$\psi|_{\zeta=0} = \psi_{o\eta} \mathbf{e}_\eta = -\frac{1}{2} (\mathbf{u} \times \nabla) \Big|_{\zeta=0}$$

egyenletből itt nem részletezett, de elemi átalakításokkal, valamint a lapos ívek esetére vonatkozó $\left| \frac{u_o}{\rho_o} \right| \ll \left| \frac{dw_o}{ds} \right|$ feltevés kihasználásával kapjuk, hogy

$$\psi_{o\eta} = \frac{u_o}{\rho_o} - \frac{dw_o}{ds} \simeq -\frac{dw_o}{ds}. \quad (4)$$

2.4. Az alakváltozási viszonyok

Vezessük be az

$$\varepsilon_{o\xi} = \frac{du_o}{ds} + \frac{w_o}{\rho_o} \quad \text{és a} \quad \kappa_o = -\frac{d\psi_{o\eta}}{ds} \approx -\frac{d^2 w_o}{ds^2} \quad (5)$$

jelöléseket ($\varepsilon_{o\xi}$ a lineáris elméletből adódó fajlagos nyúlás a középvonalon, κ_o pedig a középvonal görbületváltozásának mértéke – lapos ívek esetén csak w_o -ból számítjuk). A ξ irányú fajlagos nyúlás számításánál vegyük emellett figyelembe, hogy igen jó közelítéssel fennállnak az $|\varepsilon_\xi^2|$ és $|\varepsilon_\xi \psi_{o\eta}| \ll |\psi_{o\eta}^2|$ egyenlőtlenségek, következésképp

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi}^T \cdot \boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{e}_\xi = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} (\varepsilon_{o\xi} + \zeta \kappa_o) + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Vegyük észre, hogy a középvonalon

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{o\xi} + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2 \quad (7)$$

a fajlagos nyúlás értéke. Ez az összefüggés egy nemlineáris egyenlet.

2.5. Rúderő, hajlítónyomaték

Vezessük be az (1) képletet is figyelembe véve az

$$A_{eR} = \int_A \frac{\rho_o}{\rho_o + \zeta} E(\eta, \zeta) dA \approx \int_A E(\eta, \zeta) dA = A_e \quad (8a)$$

$$I_{eR} = \int_A \frac{\rho_o}{\rho_o + \zeta} E(\eta, \zeta) \zeta^2 dA \approx \int_A E(\eta, \zeta) \zeta^2 dA = I_{e\eta} \quad (8b)$$

és az

$$\begin{aligned} S_{eR} &= \int_A \frac{\rho_o}{\rho_o + \zeta} E(\eta, \zeta) \zeta dA = \int_A \left(\zeta - \frac{1}{\rho_o} \zeta^2 + \frac{1}{\rho_o^2} \zeta^3 + O(x^3) \right) E(\eta, \zeta) dA \approx \\ &\approx \int_A \zeta E(\eta, \zeta) dA - \int_A \frac{1}{\rho_o} \zeta^2 E(\eta, \zeta) dA = \underbrace{S_{e\eta}}_{=0} - \frac{I_{e\eta}}{\rho_o} = -\frac{I_{e\eta}}{\rho_o} \end{aligned} \quad (8c)$$

jelöléseket, ahol A_{eR} , S_{eR} és I_{eR} rendre az E -vel súlyozott redukált terület, redukált statikai nyomaték és redukált másodrendű nyomaték, míg A_e , $S_{e\eta}$ és $I_{e\eta}$, összhangban az (1) képlettel, az E -vel súlyozott terület, statikai nyomaték és másodrendű nyomaték.

Mivel $\sigma_\xi \gg \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ alkalmazható az egyszerű Hooke-törvény, azaz fennáll a

$$\sigma_\xi = E(\eta, \zeta) \varepsilon_\xi$$

egyenlet. Ennek felhasználásával adódik – tekintettel a (7) és (8) képletekre – az

$$N = \int_A \sigma_\xi dA = \int_A \frac{E(\eta, \zeta)}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} dA \varepsilon_{o\xi} + \int_A \frac{\zeta E(\eta, \zeta)}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} dA \kappa_o + \frac{1}{2} \int_A E(\eta, \zeta) dA \left(\frac{dw_o}{ds} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{A_e R}_{A_e} \varepsilon_{o\xi} + \underbrace{S_{eR}}_{-\frac{I_{e\eta}}{\rho_o}} \kappa_o + \frac{1}{2} A_e \psi_{o\eta}^2 \approx A_e \underbrace{\left(\varepsilon_{o\xi} + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2 \right)}_{\varepsilon_m} - \frac{I_{e\eta}}{\rho_o} \kappa_o \simeq \underbrace{A_e \varepsilon_m}_{\text{nemlineáris elmélet}} \approx \\
&\approx \underbrace{I_{e\eta} \left(\kappa_o - \frac{\varepsilon_{o\xi}}{\rho_o} \right)}_{\text{lineáris elmélet}}. \quad (9)
\end{aligned}$$

összefüggés a rúderőre. A hajlítónyomatékot ugyanilyen módon az

$$M = \int_A \zeta \sigma_\xi dA$$

összefüggésből számítjuk:

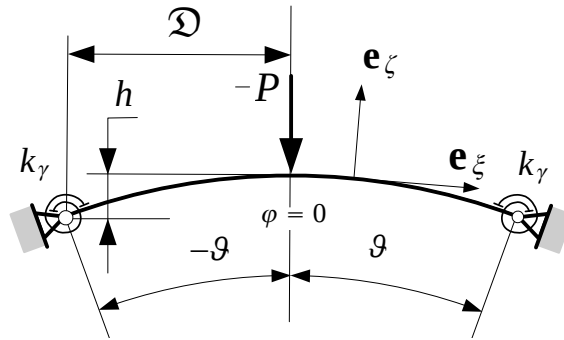
$$\begin{aligned}
M &= \int_A \sigma_\xi \zeta dA = \int_A \frac{\zeta E(\eta, \zeta)}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} dA \varepsilon_{o\xi} + \int_A \frac{\zeta^2 E(\eta, \zeta)}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} dA \kappa_o + \frac{1}{2} \int_A E(\eta, \zeta) \zeta dA \left(\frac{dw_o}{ds} \right)^2 = \\
&= \underbrace{S_{eR}}_{-\frac{I_{e\eta}}{\rho_o}} \varepsilon_{o\xi} + \underbrace{I_{eR}}_{I_{e\eta}} \kappa_o + \frac{1}{2} \underbrace{S_{e\eta}}_{=0} \psi_{o\eta}^2 \approx \underbrace{I_{e\eta} \left(\kappa_o - \frac{\varepsilon_{o\xi}}{\rho_o} \right)}_{\text{lineáris és nemlineáris elmélet}} \approx I_{e\eta} \kappa_o. \quad (10)
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ez az összefüggés mindig lineáris, ellentétben a rúderőre vonatkozó összefüggéssel.

3. A VIRTUÁLIS MUNKA ELV

3.1. Egyenletek a stabilitásvesztés előtti állapotra

Tekintsünk egy mindkét végén csuklóval rugalmasan megtámasztott lapos, görbe rudat. A csukló helyén a szögelfordulást a $k_t = 1/\gamma$ rugóállandójú spirálrugó gátolja. Ez a rugó feltevés szerint lineáris karakterisztikájú. A rúd terhelése a középvonalon megoszló $\mathbf{f} = f_n \mathbf{e}_\zeta + f_t \mathbf{e}_\xi$ sűrűségű erőrendszerből, illetve a $P = P_{o\zeta} = P_{o\zeta}(\varphi = 0)$ nagyságú koncentrált erőből áll – a viszonyokat a 2. ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy nem tüntettük fel az ábrán a középvonalon megoszló $\mathbf{f}$ terhelést.



2. ábra. A vizsgálat tárgyát képező lapos görbe rúd

A virtuális munka elv a tekintett rúdra az

$$\int_V \sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi dV = -P_{o\zeta} \delta w_o|_{\varphi=0} + k_t \psi_{o\eta} \delta \psi_{o\eta}|_{-\vartheta} + k_t \psi_{o\eta} \delta \psi_{o\eta}|_{\vartheta} + \int_{\mathcal{L}} (f_n \delta w_o + f_t \delta u_o) ds \quad (11)$$

alakban írható fel, ahol a δ -val jelölt mennyiségek virtuális mennyiségek. Nem nehéz ellenőrizni a (4), (5) és (6) összefüggéseket is felhasználva hogy

$$dV = \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_o}\right) dA ds \quad (12a)$$

továbbá, hogy

$$\delta\varepsilon_\xi = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} \left(\frac{d\delta u_o}{ds} + \frac{\delta w_o}{\rho_o} + \zeta \frac{d\psi_{o\eta}}{ds} \right) + \psi_{o\eta} \delta\psi_{o\eta}, \quad (12b)$$

$$\delta\kappa_o = -\frac{d^2\delta w_o}{ds^2}, \quad \delta\psi_{o\eta} = -\frac{d\delta w_o}{ds}. \quad (12c)$$

A (11) képletben a belső erők virtuális munkájának további átalakítása szükséges. A lépéseket a Függelék A.1. szakasza ismerteti. Az eredményt adó (93) képlet felhasználásával

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{dN}{ds} + f_t \right) \delta u_o ds - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{N}{\rho_o} - \frac{d}{ds} \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} + f_n \right) \delta w_o ds + \\ & - \left[\frac{dM}{ds} - \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \delta w_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} + \left[\frac{dM}{ds} - \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \delta w_b \Big|_{s(\vartheta)} + \\ & + \left[\frac{dM}{ds} \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \frac{dM}{ds} \Big|_{s(0+\varepsilon)} + P_{o\zeta} \right] \delta w_o \Big|_{s=0} + \\ & + (M - k_t \psi_{o\eta}) \Big|_{s(\vartheta)} \delta\psi_{o\eta} \Big|_{s(\vartheta)} - (M - k_t \psi_{o\eta}) \Big|_{s(-\vartheta)} \delta\psi_{o\eta} \Big|_{s(-\vartheta)} = 0 \end{aligned}$$

a virtuális munka elv alakja. Ha élünk az $|N| \gg \left| \frac{M}{\rho_o} \right|$ feltevessel, valamint úgy tekintjük, hogy $f_n = f_t = 0$, a virtuális változók tetszőlegességét kihasználva kapjuk egyrészt a

$$\frac{dN}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{N}{\rho_o} - \frac{d}{ds} \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \simeq \frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{N}{\rho_o} - \frac{d}{ds} N \psi_{o\eta} = 0 \quad (13)$$

egyensúlyi egyenleteket, másrészt pedig az

$$N \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad \left[\frac{dM}{ds} - N \psi_{o\eta} \right] \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad (M - k_t \psi_{o\eta}) \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dM}{ds} \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \frac{dM}{ds} \Big|_{s(0+\varepsilon)} + P_{o\zeta} = 0 \quad (15)$$

dinamikai peremfeltételeket és illesztési feltételt. A dinamikai peremfeltételek sorrendjében megadjuk a vagylagosan előírható kinematikai (geometriai) peremfeltételeket is:

$$u_o \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad w_o \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad \psi_{o\eta} \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0. \quad (16)$$

3.2. Egyenletek követő terhelésre

A további számítások során feltételezzük, hogy a P terhelés követő. Ezzel együtt a stabilitásvesztés utáni mozgást dinamikai folyamatnak tekintjük. Vezessük be az alábbi felbontásokat:

$$\begin{aligned} u_o^* &= u_o + u_{ob}, & w_o^* &= w_o + w_{ob}, & \psi_{o\eta}^* &= \psi_{o\eta} + \psi_{o\eta b} \\ \varepsilon_\xi^* &= \varepsilon_\xi + \varepsilon_{\xi b}, & \sigma_\xi^* &= \sigma_\xi + \sigma_{\xi b}, & N^* &= N + N_b, & M^* &= M + M_b. \end{aligned} \quad (17)$$

Itt a felső indexként megjelenő $*$ azt jelöli, hogy a vonatkozó mennyiség a stabilitásvesztés után kialakuló helyzethez tartozik, a b alsóindex pedig a stabilitásvesztés előtti helyzethez viszonyított növekményt azonosítja. Ez azt jelenti, hogy az egyes mennyiségek stabilitásvesztés utáni állapotban tekintett értéke egyenlő a stabilitásvesztést megelőző egyes egyensúlyi állapotbeli érték és a megváltozás (növekmény) összegével. Ezeken kívül igazak még a

$$\begin{aligned} \delta u_o^* &= \delta u_{ob}, & \delta w_o^* &= \delta w_{ob}, & \delta \psi_{o\eta}^* &= \delta \psi_{o\eta b} \\ \delta \varepsilon_\xi^* &= \delta \varepsilon_{\xi b}, & \delta \sigma_\xi^* &= \delta \sigma_{\xi b}, & \delta N^* &= \delta N_b, & \delta M^* &= \delta M_b \end{aligned} \quad (18)$$

egyenletek, mivel a stabilitásvesztés előtti folyamatot kvázistatikusnak és ismertnek tekintjük. Ez utóbbi oknál fogva nyilvánvalóan helytállók a

$$\delta u_o = \delta w_o = \delta \psi_{o\eta} = \delta \varepsilon_\xi = \delta \sigma_\xi = \delta N = \delta M = 0 \quad \text{és} \quad \ddot{w}_o = \ddot{u}_o = 0 \quad (19)$$

képletek is.

Az előbbi feltevések figyelembevételével átírható lesz majd a kezdeti állapotra vonatkoztatva felírt virtuális munka elv. Az egyszerűség kedvéért az első modellt úgy választjuk meg, hogy elhanyagoljuk az E -vel súlyozott középvonal menti tömegeloszlást és azt tételezzük fel, hogy a stabilitásvesztés dinamikai volta úgy kísérhető figyelemmel, hogy a $\varphi = 0$ pontban m nagyságú tömeget helyezünk el a rúdon, amelyet emellett jóval nagyobbak tekintünk, mint a rúd tömege. Ez esetben

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_\xi^* \delta \varepsilon_\xi^* dV &= -P_{o\zeta}^* \delta w_o^*|_{\varphi=0} - P_{o\xi}^* \delta u_o^*|_{\varphi=0} - m\ddot{w}_o^* \delta w_o^*|_{\varphi=0} - m\ddot{u}_o^* \delta u_o^*|_{\varphi=0} + \\ &+ k_t \psi_{o\eta}^* \delta \psi_{o\eta}^*|_{-\vartheta} + k_t \psi_{o\eta}^* \delta \psi_{o\eta}^*|_{\vartheta} + \int_{\mathcal{L}} (f_n^* \delta w_o^* + f_t^* \delta u_o^*) ds \end{aligned} \quad (20)$$

a virtuális munka elv alakja, ahol (a) feltételezzük hogy a terhelés követő volta miatt jelenik meg a $P_{o\xi}$ erő, (b) a tehetetlenségi erők virtuális munkáját pedig a $-m\ddot{w}_o^* \delta w_o^*|_{\varphi=0} - m\ddot{u}_o^* \delta u_o^*|_{\varphi=0}$ összeg adja. A (20) egyenlet a (17), (18) és (19) összefüggések, valamint a $P_{o\zeta}^* = P_{o\zeta} + P_{o\zeta b}$, $P_{o\xi}^* = P_{o\xi} + P_{o\xi b}$ és $f_t^* = f_t + f_{tb}$, $f_n^* = f_n + f_{nb}$ felbontások részleges helyettesítése után az

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_\xi + \sigma_{\xi b}) \delta \varepsilon_{\xi b} dV &= -(P_{o\zeta} + P_{o\zeta b}) \delta w_{ob}|_{\varphi=0} - (P_{o\xi} + P_{o\xi b}) \delta u_{ob}|_{\varphi=0} - \\ &- m\ddot{w}_o \delta w_{ob}|_{\varphi=0} - m\ddot{u}_o \delta u_{ob}|_{\varphi=0} + k_t (\psi_{o\eta} + \psi_{o\eta b}) \delta \psi_{o\eta b}|_{-\vartheta} + k_t (\psi_{o\eta} + \psi_{o\eta b}) \delta \psi_{o\eta b}|_{\vartheta} + \\ &+ \int_{\mathcal{L}} [(f_n + f_{nb}) \delta w_{ob} + (f_t + f_{tb}) \delta u_{ob}] ds \end{aligned} \quad (21)$$

bővített alakban fejezhető ki. A virtuális munka elv ezen alakjának további átalakításához szükségünk lesz $\delta\psi_{o\eta b}$ és $\delta\varepsilon_{\xi b}$ kifejezéseire. Figyelembe véve, hogy a (4) és (17) feltevések szerint fennáll a

$$\psi_{o\eta}^* = \frac{u_o^*}{\rho_o} - \frac{dw_o^*}{ds} \simeq -\frac{dw_o^*}{ds} = -\frac{d(w_o + w_{ob})}{ds} = -\frac{d(w_o + w_{ob})}{\rho_o d\varphi} = \underbrace{-\tilde{w}_o^{(1)}}_{\psi_{o\eta}} - \underbrace{\tilde{w}_{ob}^{(1)}}_{\psi_{o\eta b}} \quad (22)$$

összefüggés (ahol $d^n(\dots)/d\varphi^n = (\dots)^{(n)}$, illetve $w_o/\rho_o = \tilde{w}_o$) nyilvánvaló, hogy

$$\delta\psi_{o\eta}^* = \delta\psi_{o\eta b} = -\frac{d\delta w_{ob}}{ds} = -\delta\tilde{w}_{ob}^{(1)}. \quad (23)$$

Visszaidézve továbbá a (6) képletet írhatjuk, hogy

$$\varepsilon_{\xi}^* = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} (\varepsilon_{o\xi}^* + \zeta\kappa_o^*) + \frac{1}{2} (\psi_{o\eta}^*)^2,$$

ahol

$$\varepsilon_{o\xi}^* = \frac{du_o^*}{ds} + \frac{w_o^*}{\rho_o}, \quad (24)$$

$$\kappa_o^* = \frac{d}{ds} \left(\frac{u_o^*}{\rho_o} - \frac{dw_o^*}{ds} \right) \approx -\frac{d^2 w_o^*}{ds^2} = \frac{d(\psi_{o\eta} + \psi_{o\eta b})}{ds} = \frac{\psi_{o\eta}^{(1)} + \psi_{o\eta b}^{(1)}}{\rho_o} = \kappa_o + \kappa_{ob}. \quad (25)$$

Ily módon kapjuk meg a közép vonal stabilitásvesztés utáni helyzetéhez tartozó ξ irányú fajlagos nyúlást az

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi}^* &= \varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\xi b} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} [\varepsilon_{o\xi} + \varepsilon_{o\xi b} + \zeta(\kappa_o + \kappa_{ob})] + \frac{1}{2} (\psi_{o\eta} + \psi_{o\eta b})^2 = \\ &= \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} (\varepsilon_{o\xi} + \zeta\kappa_o)}_{\varepsilon_{\xi}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\psi_{o\eta})^2 + \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} (\varepsilon_{o\xi b} + \zeta\kappa_{ob}) + \psi_{o\eta}\psi_{o\eta b} + \frac{1}{2}\psi_{o\eta b}^2}_{\varepsilon_{\xi b}} \end{aligned}$$

alakban. Innen azonnal adódik a virtuális nyúlásnövekmény

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\xi b} &= \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} (\delta\varepsilon_{o\xi b} + \zeta\delta\kappa_{ob}) + \psi_{o\eta}\delta\psi_{o\eta b}}_{\delta\varepsilon_{\xi b}^L} + \underbrace{\psi_{o\eta b}\delta\psi_{o\eta b}}_{\delta\varepsilon_{\xi b}^N} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} \left(\frac{d\delta u_{ob}}{ds} + \frac{\delta w_{ob}}{\rho_o} + \zeta \frac{d\delta\psi_{o\eta b}}{ds} \right) + \psi_{o\eta}\delta\psi_{o\eta b} + \psi_{o\eta b}\delta\psi_{o\eta b} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} \left(\delta\tilde{u}_{ob}^{(1)} + \delta\tilde{w}_{ob} + \frac{\zeta}{\rho_o} \delta\psi_{o\eta b}^{(1)} \right)}_{\delta\varepsilon_{\xi b}^L} + \underbrace{\psi_{o\eta}\delta\psi_{o\eta b} + \psi_{o\eta b}\delta\psi_{o\eta b}}_{\delta\varepsilon_{\xi b}^N}, \quad (26) \end{aligned}$$

amely egy lineáris és egy nemlineáris részből áll. Utóbbit a

$$\delta\varepsilon_{\xi b}^N = \psi_{o\eta b}\delta\psi_{o\eta b} = -\psi_{o\eta b} \frac{d\delta w_{ob}}{ds} \quad (27)$$

módon is írhatjuk. A (26) képlet helyettesítésével átírható a virtuális munka elv. Ennek során feltételezzük, hogy $P_{o\xi} = 0$ (a stabilitásvesztés előtt ugyanis sugárirányú a P erő), és hogy $P_{o\xi b} = 0$ (a sugárirányú erőösszetevő jó közelítéssel ugyanaz marad, mint stabilitásvesztés előtt). A (21) egyenlet fentiek figyelembevételével történő zérusra rendezésével kapjuk, hogy

$$0 = - \int_V \sigma_\xi \delta \varepsilon_{\xi b}^L dV - P_{o\xi} \delta w_{ob}|_{\varphi=0} + k_t \psi_{o\eta} \delta \psi_{o\eta b}|_{-\vartheta} + k_t \psi_{o\eta} \delta \psi_{o\eta b}|_{\vartheta} + \\ + \int_{\mathcal{L}} (f_n \delta w_{ob} + f_t \delta u_{ob}) ds - \int_V \sigma_\xi \delta \varepsilon_{\xi b}^N dV - \int_V \sigma_{\xi b} \delta \varepsilon_{\xi b}^L dV - \int_V \sigma_{\xi b} \delta \varepsilon_{\xi b}^N dV - \\ - P_{o\xi b} \delta u_{ob}|_{\varphi=0} - m \ddot{w}_{ob} \delta w_{ob}|_{\varphi=0} - m \ddot{u}_{ob} \delta u_{ob}|_{\varphi=0} + k_t \psi_{o\eta b} \delta \psi_{o\eta b}|_{-\vartheta} + k_t \psi_{o\eta b} \delta \psi_{o\eta b}|_{\vartheta} + \\ + \int_{\mathcal{L}} (f_{nb} \delta w_{ob} + f_{tb} \delta u_{ob}) ds \quad (28)$$

Vegyük észre, hogy az utóbbi egyenlet első sora valójában a virtuális munka elv stabilitásvesztés előtti alakja – lásd a (11) összefüggést – és így önmagában is zérus. A megmaradó

$$\int_V \sigma_\xi \delta \varepsilon_{\xi b}^N dV + \int_V \sigma_{\xi b} \delta \varepsilon_{\xi b}^L dV + \int_V \sigma_{\xi b} \delta \varepsilon_{\xi b}^N dV + P_{o\xi b} \delta u_{ob}|_{\varphi=0} + m \ddot{w}_{ob} \delta w_{ob}|_{\varphi=0} + \\ + m \ddot{u}_{ob} \delta u_{ob}|_{\varphi=0} - k_t \psi_{o\eta b} \delta \psi_{o\eta b}|_{-\vartheta} - k_t \psi_{o\eta b} \delta \psi_{o\eta b}|_{\vartheta} - \int_{\mathcal{L}} (f_{nb} \delta w_{ob} + f_{tb} \delta u_{ob}) ds = 0 \quad (29)$$

egyenlet átalakításával az A.2. Függelék foglalkozik részletesen, itt csak az eredményeket közöljük. Eszerint a virtuális munka elv (95) alatti és véglegesnek tekinthető alakjából a virtuális változók tetszőlegessége miatt következik, hogy fenn kell állnia a dinamikus egyensúlyt kifejező

$$\frac{dN_b}{ds} + f_{tb} = 0 \quad (30a)$$

$$\frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{N_b}{\rho_o} - \frac{d}{ds} \left[\left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} + \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] + f_{nb} = 0 \quad (30b)$$

differenciálegyenleteknek, továbbá a

$$\left[\frac{dM_b}{ds} - \left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \Big|_{s(0-\varepsilon)} + m \frac{d^2 w_{ob}}{dt^2} \Big|_{s=0} - \\ - \left[\frac{dM_b}{ds} - \left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \Big|_{s(0+\varepsilon)} = 0 \quad (31a)$$

$$N_b|_{s(0-\varepsilon)} - N_b|_{s(0+\varepsilon)} + P_{o\xi b} + m \frac{d^2 u_{ob}}{dt^2} \Big|_{s=0} = 0 \quad (31b)$$

illesztési és

$$N_b|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (32a)$$

$$\left[\frac{dM_b}{ds} - \left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (32b)$$

$$(M_b - k_t \psi_{o\eta b})|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (32c)$$

dinamikai peremfeltételeknek. Nyilvánvaló, hogy a fenti dinamikai peremfeltételek és az

$$u_{ob}|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad w_{ob}|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad \psi_{o\eta b}|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (33)$$

kinematikai (geometriai) peremfeltételek vagyilagosan írhatók elő. Vegyük észre, hogy ezek az eredmények mind elhanyagolásmentesek.

Belátható továbbá a (9) és (10) összefüggések alapján, hogy

$$N^* \simeq A_e \left(\varepsilon_{o\xi}^* + \frac{1}{2} (\psi_{o\eta}^*)^2 \right) = A_e \varepsilon_m^*; \quad \varepsilon_m^* = \varepsilon_{o\xi}^* + \frac{1}{2} (\psi_{o\eta}^*)^2$$

illetve, hogy a stabilitásvesztés utáni helyzetben a fajlagos nyúlás – összhangban az eddigiekkel – az

$$\varepsilon_m^* = \underbrace{\varepsilon_{o\xi} + \frac{1}{2} (\psi_{o\eta})^2}_{\varepsilon_m} + \underbrace{\varepsilon_{o\xi b} + \psi_{o\eta} \psi_{o\eta b} + \frac{1}{2} \psi_{o\eta b}^2}_{\varepsilon_{mb}}$$

módon bontható fel. Ezt visszahelyettesítve átírható a rúderő:

$$N^* = \underbrace{A_e \left(\varepsilon_{o\xi} + \frac{1}{2} (\psi_{o\eta})^2 \right)}_N + \underbrace{A_e \left(\varepsilon_{o\xi b} + \psi_{o\eta} \psi_{o\eta b} + \frac{1}{2} \psi_{o\eta b}^2 \right)}_{N_b}. \quad (34)$$

Az M^* nyomaték a (25) képlet felhasználásával az

$$M^* \simeq I_{e\eta} \kappa_o^* \approx -I_{e\eta} \frac{d^2 w_o}{ds^2} - I_{e\eta} \frac{d^2 w_{ob}}{ds^2} = M + M_b \quad (35)$$

alakban adódik.

3.3. Linearizált egyenletek

Az előző szakaszban alkalmazott gondolatmenet eredményeként adódó (30a)-(30b) differenciálegyenletek és a hozzájuk kapcsolódó (31b)-(32c) perem- és illesztési feltételek levezetése során nem éltünk elhanyagolásokkal, egyszerűsítésekkel. A stabilitási problémákat azonban első közelítésben mindenképpen érdemes lineáris egyenletekkel leírni. Ennek érdekében, figyelembe véve egyúttal a terhelés jellegét is, az alábbi feltevésekkel élünk:

(a) Mivel koncentrált erővel terhelt rudakat vizsgálunk, elhanyagoljuk a megoszló terhelések növekményeit: $f_{nb} = f_{tb} = 0$. (b) Elhanyagoljuk a kvadratikusságokat (azokat a tagokat amelyekben mindkét tényező a stabilitásvesztés utáni állapothoz tartozik). (c) Kihasználjuk emellett a már a 3.1. szakaszban is alkalmazott $N \gg M/\rho_o$ egyenlőtlenséget. A mondottak alapján egyszerűsödnek a (30) differenciálegyenletek:

$$\frac{dN_b}{ds} = 0 \quad (36a)$$

$$\frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{N_b}{\rho_o} - \frac{d}{ds} [N \psi_{o\eta b} + N_b \psi_{o\eta}] = 0, \quad (36b)$$

valamint a (31) illesztési feltételek:

$$\left[\frac{dM_b}{ds} - N\psi_{\eta b} - N_b\psi_{\eta} \right] \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \left[\frac{dM_b}{ds} - N\psi_{\eta b} - N_b\psi_{\eta} \right] \Big|_{s(0+\varepsilon)} + m \frac{d^2 w_{ob}}{dt^2} \Big|_{s=0} = 0 \quad (37a)$$

$$N_b|_{s(0-\varepsilon)} - N_b|_{s(0+\varepsilon)} + P_{o\xi b} + m \frac{d^2 u_{ob}}{dt^2} \Big|_{s=0} = 0 \quad (37b)$$

és végül a (32) peremfeltételek:

$$N_b|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (38a)$$

$$\left[\frac{dM_b}{ds} - N\psi_{\eta b} - N_b\psi_{\eta} \right] \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (38b)$$

$$(M_b - k_t\psi_{\eta b})|_{s(\pm\vartheta)} = 0 . \quad (38c)$$

Megjegyezzük, hogy a (33) geometriai peremfeltételek változatlanok és vagylagosan írhatók elő.

A rúderő növekményére a (34) képlet alapján az

$$\begin{aligned} N_b &= A_e \left(\varepsilon_{o\xi b} + \psi_{\eta} \psi_{\eta b} + \frac{1}{2} (\psi_{\eta b})^2 \right) \simeq \\ &\simeq A_e \left[\frac{du_{ob}}{ds} + \frac{w_{ob}}{\rho_o} + \frac{dw_o}{ds} \frac{dw_{ob}}{ds} \right] \simeq A_e \left(\frac{du_{ob}}{ds} + \frac{w_{ob}}{\rho_o} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

közelítő összefüggést kapjuk. Az M_b értékét változatlanul a (35) képlet alapján számítjuk, mivel az eleve lineáris összefüggés:

$$M_b = -I_{\eta} \frac{d^2 w_{ob}}{ds^2} . \quad (40)$$

A (36) differenciálegyenletek, (37) illesztési- és a vagylagosan előírható (38) dinamikai-, illetve (33) geometriai peremfeltételek a (39), (40) Hooke törvénnyel társulva a dinamikai stabilitásvizsgálat linearizált egyenletrendszerét alkotják.

4. A STABILITÁSVIZSGÁLAT EGYENLETEI MEREV TERHELÉSRE

4.1. Bevezető megjegyzések

Feltételezzük egyelőre, hogy iránytartó (merev) a $\varphi = 0$ pontban működő $-Pe_\zeta$ teher. Ismeretes, hogy merev terhelés esetére (dead load) az egyensúlyi módszer helyes eredményre vezet. Erre a körülményre való tekintettel mind a stabilitásvesztés előtti, mind pedig a stabilitásvesztési folyamatot kvázistatikusnak tételezzük fel (azaz feltételezzük az utóbbi esetben, hogy $m = 0$). A teljesség kedvéért áttekintjük erre a két esetre az E -vel súlyozott középvonal elmozduláskoordinátáit adó differenciálegyenleteket.

4.2. Egyenletek a stabilitásvesztés előtt folyamatra

Figyelembe véve a (9) és (10) összefüggéseket fennáll, hogy

$$N \simeq A_e \underbrace{\left(\varepsilon_{o\xi} + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2 \right)}_{\varepsilon_m} - \frac{I_{e\eta}}{\rho_o} \kappa_o \simeq A_e \varepsilon_m \quad \text{és} \quad M \simeq I_{e\eta} \left(\kappa_o - \frac{\varepsilon_{o\xi}}{\rho_o} \right), \quad (41)$$

amivel a (13) egyensúlyi egyenletből a

$$\frac{dN}{ds} = A_e \frac{d}{ds} (\varepsilon_m) = 0$$

összefüggés következik. Ez azt jelenti, hogy mind lineáris, mind pedig nemlineáris esetben állandó az E -vel súlyozott középvonalon a fajlagos nyúlás. A második, azaz a (13)₂ egyensúlyi egyenletből pedig figyelembe véve, hogy

$$N + \frac{M}{\rho_o} = \left(A_e - \frac{I_{e\eta}}{\rho_o^2} \right) \varepsilon_m = \frac{I_{e\eta}}{\rho_o^2} \left(\frac{A_e}{\rho_o^2 I_{e\eta}} - 1 \right) \varepsilon_m = \frac{I_{e\eta}}{\rho_o^2} \mu \varepsilon_m, \quad \mu = \frac{A_e \rho_o^2}{I_{e\eta}} - 1 \approx \frac{A_e \rho_o^2}{I_{e\eta}} \quad (42)$$

a

$$\frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{I_{e\eta}}{\rho_o^2} \mu \varepsilon_m \frac{d}{ds} \psi_{o\eta} - \frac{N}{\rho_o} = \frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{I_{e\eta}}{\rho_o^2} \mu \varepsilon_m \frac{d}{ds} \psi_{o\eta} - \frac{A_e \varepsilon_m}{\rho_o} = 0,$$

vagyis az

$$I_{e\eta} \frac{d^2 \kappa_o}{ds^2} + \frac{A_e}{\rho_o} \varepsilon_m - A_e \varepsilon_m \frac{d\psi_{o\eta}}{ds} = 0$$

differenciálegyenlet következik. A (4) képlet helyettesítése után

$$I_{e\eta} \frac{d^2 \kappa_o}{ds^2} - \frac{A_e \varepsilon_m}{\rho_o} - A_e \varepsilon_m \frac{d\psi_{o\eta}}{ds} = 0$$

ennek az egyenletnek az alakja. Ha ezt (a) beszorozzuk $\rho_o/A_e \varepsilon_m$ -mel, (b) bevezetjük összhangban a (23) összefüggéssel a $\tilde{w}_o$ és $\hat{\mu}^2$ jelöléseket és (c) áttérünk φ szerinti deriváltakra, akkor megkapjuk a végleges

$$\tilde{w}_o^{(4)} \frac{1}{\hat{\mu}^2} + \tilde{w}_o^{(2)} = 1, \quad \tilde{w}_o = \frac{w_o}{\rho_o}, \quad \frac{d^n(\dots)}{d\varphi^n} = (\dots)^{(n)}, \quad \hat{\mu}^2 = -A_e \varepsilon_m \quad (43)$$

alakot. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet (a) mindig lineáris, mivel állandó az ε_m és hogy (b) a lineáris feladatokban $\varepsilon_m = \varepsilon_{o\xi}$.

4.3. Stabilitásvesztés a középvonal hosszváltozása nélkül

Ha nem változik meg a stabilitásvesztési folyamatban az E -vel súlyozott középvonal hossza, akkor fennáll az $\varepsilon_{mb} = 0$ egyenlet. Következésképp – tekintettel a (34) anyagegyenletre, valamint a (36b) egyensúlyi egyenletre – adódik, hogy $N_b = A_e \varepsilon_{mb} = 0$. Az utóbbi eredmény felhasználásával a (36b) differenciálegyenlet a

$$\frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{d}{ds} [N \psi_{o\eta b}] = 0 \quad (44)$$

alakra egyszerűsödik. Ha ide helyettesítjük (a) a (40) képletből az M_b hajlítónyomatékot, (b) a (41) képletből az N ruderőt, és végül (c) a (22) alapján $\psi_{o\eta b}$ értékét, akkor

a dimenziómentes $\tilde{w}_{ob} = w_{ob}/\rho_o$ -ra a

$$-I_{e\eta} \frac{d^4 \tilde{w}_{ob}}{d\varphi^4} + \rho_o^2 A_e \varepsilon_m \frac{d^2 \tilde{w}_{ob}}{d\varphi^2} = 0 ,$$

vagy ami ugyanaz a

$$\frac{d^4 \tilde{w}_{ob}}{d\varphi^4} = \underbrace{-\hat{\mu}^2}_{\lambda_q} \frac{d^2 \tilde{w}_{ob}}{d\varphi^2} , \quad \hat{\mu}^2 = -\frac{\rho_o^2 A_e \varepsilon_m}{I_{e\eta}} \quad (45)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Nem nehéz belátni a lehetséges (33) geometriai peremfeltételek alapján, hogy a bal oldali végén csuklóval megtámasztott és a jobb oldali végén befogott rúd esetén fenn kell állnia a

$$\tilde{w}_{ob}|_{\mp\vartheta} = 0 , \quad \tilde{w}_{ob}^{(1)}|_{-\vartheta} = 0 , \quad \tilde{w}_{ob}^{(2)}|_{\vartheta} = 0 \quad (46)$$

egyenleteknek (peremfeltételeknek). A (45) homogén differenciálegyenlet és a (46) homogén peremfeltételek által meghatározott peremértékfeladat egy sajátértékfeladat – a sajátérték pedig $-\hat{\mu}^2$. Legyen $\hat{u}(\varphi)$ legalább négyszer differenciálható és a (46) peremfeltételeket kielégítő függvény. Figyelembe véve, hogy a vonatkozó Rayleigh hányados

$$R_q(\hat{u}) = \frac{\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \hat{u} \hat{u}^{(4)} d\varphi}{\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \hat{u} \hat{u}^{(2)} d\varphi} = -\frac{\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \hat{u}^{(2)} \hat{u}^{(2)} d\varphi}{\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \hat{u}^{(1)} \hat{u}^{(1)} d\varphi} \leq \lambda_q = -\hat{\mu}^2 = \frac{\rho_o^2 A_e \varepsilon_m}{I_{e\eta}} < 0 ,$$

adódik a következtetés, hogy a sajátértékfeladat megoldásából számított ε_m mindig negatív.

4.4. Stabilitásvesztés a középvonal hosszváltozásával

Ha megváltozik az E -vel súlyozott középvonal hossza a stabilitásvesztés során, akkor fennáll az $\varepsilon_{mb} \neq 0$ egyenlőtlenség. A (36a) egyensúlyi egyenlet alapján következik, hogy ez esetben

$$\frac{d\varepsilon_{mb}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{du_{ob}}{ds} + \frac{w_{ob}}{\rho_o} + \frac{dw_o}{ds} \frac{dw_{ob}}{ds} \right) \simeq \frac{d}{ds} \left(\frac{du_{ob}}{ds} + \frac{w_{ob}}{\rho_o} \right) = 0 . \quad (47)$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlet nemlineáris. Az első kerek zárójelben álló kvadratis tag azonban elhagyható, ha relative kicsik az alakváltozások. Ez esetben lineáris a kapott összefüggés.

Nem nehéz ellenőrizni a (39) és (40) összefüggést is felhasználva, hogy

$$N_b + \frac{M_b}{\rho_o} = A_e \varepsilon_{mb} + \frac{I_{e\eta}}{\rho_o} \kappa_{ob} . \quad (48)$$

Ha emellett figyelembe vesszük a (42) képleteket is, a (30b) egyensúlyi egyenletből (a növekményben kvadratis tagokat elhagytuk) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{N_b}{\rho_o} - \frac{d}{ds} \left[\left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} + \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] &= 0 \\ \frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{d}{ds} \left[\left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} + \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] - \frac{A_e \varepsilon_{mb}}{\rho_o} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{d}{ds} \left[A_e \varepsilon_m \psi_{o\eta b} + A_e \left(\varepsilon_{mb} - \frac{I_{e\eta}}{A_e \rho_o^2} \kappa_{ob} \right) \psi_{o\eta} \right] - \frac{A_e \varepsilon_{mb}}{\rho_o} &\simeq \\ &\simeq \frac{d^2 M_b}{ds^2} - A_e \varepsilon_m \frac{d}{ds} \psi_{o\eta b} + A_e \varepsilon_{mb} \frac{d}{ds} \psi_{o\eta} - \frac{A_e \varepsilon_{mb}}{\rho_o} = 0, \end{aligned}$$

ahonnan a Hooke törvényt jelentő (40) képlet helyettesítésével, valamint a (22) egyenlet segítségével kapjuk, hogy

$$-I_{e\eta} \frac{d^4 \tilde{w}_{ob}}{\rho_o^4 d\varphi^4} + \frac{A_e \varepsilon_m}{\rho_o} \frac{d^2 \tilde{w}_{ob}}{d\varphi^2} = \frac{A_e \varepsilon_{mb}}{\rho_o} \left(1 - \frac{d^2 \tilde{w}_o}{d\varphi^2} \right).$$

Ebből az egyenletből a nyúlásmentes esetre vonatkozó (45) képletet adó utolsó átalakítás lépéseivel a

$$\tilde{w}_{ob}^{(4)} + \hat{\mu}^2 \tilde{w}_{ob}^{(2)} = -\frac{\rho_o^2 A_e}{I_{e\eta}} \varepsilon_{mb} \left(1 - \tilde{w}_o^{(2)} \right) \quad (49)$$

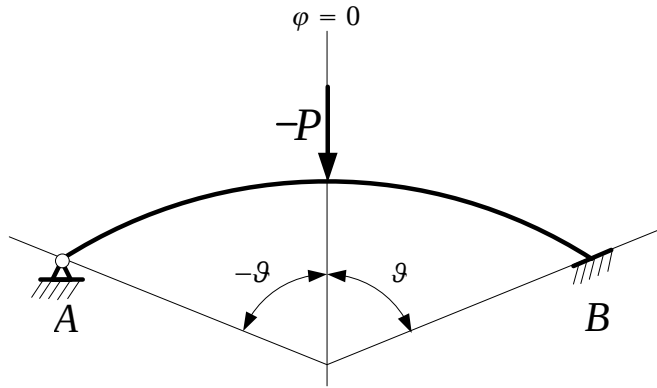
összefüggés következik. Az egyenlet linearizálható:

$$\tilde{w}_{ob}^{(4)} + \hat{\mu}^2 \tilde{w}_{ob}^{(2)} = -\frac{\rho_o^2 A_e}{I_{e\eta}} \varepsilon_{mb}. \quad (50)$$

5. STABILITÁSVIZSGÁLAT VEGYES PEREMFELTÉTELEK ESETÉN

5.1. Megoldás a stabilitásvesztés előtti állapotra

A jelen szakaszban egy bal oldalon merev csuklóval megtámasztott ($k_t = 0$), jobb oldalon befalazott, középen (azaz a $\varphi = 0$ helyen) koncentrált, merev és állandó nagyságú $-P_{o\zeta} = -P$ erővel terhelt rúd stabilitási kérdéseire fordítjuk a figyelmet. A viszonyokat a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra. Koncentrált erővel terhelt lapos görbe rúd vegyes peremfeltételek esetén

Első lépésben a stabilitásvesztés előtti $\tilde{w}_o$ (vagy ami tulajdonképpen ugyanaz, a w_o) elmozdulás meghatározására fordítjuk a figyelmet. Nyilvánvaló az előzőek alapján, hogy ez esetben a (43) differenciálegyenletet kell megoldani. Mivel az erő a $\varphi = 0$ helyen működik (szakadást idéz elő a nyíróerőben), a $\tilde{w}_o$ megoldást külön keressük a $\varphi \in [-\vartheta; 0]$ illetve a $\varphi \in [0; \vartheta]$ tartományokon. Jelölje ezeket a megoldásokat rendre $\tilde{w}_{o,bal}$ illetve $\tilde{w}_{o,jobb}$. Nyilvánvaló a (43) egyenlet szerkezetéből, hogy

$$\tilde{w}_{o,bal} = -D_1 \frac{\cos(\hat{\mu}\varphi)}{\hat{\mu}^2} - D_2 \frac{\sin(\hat{\mu}\varphi)}{\hat{\mu}^2} + D_3 \varphi + D_4 + \frac{\varphi^2}{2} \quad (51)$$

és

$$\tilde{w}_{o,jobb} = -D_5 \frac{\cos(\hat{\mu}\varphi)}{\hat{\mu}^2} - D_6 \frac{\sin(\hat{\mu}\varphi)}{\hat{\mu}^2} + D_7\varphi + D_8 + \frac{\varphi^2}{2} \quad (52)$$

ahol $D_1, \dots, D_8$ egyelőre határozatlan integrációs állandók. Az integrációs állandók a rúd két végére vonatkozó

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{o,bal}|_{\varphi=-\vartheta} &= 0, & \tilde{w}_{o,jobb}|_{\varphi=+\vartheta} &= 0 \\ \tilde{w}_{o,bal}^{(2)}|_{\varphi=-\vartheta} &= 0, & \tilde{w}_{o,jobb}^{(1)}|_{\varphi=+\vartheta} &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

peremfeltételekből (a rúd bal oldali végén zérus az elmozdulás és a nyomaték, a rúd jobb oldali végén pedig zérus az elmozdulás és a szögelfordulás – lásd a (4), (16) és (35) képleteket), továbbá a $\varphi = 0$ helyre vonatkozó

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{o,bal}|_{\varphi=-0} &= \tilde{w}_{o,jobb}|_{\varphi=+0} \\ \tilde{w}_{o,bal}^{(1)}|_{\varphi=-0} &= \tilde{w}_{o,jobb}^{(1)}|_{\varphi=+0} \\ \tilde{w}_{o,bal}^{(2)}|_{\varphi=-0} &= \tilde{w}_{o,jobb}^{(2)}|_{\varphi=+0} \\ \left[-\tilde{w}_{o,bal}^{(3)} \right]_{\varphi=-0} + \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}} + \left[\tilde{w}_{o,jobb}^{(3)} \right]_{\varphi=+0} &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

illesztési (folytonossági és diszkontinuitási) feltételekből (folytonos az elmozdulás, szögelfordulás és a nyomaték, előírt szakadása van a nyíróerőnek – lásd a (4), (15) és (35) képleteket) számíthatók. Kellő rendben deriválva az (51), (52) megoldásokat a peremfeltételekbe történő helyettesítés után a

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{o,bal}(\varphi = -\vartheta) &= -D_1 \frac{\cos(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} + D_2 \frac{\sin(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} - D_3\vartheta + D_4 + \frac{\vartheta^2}{2} = 0, \\ \tilde{w}_{o,jobb}(\varphi = \vartheta) &= -D_5 \frac{\cos(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} - D_6 \frac{\sin(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} + D_7\vartheta + D_8 + \frac{\vartheta^2}{2} = 0, \\ \tilde{w}_{o,bal}^{(2)}(\varphi = -\vartheta) &= D_1 \cos \hat{\mu}\vartheta - D_2 \sin \hat{\mu}\vartheta + 1 = 0, \\ \tilde{w}_{o,jobb}^{(1)}(\varphi = \vartheta) &= D_5 \sin \hat{\mu}\vartheta - D_6 \cos \hat{\mu}\vartheta + D_7\hat{\mu} + \hat{\mu}\vartheta = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

egyenleteket, az illesztési feltételekből pedig az

$$\begin{aligned} -\frac{D_1}{\hat{\mu}^2} + D_4 &= -\frac{D_5}{\hat{\mu}^2} + D_8 \\ -D_2 + D_3\hat{\mu} &= -D_6 + D_7\hat{\mu} \\ D_1 + 1 &= D_5 + 1 \\ -D_2\hat{\mu} + \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}} + D_6\hat{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

összefüggéseket kapjuk. Nyilvánvaló az (56) képletek alapján, hogy $D_1 = D_5$ és $D_4 = D_8$.

Mindent összevetve az alábbi hat egyenlet megoldása adja az ismeretlen integrációs állandókat:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\cos(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & \frac{\sin(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & -\vartheta & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sin(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & \vartheta \\ \cos(\hat{\mu}\vartheta) & -\sin(\hat{\mu}\vartheta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\hat{\mu}\vartheta) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\hat{\mu}\vartheta) & \hat{\mu} \\ 0 & -1 & \hat{\mu} & 0 & 1 & -\hat{\mu} \\ 0 & -\hat{\mu} & 0 & 0 & \hat{\mu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_6 \\ D_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\vartheta^2}{2} \\ -\frac{\vartheta^2}{2} \\ -1 \\ -\hat{\mu}\vartheta \\ 0 \\ -\frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}} \end{bmatrix}$$

A D_i megoldások felírását megkönnyítendő vezessük be az

$$U = 2\hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin 2\hat{\mu}\vartheta$$

jelölést. A számítások részletezése nélkül

$$D_1 = D_5 = A - \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}}B = \frac{2(1 + (\hat{\mu}\vartheta)^2) \sin \hat{\mu}\vartheta - 2\hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta}{U} - \frac{P\rho_o^2 \hat{\mu}\vartheta \sin \hat{\mu}\vartheta + \sin^2 \hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \sin 2\hat{\mu}\vartheta}{I_{e\eta} U \hat{\mu}} \quad (57a)$$

$$D_2 = C - \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}}D = \frac{2\hat{m}\vartheta (\hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta - \sin \hat{\mu}\vartheta)}{U} - \frac{P\rho_o^2 \hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta + 0.5 \sin 2\hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta}{I_{e\eta} U \hat{\mu}} \quad (57b)$$

$$D_3 = F - \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}}G = \frac{-1 + \cos 2\hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}\vartheta \sin 2\hat{\mu}\vartheta}{\hat{\mu}U} - \frac{P\rho_o^2 \sin 2\hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin \hat{\mu}\vartheta}{I_{e\eta} U \hat{\mu}^2}$$

$$D_4 = D_8 = H - \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}}L = \frac{3\hat{\mu}^2\vartheta^2 (\sin \hat{\mu}\vartheta) \cos \hat{\mu}\vartheta - 2\hat{\mu}\vartheta \cos^2 \hat{\mu}\vartheta + \sin 2\hat{\mu}\vartheta - \vartheta^3 \hat{\mu}^3 \cos 2\hat{\mu}\vartheta}{2\hat{\mu}^2 U} - \frac{P\rho_o^2 \vartheta (\sin 2\hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin \hat{\mu}\vartheta)}{I_{e\eta} 2\hat{\mu}^2 U} \quad (57c)$$

$$D_6 = C - \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}}E = \frac{2\hat{\mu}\vartheta (\hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta - \sin \hat{\mu}\vartheta)}{U} - \frac{P\rho_o^2 \hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta - 0.5 \sin 2\hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta}{I_{e\eta} U \hat{\mu}} \quad (57d)$$

$$D_7 = F - \frac{P\rho_o^2}{I_{e\eta}}I = \frac{-1 + \cos 2\hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}\vartheta \sin 2\hat{\mu}\vartheta}{\hat{\mu}U} - \frac{P\rho_o^2 \hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin \hat{\mu}\vartheta}{I_{e\eta} U \hat{\mu}^2} \quad (57e)$$

az integrációs állandók értéke, ahol

$$J = \frac{\sin 2\hat{\mu}\vartheta - 2\hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta}{U \hat{\mu}}, \quad K = \frac{2\hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin 2\hat{\mu}\vartheta}{U \hat{\mu}^2}. \quad (58)$$

Vegyük észre, hogy a megoldások mindegyike két részre van bontva. A felbontásokban álló $A \dots, I$ állandókat maguk a képletek értelmezik. A felbontás elkülöníti a terheléssel arányos tagot a megoldásokban. Ezt a későbbiekben ki fogjuk használni.

Vegyük azt is észre, hogy a kapott $\tilde{w}_o$ megoldás lineáris és nemlineáris esetre egyaránt vonatkozik.

5.2. Lineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} = 0$ feltevés mellett

A jelen szakaszban feltételezzük, hogy (a) nem változik meg a rúd E -vel súlyozott középvonalának hossza a stabilitásvesztés során és hogy (b) alkalmazható a lineáris modell. Az E -vel súlyozott középvonal fajlagos nyúlását lineárisan közelítjük (vagyis az (5)₁ képlet alapján, azaz eltekintünk majd a szögelfordulás négyzetétől). A kritikus terhelés meghatározása három lépésben történik. Első lépésben meghatározzuk az ε_m és a P terhelés közötti összefüggést az

$$\begin{aligned} \varepsilon_m = \frac{N}{A_e} &= \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \underbrace{\left(\varepsilon_{o\xi} + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2 \right)}_{\varepsilon_m} d\varphi = \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \left(\tilde{u}_o^{(1)} + \tilde{w}_o + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2 \right) d\varphi \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2\vartheta} \left(\int_{-\vartheta}^0 \tilde{w}_{o,bal} d\varphi + \int_0^{\vartheta} \tilde{w}_{o,jobb} d\varphi \right) = \varepsilon_{o\xi} \quad (59) \end{aligned}$$

egyenlet alapján. Második lépésben megoldjuk a (45), (46) sajátértékfeladatot, ami végeredményben megadja az $\varepsilon_m \simeq \varepsilon_{o\xi}$ kritikus értékét. A harmadik lépésben pedig kiszámítjuk a fenti egyenletből az $\varepsilon_{m,krit}$ kritikus fajlagos nyúláshoz tartozó P_{krit} erőt. Megjegyezzük, hogy a számítások áttekintett gondolatmenete a lineáris és nemlineáris modellre egyaránt vonatkozik.

A lineáris esetre vonatkozóan az A.3. függelék részletezi a számítás főbb lépéseit. Az ott közölt átalakítások végeredménye a dimenziómentes kritikus terhelés értéke a

$$\begin{aligned} \hat{P} &= -\frac{4\hat{\mu}\vartheta}{3} \times \\ &\times \frac{\left(3 - 2(\hat{\mu}\vartheta)^4 \right) \cos 2\hat{\mu}\vartheta + 2\hat{\mu}\vartheta \left(2(\hat{\mu}\vartheta)^2 + 3 \right) \sin(2\hat{\mu}\vartheta) - 3 \left(2(\hat{\mu}\vartheta)^2 + 1 \right) + \frac{3(\hat{\mu}\vartheta)^4}{\lambda^2} (2\hat{\mu}\vartheta \cos(2\hat{\mu}\vartheta) - \sin(2\hat{\mu}\vartheta))}{2\hat{\mu}\vartheta \left((\hat{\mu}\vartheta)^2 + 2 \right) \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \left(2 + 3(\hat{\mu}\vartheta)^2 \right) \sin(2\hat{\mu}\vartheta) + 4 \left((\hat{\mu}\vartheta)^2 + 1 \right) \sin \hat{\mu}\vartheta + 4\hat{\mu}\vartheta (1 - \cos^2 \hat{\mu}\vartheta - \cos \hat{\mu}\vartheta)} \quad (60) \end{aligned}$$

alakban, ahol

$$\hat{P} = \frac{P\rho_o^2\vartheta}{I_{e\eta}}, \quad \lambda = l_b^2 / \left(4\rho_o \sqrt{\frac{I_{e\eta}}{A_e}} \right). \quad (61)$$

A fenti jelöléseket illetően megjegyezzük, hogy $\hat{P}$ az említett dimenziómentes kritikus terhelés, l_b a rúd hossza, λ pedig a rúd módosított karcsúsági tényezője.

A továbbiakban tekintsük át a (45), (46) sajátértékfeladat megoldását. A (45) differenciálegyenletnek

$$\tilde{w}_{ob}(\varphi) = -G_1 \frac{\cos \hat{\mu}\varphi}{\hat{\mu}^2} - G_2 \frac{\sin \hat{\mu}\varphi}{\hat{\mu}^2} + G_3\varphi + G_4 \quad (62)$$

a megoldása (G_i , $i = 1, 2, 3, 4$ integrációs állandók). A megoldás köteles eleget tenni a (46) peremfeltételeknek. Következésképp teljesülnie kell a

$$\tilde{w}_{ob}|_{-\vartheta} = -G_1 \frac{\cos \hat{\mu}\vartheta}{\hat{\mu}^2} + G_2 \frac{\sin \hat{\mu}\vartheta}{\hat{\mu}^2} - G_3\vartheta + G_4 = 0 \quad (63a)$$

$$\tilde{w}_{ob}^{(1)}|_{-\vartheta} = -\frac{-G_1 \sin \hat{\mu}\vartheta + G_2 \cos \hat{\mu}\vartheta - G_3\hat{\mu}}{\hat{\mu}} = 0 \quad (63b)$$

és a

$$\tilde{w}_{ob}|_{\vartheta} = -G_1 \frac{\cos \hat{\mu}\vartheta}{\hat{\mu}^2} - G_2 \frac{\sin \hat{\mu}\vartheta}{\hat{\mu}^2} + G_3\vartheta + G_4 = 0 \quad (64a)$$

$$\tilde{w}_{ob}^{(2)}|_{\vartheta} = G_1 \cos \hat{\mu}\vartheta - G_2 \sin \hat{\mu}\vartheta = 0 \quad (64b)$$

egyenleteknek. Mivel az utóbbi négy lineáris egyenlet mindegyike homogén, akkor kapunk triviálistól különböző megoldást az integrációs állandókra, ha zérus az együtthatókból képzett determináns, vagyis ha fennáll a

$$\begin{vmatrix} -\frac{\cos(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & \frac{\sin(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & -\vartheta & 1 \\ -\frac{\cos(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & -\frac{\sin(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}^2} & \vartheta & 1 \\ \cos(\hat{\mu}\vartheta) & -\sin(\hat{\mu}\vartheta) & 0 & 0 \\ \frac{\sin(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}} & -\frac{\cos(\hat{\mu}\vartheta)}{\hat{\mu}} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

feltétel. Innen a

$$-2 \cos(\hat{\mu}\vartheta) \sin(\hat{\mu}\vartheta) + 2\vartheta \hat{\mu} \cos^2 \hat{\mu}\vartheta - 2\vartheta \hat{\mu} \sin^2 \hat{\mu}\vartheta = 0$$

vagy ami ugyanaz a

$$2\hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta = \sin 2\hat{\mu}\vartheta \quad (65)$$

nemlineáris egyenletet kapjuk a $\hat{\mu}\vartheta$ számítására. Ennek az egyenletnek

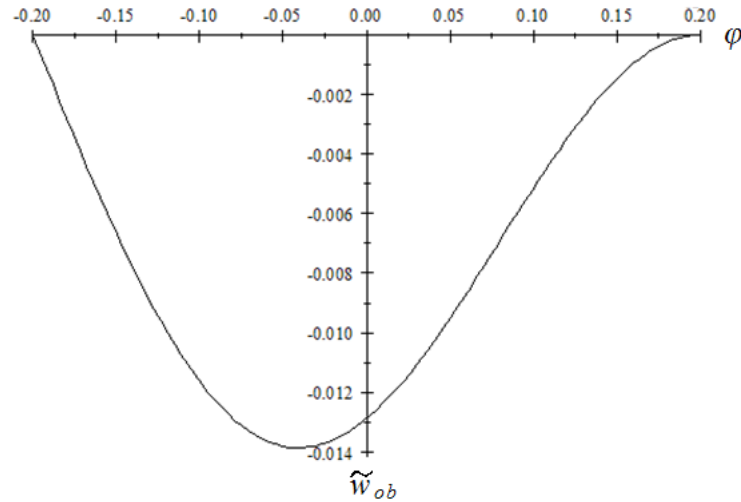
$$\hat{\mu}\vartheta \approx n_1\pi; \quad n_1 = 0.7151 \quad (66)$$

a legkisebb pozitív gyöke. Amennyiben ennek ismeretében képezzük a (63a), (64a) egyenletek összegét, majd különbségét és átrendezzük a (64b) képletet, a stabilitásvesztéshez tartozó $\tilde{w}_{ob}$ radiális elmozdulást kapjuk:

$$\tilde{w}_{ob}(\varphi, \vartheta) \approx G_1 \frac{\vartheta^2}{0.5114} \left[-\frac{1}{\pi^2} \cos\left(\frac{n_1\pi}{\vartheta} \varphi\right) + \frac{0.2552}{\pi} \sin\left(\frac{n_1\pi}{\vartheta} \varphi\right) - \frac{0.1991}{\pi} \frac{\varphi}{\vartheta} - \frac{0.1991}{\pi} \right].$$

A képletben álló G_1 határozatlan állandó.

A 4. ábra $G_1 = 1$ és $\vartheta = 0.2$ esetén grafikusan szemlélteti a megoldást.



4. ábra. A stabilitásvesztés utáni radiális elmozdulás $\varepsilon_{mb} = 0$ esetén

Visszahelyettesítve a (65) és (66) eredményeket a kritikus erőt adó (60) formulába (vegyük észre hogy a visszahelyettesítés után a számlálóból és a nevezőből egyaránt esnek ki tagok) adódik a dimenziómentes $\hat{P}$ kritikus terhelés numerikus értéke:

$$\hat{P} = \hat{P}_{krit1} = 6.0416 \approx 1.9231\pi . \quad (67)$$

Az utóbbi eredmény és a (61) értelmezés felhasználásával pedig

$$P_{krit1} = \frac{n_2\pi I_{e\eta}}{\rho_o^2\vartheta} , \quad n_2 = 1.9231 \quad (68)$$

a kritikus erő.

5.3. Lineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} \neq 0$ feltevés mellett

Ha feltételezzük, hogy megváltozik az E -vel súlyozott középvonal hossza a stabilitásvesztés után és továbbra is a lineáris modell alapján számolunk, akkor $\varepsilon_{o\xi b} \neq 0$, és fenn kell állnia a (47) és (50) összefüggések alapján írható

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{o\xi b}}{d\varphi} &= \tilde{u}_{ob}^{(2)} + \tilde{w}_{ob}^{(1)} = 0 , \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{o\xi b} = \text{állandó} \\ \tilde{w}_{ob}^{(4)} + \hat{\mu}^2 \tilde{w}_{ob}^{(2)} &= -\frac{\rho_o^2 A_e}{I_{e\eta}} \varepsilon_{o\xi b} = \text{állandó} = C_2 \hat{\mu}^2 \end{aligned} \quad (69)$$

differenciálegyenleteknek, ahol a $C_2 \hat{\mu}^2$ módon jelöltük az egyelőre ismeretlen állandót. Nem nehéz visszahelyettesítésekkel ellenőrizni, hogy a fenti differenciálegyenletrendszernek

$$\tilde{u}_{ob} = -\frac{1}{6\hat{\mu}^2} \left(C_1 + \frac{C_2}{\hat{\mu}^2} (\hat{\mu}\varphi)^3 + 6C_3\hat{\mu}\varphi + 3C_4(\hat{\mu}\varphi)^2 + 6C_5 \sin \hat{\mu}\varphi - 6C_6 \cos \hat{\mu}\varphi \right) \quad (70a)$$

$$\tilde{w}_{ob} = \frac{1}{2} \frac{C_2}{\hat{\mu}^2} (\hat{\mu}\varphi)^2 + C_3 + C_4\hat{\mu}\varphi + C_5 \cos \hat{\mu}\varphi + C_6 \sin \hat{\mu}\varphi \quad (70b)$$

a megoldása. A fenti képletekben $C_i, i = 1, \dots, 6$ egyelőre határozatlan integrációs állandókat jelöl. A (70) differenciálegyenletekhez a bal oldalon csuklóval megtámasztott és jobboldalon befogott rúd esetén az

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ob}|_{-\vartheta} &= 0 , & \tilde{u}_{ob}|_{\vartheta} &= 0 \\ \tilde{w}_{ob}|_{-\vartheta} &= 0 , & \tilde{w}_{ob}|_{\vartheta} &= 0 , \\ \tilde{w}_{ob}^{(2)}|_{-\vartheta} &= 0 , & \tilde{w}_{ob}^{(1)}|_{\vartheta} &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

peremfeltételek társulnak. A megoldások (71) peremfeltételekbe történő helyettesítése a

$$\begin{aligned} 6\hat{\mu}^2 \tilde{u}_{ob}|_{-\vartheta} &= C_1 - \frac{C_2}{\hat{\mu}^2} (\hat{\mu}\vartheta)^3 - 6C_3\hat{\mu}\vartheta + 3C_4(\hat{\mu}\vartheta)^2 - 6C_5 \sin \hat{\mu}\vartheta - 6C_6 \cos \hat{\mu}\vartheta = 0 \\ \tilde{w}_{ob}|_{-\vartheta} &= \frac{1}{2} \frac{C_2}{\hat{\mu}^2} (\hat{\mu}\vartheta)^2 + C_3 - C_4\hat{\mu}\vartheta + C_5 \cos \hat{\mu}\vartheta - C_6 \sin \hat{\mu}\vartheta = 0 \\ \frac{1}{\hat{\mu}^2} \tilde{w}_{ob}^{(2)}|_{-\vartheta} &= \frac{C_2}{\hat{\mu}^2} - C_5 \cos \hat{\mu}\vartheta + C_6 \sin \hat{\mu}\vartheta = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

illetve a

$$\begin{aligned}
6\hat{\mu}^2 \tilde{u}_{ob}|_{-\vartheta} &= C_1 + \frac{C_2}{\hat{\mu}^2}(\hat{\mu}\vartheta)^3 + 6C_3\hat{\mu}\vartheta + 3C_4(\hat{\mu}\vartheta)^2 + 6C_5 \sin \hat{\mu}\vartheta - 6C_6 \cos \hat{\mu}\vartheta = 0 \\
\tilde{w}_{ob}|_{\vartheta} &= \frac{1}{2} \frac{C_2}{\hat{\mu}^2}(\hat{\mu}\vartheta)^2 + C_3 + C_4\hat{\mu}\vartheta + C_5 \cos \hat{\mu}\vartheta + C_6 \sin \hat{\mu}\vartheta = 0 \\
\frac{1}{\hat{\mu}} \tilde{w}_{ob}^{(1)} \Big|_{\vartheta} &= \frac{C_2}{\hat{\mu}^2}(\hat{\mu}\vartheta) + C_4 - C_5 \sin \hat{\mu}\vartheta + C_6 \cos \hat{\mu}\vartheta = 0
\end{aligned} \tag{73}$$

lineáris egyenletekre vezet. A fenti homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása a $C_1, C_2/\hat{\mu}^2, \dots, C_6$ ismeretlenekre, ha zérus értékű a determinánsa:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{D}}{8} &= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & -(\hat{\mu}\vartheta)^3 & -6\hat{\mu}\vartheta & 3(\hat{\mu}\vartheta)^2 & -6 \sin \hat{\mu}\vartheta & -6 \cos \hat{\mu}\vartheta \\ 0 & \frac{1}{2}(\hat{\mu}\vartheta)^2 & 1 & -\hat{\mu}\vartheta & \cos \hat{\mu}\vartheta & -\sin \hat{\mu}\vartheta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\cos \hat{\mu}\vartheta & \sin \hat{\mu}\vartheta \\ 1 & (\hat{\mu}\vartheta)^3 & 6\hat{\mu}\vartheta & 3(\hat{\mu}\vartheta)^2 & 6 \sin \hat{\mu}\vartheta & -6 \cos \hat{\mu}\vartheta \\ 0 & \frac{1}{2}(\hat{\mu}\vartheta)^2 & 1 & \hat{\mu}\vartheta & \cos \hat{\mu}\vartheta & \sin \hat{\mu}\vartheta \\ 0 & \hat{\mu}\vartheta & 0 & 1 & -\sin \hat{\mu}\vartheta & \cos \hat{\mu}\vartheta \end{vmatrix} = \\
&= (\hat{\mu}\vartheta)^4 \cos 2\hat{\mu}\vartheta + 3(\hat{\mu}\vartheta)^2 + 3 \sin^2 \hat{\mu}\vartheta - 2(\hat{\mu}\vartheta)^3 \sin 2\hat{\mu}\vartheta - 3\hat{\mu}\vartheta \sin 2\hat{\mu}\vartheta = 0
\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenletnek

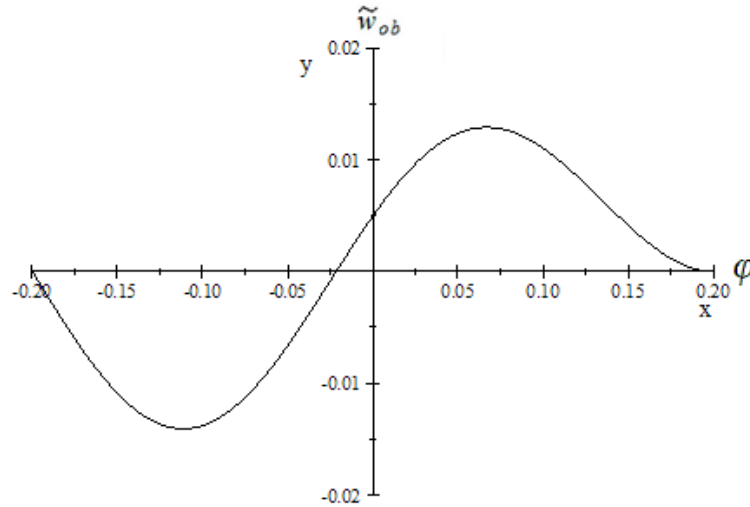
$$\hat{\mu}\vartheta \approx n_3\pi; \quad n_3 = 1.1953 \tag{74}$$

a legkisebb pozitív gyöke.

A (72), (73) peremfeltételek alkalmas lineáris kombinációit képezve felírható $\varepsilon_{mb} \neq 0$ esetén az $\tilde{u}_{ob}$ érintőirányú és a $\tilde{w}_{ob}$ radiális elmozdulás. Utóbbit a

$$\begin{aligned}
&\tilde{w}_{ob}(\varphi, \vartheta) = 0.10742C_6 \times \\
&\times \left[-1 + \frac{16.838}{\pi} \frac{\varphi}{\vartheta} + \frac{17.4978}{\pi} \frac{\varphi^2}{\vartheta^2} + \frac{17.5582}{\pi} \cos \left(\frac{n_3\pi}{\vartheta} \varphi \right) + \frac{29.2459}{\pi} \sin \left(\frac{n_3\pi}{\vartheta} \varphi \right) \right]
\end{aligned} \tag{75}$$

formában lehet kifejezni. A $\vartheta = 0.2$ és $C_6 = 10^{-2}$ értékek választása esetén az 5. ábra grafikusán szemlélteti a megoldást φ függvényében.



5. ábra. A stabilitásvesztés utáni radiális elmozdulás $\varepsilon_{mb} \neq 0$ esetén

Behelyettesítve a (74) megoldást a kritikus $\hat{P}$ értéket adó (60) képletbe adódik a (61) jelölést is felhasználva, hogy

$$\hat{P}_{krit2} = -2.0376 \times 10^{-3} + \frac{965.3044}{\lambda^2}. \quad (76)$$

Innen pedig az következik, hogy a jelen modellnél

$$P_{krit2} = \frac{(n_4 + \frac{n_5}{\lambda^2}) \pi I_{e\eta}}{\rho_o^2 \vartheta}, \quad n_4 = -6.4857 \times 10^{-4}, \quad n_5 = 307.2659 \quad (77)$$

a stabilitásvesztést okozó terhelésre vonatkozó összefüggés.

5.4. Nemlineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} = 0$ feltevés mellett

Az alkalmazott gondolatmenet megegyezik az 5.3 szakaszban már látott gondolatmenettel. Annyi az eltérés, hogy a közép vonal nyúlását most a nemlineáris tag figyelembevételével számítjuk:

$$\varepsilon_m = \tilde{u}_o^{(1)} + \tilde{w}_o + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2 = \varepsilon_{o\xi} + \frac{1}{2} \psi_{o\eta}^2. \quad (78)$$

Véve a fajlagos nyúlás

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2\vartheta} \left[\int_{-\vartheta}^0 \left(\tilde{u}_{o,bal}^{(1)} + \tilde{w}_{o,bal} + \frac{1}{2} \tilde{w}_{o,bal}^{(1)2} \right) d\varphi + \int_0^\vartheta \left(\tilde{u}_{o,jobb}^{(1)} + \tilde{w}_{o,jobb} + \frac{1}{2} \tilde{w}_{o,jobb}^{(1)2} \right) d\varphi \right] \quad (79)$$

matematikai középértékét, majd elvégezve az integrálást, viszonylag hosszadalmas (és az A.4. függelékben tömören összefoglalt) átalakításokat követően $\hat{P}$ -ban másodfokú egyenlet adódik. Ennek együtthatói a μ és $\hat{\mu}\vartheta$ függvényei. Itt csak az egyenlet nullára rendezett

$$\frac{1}{4} X \hat{P}^2 + \frac{1}{2} Y \hat{P} + Z = 0 \quad (80)$$

alakját közöljük, ahol

$$X = (D^2 - 2B^2 + E^2) \cos \hat{\mu}\vartheta \sin \hat{\mu}\vartheta - 4\hat{\mu} (DG + IE) \sin \hat{\mu}\vartheta + 2B (\hat{\mu}\vartheta B + J) + 2B (2K\hat{\mu} - J \cos \hat{\mu}\vartheta) \cos \hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu} (\vartheta D^2 - 4BK + \vartheta E^2) + 2\hat{\mu}^3 \vartheta (I^2 + G^2) \quad (81a)$$

$$\begin{aligned} Y = & (EC - 2AB + CD) (\cos \hat{\mu}\vartheta) \sin \hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}^3 \vartheta^2 (I - G) + 2(E - D) + \\ & + 2(2B + \hat{\mu}\vartheta D - \hat{\mu}\vartheta E - \hat{\mu}DF - \hat{\mu}CG - \hat{\mu}CI - \hat{\mu}EF) \sin \hat{\mu}\vartheta + \\ & + 2\hat{\mu}^3 \vartheta F (I + G) + (2D - 2E - 4\hat{\mu}\vartheta B + 2\hat{\mu}KA - AJ \cos \hat{\mu}\vartheta) \cos \hat{\mu}\vartheta + \\ & + A(2\hat{\mu}\vartheta B + J - 2\hat{\mu}K) + \hat{\mu}\vartheta C (D + E) - \frac{1}{\hat{\mu}} \left((\hat{\mu}\vartheta)^2 + 2 \right) + \\ & + \frac{4(\hat{\mu}\vartheta)^2 (\sin \hat{\mu}\vartheta) \cos \hat{\mu}\vartheta - (\hat{\mu}\vartheta)^2 \sin \hat{\mu}\vartheta - \sin \hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \sin^2 \hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta}{2\hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin 2\hat{\mu}\vartheta} \end{aligned} \quad (81b)$$

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{6} [3(C^2 - A^2) (\cos \hat{\mu}\vartheta) \sin \hat{\mu}\vartheta + 12(A - CF\hat{\mu}) \sin \hat{\mu}\vartheta - \\ & - 12\hat{\mu}\vartheta A \cos \hat{\mu}\vartheta + 3\hat{\mu}\vartheta (A^2 + C^2) + 2\hat{\mu}^3 \vartheta (3F^2 + \vartheta^2)] + 2(\vartheta\hat{\mu})^3 \left(\frac{\hat{\mu}\vartheta}{\lambda} \right)^2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\left(2(\hat{\mu}\vartheta)^3 + 4\hat{\mu}\vartheta + \frac{1}{\hat{\mu}\vartheta}\right) \sin 2\hat{\mu}\vartheta - 4(\hat{\mu}\vartheta)^2 - 2}{2\hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin 2\hat{\mu}\vartheta} - \frac{2(\hat{\mu}\vartheta)^4 - 3}{3\hat{\mu}\vartheta}. \quad (81c)$$

A fenti képletekben álló $A, \dots, K$ állandók értelmezését illetően visszautalunk az (57), (58) képletekre. Ha behelyettesítjük a fenti (81a)-(81c) összefüggésekbe a nyúlásmentes esetre vonatkozó (65) és (66) megoldásokat (a részletektől eltekintünk), akkor adódik hogy

$$\frac{1}{4}X \approx 1.0939, \quad \frac{1}{2}Y \approx -13.2234, \quad Z \approx 39.9621. \quad (82)$$

Ezeket a konstansokat felhasználva a (80) másodfokú egyenlet megoldásából a dimenziómentes kritikus terhelésre a

$$\hat{P}_{nl\ krit\ 1} = \hat{P}_{nl\ krit\ 2} = 6.0416 \quad (83)$$

kettős gyököt kapjuk – zérus a másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Ez az eredmény pontosan megegyezik a lineáris modellel kapott eredménnyel – v. ö. (67) – és így változatlanul fennáll, hogy az $\varepsilon_{mb} = 0$ feltevés esetén

$$P_{nl\ krit\ 1,2} = \frac{n_2 \pi I_{e\eta}}{\rho_o^2 \vartheta}, \quad n_2 = 1.9231 \quad (84)$$

a stabilitásvesztést okozó erő.

5.5. Egy nemlineáris modell a kritikus terhelés meghatározására az $\varepsilon_{mb} \neq 0$ feltevés mellett

Feltételezzük, hogy a stabilitásvesztés utáni változásokat továbbra is a (69) differenciálegyenletek írják le, azaz (a) elhanyagolható a (49) egyenlet jobboldalán az egység mellett a $\tilde{w}_o^{(2)}$ derivált és (b) a középvonal fajlagos nyúlásának növekménye lineáris függvénye az $\tilde{u}_{ob}$ és $\tilde{w}_{ob}$ elmozdulásnövekményeknek – fennáll tehát a (69)₁ egyenlet. Következésképp felhasználható az 5.3. szakaszban a fajlagos nyúlás változásának feltételezése mellett meghatározott $\hat{\mu}\vartheta$ érték a további számításokban. Behelyettesítsük ennek alapján $\hat{\mu}\vartheta$ szorzat (74) alatti értékét a kritikus terhelést adó (80) egyenlet (81a)-(81c) együtthatóiba. A számítások részletezése nélkül kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4}X = 1, \quad \frac{1}{2}Y \simeq -19.5365, \quad Z = 93.3377 + \frac{403.3501}{\lambda^2}. \quad (85)$$

Következésképp a (80) másodfokú egyenletnek

$$\hat{P}_{nl\ krit\ 3,4} = 9.7682 \pm \sqrt{2.0417 - \frac{403.3501}{\lambda^2}} \quad (86)$$

a megoldása $\hat{P}$ -re, amivel a kritikus terhelés a

$$P_{nl\ krit\ 3,4} = \left(n_6 \pm \sqrt{n_7 - \frac{n_8}{\lambda^2}}\right) \frac{\pi I_{e\eta}}{\vartheta \rho_o^2}, \quad n_6 = 9.7682, \quad n_7 = 2.0417, \quad n_8 = 403.3501 \quad (87)$$

alakban írható fel.

5.6. Differenciálegyenletek dinamikus stabilitásvesztés esetére

A stabilitásvesztést harmonikus dinamikai folyamatként kezelve mutatjuk meg itt a vonatkozó mozgásegyenleteket. A linearizált egyenletekből indulva ki, de nem élve az $\varepsilon_{mb} = 0$ feltevéssel az elmozdulásnövekményeket a $\tilde{w}_{ob} = W(\varphi) \sin \alpha t$, $\tilde{u}_{ob} = U(\varphi) \sin \alpha t$ módon közelítjük, ahol U és W a mozgás amplitúdói, α pedig a rezgés frekvenciája. Megjegyezzük, hogy a $\psi_{o\eta}$ szögelfordulásmezőnek $\Psi_{o\eta} = -dW/d\varphi$ az amplitúdója. Behelyettesítve ezeket az összefüggéseket a (36a), (36b) képletekbe és alkalmazva a 4.3. szakasz gondolatmenetét a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \frac{dW}{d\varphi} &= 0 \\ \frac{d^4 W}{d\varphi^4} + \hat{\mu}^2 \frac{d^2 W}{d\varphi^2} &= 0, \quad \hat{\mu}^2 = -\frac{\rho_o^2 A_e \varepsilon_m}{I_{e\eta}} \end{aligned} \quad (88)$$

differenciálegyenleteket kapjuk az amplitúdókra. Mivel M_b , $\psi_{o\eta b}$ és N_b folytonos, továbbá mivel az $s = 0$ helyen fennáll, hogy $|N_b \psi_{o\eta}| \ll \left| \frac{dM_b}{ds} \right|$, átírhatók a (37) diszkontinuitási feltételek a

$$\begin{aligned} \frac{dM_b}{ds} \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \frac{dM_b}{ds} \Big|_{s(0+\varepsilon)} + m \frac{d^2 w_{ob}}{dt^2} \Big|_{s=0} &= 0 \\ N_b \Big|_{s(0-\varepsilon)} - N_b \Big|_{s(0+\varepsilon)} - P \psi_{o\eta} \Big|_{s=0} + m \frac{d^2 u_{ob}}{dt^2} \Big|_{s=0} &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

alakra, ahol kihasználtuk, hogy $P_{o\zeta b} \Big|_{s=0} \approx -P \psi_{o\eta} \Big|_{s=0}$. A fenti feltételekhez az amplitúdókkal felírt

$$\begin{aligned} U \Big|_{s(0+\varepsilon)} &= U \Big|_{s(0-\varepsilon)}, \quad W \Big|_{s(0+\varepsilon)} = W \Big|_{s(0-\varepsilon)} \\ \frac{dW}{d\varphi} \Big|_{s(0+\varepsilon)} &= \frac{dW}{d\varphi} \Big|_{s(0-\varepsilon)}, \quad \frac{d^2 W}{d\varphi^2} \Big|_{s(0+\varepsilon)} = \frac{d^2 W}{d\varphi^2} \Big|_{s(0-\varepsilon)} \end{aligned} \quad (90)$$

folytonossági feltételek társulnak.

A (39) és (40) képletek felhasználásával térve át az amplitúdókra és kihasználva ahol érdemes az előbbi folytonossági feltételeket, átírhatók a (89) diszkontinuitási feltételek az

$$\begin{aligned} I_{e\eta} \frac{d^3 W}{d\varphi^3} \Big|_{s(0+\varepsilon)} - I_{e\eta} \frac{d^3 W}{d\varphi^3} \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \rho_o^2 m \alpha^2 W \Big|_{s=0} &= 0 \\ A_e \frac{dU}{d\varphi} \Big|_{s(0-\varepsilon)} - A_e \frac{dU}{d\varphi} \Big|_{s(0+\varepsilon)} + P \frac{dW}{d\varphi} \Big|_{s=0} - m \alpha^2 U \Big|_{s=0} &= 0 \end{aligned} \quad (91)$$

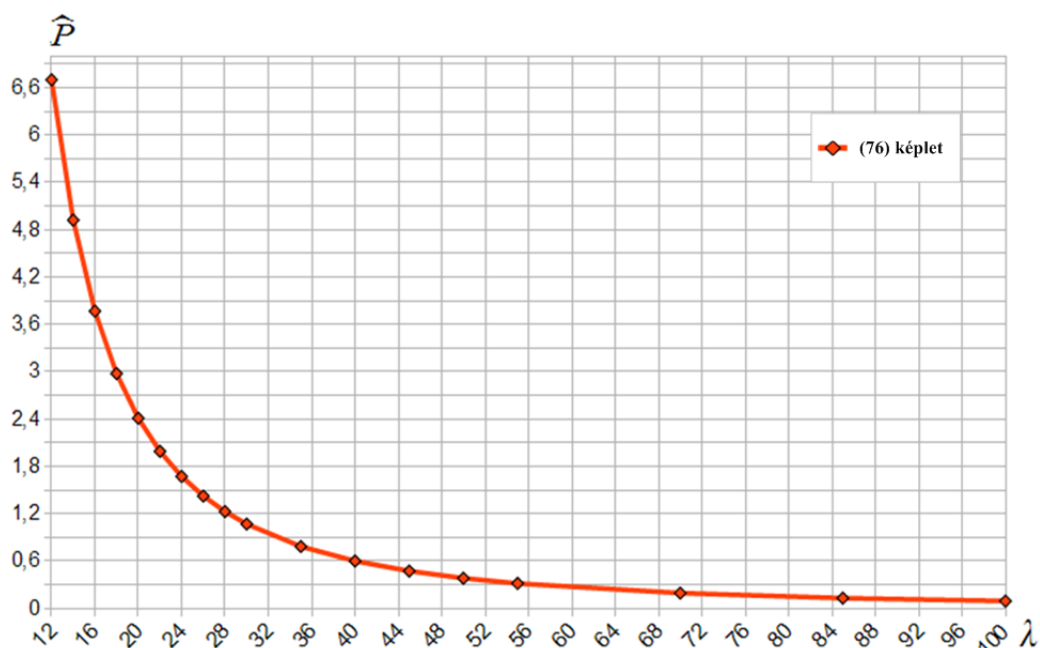
alakra, ahol α a feltételezett harmonikus mozgás körfrekvenciája. Ezeken kívül elvben

$$U \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad W \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad \frac{dW}{d\varphi} \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0, \quad \frac{d^2 W}{d\varphi^2} \Big|_{s(\pm\vartheta)} = 0 \quad (92)$$

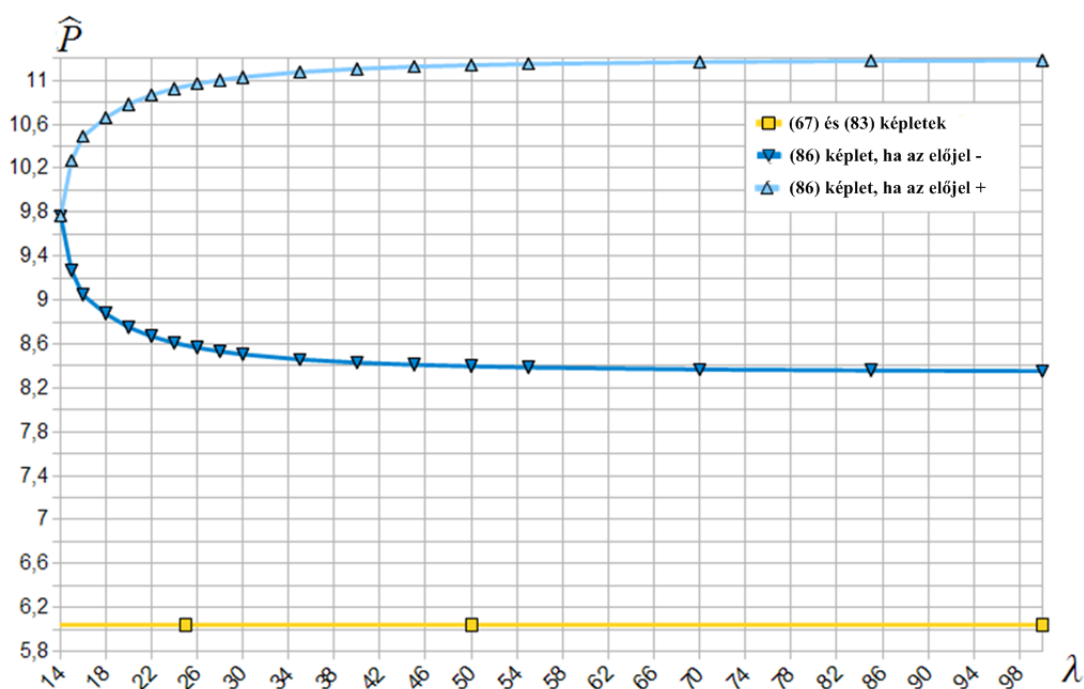
alakúak lehetnek a geometriai peremfeltételek. Felhívjuk azonban ehelyütt arra a körülményre is a figyelmet, hogy hallgatólagos feltevés az, hogy a P erő megtartja az irányát a stabilitásvesztésig. Következésképp szimmetrikus támaszelrendezés alapulvételével kell választani a fenti peremfeltételek közül. Ilyen pl. a két végén csuklóval megtámasztott, illetve a két végén befogott rúd.

6. KÖVETKEZTETÉSEK, EREDMÉNYEK

Összhangban a Bevezetésben megfogalmazott célkitűzéssel, keresztmetszeti inhomogenitású (heterogén anyagú) és állandó görbületű lapos síkbeli rudak esetére meghatároztuk a kritikus terhelést, ha a rúd bal oldali vége csuklóval van megtámasztva, a jobb oldali vége pedig befogott. Ezt a feladatot ismereteink szerint homogén izotrop testre sem vizsgálta a lapos görbe rudak stabilitási kérdéseivel foglalkozó szakirodalom.



6. ábra. Lineáris modell, $\varepsilon_{mb} \neq 0$

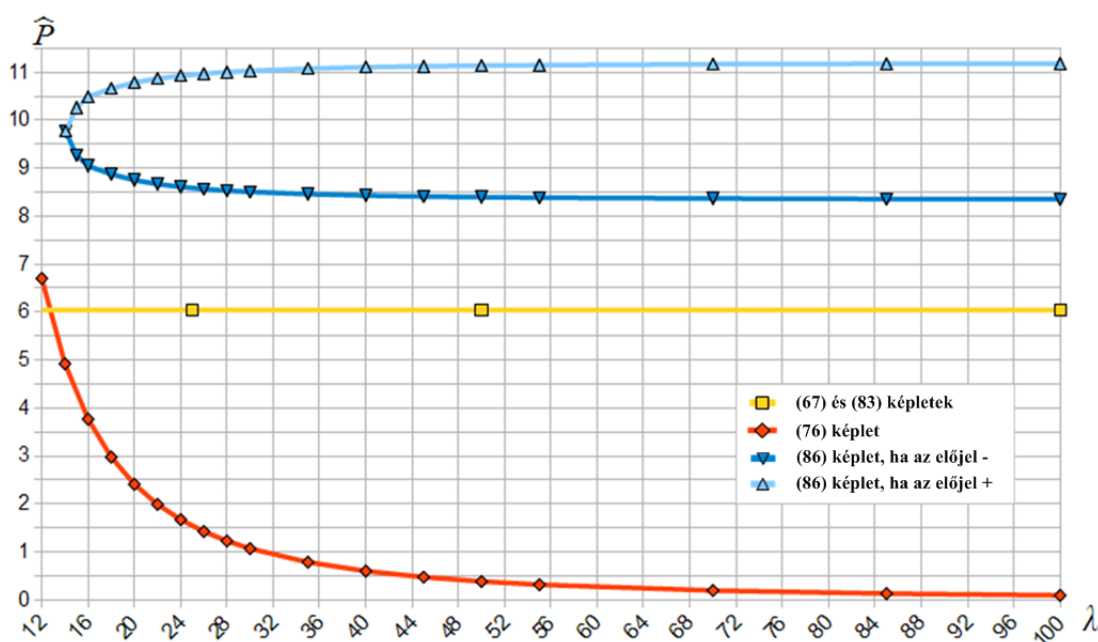


7. ábra. Lineáris és nemlineáris modell $\varepsilon_{mb} = 0$ -ra, és egy nemlineáris modell, $\varepsilon_{mb} \neq 0$ -ra

A megoldás során a szükséges kinematikai összefüggések előállítását követően leszámítottuk a virtuális munka elv felhasználásával a vonatkozó egyensúlyi egyenleteket és a dinamikai peremfeltételeket és mindenütt utaltunk elhanyagolások esetén ezek jogosságára.

Négy különböző modellel foglalkoztunk. Ezek közül kettő lineáris, kettő pedig nemlineáris modell volt. A 6-8. ábrák mind a négy modell esetére szemléltetik a stabilitásvesztést okozó kritikus $\hat{P}$ értékeket a λ paraméter függvényében – ezek értelmezését illetően visszautalunk a (61) képletekre.

Amikor feltételeztük, hogy nem változik meg az E -vel súlyozott középvonal hossza a stabilitásvesztés után, akkor a lineáris és nemlineáris modell meglepő módon azonos eredményre vezetett – lásd citromsárga görbék.



8. ábra. A négy modell együtt

Amikor feltételeztük, hogy megváltozik az E -vel súlyozott középvonal hossza a stabilitásvesztés után, akkor a lineáris modell (piros görbe) a $\lambda > 12.5$ értéktől kezdődően kisebb kritikus erőt adott, mint az előző két modell. Ez azt jelenti, hogy nem hanyagolható el a stabilitásvesztés utáni alakváltozások E -vel súlyozott középvonalra gyakorolt hatása. Meglepő módon ez esetben a nemlineáris modell (kék görbék) nagyobb terhelést enged meg. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben további vizsgálatokra is szükség lehet, azaz feltehetően nem hanyagolható el a (49) egyenlet jobb oldalán az egység mellett a $\tilde{w}_o^{(2)}$ derivált. Ez a megoldás azonban a λ értékére (a rúd geometriai jellemzőire) vonatkozó megszorítást is jelent, mivel a dimenziómentes kritikus erőt adó másodfokú egyenletnek csak akkor van valós (és pozitív) gyöke, ha nem zérus a diszkrimináns, vagyis ezen képlet csak a $\lambda > 14$ értékek esetén alkalmazható.

A virtuális munka elvből – a fentiek mellett – leszámítottuk a stabilitásvizsgálat egyenleteit követő terhelésre is. Ezek az egyenletek lehetőséget biztosítanak majd a dinamikus stabilitásvizsgálat elvégzésére. További kérdésként vethető fel, hogy mi

történik, ha nem lapos a rúd. E két kérdéskör tekintetében folyamatban vannak a vizsgálatok.

FÜGGELÉK A. INTEGRÁLÁTALAKÍTÁSOK

A.1. A (11) baloldalán álló integrál átalakítása

Ez az integrál a belső erők virtuális munkája. A (12) képletek helyettesítésével kapjuk a (11)-ből, hogy:

$$\begin{aligned}
 \int_V \sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi dV &= \int_{\mathcal{L}} \int_A \left(\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} \right) \sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi dA ds = \\
 &= \int_{\mathcal{L}} \int_A \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_o} \right) \sigma_\xi \left[\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} \left(\frac{d}{ds} \delta u_o + \frac{\delta w_o}{\rho_o} + \zeta \frac{d\psi_{o\eta}}{ds} \right) + \psi_{o\eta} \delta \psi_{o\eta} \right] dA ds = \\
 &= \int_{\mathcal{L}} \left[\int_A \sigma_\xi dA \left(\frac{d\delta u_o}{ds} + \frac{\delta w_o}{\rho_o} \right) + \int_A \zeta \sigma_\xi dA \frac{d\delta \psi_{o\eta}}{ds} + \int_A \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_o} \right) \sigma_\xi dA \psi_{o\eta} \delta \psi_{o\eta} \right] ds = \\
 &= \int_{\mathcal{L}} \left[N \left(\frac{d\delta u_o}{ds} + \frac{\delta w_o}{\rho_o} \right) - M \frac{d^2 \delta w_o}{ds^2} - \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \frac{d\delta w_o}{ds} \right] ds .
 \end{aligned}$$

Innen parciális integrálások után adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 \int_V \sigma_\xi \delta \varepsilon_\xi dV &= - \int_{\mathcal{L}} \frac{dN}{ds} \delta u_o ds - N \delta u_o|_{s(-\vartheta)} + N \delta u_o|_{s(\vartheta)} - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{N}{\rho_o} \right) \delta w_o ds + \\
 &+ M \delta \psi_{o\eta}|_{s(\vartheta)} - M \delta \psi_{o\eta}|_{s(-\vartheta)} - \frac{dM}{ds} \delta w_o \Big|_{s(-\vartheta)} + \frac{dM}{ds} \delta w_o \Big|_{s(\vartheta)} + \\
 &+ \left[\frac{dM}{ds} \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \frac{dM}{ds} \Big|_{s(0+\varepsilon)} \right] \delta w_o|_{s=0} + \int_{\mathcal{L}} \left[\frac{d}{ds} \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \delta w_o ds + \\
 &+ \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \delta w_o \Big|_{s(-\vartheta)} - \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \delta w_o \Big|_{s(\vartheta)} . \quad (93)
 \end{aligned}$$

A.2. A (29) egyenlet átalakítása

A hivatkozott képletben álló első három tag igényel további módosításokat. Tekintsük az első integrált, amely a (27) képlet helyettesítése és alkalmas parciális integrálások elvégzését követően az

$$\begin{aligned}
 \int_V \sigma_\xi \delta \varepsilon_{\xi b}^N dV &= \int_{\mathcal{L}} \int_A \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_o} \right) \sigma_\xi \delta \varepsilon_{\xi b}^N dA ds = - \int_{\mathcal{L}} \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} \frac{d\delta w_{ob}}{ds} ds = \\
 &= \int_{\mathcal{L}} \left[\frac{d}{ds} \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} \right] \delta w_{ob} ds + \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} \delta w_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} + \\
 &+ \left[\left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} \Big|_{s(0+\varepsilon)} - \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} \Big|_{s(0-\varepsilon)} \right] \delta w_{ob}|_{s=0} - \\
 &- \left(N + \frac{M}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} \delta w_{ob} \Big|_{s(\vartheta)} \quad (94a)
 \end{aligned}$$

alakban írható fel. A (29) képlet második tagjánál hasonlóan eljárva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{\xi b} \delta \varepsilon_{\xi b}^L dV &= \\
&= \int_{\mathcal{L}} \int_A \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_o}\right) \sigma_{\xi b} \left[\frac{1}{1 + \frac{\zeta}{\rho_o}} \left(\frac{d}{ds} \delta u_{ob} + \delta \frac{w_{ob}}{\rho_o} + \zeta \frac{d\psi_{\eta b}}{ds} \right) + \psi_{\eta b} \delta \psi_{\eta b} \right] dA ds = \\
&= \int_{\mathcal{L}} \left[\int_A \sigma_{\xi b} dA \frac{d\delta u_{ob}}{ds} + \int_A \sigma_{\xi b} dA \frac{\delta w_{ob}}{\rho_o} + \int_A \zeta \sigma_{\xi b} dA \frac{d\delta \psi_{\eta b}}{ds} + \right. \\
&\quad \left. + \int_A \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_o}\right) \sigma_{\xi b} dA \psi_{\eta b} \delta \psi_{\eta b} \right] ds = \\
&= \int_{\mathcal{L}} \left[N_b \frac{d\delta u_{ob}}{ds} + \frac{N_b}{\rho_o} \delta w_{ob} - M_b dA \frac{d^2 \delta w_{ob}}{ds^2} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o}\right) \psi_{\eta b} \frac{d\delta w_{ob}}{ds} \right] ds = \\
&= - \int_{\mathcal{L}} \frac{dN_b}{ds} \delta u_{ob} ds - N_b \delta u_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} + \left[N_b \Big|_{s(0-\varepsilon)} - N_b \Big|_{s(0+\varepsilon)} \right] \delta u_{ob} \Big|_0 + N_b \delta u_{ob} \Big|_{s(\vartheta)} + \\
&\quad + \int_{\mathcal{L}} \frac{N_b}{\rho_o} \delta w_{ob} ds - \int_{\mathcal{L}} \frac{d^2 M_b}{ds^2} \delta w_{ob} ds + M_b \delta \psi_{\eta b} \Big|_{s(\vartheta)} - M_b \delta \psi_{\eta b} \Big|_{s(-\vartheta)} + \\
&\quad - \frac{dM_b}{ds} \delta w_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} + \left[\frac{dM_b}{ds} \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \frac{dM_b}{ds} \Big|_{s(0+\varepsilon)} \right] \delta w_{ob} \Big|_{s=0} + \frac{dM_b}{ds} \delta w_{ob} \Big|_{s(\vartheta)} + \\
&+ \int_{\mathcal{L}} \left[\frac{d}{ds} \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \right] \delta w_{ob} ds + \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \delta w_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \delta w_{ob} \Big|_{s(\vartheta)} + \\
&\quad + \left[\left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \Big|_{s(0+\varepsilon)} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \Big|_{s(0-\varepsilon)} \right] \delta w_{ob} \Big|_{s=0} . \quad (94b)
\end{aligned}$$

A harmadik integrál pedig megegyezik az elsővel, ha σ_{ξ} helyett $\sigma_{\xi b}$ -t gondolunk. Ebből kifolyólag könnyen képezhető az eredmény, ha a (94a) képlet jobb oldalába N és M helyett N_b illetve M_b kerül beírásra. Következésképp:

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{\xi b} \delta \varepsilon_{\xi b}^N dV &= - \int_{\mathcal{L}} \int_A \left(1 + \frac{\zeta}{\rho_o}\right) \sigma_{\xi b} \psi_{\eta b} \frac{d\delta w_{ob}}{ds} dA ds = \\
&= \int_{\mathcal{L}} \left[\frac{d}{ds} \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \right] \delta w_{ob} ds + \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \delta w_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} + \\
&\quad + \left[\left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \Big|_{s(0+\varepsilon)} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \Big|_{s(0-\varepsilon)} \right] \delta w_{ob} \Big|_{s=0} - \\
&\quad - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \delta w_{ob} \Big|_{s(\vartheta)} . \quad (94c)
\end{aligned}$$

A (94) képletek segítségével átírható a (29) alatti virtuális munka elv az alábbi véglegesnek tekinthető alakba:

$$\begin{aligned}
&- \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{dN_b}{ds} + f_{tb} \right) \delta u_{ob} ds - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{N_b}{\rho_o} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{d}{ds} \left[\left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} + \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \right] + f_{nb} \right) \delta w_{ob} ds - \\
&\quad - \left[\frac{dM_b}{ds} - \left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{\eta b} \right] \delta w_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{dM_b}{ds} - \left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \delta w_{ob} \Big|_{s(\vartheta)} + \\
& + \left[\left[\frac{dM_b}{ds} - \left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \Big|_{s(0-\varepsilon)} - \right. \\
& - \left. \left[\frac{dM_b}{ds} - \left(N + N_b + \frac{M + M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta b} - \left(N_b + \frac{M_b}{\rho_o} \right) \psi_{o\eta} \right] \Big|_{s(0+\varepsilon)} + m \frac{d^2 w}{dt^2} \Big|_{s=0} \right] \delta w_{ob} \Big|_{s=0} - \\
& - N_b \delta u_{ob} \Big|_{s(-\vartheta)} + \left[N_b \Big|_{s(0-\varepsilon)} - N_b \Big|_{s(0+\varepsilon)} + P_{o\xi b} + m \frac{d^2 u}{dt^2} \Big|_{s=0} \right] \delta u_{ob} \Big|_{s=0} + N_b \delta u_{ob} \Big|_{s(\vartheta)} + \\
& + (M_b - k_t \psi_{o\eta b}) \Big|_{s(\vartheta)} \delta \psi_{o\eta b} \Big|_{s(\vartheta)} - (M_b + k_t \psi_{o\eta b}) \Big|_{s(-\vartheta)} \delta \psi_{o\eta b} \Big|_{s(-\vartheta)} = 0. \quad (95)
\end{aligned}$$

A.3. A (60) képlet levezetése röviden

Ha beírjuk az (51) és (52) képleteket az (59) egyenlet jobb oldalába, kapjuk egyrészt az

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^0 \tilde{w}_{o,bal} d\varphi &= \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^0 \left(-D_1 \frac{\cos \hat{\mu}\varphi}{\hat{\mu}^2} - D_2 \frac{\sin \hat{\mu}\varphi}{\hat{\mu}^2} + D_3 \varphi + D_4 + \frac{\varphi^2}{2} \right) d\varphi = \\
&= \frac{-6D_1 \sin \hat{\mu}\vartheta + 6D_2 (1 - \cos \hat{\mu}\vartheta) - 3D_3 \vartheta^2 \hat{\mu}^3 + 6D_4 \vartheta \hat{\mu}^3 + (\vartheta \hat{\mu})^3}{12\vartheta \hat{\mu}^3}
\end{aligned}$$

tagot, másrészt pedig az

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\vartheta} \int_0^{\vartheta} \tilde{w}_{o,jobb} d\varphi &= \frac{1}{2\vartheta} \int_0^{\vartheta} \left(-D_1 \frac{\cos \hat{\mu}\varphi}{\hat{\mu}^2} - D_6 \frac{\sin \hat{\mu}\varphi}{\hat{\mu}^2} + D_7 \varphi + D_4 + \frac{\varphi^2}{2} \right) d\varphi = \\
&= \frac{-6D_1 \sin \hat{\mu}\vartheta + 6D_4 \vartheta \hat{\mu}^3 + 6D_6 (\cos \hat{\mu}\vartheta - 1) + 3D_7 \vartheta^2 \hat{\mu}^3 + (\vartheta \hat{\mu})^3}{12\vartheta \hat{\mu}^3}
\end{aligned}$$

részeredményt. Visszaírva ezek összegét az (59)-be átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{o\xi} = \frac{1}{2\vartheta \hat{\mu}^3} \left[-2D_1 \sin \hat{\mu}\vartheta + [D_2 - D_6] (1 - \cos \hat{\mu}\vartheta) + \frac{D_7 - D_3}{2} \vartheta^2 \hat{\mu}^3 + 2D_4 \vartheta \hat{\mu}^3 + \frac{(\vartheta \hat{\mu})^3}{3} \right],$$

ahonnan a (61)₁ jelölés bevezetése után a zérusra rendezett

$$\begin{aligned}
0 &= -2D_1 \sin \hat{\mu}\vartheta + [D_2 - D_6] (1 - \cos \hat{\mu}\vartheta) + \frac{D_7 - D_3}{2} \vartheta^2 \hat{\mu}^3 + \\
&+ 2D_4 \vartheta \hat{\mu}^3 + \frac{(\vartheta \hat{\mu})^3}{3} + \frac{2(\hat{\mu}\vartheta)^5}{\lambda^2} \quad (96)
\end{aligned}$$

formula következik. A D_i értékeket beírva (57) alapján megmutatható, hogy a fenti egyenletnek

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{2(\hat{\mu}\vartheta)^4 - 3}{3\hat{\mu}\vartheta} + \frac{\sin(2\hat{\mu}\vartheta) \frac{2(\hat{\mu}\vartheta)^4 + 4(\hat{\mu}\vartheta)^2 + 1}{\hat{\mu}\vartheta} - 4(\hat{\mu}\vartheta)^2 - 2}{2\hat{\mu}\vartheta \cos(2\hat{\mu}\vartheta) - \sin(2\hat{\mu}\vartheta)} + \frac{2(\hat{\mu}\vartheta)^5}{\lambda^2} - \frac{8\hat{P}}{\hat{\mu}\vartheta} \times \\
&\times \left(-\frac{1}{4} \left((\hat{\mu}\vartheta)^2 + 2 \right) + \frac{(\hat{\mu}\vartheta)^2 \sin(\hat{\mu}\vartheta) \cos \hat{\mu}\vartheta - (\hat{\mu}\vartheta)^2 \sin \hat{\mu}\vartheta - \sin \hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \sin^2 \hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta}{2\hat{\mu}\vartheta \cos 2\hat{\mu}\vartheta - \sin 2\hat{\mu}\vartheta} \right)
\end{aligned}$$

a végleges alakja, amelyből rendezés után máris adódik a (60) kifejezés.

A.4. A (79) alatti integrál számításának vázlata

A hivatkozott egyenletet átrendezve kapjuk a

$$0 = \frac{1}{2\vartheta} \left[\int_{-\vartheta}^0 \left(\tilde{u}_{o,bal}^{(1)} + \tilde{w}_{o,bal} \right) d\varphi + \int_0^{\vartheta} \left(\tilde{u}_{o,jobb}^{(1)} + \tilde{w}_{o,jobb} \right) d\varphi - 2\vartheta \varepsilon_m \right] + \\ + \frac{1}{2\vartheta} \left[\int_{-\vartheta}^0 \frac{1}{2} \left(\tilde{w}_{o,bal}^{(1)} \right)^2 d\varphi + \int_0^{\vartheta} \frac{1}{2} \left(\tilde{w}_{o,jobb}^{(1)} \right)^2 d\varphi \right]$$

alakot, ahol a jobb oldali első szögletes zárójelben álló összeg megegyezik (96)-tal. Így tehát csak a második szögletes zárójelben lévő tagokkal kell a továbbiakban foglalkozni – nevezzük ezeket együttesen I_{nl} -nek.

Deriváljuk (51)-et és az eredményt emeljük négyzetre. Rendezés után adódik, hogy

$$\frac{1}{4\vartheta} \tilde{w}_{o,bal}^{(1)}(\varphi)^2 = \frac{1}{2\vartheta} \left[\frac{D_1}{\hat{\mu}} \left(\frac{D_1}{2\hat{\mu}} \sin \hat{\mu}\varphi - \frac{D_2}{\hat{\mu}} \cos \hat{\mu}\varphi + D_3 + \varphi \right) \sin \hat{\mu}\varphi + \right. \\ \left. + \frac{D_2}{\hat{\mu}} \left(\frac{D_2}{2\hat{\mu}} \cos \hat{\mu}\varphi - D_3 - \varphi \right) \cos \hat{\mu}\varphi + D_3 \left(\frac{D_3}{2} + \varphi \right) + \frac{\varphi^2}{2} \right].$$

Az (52) képlet esetén hasonló gondolatmenettel kapjuk az

$$\frac{1}{4\vartheta} \tilde{w}_{o,jobb}^{(1)}(\varphi)^2 = \frac{1}{2\vartheta} \left[\frac{D_1}{\hat{\mu}} \left(\frac{D_1}{2\hat{\mu}} \sin \hat{\mu}\varphi - \frac{D_6}{\hat{\mu}} \cos \hat{\mu}\varphi + D_7 + \varphi \right) \sin \hat{\mu}\varphi + \right. \\ \left. + \frac{D_6}{\hat{\mu}} \left(\frac{D_6}{2\hat{\mu}} \cos \hat{\mu}\varphi - D_7 - \varphi \right) \cos \hat{\mu}\varphi + D_7 \left(\frac{D_7}{2} + \varphi \right) + \frac{\varphi^2}{2} \right]$$

összefüggést. Visszaírva ezen eredményeket I_{nl} -be, majd elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$I_{nl} = \frac{1}{24\vartheta \hat{\mu}^3} \times \\ \{ 3D_2 [D_2 (\cos \hat{\mu}\vartheta \sin \hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}\vartheta) + 4(\hat{\mu}\vartheta \sin \hat{\mu}\vartheta - D_3 \hat{\mu} \sin \hat{\mu}\vartheta + \cos \hat{\mu}\vartheta - 1)] + \\ + 6D_1 [D_1 (\hat{\mu}\vartheta - \cos \hat{\mu}\vartheta \sin \hat{\mu}\vartheta) - (D_6 - D_2) \sin^2 \hat{\mu}\vartheta + \\ + 2\hat{\mu} (D_7 - D_3) (1 - \cos \hat{\mu}\vartheta) + 4(\sin \hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \cos \hat{\mu}\vartheta)] + \\ + 3D_6 [D_6 (\cos \hat{\mu}\vartheta \sin \hat{\mu}\vartheta + \hat{\mu}\vartheta) + 4(1 - D_7 \hat{\mu} \sin \hat{\mu}\vartheta - \cos \hat{\mu}\vartheta - \hat{\mu}\vartheta \sin \hat{\mu}\vartheta)] + \\ + 2\hat{\mu}^3 \vartheta [3D_7 (D_7 + \vartheta) + 3D_3 (D_3 - \vartheta) + 2\vartheta^2] \}.$$

Ha ehhez még hozzávesszük a lineáris közelítés (96) eredményeit, majd (57) alapján felbontjuk a D_i állandókat, akkor már felírható a $\hat{P}$ hatványai szerint rendezett (80), (81) alak.

HIVATKOZÁSOK

1. M. A. Bradford, B. Uy, and Y. L. Pi. In-plane stability of arches under a central concentrated load. *J. Eng. Mech. ASCE*, 128(7):710–719, 2002.
2. M. A. Bradford Y.L. Pi and B. Uy. In-plane stability of arches. *International Journal of Solids and Structures*, 39:105–125, 2002.
3. Y. L. Pi, M. A. Bradford, and F. Tin-Loi. Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches. *International Journal of Solids and Structures*, 44:2401–2425, 2007.
4. Mark Andrew Bradford Yong-Lin Pi and Francis Tin-Loi. Non-linear in-plane buckling of rotationally restrained shallow arches under a central concentrated load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43:1–17, 2008.
5. S.P. Timoshenko and J.M. Gere. *Theory of elastic stability*. New York, McGraw-Hill, 1961.
6. G.J. Simitses. *An introduction to the elastic stability of structures*. New Jersey, Prentice-Hall, 1976.