

**SZENT ISTVÁN
EGYETEM**



YBL MIKLÓS ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI KAR, BUDAPEST
Tudományos Diákköri Dolgozat

**Külpontosan nyomott, kő-, téglafalazat-, vagy vasalatlan beton anyagú,
derékszögű négyszög keresztmetszetű, zömök rudak keresztmetszetén
értelmezett, szilárdságtanilag eltérő viselkedésű területek határgörbéinek
származtatása rugalmas- és képlékeny határállapotban.**

**Calculation of the curves, separating parts of different stress behaviour off the
cross section, defined on eccentrically compressed short blocks, of rectangular
right angle cross section, made of stone-, masonry- or concrete materials in
elastic and plastic stage.**

Hazay Máté, építőmérnök Bsc. III. évfolyam
Témavezető: Dr. Fischer János, főiskolai docens
Szent István Egyetem, Ybl Miklós Építéstudományi Kar
Mechanika és Tartószerkezetek Tanszék
2011. november 3.

Tartalom

Előszó.....	4
1. Elméleti bevezetés.....	5
1.1. A témához kapcsolódó fogalmak definiálása.....	5
1.1.1. A szilárdságtan tárgya.....	5
1.1.2. Az elemi szilárdságtan feltevései.....	5
1.1.3. Zömök rúd.....	6
1.1.4. Húzószilárdsággal nem rendelkező anyag.....	6
1.2. A külpontos nyomás alapjai.....	6
1.2.1. A külpontos nyomás felismerése.....	6
1.2.2. A külpontos nyomás általános vizsgálata.....	7
2. Egyensúlyozás csak nyomófeszültséggel.....	8
2.1. A módszer alapelve.....	8
2.2. A feszültségi test meghatározása.....	9
2.3. A feszültségidom szerkesztése.....	9
3. Vizsgálat rugalmas állapotban.....	11
3.1. Speciális esetek.....	11
3.2. Általános esetek.....	12
3.2.1. A három oldalú nyomott zóna.....	12
3.2.1.1. Az éktest térfogata.....	13
3.2.1.2. Az éktest súlypontja.....	14
3.2.1.3. A feladat megoldása.....	15
3.2.2. A három- és négy oldalú nyomott zóna határa.....	15
3.2.3. A négy oldalú nyomott zóna.....	16
3.2.3.1. A feszültségi test meghatározása.....	16
3.2.3.2. Számpélda bemutatása.....	20

3.2.3.3. A levezetés tanulsága.....	21
3.2.4. A négy- és öt oldalú nyomott zóna határa.....	21
3.2.4.1. A görbe egyenletének levezetése.....	22
3.2.4.2. A levezetés tanulsága.....	24
3.2.4.3. Ellenőrzés egy másik módszerrel.....	25
3.2.4.4. Az ellenőrző levezetés összefoglalása.....	28
3.2.5. Az öt oldalú nyomott zóna.....	28
4. Vizsgálat képlékeny határállapotban.....	29
4.1. A képlékeny állapotban történő vizsgálat jelentősége.....	29
4.2. Speciális esetek.....	29
4.3. Általános esetek.....	30
4.3.1. A három oldalú nyomott zóna.....	30
4.3.2. A három- és négy oldalú nyomott zóna határa.....	31
4.3.3. A négy oldalú nyomott zóna.....	31
4.3.4. A négy- és öt oldalú nyomott zóna határa.....	32
4.3.4.1. A görbe származtatása paraméteres alakban.....	33
4.3.4.2. Számpélda bemutatása.....	37
4.3.4.3. A levezetés értékelése.....	38
4.3.4.4. Az ellenőrző levezetés.....	39
4.3.4.5. Az ellenőrző levezetés értékelése.....	42
4.3.5. Az öt oldalú nyomott zóna.....	42
5. Alkalmazások a műszaki gyakorlatban.....	42
6. Irodalomjegyzék.....	45

Előszó

A dolgozat tárgya

A tartószerkezet építés mérnöki gyakorlatának és az azt megalapozó szilárdságtannak lényeges és gyakran előforduló feladatcsoportja a külpontosan nyomott, húzószilárdsággal nem rendelkező anyagú, derékszögű négyszög keresztmetszetű, zömök rudak erőtani viselkedésének ismerete. Egyetemi alapképzésünk az elemi szilárdságtan tantárgyban ismerteti a dolgozatunk tárgyát képező, fent részletezett tartalmú igénybevételfajta alapelveit és az erőtani méretezést megalapozó egyszerűen tárgyalható alapeseteket. A speciális eseteket a külpontos erő dőfpontjának különleges helyzetei szolgáltatják (dőfpont a keresztmetszet szimmetriatengelyén vagy a sarokpontjához rajzolható szögfelezőn). A mérnöki gyakorlatban gerendatartók támaszai, oszlopok alapjai vizsgálata okán felmerül az igény arra, hogy dolgozatunk tárgyát alkotó igénybevételfajta általános esetére használható megoldással rendelkezünk. Dolgozatunk eredményei az egyetemi mesterképzésre készülő hallgatóink számára is hasznos többlet ismeretet biztosíthatnak. A témakör szakirodalmának előzetes áttekintése során nem találtunk a dolgozat témáját részleteiben tárgyaló szakkönyvet vagy szakcikket.

A dolgozat célja és rövid tartalmi ismertetése

A téma kiválasztásakor konzulensemmel két célt tűztünk ki. Megoldást kívánunk adni a tárgyi mérnöki feladat általános esetére, illetve bővíteni a mesterképzésre készülő hallgatók ismereteit.

A külpontosan nyomott, húzószilárdsággal nem rendelkező anyagú, szabályos négyszög keresztmetszetű, zömök rudak teherbírása a terhelő erő dőfpontja alatt ébredő feszültségi test térfogatának értékével egyenlő. A megoldást rugalmas- és képlékeny határállapotban határozzuk meg. Rugalmas állapotban a feszültségi test éktest alakú, képlékeny állapotban hasáb formájú. A probléma megoldásának alapelve a vektoriális statika első alaptételére (axióma), két erő egyensúlyának feltételére vezethető vissza. A külső terhelő erőt a feszültségi test térfogatával azonos nagyságú erő egyensúlyozza. A reakcióerő hatásvonala a feszültségi test súlypontjában van. Rugalmas határállapotban a terhelő erő alatt ébredő feszültségi éktest alaplapja (a nyomott terület) lehet háromszög, négyszög vagy ötszög. Képlékeny állapotban a feszültségi hasáb alaplapja hasonlóan három-, négy- vagy ötszög lehet. A terhelés speciális eseteinél a terhelő erő dőfpontja alatti terhelt terület háromszög vagy szabályos négyszög alakú. Vannak olyan általános dőfpont helyzetek, melyeknél a nyomott terület szabálytalan négy- vagy ötszög. A terhelő erő dőfpontjának azokat az elhelyezkedési területeit, melyeken lévő dőfpontokhoz eltérő alakú nyomott területek tartoznak a súlypontból induló és közelítően a keresztmetszet átlói körül elhelyezkedő szabályos görbék választják el egymástól. Dolgozatunkban a tárgyi esetekre levezetjük a szabálytalan négy- és ötszög alapterületű feszültségi testeket eredményező dőfpontok elhelyezkedésének területeit elválasztó görbék analitikus összefüggéseit és a határerő számítás képleteit.

A keresztmetszet részterületeit határoló görbék pontos ismeretében a tartószerkezet tervező gyorsan dönthet a számítás módjáról, és a határerő-számító összefüggések birtokában meghatározza a keresett határerő értékét, egyben a szerkezet teherbírását.

1. Elméleti bevezetés

1.1. A témához kapcsolódó fogalmak definiálása

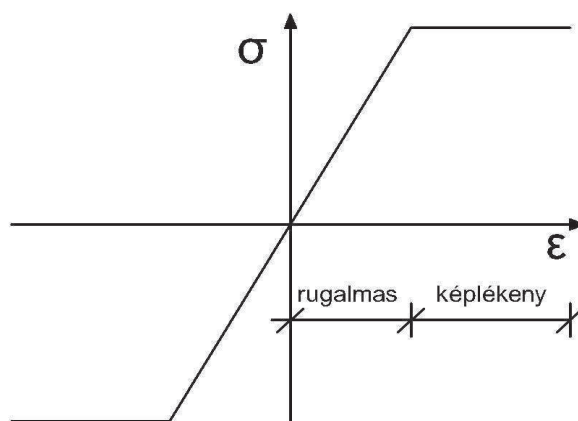
A zömök, húzószilárdsággal nem rendelkező anyagú rudak külpontos nyomását az elemi szilárdságtan feltevései alapján tárgyaljuk. A szabatos tárgyalás okán és az érthetőség érdekében először az elemi szilárdságtan feltevéseit ismertetem.

1.1.1. A szilárdságtan tárgya

A statikában láttuk, hogy a tartókra ható terhek a test belsejében erőket ébresztenek. A merev test feltételezése alapján a test alakváltozásának a támaszerők és az igénybevételekre gyakorolt hatásától eltekintünk (elsőrendű elmélet). A belső erőknek a keresztmetszet felületegységére jutó részét feszültségnek nevezzük. A szilárdságtan a külső erők hatására a tartó keresztmetszetén ébredő feszültségek és a tartó tengelyvonala mentén fellépő elmozdulások, alakváltozások vizsgálatával foglalkozik.

1.1.2. Az elemi szilárdságtan feltevései

- (1.) A szilárd test anyaga homogén és izotróp, tehát a test fizikai tulajdonságai annak minden pontjában és minden irányban azonosak.
- (2.) A vizsgált szerkezeti elemek egyenes tengelyűek és állandó keresztmetszetűek.
- (3.) Egyenes és tiszta hajlításnál érvényesnek tekintjük a sík keresztmetszetek elvét, valamint a szögtartó alakváltozást.
- (4.) A külső erők nagysága zérustól a legnagyobb értékig folyamatosan, lassú ütemben növekszik. Tehát, a terhelés módja statikus.
- (5.) A test anyaga rugalmas-képlékeny, más néven elasztoplasztikus. Ebből adódóan az anyag az arányossági határig rugalmasan viselkedik, vagyis a terhelés alatt változik az alakja, de a terhelés megszűnésével visszanyeri az eredeti alakját, ha pedig a terhelés hatására fellépő feszültség túllép az arányossági határon, akkor visszaterhelésnél, már nem nyeri vissza az eredeti alakját, tehát maradó alakváltozást szenved a szerkezet. Ekkor a test képlékeny állapotba került.



1. ábra

1.1.3. Zömök rúd

Akkor beszélünk zömök rúdról, ha a rúd hossza és a rúd keresztmetszetének legkisebb szélességi mérete között nincs nagyságrendi különbség. Ilyen szerkezeti elemeknél kihajlás nem lép fel.

1.1.4. Húzószilárdsággal nem rendelkező anyag

Az építőmérnöki gyakorlatban külpontosan nyomott zömök rudakat gyakran készítenek falazott vagy beton szerkezeti anyagból, amelynek húzószilárdsága csekély. Ezeket a kicsiny értékeket a biztonság javára elhanyagoljuk. Húzószilárdság hiányában a rúd csak nyomófeszültségek felvételére képes. Ha mégis húzófeszültség keletkezik a keresztmetszeten, akkor ott az anyag megreped, és feszültségmentes állapotba kerül. A teherviselésben csak a nyomott zóna vesz részt, az egyensúlyt nyomófeszültségek biztosítják.

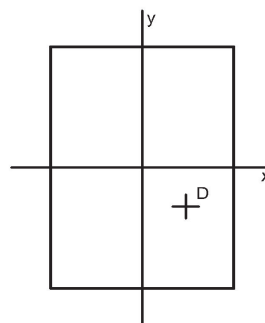
1.2. A külpontos nyomás alapjai

1.2.1. A külpontos nyomás felismerése

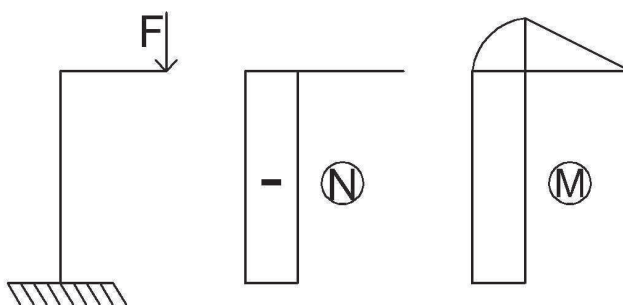
Két módon vehetjük észre, hogy a tartószerkezet valamely részén külpontos nyomás működik.

Az egyik lehetőség az, hogy a terhelő erő dőféspontja a keresztmetszet súlypontján kívül helyezkedik el. Erről a 2. ábrán láthatunk egy példát.

A másik lehetőség sokkal gyakorlatiasabb. Egy tartószerkezet tervezéséhez és ellenőrzéséhez a legtöbb esetben igénybevételi ábrákat kell rajzolnunk. Azért szükségesek a belsőerő ábrák, mert ezekről olvashatjuk le, hogy milyen fajta igénybevételek hatnak az egyes keresztmetszetekre. Ha azt látjuk, hogy a tartó egy szakaszát, illetve keresztmetszetét negatív normálerő és nyomaték is terheli, akkor már biztosan külpontos nyomással van dolgunk. A 3. ábrán látható egy a tört tengelyű konzol, melynek a függőleges rúdján külpontos nyomás lép fel.



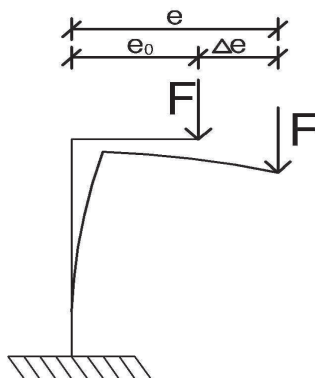
2. ábra



3. ábra

1.2.2. A külpontos nyomás általános vizsgálata

Ahogy a 3. ábrán látható a külpontos nyomás két igénybevételből tevődik össze. Központos nyomásból, és hajlításból. Mindkét igénybevételből a keresztmetszetre normális feszültségek keletkeznek. Ezeket a feszültségeket összegezzük a szuperpozíció elve alapján. Fontos, hogy ez az elmélet csak akkor tekinthető helyesnek, amikor zömök rudak külpontos nyomásáról beszélünk. Karcsú rudaknál nem kezelhetjük teljesen külön a két igénybevételt, ugyanis hatással vannak egymásra. Azért van ez így, mert a karcsú szerkezetek a terhelés hatására jelentősen megváltoztatják az alakjukat. A központos nyomás következtében kihajlik a rúd, ami nagyobb külpontosságot eredményez. Ezt figyelembe kell vennünk, mert ekkor nagyobb nyomaték keletkezik. A kihajlás egyik típuspéldáját a 4. ábrán láthatjuk.



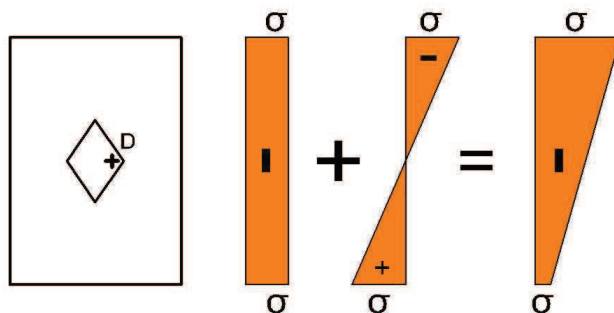
4. ábra

Zömök rudakat vizsgálata során a kihajlásból származó külpontosság növekménytől most eltekinthetünk. A klasszikus mechanika szabályainak betartásához először a rugalmas feszültségmegoszlást kell követnünk.

A függőleges, lefelé ható terhelés hatására egy gerendatartó lehajlik, melynek során alsó síkja nyúlik, felső síkja összenyomódik. A semleges tengely, mely a keresztmetszet súlyponti tengelye feszültségmentes marad, ugyanis sem összenyomódást, sem pedig megnyúlást nem szenved. Az egyenes, tiszta hajlítás során fellépő lineárisan változó feszültségek értékét a Navier képlettel határozhatjuk meg.

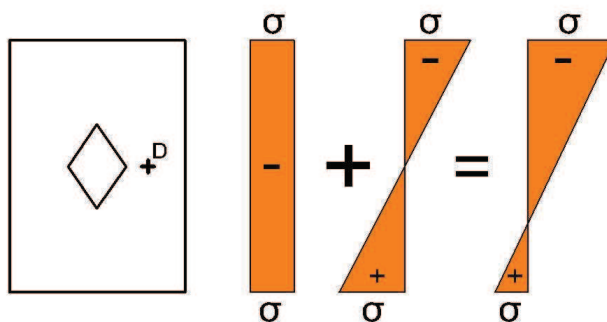
A központos nyomás nagyon egyszerű igénybevétel. A nyomóerő egyenletes eloszlását feltételezzük a keresztmetszeten.

A két igénybevétel meghatározása után, elvégezhetjük a szuperpozíciót. Ezt az 5. ábra szemlélteti. A nyomás és hajlítás összegzésével az, eredő feszültségábrát kapjuk. Látható, hogy a dőféspont a magidomon belül helyezkedett el, ezért egynemű feszültség, csak nyomás keletkezett a keresztmetszeten. Ilyenkor a szerkezet készülhet húzószilárdsággal nem rendelkező anyagból is.



5. ábra

Viszont, ha a dőfpont a magidomon kívül helyezkedik el, akkor jelentősen megváltozik a helyzet. A nagyobb külpontoság miatt, nagyobb nyomaték fogja igénybe venni a rudat. Ekkor a hajlításból nagyobb feszültségek keletkeznek, mint központos nyomásból. Így ha összegezzük a feszültségeket, akkor már húzófeszültség is megjelenik a keresztmetszeten. Ez látható a 6. ábrán.



6. ábra

Ezt azonban nem engedhetjük meg, mivel olyan eseteket vizsgálunk, amikor a teherbíró anyag nem rendelkezik húzószilárdsággal. Tehát a nyomást előidéző erők eredőjének a dőfpontja a magidomon belül kell, hogy legyen.

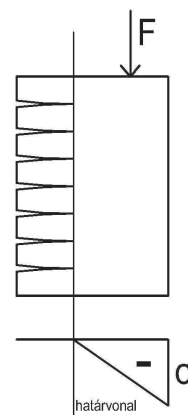
Téglalap keresztmetszetnél a magidom az oldalak középső harmadainak magasságában helyezkedik el és rombusz alakú. Ennek tudatában könnyen levezethető, hogy a magidom területe a keresztmetszet felületének egy-tizennyolcad része.

A mérnöki gyakorlatban a nyomóerőnek magidomon belül tartása gyakran nem oldható meg. Ilyenkor az egyensúlyozás feladatát csak nyomófeszültségekkel kell biztosítani (hajlítás nem léphet fel).

2. Egyensúlyozás csak nyomófeszültségekkel

2.1. A módszer alapelve

Ennek az eljárásnak az alapelve az, hogy mivel a dőfpont kívül esik a magidomon, külpontos nyomásra nem felel meg a rúd, ha anyagának nincs húzószilárdsága. A keresztmetszetnek csak azzal a részével számolunk tovább, ahol nyomófeszültségek keletkeznek. A keresztmetszet többi része feszültségmentes. Itt az anyag húzószilárdság hiányában megreped. A 7. ábrán láthatóak a repedések, melyek a határvonalig futnak. A feszültségek értéke a határvonaltól lineárisan emelkedik.

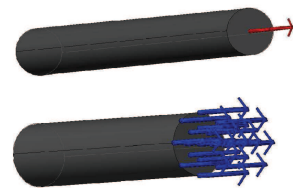


7. ábra

A rugalmas állapotban történő vizsgálat során ellenőrzésnél a legnagyobb feszültséget vagy a rugalmas határállapotban számolható határerőt számoljuk ki, hogy megtudjuk mekkora terhelést engedhetünk meg. Az anyag határfeszültségének ismeretében meghatározhatjuk a határerőt. A feladatok megoldásához pontosan ismernünk kell a kialakuló feszültségi test alakját.

2.2. A feszültségi test meghatározása

Az erő a feszültségidom térfogata. A szilárdságtan tanulmányaink elején, már a központos húzásnál is ezzel az alapfeltevéssel modelleztük az igénybevételt. Képzeletben elvágtuk a rudat, és azt mondtuk, hogy annak a keresztmetszetnek minden pontjában húzófeszültségek, tehát az igénybe vett felület egységére jutó belső erők ébrednek. Ekkor egy nyílerdőt kapunk ezekből a végtelen kis felületre ható erőkől. Ezt a 8. ábrán próbáltam bemutatni. A nyílerdő burkoló idoma egy térbeli alakot vesz fel. Ezt a testet hívjuk feszültség testnek.

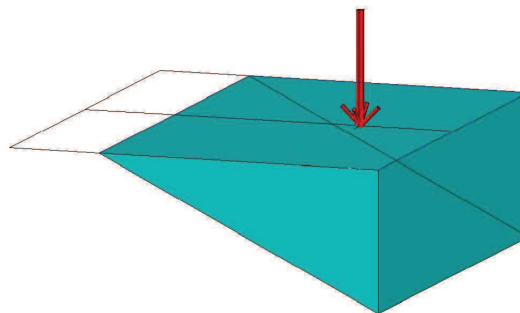


8. ábra

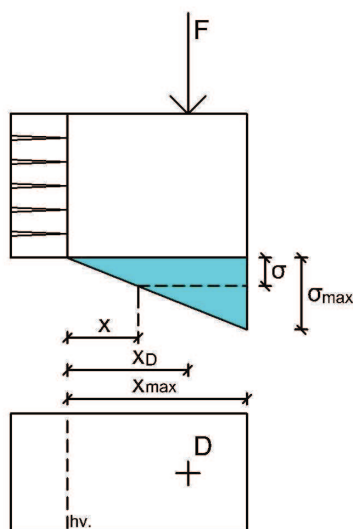
Természetesen a feszültségi test térfogata a keresztmetszet felületének és a keletkező húzófeszültségnek a szorzata. Ez a legegyszerűbb példája a feszültségidom alkalmazásának, de rengeteg más esetben is hasonlóképpen járunk el. Elég, ha a vasbeton szerkezetek méretezésére, vagy a földnyomások meghatározására gondolunk. A dolgozat a külpontos nyomás egy alfaját tárgyalja, melynél szintén a feszültségidommal határozzuk meg a szerkezeti elem teherbírást.

2.3. A feszültségidom szerkesztése

A rugalmas feszültségeloszlás miatt a feszültségi test szerkesztésekor ügyelni kell arra, hogy a normálfeszültségek lineárisan növekednek a keresztmetszeten a szélső szál felé haladva. Határerő számításnál a legjobban nyomott szélső szálon a határfeszültség kialakulásával számolunk. A feszültségi test formája a keresztmetszet alakjától, és a dőfpont helyétől függ. A dolgozatomban a leggyakoribb esetet tárgyalom, amikor az alaptest téglalap keresztmetszetű. Amikor a dőfpont valamelyik szimmetriatengelyen van, akkor a nyomott zóna téglalap alapú lesz. Ekkor az erő csak az egyik tengelyre külpontos, hiszen éppen a másik tengelyen helyezkedik el. Így a feszültségek csak az egyik irányban, a dőfpontra központos tengellyel párhuzamos irányban változnak majd lineárisan. Ilyenkor a 9. ábrán látható, éktest alakú feszültségidomot kapunk. A nyomóerő hatásának meghatározásához tudnunk kell, hogy mekkora nagyságú és milyen helyzetű feszültségi testtel számoljunk. Ez olyan alapvető kritérium, melyet megfelelő módon bizonyítani kell. A következő levezetés könnyebb megértéséhez a 10. ábrán feltüntettem azokat a paramétereket, melyek szerepelnek a levezetésben.



9. ábra



10. ábra

Célunk, hogy meghatározzuk a feszültségek nagyságát, és a határvonal helyét. Ezt természetesen az egyensúly feltételeinek alkalmazásával érthetjük el. A $\sum F_x = 0$ egyenlet eleve teljesül, hiszen vízszintes erő sehol sem működik. A $\sum F_y = 0$ vetületi egyensúlyi egyenlet értelmében a külpontos F erő és a nyomófeszültségek eredője egyensúlyban levő erőrendszert alkot:

$$\sum F_y = -F + \int \sigma \cdot dA = 0$$

A második tagot X -el szorozva és osztva, majd a $\frac{\sigma}{X}$ állandót az integráljel elé kiemelve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sigma}{X} \int X \cdot dA = F$$

a $\frac{\sigma}{X}$ hányados a keresztmetszet minden pontjában állandó értéket ad, a feszültség lineáris változása miatt. Az integrál jel alatti kifejezés a keresztmetszet nyomott felületének statikai nyomatéka a határvonalra.

$$\frac{\sigma}{X} \cdot S_{ny} = F, \text{ és ezt az összefüggést átrendezve } \sigma = \frac{F}{S_{ny}} \cdot x$$

Akkor kapjuk a maximális feszültséget, amikor ebbe a képletbe X helyére $X_{\max}$ -t helyettesítjük be. Eza távolság a legjobban nyomott szélsőszál távolsága a határvonaltól. A határvonalnak a döfésponttól mért távolságát (X_d) a nyomatéki egyensúlyi egyenletből határozhatjuk meg. A nyomatékot a határvonalra írjuk fel.

$$\text{Ekkor azt kapjuk, hogy } \sum M = \int X \cdot \sigma \cdot dA - X_d \cdot F = 0, \text{ illetve } \int X \cdot \sigma dA = X_d \cdot F$$

Az egyenlet bal oldalát szorozzuk és osztjuk x -el, majd ismét emeljük ki a $\frac{\sigma}{X}$ állandót!

$$\frac{\sigma}{X} \int X^2 \cdot dA = X_d \cdot F$$

Az integráljel alatti kifejezésben az inercianyomaték definícióját fedezhetjük fel a határvonalra, ezért

$$\frac{\sigma}{X} I_{ny} = X_d \cdot F, \text{ ebből } X_d = \frac{I_{ny}}{F} \cdot \frac{\sigma}{X}$$

Az előbb levezettük a $\sigma = \frac{F}{S_{ny}} \cdot X$ összefüggést. Ezt most helyettesítsük be az előbb kapott kifejezésbe.

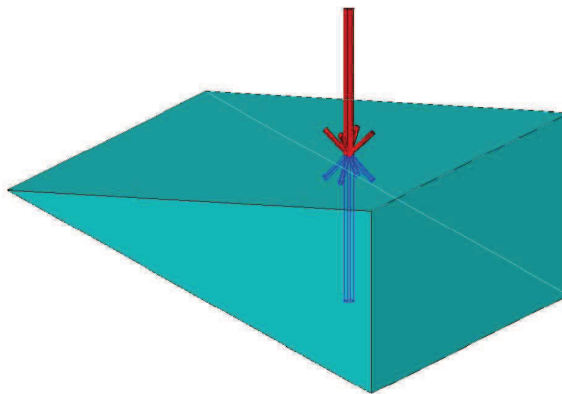
Az egyszerűsítések elvégzése után beigazolódik, hogy

$$X_d = \frac{I_{ny}}{S_{ny}}$$

Ezzel azt kapjuk eredményül, hogy a feszültségi éktest súlypontja az F erő hatásvonalán fekszik. Ez a levezetés akkor igaz, amikor a keresztmetszet legalább egy szimmetriatengellyel rendelkezik, és a döféspont rajta van a szimmetriatengelyen. Téglalap keresztmetszetre specializálva a levezetéseinket

$$\text{megkapjuk a várt eredményt, miszerint } X_d = \frac{\frac{X_{\max}^3 \cdot b}{3}}{\frac{X_{\max}^2 \cdot b}{2}} = \frac{2}{3} \cdot X_{\max}$$

Bebizonyítottuk, hogy a feszültségi test köbtartalmának meg kell egyeznie a nyomó erő nagyságával, és az erő hatásvonala, át kell menjen a feszültségidom súlypontján. Most már tudjuk, hogy milyen kritériumokat kell teljesíteni ahhoz, hogy az általunk felvett feszültségi test jó eredményekre vezessen. Ezt az elvet, mely mögött az idáig taglalt szabályok és levezetések állnak, nagyon könnyű megérteni, ha a következő analógiát követjük. A feszültségidomot helyettesíthetjük egy eredő erővel, melynek nagysága természetesen a feszültségi test köbtartalma, és a hatásvonala a test súlypontján átmenő függőleges egyenes. Lényegében ekkor két erő hat a testre, melyeknek hatásvonaluk közös, nagyságuk azonos és irányuk ellentétes. A vektoriális mechanika első axiómája szerint a két erő ekkor, és csak ekkor egyensúlyban van. Ez a 11. ábrán látható.



11. ábra

3. Vizsgálat rugalmas állapotban

3.1. Speciális esetek

A 9. ábrán látható speciális helyzettel, amikor a dőféspont valamelyik szimmetriatengelyen helyezkedik, az egyetemi alapképzésben nyomtatott jegyzet is foglalkozik, illetve szilárdságtan vizsgán is találkozhatunk vele. A dőféspontnak a keresztmetszet szélétől mért távolságát c -vel, a hatásvonalnak a dőfésponttól mért távolságát x_D -vel jelöljük. Az előbb levezettük, hogy

$$x_D = \frac{2}{3} \cdot x_{\text{Max}}$$

A bevezetett jelöléseinkkel átírhatjuk a kapott egyenletet,

$$x_D = \frac{2}{3} \cdot (x_D + c)$$

Ebből már könnyen kifejezhetjük, hogy

$$x_D = 2c \quad x_{\text{Max}} = 3c$$

Ez egyszerűen annyit jelent, hogy a feszültségi test felvételéhez, csak a c távolság kétszeresét kell felmérni a szimmetriatengelyen. Az ábrákon látható testnek egyszerűen ki tudjuk számolni a köbtartalmát. A-val a nyomott zóna területét jelöljük.

$$F = \frac{A_{ny}}{2} \cdot \sigma$$

Akkor kapjuk meg a rúd határerejét, ha a képletbe a határfeszültséget helyettesítjük be, tehát

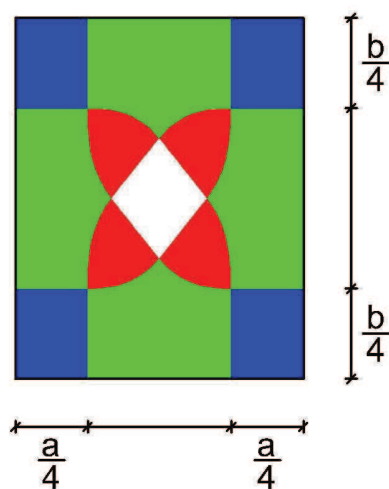
$$F_H = \frac{A_{ny}}{2} \cdot \sigma_H$$

Látható, hogy ennek a feladatnak a megoldása végtelenül egyszerű. A képletek nagyon egyszerűek, gyorsan lehet alkalmazni őket, gyakorlatilag az elszámolás veszélye nélkül. A gond csak az, hogy ez egy speciális eset. Egy általános helyzetű dőféspont előfordulásának az esélye sokkal nagyobb, mint annak, hogy a dőféspont pontosan a szimmetriatengelyre esik. Előfordulhat, hogy direkt ilyen szerkezetet építenek, de összességében ez az elmélet a mérnöki egyszerűsítés egyik példája. A központos nyomáshoz tudnám hasonlítani, melyről tudjuk, hogy csupán a fejünkben létezik. Itt is hasonló a helyzet. A dolgozatom következő fejezetében az általános helyzeteket vizsgáltam.

3.2. Általános esetek

Most áttérünk az általános helyzetű dőfésponttal jellemezhető külpontos nyomás esetére. Ezeket az eseteket három csoportba soroljuk a dőféspontok helyének függvényében.

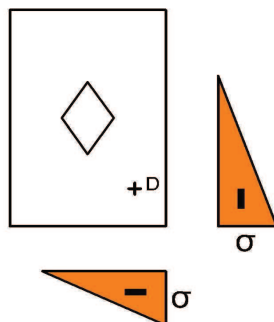
A tankönyvben szerepel egy ábra, mely azt mutatja meg, hogy a képlékeny feszültségeloszlást követve, a dőféspont helyétől függően, hány oldalú lesz a nyomott zóna. A képlékeny állapotot, mely egy közelítő megoldás, a rugalmas feszültségeloszlás vizsgálata után szintén tárgyaljuk. Egyelőre azonban a rugalmas esettel foglalkozunk, melynél szintén létezik ilyen ábra, ám ennek megtalálásához, már komolyabban utána kell olvasni a szakirodalomban. A 12. ábrára Dr. Pelikán József, Szilárdságtan című könyvében (Budapest, 1972.) lehet rálelni. Ez az ábra azt jelenti, hogy ha a dőféspont a keresztmetszet kék területére esik, akkor a nyomott zóna három oldalú lesz. Amennyiben a nyomó erő a zöld terület egy pontján nyomja rudat, akkor négy oldalú, ha pedig a piros területet, akkor öt oldalú lesz a keresztmetszet dolgozó része. Látható, hogy a zöld és piros zónák határa egy görbe. Erről a görbéről semmi pontosat nem tudunk, csak a kiinduló- és a végpontját. Amikor egy olyan példát szeretnénk megoldani, ahol a dőféspont valahol a görbe környékén helyezkedik el, akkor kezdetben azt se tudnánk megmondani, hogy a feladat melyik csoportba tartozik. Nem tudnánk ugyanis, hogy a nyomott zóna négyszög, vagy pedig ötszög alakú lesz-e. Ugyan ez igaz a képlékeny feszültségeloszlású példánál is. Amikor kiválasztottam a dolgozatom témáját, akkor azt tűztük ki célul, hogy végezzem el ezeknek a görbéknek a pontos matematikai leírását. Ennek ismertetésére is sor kerül, de fontos egy ilyen kutatásnál, hogy az egyszerűbb esetektől haladjunk a bonyolultabb felé. Ezért először kezdjük annak a feladatkörnek a megismerésével, amikor a nyomott zóna háromszög alakú.



12. ábra

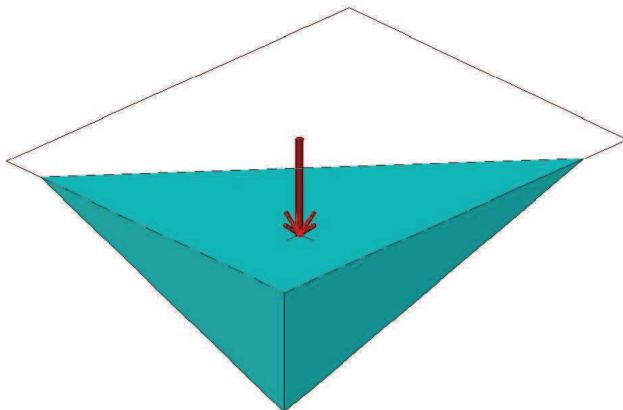
3.2.1. Három oldalú nyomott zóna

Ha a dőféspont a kék tartományba esik, akkor háromszög alapú a nyomott zóna. Ilyenkor már a nyomóerő mindkét súlyponti tengelyre külpontos. Ennek az a következménye, hogy mindkét irányú feszültségábra lineáris változást mutat. Ezt a 13. ábrán láthatjuk.



13. ábra

Ebben az esetben a keresztmetszet dőfősponthoz közeli sarkában alakul ki a legnagyobb feszültség. Határerő számításánál ez maga a határfeszültség. Mivel a feszültségek mindkét irányban csökkennek, és a nyomott zóna háromszög alakú, egy derékszögű háromszög alapú szabálytalan gúla lesz a feszültségi test, amivel számolnunk kell. A 14. ábrán látható egy ilyen alakú feszültségidom. Ahhoz, hogy a feladatokat hozzáértéssel, és ne csak képletek magolásával oldjuk meg, némi térgeometriai ismeretek szükségesek. Természetesen most is a feszültségidom köbtartalmával kell majd számolnunk, amihez tudnunk kell, hogy egy tetraéderhez hasonló szabálytalan éktest térfogata mekkora.



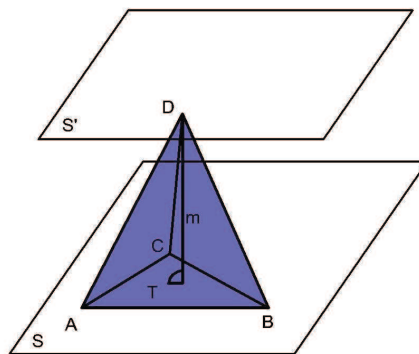
14. ábra

3.2.1.1. Az éktest térfogata

Képleteket könnyen felfedezhetünk, melyek szerint a háromszög alapú gúla térfogatát megkapjuk, ha az alapterületet megszorozzuk a test magasságával, majd a kapott értéket elosztjuk hárommal. Ez az összefüggés grafikus úton könnyen belátható, és a következőkben ezt be is bizonyítom.

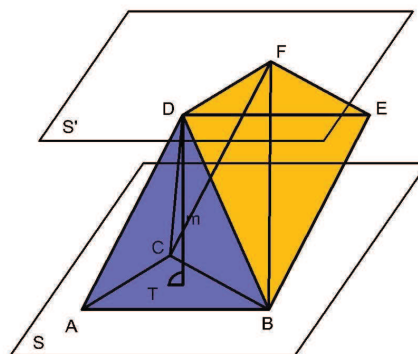
Vegyünk fel egy háromszög alapú gúlát, melynek alapja az S síkon elhelyezkedő ABC háromszög, és a csúcsa a S' síkon lévő D pont. A két sík közötti magasság m , tehát ez a testmagasság.

A következő lépésben, a B és C csücsből húzzunk párhuzamos egyeneseket az AD oldaléllal! Ezek az egyenes az S' síkon kimetszik az E , és F pontokat. Az ábrán látható módon kössük össze a megfelelő pontokat! Látható, hogy kialakult az $ABCDEF$ ferde hasáb, melyről tudjuk, hogy a térfogata, az alapterületének és a magasságának a szorzata. A hasábon belül felfedezhető egy másik gúla is, melynek DEF háromszög az alapja, a csúcsa pedig B .



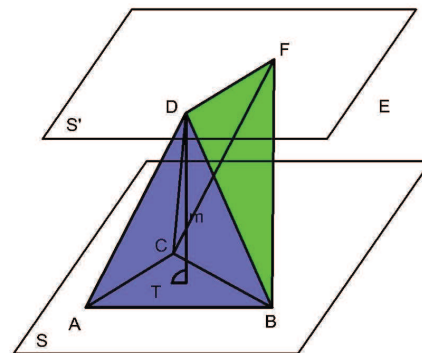
15. ábra

Fontos belátnunk, hogy a kezdeti és a most kialakult gúla egybevágó. A két alapjuk egybevágó, hiszen az ABC háromszögből egy AD él menti eltolással kaptuk a DEF háromszöget. A magasságuk is ugyanaz a két sík közti m távolság. A Cavalieri-elv kimondja, hogy két háromszög alapú gúlának egyenlő a térfogata, ha az alapterületük és a magasságuk is egyenlő. Ha minderről meggyőződünk, akkor válasszuk le a $DEFB$ gúlát!



16. ábra

A maradék test egy négyszög alapú gúla. Az alapja az ACED négyszög, melyről könnyen belátható az egymással szemben lévő oldalak párhuzamosságának folytán, hogy egy paralelogramma. A test csúcsa a B pont. Ezt a testet a DCB síkkal két gúlára bonthatjuk, melyeknek közös az alapsíkjuk, és közös a csúcuk. Ezek alapján nyilvánvaló, hogy a magasságuk is egyenlő. A paralelogrammát a CD átlóval két egyenlő nagyságú háromszögre bontottuk, tehát a két gúlának a magasságuk mellett az alapterületük is egyenlő nagyságú. Ebből adódóan a térfogatuk is egyenlő. Ezzel bebizonyítottuk, hogy valóban, a hasáb térfogatának harmadolásával kaphatjuk meg a háromszög alapú gúla térfogatát.



17. ábra

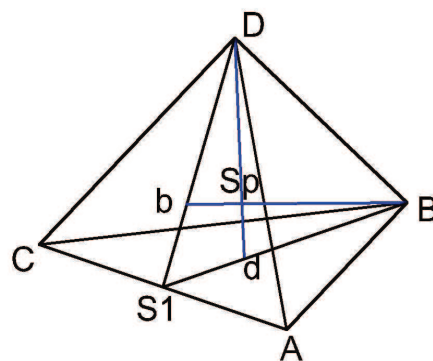
$$V = \frac{A_{ny} \cdot m}{3}$$

Így már könnyen ki fogjuk tudni számolni a határerőt, amihez viszont előbb fel kell venni azt a feszültségi testet, melynek pontosan az erő döféspontjában van a súlypontja. Ehhez természetesen tudnunk kell, hogy a háromszög alapú gúlának hol helyezkedik el a súlypontja.

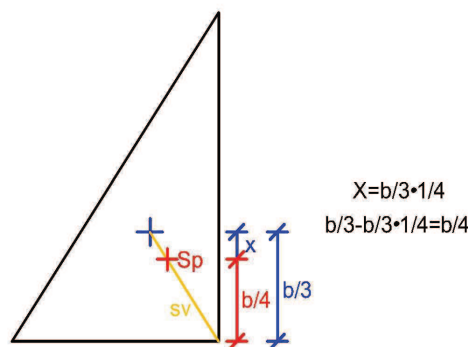
3.2.1.2. Az éktest súlypontja

Először azt kell bebizonyítanunk, hogy a gúla súlypontja, a súlyvonalat 1:3 arányban osztja ketté. Ennek bizonyítása során a 18. ábra jelöléseit használjuk.

Első lépésben fontos megállapítanunk, hogy S1d szakasz hossza úgy aránylik S1B-hez, mint ahogy S1b szakasz aránylik S1D-hez. Ez könnyen belátható, hiszen S1db háromszög hasonló S1DB háromszöghöz. Az oldalak aránya 1:3. Ez azért van így, mert egy háromszög súlypontja 1:2 arányban osztja ketté a súlyvonalát. Az előbbi hasonlóságból az következik, hogy db oldal párhuzamos DB-vel, és hosszuk aránya 1:3. Ezek tudatában még egy hasonlóság észrevehető. A dbSp háromszög hasonló BDSp háromszöghöz. Az előbb megtárgyaltuk, hogy oldalaik aránya 1:3. Ez többek között azt is jelenti, hogy bSp oldal hossza úgy aránylik SpB-hez, mint ahogy Spd aránylik SpD-hez. Ez az arány az előbbi hasonlóságból következik, hogy szintén 1:3-hoz, ezt az összefüggést kapva, pedig bebizonyítottuk, hogy a test súlypontja (Sp) minden súlyvonalnak, (az ábrán Dd vagy Bb) a negyedében van. Az 19. felülnézeti ábrán egy derékszögű háromszög alapú gúla látható. Ez egy speciális gúla, melyre természetesen ugyanúgy igazak a korábbi megállapításaink. A feladatok során ilyen testtel kell számolnunk, ezért ilyet ábrázoltunk. Az ábrához tartozó egyszerű számítás igazolja, hogy a gúla súlypontjának vízszintes vetülete az egymásra merőleges két oldal negyedében van.



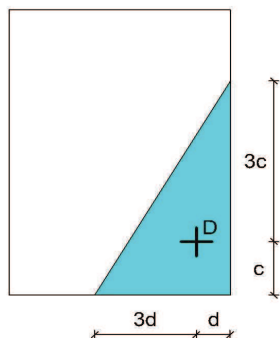
18. ábra



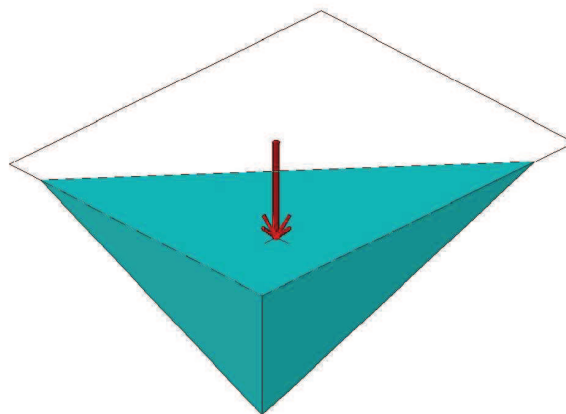
19. ábra

3.2.1.3. A feladat megoldása

A feladatok megoldása hasonlóképpen zajlik, mint a korábban taglalt speciális esetben, amikor a döféspont valamelyik súlyponti tengelyen helyezkedett el. Mindig abból indulunk ki, hogy a döféspont mekkora távolságban helyezkedik el a keresztmetszet hozzá közelebb eső szélétől. Így ha az a távolság „ c ”, akkor „ $3c$ ”-t kell felmérnünk a másik irányban. Ezt mind a két irányban elvégezzük. Ezzel biztosítjuk, hogy a döféspont a feszültségi test negyedében, a súlypontjában lesz. Természetesen így érthetjük el a mechanika első axiómája értelmében az egyensúlyt.



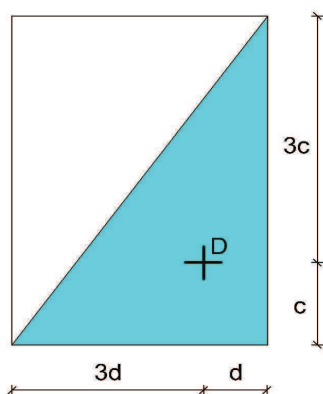
20. ábra



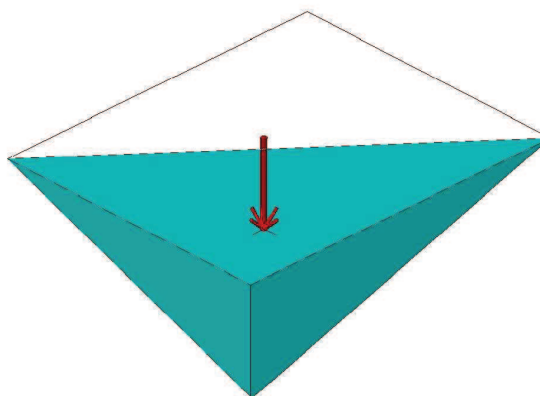
21. ábra

3.2.2. A három- és négy oldalú nyomott zóna határa

Ezek ismeretében már könnyen belátható, hogy a három és négy oldalú nyomott zóna határa miért a keresztmetszet negyedében van. Hiszen ha a döféspont, éppen ott helyezkedik el, akkor a $4c$ távolság, mely a feszültségi test oldala, egyenlő lesz a keresztmetszet egyik oldalával. Ebben az esetben ugyanúgy kell eljárunk, ahogy az előbb, amikor a három oldalú nyomott zónák esetét vizsgáltuk. Azért van ez így, mert ekkor még éppen teljes egészében ki tud alakulni a gúla alakú feszültségidom. Tehát, a súlypont helyének, és a térfogat nagyságának kiszámítása, ugyanúgy működik ahogy eddig. Az 22. és 23. ábrán olyan esetet mutatunk be, amikor mind két irányban a keresztmetszet negyedében van a döféspont. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy ha a döféspont már a 12. ábra zöld területére esik, akkor mennyire bonyolulttá teszi a feladatunkat.



22. ábra



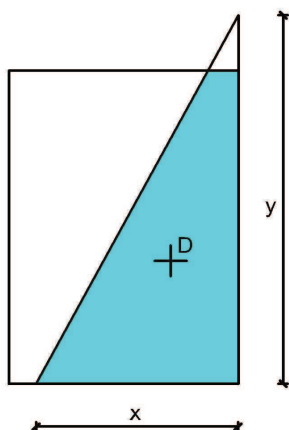
23. ábra

3.2.3. A négy oldalú nyomott zóna

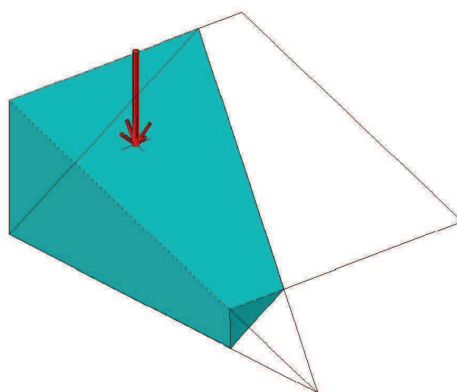
3.2.3.1. A feszültségi test meghatározása

Ha a dőféspont feljebb van, akkor már a 12. ábra zöld tartományába esik. Ekkor a $4c$ értéke már nagyobb lesz, mint a keresztmetszet oldala, és ezért már teljes egészében nem tud kialakulni a gúla alakú feszültségi test. Ilyenkor egy meglehetősen bonyolult problémával állunk szemben, melynek a megoldásáról már nem olvashatunk a szakirodalomban. Említettem az előszóban, hogy a dolgozatom másik célja az, a témakör átfogó összefoglalása mellett, hogy a kutatásaim végén képleteket tudjak felmutatni, amik segítségével megoldhatók ezek a problémák, melyekre eddig nem volt válasz.

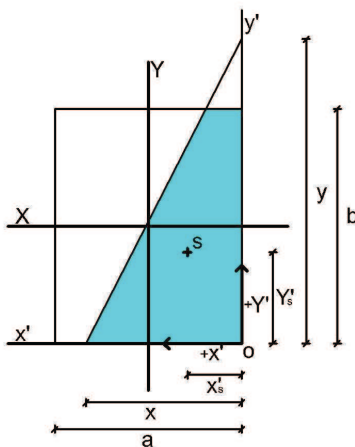
Több nehézséggel is jár a megoldás. Alapvetően a baj az, hogy nem tudjuk egykönnyen felvenni a feszültségidomot. A térfogatát is valamivel nehezebb lesz kiszámolni. A gúlának azzal a részével nem számolhatunk, amelyik túl nyúlik a keresztmetszeten, hiszen ott nyilván nem fognak feszültségek kialakulni. A 25. ábrán látható, hogy emiatt a feszültségi test egy csonka gúla lesz. A térfogatának kiszámolása még a kisebbik probléma. Az ábrán látszik, hogy ha a nagy gúlából kivonjuk a kicsi, feszültségmentes gúlát, akkor megkapjuk a feszültségidom köbtartalmát. Ezt a műveletet még könnyen el tudjuk végezni, de előbb egy sokkal nagyobb problémát kell megoldanunk. Azzal, hogy a kis gúla feszültségmentes, a feszültségi test súlypontjának helye már nem a nagy gúla negyedében lesz. Tehát, ahhoz, hogy meg tudjuk oldani az ilyen feladatokat, valahogyan meg kell határoznunk ennek az elég nehezen kezelhető térbeli alakzatnak a súlypontját. Ez azért sem olyan egyszerű, mert a nagy gúláról sem tudjuk, hogy mekkora. A probléma megoldása egy térbeli súlypontszámításra vezethető vissza. Kicsit furcsa a feladat olyan szempontból, hogy most nem egy test súlypontját keressük, hanem éppen fordítva. A súlypont helyét tudjuk, hiszen az maga a terhelő erő támadáspontja. Tehát, most a súlypont helyének ismeretében kell fölvennünk egy központos testet. A következő levezetésekben a 26. ábra jelöléseit használjuk.



24. ábra



25. ábra



26. ábra

Első megoldásként a két gúla különbségével írjuk fel a súlypontszámítást. A megoldás elvi menete az, hogy felveszünk egy koordináta-rendszert a keresztmetszet sarkában, és mindkét tengelyre kiszámoljuk a feszültségidom statikai nyomatékát, majd osztjuk a térfogatával. Ezek az egyenletek a súlypont koordinátaival lesznek egyenlők. Ebben a megoldásban a nagy éktest x és y oldala a két ismeretlen, melyekre elvileg megoldhatjuk a két egyenletből álló egyenletrendszerünket. Ehhez az kell, hogy a változók ne túl magas fokon változzanak. Ha a levezetés végén valóban ismerni fogjuk a nagy éktest méreteit akkor már nagyon könnyű dolgunk lesz a feladat megoldásával, hiszen a feszültségidom térfogatát, már az első sorban kifejeztük, szintén x és y függvényében. Természetesen paraméteres levezetést mutatok be, hiszen a végeredményt képletek formájában várjuk, melyek segítségével bármely számpéldát megoldhatjuk. Kezdjük az y irányú koordinátával!

$$Y's = \frac{Sx'_{\text{nagyéktest}} - Sx'_{\text{kiséktest}}}{V_{\text{nagyéktest}} - V_{\text{kiséktest}}}$$

A következő lépésben a nagy gúla oldalait, egyszerű hasonló háromszögek tételével írhatjuk fel, így érhetjük el, hogy ne legyen több ismeretlenünk az előbb megtárgyalt kettőnél.

$$Y's = \frac{\frac{x \cdot y \cdot \sigma \cdot y}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(y-b) \cdot (x - \frac{b \cdot x}{y}) \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot b}{y}) \cdot (b + \frac{y-b}{4})}{2 \cdot 3}}{\frac{x \cdot y \cdot \sigma}{2 \cdot 3} - \frac{(y-b) \cdot (x - \frac{b \cdot x}{y}) \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot b}{y})}{2 \cdot 3}}$$

A következő lépésekben rengeteg algebrai műveletet kell elvégeznünk. Ezek főleg több tagból álló tényezők szorzásait, illetve közös nevezőre hozásokat jelentenek. Ezek elvi nehézséget nem okoznak, ezért ezeknek a lépéseknek a részletei úgy gondolom nem szorulnak kommentálásra.

$$Y's = \frac{\frac{x \cdot y \cdot \sigma \cdot y}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(\sigma \cdot y \cdot x - 3 \cdot b \cdot x \cdot \sigma + \frac{3 \cdot b^2 \cdot x \cdot \sigma}{y} - \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{y^2}) \cdot (b + \frac{y-b}{4})}{2 \cdot 3}}{\frac{x \cdot y \cdot \sigma}{2 \cdot 3} - \frac{\sigma \cdot y \cdot x - 3 \cdot b \cdot x \cdot \sigma + \frac{3 \cdot b^2 \cdot x \cdot \sigma}{y} - \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{y^2}}{2 \cdot 3}}$$

$$Y's = \frac{\frac{x \cdot y \cdot \sigma \cdot y}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\frac{-3 \cdot b^2 \cdot x \cdot \sigma}{2} + \frac{2 \cdot b^3 \cdot x \cdot \sigma}{y} - \frac{3 \cdot b^4 \cdot x \cdot \sigma}{4 \cdot y^2} + \frac{y^2 \cdot x \cdot \sigma}{4}}{2 \cdot 3}}{\frac{x \cdot y \cdot \sigma}{2 \cdot 3} - \frac{\sigma \cdot y \cdot x - 3 \cdot b \cdot x \cdot \sigma + \frac{3 \cdot b^2 \cdot x \cdot \sigma}{y} - \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{y^2}}{2 \cdot 3}}$$

$$Y's = \frac{\frac{b^2 \cdot x \cdot \sigma}{4} - \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{3 \cdot y} + \frac{b^4 \cdot x \cdot \sigma}{8 \cdot y^2}}{\frac{b \cdot x \cdot \sigma}{2} - \frac{b^2 \cdot x \cdot \sigma}{2 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{6 \cdot y^2}}$$

Az emeletes törtet már egyszerűbb alakra hoztuk. Szorozzuk meg a nevezővel az egyenlet két oldalát!

$$\frac{b^2 \cdot x \cdot \sigma}{4} - \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{3 \cdot y} + \frac{b^4 \cdot x \cdot \sigma}{8 \cdot y^2} = \frac{b \cdot x \cdot \sigma \cdot Y's}{2} - \frac{b^2 \cdot x \cdot \sigma \cdot Y's}{2 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma \cdot Y's}{6 \cdot y^2}$$

$$6 \cdot y^2 b^2 \cdot x \cdot \sigma - 8 \cdot y \cdot b^3 \cdot x \cdot \sigma + 3 \cdot b^4 \cdot x \cdot \sigma = 12 \cdot y^2 \cdot b \cdot x \cdot \sigma \cdot Y's - 12 \cdot y \cdot b^2 \cdot x \cdot \sigma \cdot Y's + 4 \cdot b^3 \cdot x \cdot \sigma \cdot Y's$$

Ez a felírás, számos egyszerűsítési lehetőséget kínál. Végezzük most el ezeket!

$$6 \cdot y^2 b - 8 \cdot y \cdot b^2 + 3 \cdot b^3 = 12 \cdot y^2 \cdot Y's - 12 \cdot y \cdot b \cdot Y's + 4 \cdot b^2 \cdot Y's$$

Azt a nagyon kedvező eredményt kaptuk, hogy az egyik változó kiesik az egyenletből. Ez nagyon megkönnyíti majd a számításainkat. Fejezzük ki y -t, az egyenlet egyetlen változóját.

$$6 \cdot y^2 b - 8 \cdot y \cdot b^2 + 3 \cdot b^3 - 12 \cdot y^2 \cdot Y's + 12 \cdot y \cdot b \cdot Y's - 4 \cdot b^2 \cdot Y's = 0$$

$$y^2 \cdot (6 \cdot b - 12 \cdot Y's) + y \cdot (12 \cdot b \cdot Y's - 8 \cdot b^2) + 3 \cdot b^3 - 4 \cdot b^2 \cdot Y's = 0$$

Tehát, y másodfokon szerepel az egyenletben. Ez azt jelenti, hogy megoldható az egyenlet, viszont a másodfokú megoldóképlet paraméteres alkalmazásával valószínűleg nem jutunk rövid eredményre.

$$y = \frac{-12 \cdot b \cdot Y's + 8 \cdot b^2 + \sqrt{((12 \cdot b \cdot Y's - 8 \cdot b^2)^2 - 4 \cdot (6 \cdot b - 12 \cdot Y's) \cdot (3 \cdot b^3 - 4 \cdot b^2 \cdot Y's))}}{2 \cdot (6 \cdot b - 12 \cdot Y's)}$$

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az egyenletet!

$$y = \frac{-12 b Y's + 8 b^2 + \sqrt{(144 b^2 Y's^2 - 192 b^3 Y's + 64 b^4 - (72 \cdot b^4 - 240 \cdot b^3 \cdot Y's + 192 \cdot b^2 \cdot Y's^2))}}{2 \cdot (6 \cdot b - 12 \cdot Y's)}$$

$$y = \frac{-12 \cdot b \cdot Y's + 8 \cdot b^2 + \sqrt{(-8 \cdot b^4 + 48 \cdot b^3 \cdot Y's - 48 \cdot b^2 \cdot Y's^2)}}{12 \cdot b - 24 \cdot Y's}$$

$$y = \frac{-12 \cdot b \cdot Y's + 8 \cdot b^2 + 2 \cdot b \sqrt{(-2 \cdot b^2 + 12 \cdot b \cdot Y's - 12 \cdot Y's^2)}}{12 \cdot b - 24 \cdot Y's}$$

$$y = \frac{-6 \cdot b \cdot Y's + 4 \cdot b^2 + b \sqrt{(-2 \cdot b^2 + 12 \cdot b \cdot Y's - 12 \cdot Y's^2)}}{6 \cdot b - 12 \cdot Y's}$$

Ezzel kifejeztük az egyik változót, tehát már ismerjük a nagy éktest egyik oldalát. Ahhoz, hogy a másikat is megtudjuk, az Y' tengelyre is írjuk fel a súlypontszámítást! A nevezőben semmi nem változik, hiszen az a feszültségi test térfogata. Csupán annyi a különbség, hogy a testekhez más karok tartoznak.

$$X's = \frac{\frac{x \cdot y \cdot \sigma \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(y-b) \cdot (x - \frac{b \cdot x}{y}) \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot b}{y}) \cdot (x - \frac{b \cdot x}{y})}{2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{x \cdot y \cdot \sigma}{2 \cdot 3} - \frac{(y-b) \cdot (x - \frac{b \cdot x}{y}) \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot b}{y})}{2 \cdot 3}}$$

$$X's = \frac{\frac{x \cdot y \cdot \sigma \cdot y}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(\sigma \cdot y \cdot x - 3 \cdot b \cdot x \cdot \sigma + \frac{3 \cdot b^2 \cdot x \cdot \sigma}{y} - \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{y^2}) \cdot (x - \frac{b \cdot x}{y})}{2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{x \cdot y \cdot \sigma}{2 \cdot 3} - \frac{\sigma \cdot y \cdot x - 3 \cdot b \cdot x \cdot \sigma + \frac{3 \cdot b^2 \cdot x \cdot \sigma}{y} - \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{y^2}}{2 \cdot 3}}$$

$$X's = \frac{\frac{b \cdot x^2 \cdot \sigma}{6} - \frac{b^2 \cdot x^2 \cdot \sigma}{4 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x^2 \cdot \sigma}{6 \cdot y^2} - \frac{b^4 \cdot x^2 \cdot \sigma}{24 \cdot y^3}}{\frac{b \cdot x \cdot \sigma}{2} - \frac{b^2 \cdot x \cdot \sigma}{2 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{6 \cdot y^2}}$$

Ahogy az előbb is, szorozzunk át az emeletes tört nevezőjével !

$$\frac{b \cdot x^2 \cdot \sigma}{6} - \frac{b^2 \cdot x^2 \cdot \sigma}{4 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x^2 \cdot \sigma}{6 \cdot y^2} - \frac{b^4 \cdot x^2 \cdot \sigma}{24 \cdot y^3} = \frac{b \cdot x \cdot \sigma \cdot X's}{2} - \frac{b^2 \cdot x \cdot \sigma \cdot X's}{2 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma \cdot X's}{6 \cdot y^2}$$

$$4 y^3 b x^2 \sigma - 6 y^2 b^2 x^2 \sigma + 4 y b^3 x^2 \sigma - b^4 x^2 \sigma = 12 y^3 b x \sigma X's - 12 y^2 b^2 x \sigma X's + 4 y b^3 x \sigma X's$$

Egyszerűsítsünk ahol lehet , és rendezzük 0 – ra az egyenletet !

$$2 \cdot y^3 \cdot x - 3 \cdot y^2 \cdot b \cdot x + 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot x - \frac{b^3 \cdot x}{2} - 6 \cdot y^3 \cdot X's + 6 \cdot y^2 \cdot b \cdot X's - 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot X's = 0$$

Fejezzük ki x – et az egyenletből !

$$2 \cdot y^3 \cdot x - 3 \cdot y^2 \cdot b \cdot x + 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot x - \frac{b^3 \cdot x}{2} = 6 \cdot y^3 \cdot X's - 6 \cdot y^2 \cdot b \cdot X's + 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot X's$$

$$x \cdot (2 \cdot y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2 - b \frac{^3}{2}) = 6 \cdot y^3 \cdot X's - 6 \cdot y^2 \cdot b \cdot X's + 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot X's$$

$$x = \frac{6 \cdot y^3 \cdot X's - 6 \cdot y^2 \cdot b \cdot X's + 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot X's}{2 \cdot y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3)}{2}}$$

Így kifejeztük a másik változót is. Tehát , ha a két egyenletbe behelyettesítjük a megfelelő paramétereket , akkor pontosan ismerni fogjuk a nagy éktest méreteit. Ennek ismeretében már könnyen megtudhatjuk a feszültségi test nagyságát , ha akarjuk. Ha csupán a határerőre vagyunk kíváncsiak , akkor elég a feszültségidom térfogatát kiszámolnunk. Ezt már a levezetés első sorában kifejeztük.

$$V = \frac{x \cdot y \cdot \sigma}{2 \cdot 3} - \frac{(y - b) \cdot (x - \frac{b \cdot x}{y}) \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot b}{y})}{2 \cdot 3}$$

Ezt szintén egyszerűbb alakra hoztuk ,

$$V = \frac{b \cdot x \cdot \sigma}{2} - \frac{b^2 \cdot x \cdot \sigma}{2 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x \cdot \sigma}{6 \cdot y^2}$$

$$V = \frac{b \cdot x \cdot \sigma}{2} \cdot (1 - \frac{b}{y} + \frac{b^2}{3y^2})$$

Határozzuk meg a nyomott rúd határerejét rugalmas állapotban !

Bemenő adatok

$$b = 1,2 \text{ m}$$

$$a = 1,0 \text{ m}$$

$$\sigma = 4 \text{ N/mm}^2$$

$$X's = 0,2 \text{ m}$$

$$Y's = 0,45 \text{ m}$$

Első lépésben számoljuk ki a feszültségi test y oldalát ! Ehhez a következő összefüggést használhatjuk.

$$y = \frac{-6 \cdot b \cdot Y's + 4 \cdot b^2 + b \sqrt{(-2 \cdot b^2 + 12 \cdot b \cdot Y's - 12 \cdot Y's^2)}}{6 \cdot b - 12 \cdot Y's}$$

Helyettesítsünk be a képletbe, majd végezzük el a számítást !

$$y = \frac{-6 \cdot 1,2 \cdot 0,45 + 4 \cdot 1,2^2 + 1,2 \sqrt{(-2 \cdot 1,2^2 + 12 \cdot 1,2 \cdot 0,45 - 12 \cdot 0,45^2)}}{6 \cdot 1,2 - 12 \cdot 0,45} = 2,121 \text{ m}$$

Most már tudjuk, hogy az éktest y oldala 2,121 méter hosszú.

Ezek után határozzuk meg a feszültségi test x oldalát !

$$x = \frac{6 \cdot y^3 \cdot X's - 6 \cdot y^2 \cdot b \cdot X's + 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot X's}{2 \cdot y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3)}{2}}$$

Helyettesítsük be a megfelelő paramétereket !

$$x = \frac{6 \cdot 2,121^3 \cdot 0,2 - 6 \cdot 2,121^2 \cdot 1,2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 2,121 \cdot 1,2^2 \cdot 0,2}{2 \cdot 2,121^3 - 3 \cdot 2,121^2 \cdot 1,2 + 2 \cdot 2,121 \cdot 1,2^2 - \frac{(1,2^3)}{2}}$$

Ekkor eredményül azt kapjuk, hogy :

$$x = 0,762 \text{ m}$$

Ezen méretek ismeretében már számíthatjuk a határerőt. Ehhez a következő képletet alkalmazhatjuk.

$$V = \frac{b \cdot x \cdot \sigma}{2} \cdot \left(1 - \frac{b}{y} + \frac{b^2}{3y^2}\right)$$

Helyettesítsük be az értékeket, és számoljuk ki az eredményt !

$$V = \frac{1,2 \cdot 0,762 \cdot 4000}{2} \cdot \left(1 - \frac{1,2}{2,121} + \frac{1,2^2}{3 \cdot 2,121^2}\right) = 989,25 \text{ kN}$$

Tehát, a nyomott rúd határereje 989,25 kN

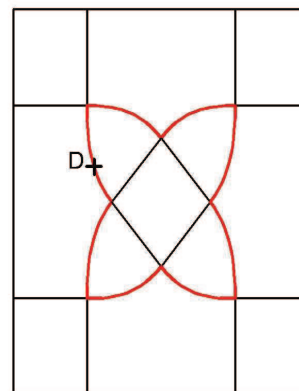
3.2.3.3. A levezetés tanulsága

Két szempontból tartom hasznosnak ennek a meglehetősen száraz matematikai munkának az elvégzését. Az egyik az, hogy egy olyan feladatkör vállt könnyen, gyorsan és pontosan megoldhatóvá, melynek eddig nem ismertük a megoldását. Végeredményben három képletet kaptunk, melyekbe ha egymás után behelyettesítjük a paramétereket, akkor megkapjuk a szerkezeti elem határerejét. Ezek összetett matematikai formulák, tekintve a hosszukat és összetettségüket, de szakirodalmi ismertetésük haszonnal járhat, mert az egyetemi hallgató szemléletét bővíti, a gyakorló mérnök munkáját megkönnyíti.

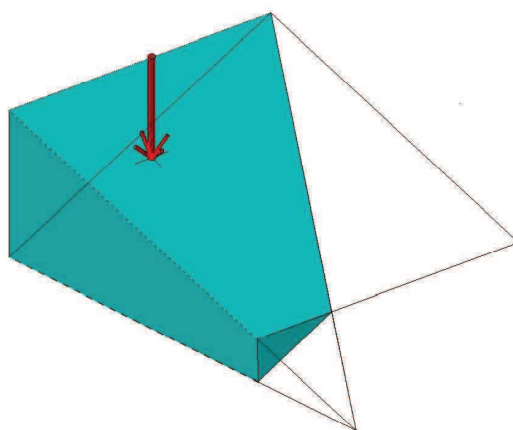
Van még egy szempont, amiért szintén fontos az előbb bemutatott levezetés. Ezen képletek alkalmazásával már könnyen elérhető a kutatás eredeti célja, nevezetesen azoknak a görbéknek a matematikai leírása, melyek a négy és öt oldalú nyomott zónák eseteinek a határa.

3.2.4. A négy- és öt oldalú nyomott zóna határa

Ezekről az esetekről akkor beszélünk, amikor a dőféspont éppen a görbén helyezkedik el. A 27. ábrán látható ez az eset. Persze, ha valóban egy ilyen esetet kapnánk, akkor ezt nem tudnánk megállapítani, mert a görbének nem tudjuk az egyenletét. Gondolkozhatunk rajta, hogy ha a görbe laposabb, vagy kerekesebb lenne akkor, mi lenne a teendőnk, de ez mind csak spekuláció. Egy mérnöknek, a tervezés során mindent számításokkal kell tudnia igazolni. A feszültségidom ebben az esetben úgy néz ki, hogy a derékszögű háromszög alapú szabálytalan gúla, melyről a három oldalú nyomott zóna esetében beszéltünk továbbra is túlnyúlik az egyik irányban a keresztmetszetről, a másik irányban pedig még éppen nem. Tehát, a gúla egyik oldala ilyenkor mindig akkora lesz, mint a keresztmetszet azon oldala, amelyiken még nem nyúlik túl a feszültségi test. A 28. ábrán látható, hogy a nyomott zóna még mindig négy oldalú, és a feszültségi testet megkaphatjuk, ha a nagy gúlából kivonjuk a kicsit. Tehát, ha a dőféspont éppen a görbén van, akkor még mindig használhatjuk azokat az összefüggéseket, melyeket az általános négy oldalú nyomott zóna esetén levezettünk.



27. ábra



28. ábra

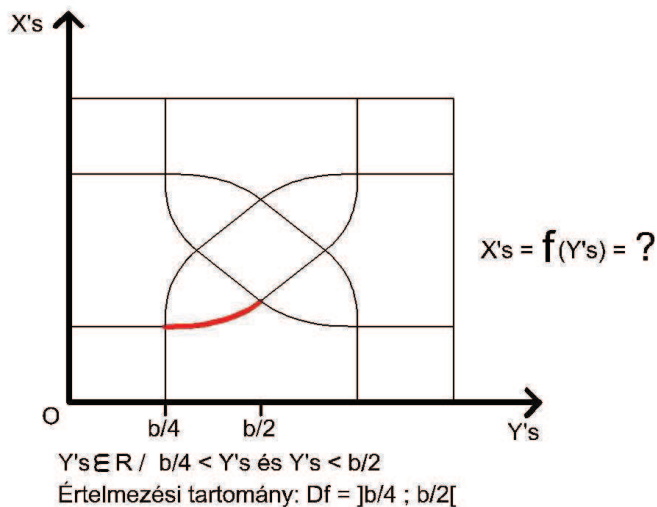
Ilyenkor a feszültségidom köbtartalmának számítása jelentősen leegyszerűsödik, ugyanis az egyik változó, melyet x -nek neveztünk, mindig ugyanazt az értéket veszi majd fel. Ez az érték a keresztmetszet „ a ” mérete. Ez egy olyan alapfeltevés, mely gyakorlatilag a görbe definíciójában is szerepelhetne. Az „ x ” méret konstanssá válása nagyon fontos szüksége annak, hogy leírjuk a görbe paraméteres egyenletét.

3.2.4.1. A görbe egyenletének levezetése

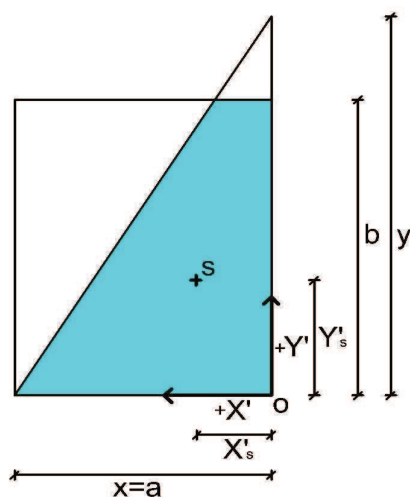
Függvényként fogjuk kezelni a görbéket. Egyszerre csak egyről beszéljünk, és ez legyen a 29. ábrán piros színnel jelölt görbe. A szokásoknak megfelelően a vízszintes tengelyen a függvény helyét és a függőleges tengelyen a függvény értékét értelmezzük. Egy függvényt akkor adunk meg egyértelműen, ha megadjuk az értelmezési tartományát, és a hozzárendelés szabályát. Az értelmezési tartományt könnyedén leolvashatjuk, és ezt fel is tüntettem a 29. ábrán.

A hozzárendelési szabály megadásához, azonban ismét az algebrai tudásunkat kell elővenni. Az előző fejezet végén megbeszéltük,

hogy azokra az esetekre, amikor a dőfspont a görbén helyezkedik el, még igazak a korábbi levezetésekben tett megállapításaink. Ez fontos, mert azoknak a képleteknek a segítségével, már egyszerűen megállapíthatjuk a függvény hozzárendelését. Az előzőkhöz képest némiképp megváltozott a feladat menete. Most már nem igaz, hogy egy ismert súlypont köré kell egy központos testet szerkesztenünk. A test egyik oldala már nem ismeretlen, viszont helyette van egy másik ismeretlenünk, ami a súlypont egyik koordinátája ($X's$). Ez a koordináta egyben a függvény értéke. Így ismét két ismeretlenünk jut a két egyenletünkre. A következő levezetésekben a 30. ábrán feltüntetett jelöléseket használjuk.



29. ábra



30. ábra

A korábban elvégzett levezetésekéből kapott egyenletekkel fogunk tovább dolgozni. Most is, első lépésben számoljuk ki $y - t$! Ebben nincs semmi változás, csak be kell helyettesíteni a megfelelő paramétereket.

$$y = \frac{-6 \cdot b \cdot Y's + 4 \cdot b^2 + b \sqrt{(-2 \cdot b^2 + 12 \cdot b \cdot Y's - 12 \cdot Y'^2 s^2)}}{6 \cdot b - 12 \cdot Y's}$$

Ez a másik egyenlet amit használni fogunk, de egy kicsit átalakítjuk. Az előbb megtárgyaltuk, hogy amikor a dőfspont a görbén helyezkedik el, akkor a nagy éktest x mérete a keresztmetszet szélességével egyenlő. Használjuk ki ezt az $x = a$ összefüggést, és módosítsuk a korábban kapott képletet!

$$x = \frac{6 \cdot y^3 \cdot X's - 6 \cdot y^2 \cdot b \cdot X's + 2 \cdot y \cdot b^2 \cdot X's}{2 \cdot y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3)}{2}} = a$$

Ebben az egyenletben az y és $X's$ a változók. Amikor ennél az egyenletnél tartunk, akkor y értékét már kiszámoltuk a másik egyenletből, tehát csak $X's$ az ismeretlen, ami maga a függvény értéke. Ahhoz, hogy megadjuk a függvény hozzárendelését már nincs más dolgunk, mint kifejezni $X's - t$ az egyenletből.

Első lépésben szorozzuk át a nevezővel, és emeljük ki $X's - t$!

$$a \cdot (2 \cdot y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3)}{2}) = X's \cdot (6 \cdot y^3 - 6 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2)$$

Osszuk az egyenlet mindkét oldalát $X's$ együtthatóival!

$$X's = \frac{a \cdot (2 \cdot y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3)}{2})}{(6 \cdot y^3 - 6 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2)}$$

Ezzel kifejeztük a függvény értékét. Az egyenletek bonyolultsága miatt közvetett módon. A függvény hozzárendelési szabályában y változó szerepel, de y értéke $Y's$ függvényében változik. Tehát ha egy $Y's$ helyen meg akarjuk tudni a függvény értékét, akkor két egyenletbe kell behelyettesítenünk.

$$y = \frac{-6 \cdot b \cdot Y's + 4 \cdot b^2 + b \sqrt{(-2 \cdot b^2 + 12 \cdot b \cdot Y's - 12 \cdot Y'^2 s^2)}}{6 \cdot b - 12 \cdot Y's} \quad \text{és} \quad X's = \frac{a \cdot (2 \cdot y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3)}{2})}{(6 \cdot y^3 - 6 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2)}$$

A könnyebb kezelhetőség reményében polinóm osztást végezhetünk.

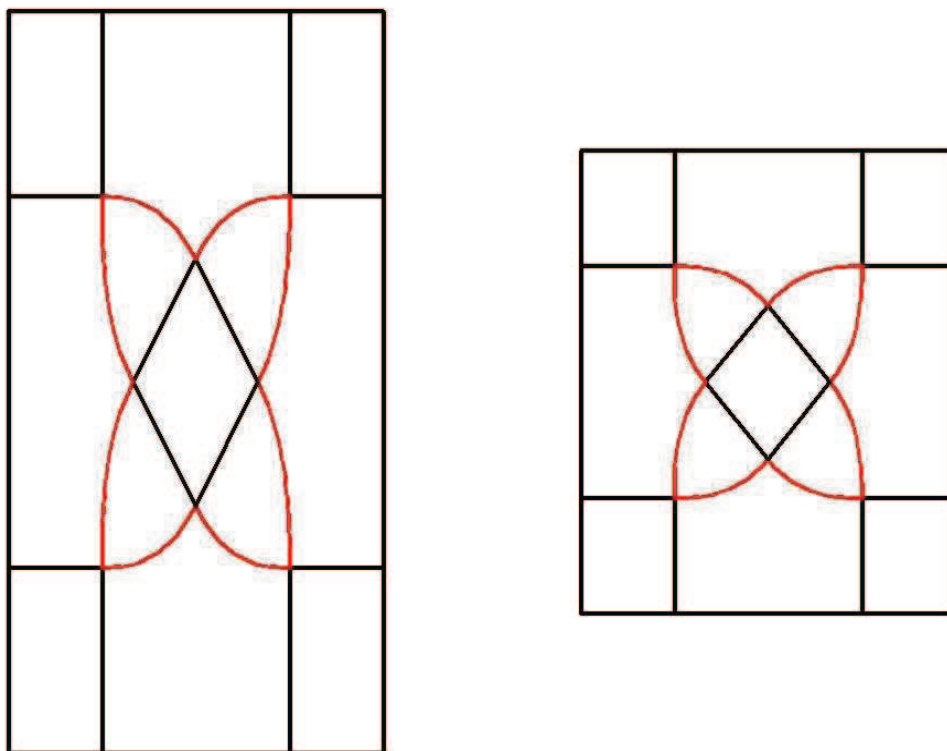
$$(2 \cdot a \cdot y^3 - 3 \cdot a \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3) \cdot a}{2}) \div (6 \cdot y^3 - 6 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2) = \frac{a}{3} - (2 \cdot a \cdot y^3 - 2 \cdot a \cdot y^2 \cdot b + \frac{2}{3} \cdot a \cdot y \cdot b^2)$$

Ekkor a görbe egyenletét ilyen alakban kapjuk meg.

$$X's = \frac{a}{3} + \frac{(-a \cdot y^2 \cdot b + \frac{4}{3} \cdot a \cdot y \cdot b^2 - \frac{(b^3) \cdot a}{2})}{(6 \cdot y^3 - 6 \cdot y^2 \cdot b + 2 \cdot y \cdot b^2)}$$

3.2.4.2. A levezetés tanulsága

Tehát, kaptunk egy eredményt. Nekem azt tanították, hogy a mérnöki gyakorlatban, egy kapott eredmény leellenőrzése, gyakorlatilag ugyan olyan fontos, mint egyáltalán az eredmény kiszámítása. Ez azoknál a feladatoknál, melyek sok számítást igényelnek fokozottan igaz. A levezetéseim egyenletekből, és algebrai műveletekből álltak. Ezeknek a leellenőrzését könnyen elvégezhetjük, ha a kapott eredményt visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe. Természetesen ezt rögtön meg is tettem, és eredményül azonosságot kaptam, mely szerint számolási és elírási hibát nem vétettem. Ez mindenképpen további reménykedésre ad okot. A másik könnyű ellenőrzési mód az, hogy rengeteg számpélda során ábrázoljuk a görbét, és annak valami hihető alakzatot kell mutatnia. Ezt egy számítógépes táblázatkezelő program segítségével szintén elvégeztem. A számpéldák eredményeinek ábrázolásából a 31. ábrán bemutatott alakzatokra jutottam.



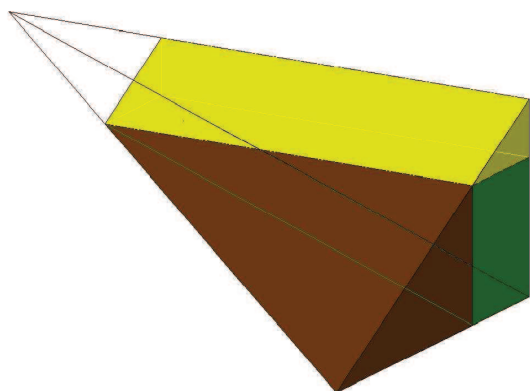
31. ábra

Úgy gondolom, hogy ezek teljes mértékben hihető görbék. Mindenképpen nagyon hasonlítanak arra a skicelt ábrára amit egy régi lexikonban találtam.

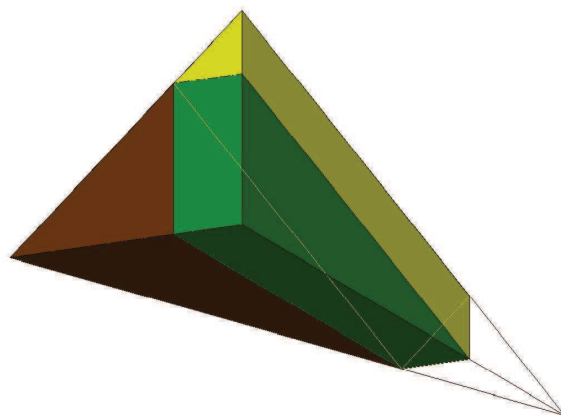
Ezekből az ellenőrzésekből azt tudjuk meg, hogy a feladat közben nem követtünk el hibát, és van arra esély, hogy a helyes eredményre jutottunk. Ezek valamilyen szinten megnyugtatóak, de nem teljes mértékben. Nyilván csak akkor győződhetünk meg maximálisan a képletek helyességéről, ha egy teljesen más módszerrel ugyanazokat az eredményeket kapjuk. Ezzel kiküszöböljük annak a lehetőségét, hogy elvi hibát követünk el.

3.2.4.3. Ellenőrzés egy másik módszerrel

A másik módszerrel nem a két gúla különbségével számoljuk a feszültségi test térfogatát. A feszültségidomot három testre bontjuk. Ezt a felbontást a 32-33. ábrán több nézetből láthatjuk.



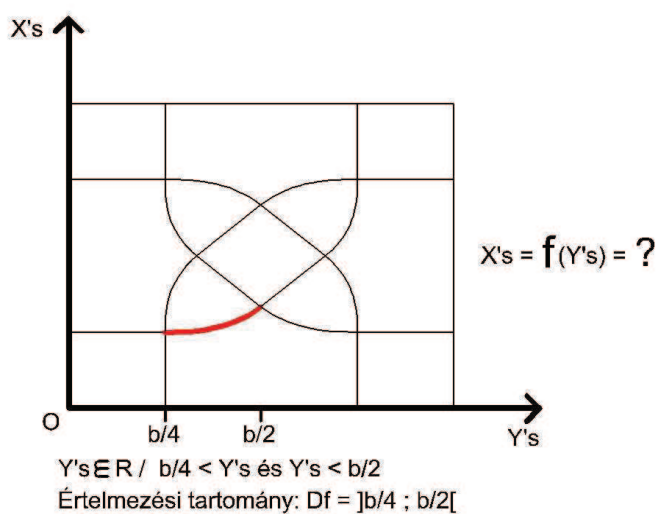
32. ábra



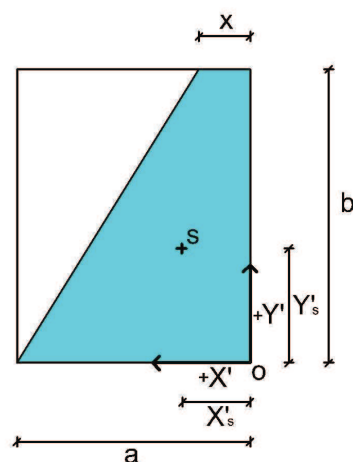
33. ábra

A sárga test, egy derékszögű háromszög alapú ferde hasáb, magassága a keresztmetszet b mérete. A zöld test egy egyenes hasáb, melynek szintén derékszögű háromszög az alapja. A barna test pedig egy háromszög alapú gúla. Ez a megoldás néhány alapvető lépésben egyezni fog az előzővel. Ezúttal is a súlypontszámítás paraméteres felírását végezzük el a két tengely irányában, de a két megoldás között nagy különbség van. Teljesen más testeknek írjuk fel a statikai nyomatékát, ráadásul egy másik méret függvényében, mint korábban. Akkor a nagy gúla egyik oldalát, „ y ”-t tekintettük változónak és fontos részeredménynek. Most már nem beszélünk nagy és kicsi gúlákról, hanem az előbb bemutatott három testről, melyek a feszültségi test felbontása során alakultak ki. Azért kedvező ez a felbontás, mert mind a három test térfogata ugyanazon méret függvényében változik. Ez a 35. ábrán feltüntetett x méret. A testek oldalait most is a hasonló háromszögek tételének alkalmazásával írhatjuk fel. Ezzel elérhetjük, hogy csak egy ismeretlen szerepeljen az egyenletekben.

A görbét most is függvényként fogjuk kezelni. Úgy kezeljük mint korábban, ugyanazokon a helyeken értelmezzük, és a jelöléseket sem változtattuk meg, hogy könnyen követhető legyen (34. ábra). Ha „ x ” ismeretlent kiszámoltuk, akkor ismét az értékészlet, vagyis X 's kifejezésére kell törekednünk. A következő levezetések során a 35. ábrán feltüntetett jelöléseket használjuk.



34. ábra



35. ábra

Tehát, ebben a felírásban az x méret az egyik, és az $X's$ a másik ismeretlen. Tanácsos először azzal a súlypontszámítási egyenlettel kezdeni, melyben csak egy ismeretlen szerepel. Ez az y irányú vizsgálat.

$$Y's = \frac{\frac{x \cdot b \cdot \sigma \cdot x \cdot b}{2 \cdot a \cdot 2} + \frac{x \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a}) \cdot b}{2 \cdot 3} + \frac{(a-x) \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a}) \cdot b}{2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{x \cdot b \cdot \sigma \cdot x}{2 \cdot a} + \frac{x \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a})}{2} + \frac{(a-x) \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a})}{2 \cdot 3}}$$

A hasonló háromszögek tételében rejlő lineáris összefüggéseket kihasználva, ilyen formában tudjuk felírni az összefüggést. Ez azért nagyon kedvező, mert továbbra is csak az x az egyedüli ismeretlen az egyenletben.

Hozzuk egyszerűbb formára az egyenletet!

$$Y's = \frac{\frac{x^2 \cdot b^2 \cdot \sigma}{4 \cdot a} + \frac{x \cdot b^2 \cdot \sigma}{6} - \frac{x^2 \cdot b^2 \cdot \sigma}{6 \cdot a} + \frac{a \cdot b^2 \cdot \sigma}{24} - \frac{x \cdot b^2 \cdot \sigma}{12} + \frac{x^2 \cdot b^2 \cdot \sigma}{24 \cdot a}}{\frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{2 \cdot a} + \frac{x \cdot b \cdot \sigma}{2} - \frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{2 \cdot a} + \frac{a \cdot b \cdot \sigma}{6} - \frac{x \cdot b \cdot \sigma}{3} + \frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{6 \cdot a}}$$

$$Y's = \frac{\frac{x^2 \cdot b^2 \cdot \sigma}{8 \cdot a} + \frac{x \cdot b^2 \cdot \sigma}{12} + \frac{a \cdot b^2 \cdot \sigma}{24}}{\frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{6 \cdot a} + \frac{x \cdot b \cdot \sigma}{6} + \frac{a \cdot b \cdot \sigma}{6}}$$

Ki kell fejeznünk $x-t$, hogy számolni tudjunk vele! Első lépésben szorozzunk át a nevezővel!

$$\frac{x^2 \cdot b^2 \cdot \sigma}{8 \cdot a} + \frac{x \cdot b^2 \cdot \sigma}{12} + \frac{a \cdot b^2 \cdot \sigma}{24} = \frac{Y's \cdot x^2 \cdot b \cdot \sigma}{6 \cdot a} + \frac{Y's \cdot x \cdot b \cdot \sigma}{6} + \frac{Y's \cdot a \cdot b \cdot \sigma}{6}$$

$$3 \cdot x^2 \cdot b^2 \cdot \sigma + 2 \cdot a \cdot x \cdot b^2 \cdot \sigma + a^2 \cdot b^2 \cdot \sigma = 4 \cdot Y's \cdot x^2 \cdot b \cdot \sigma + 4 \cdot a \cdot Y's \cdot x \cdot b \cdot \sigma + 4 \cdot Y's \cdot a^2 \cdot b \cdot \sigma$$

Egyszerűsítsünk, ahol lehetőség van rá, majd rendezzük nullára az egyenletet!

$$3 \cdot x^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot x \cdot b + a^2 \cdot b - 4 \cdot Y's \cdot x^2 - 4 \cdot a \cdot Y's \cdot x - 4 \cdot Y's \cdot a^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (3 \cdot b - 4 \cdot Y's) + x \cdot (2 \cdot a \cdot b - 4 \cdot a \cdot Y's) + a^2 \cdot b - 4 \cdot a^2 \cdot Y's = 0$$

A változó ezúttal is másodfokon szerepel. Ez azt jelenti, hogy meg tudjuk oldani az egyenletet, viszont ehhez ismét egy másodfokú megoldólépletet kell paraméteresen megoldanunk.

$$x = \frac{-2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot a \cdot Y's + \sqrt{((+2 \cdot a \cdot b - 4 \cdot a \cdot Y's)^2 - 4 \cdot (3 \cdot b - 4 \cdot Y's) \cdot (a^2 \cdot b - 4 \cdot Y's \cdot a^2))}}{2 \cdot (3 \cdot b - 4 \cdot Y's)}$$

Hozzuk a lehető legegyszerűbb formára az egyenletet!

$$x = \frac{-2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot a \cdot Y's + \sqrt{(4 \cdot a^2 \cdot b^2 - 16 \cdot a^2 \cdot b \cdot Y's + 16 \cdot a^2 \cdot Y's^2 - 12 \cdot a^2 \cdot b^2 + 64 \cdot Y's \cdot a^2 \cdot b - 64 \cdot Y's^2 \cdot a^2)}}{2 \cdot (3 \cdot b - 4 \cdot Y's)}$$

$$x = \frac{-2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot a \cdot Y's + \sqrt{(-8 \cdot a^2 \cdot b^2 + 48 \cdot a^2 \cdot b \cdot Y's - 48 \cdot a^2 \cdot Y's^2)}}{2 \cdot (3 \cdot b - 4 \cdot Y's)}$$

$$x = \frac{-2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot a \cdot Y's + 4 \cdot a \sqrt{(-0.5 \cdot b^2 + 3 \cdot b \cdot Y's - 3 \cdot Y's^2)}}{2 \cdot (3 \cdot b - 4 \cdot Y's)}$$

$$x = \frac{-a \cdot b + 2 \cdot a \cdot Y's + 2 \cdot a \sqrt{(-0.5 \cdot b^2 + 3 \cdot b \cdot Y's - 3 \cdot Y's^2)}}{(3 \cdot b - 4 \cdot Y's)}$$

$$x = a \cdot \left(\frac{-b + 2 \cdot Y's + 2 \sqrt{(-0.5 \cdot b^2 + 3 \cdot b \cdot Y's - 3 \cdot Y's^2)}}{(3 \cdot b - 4 \cdot Y's)} \right)$$

Tehát kifejeztük az x változót. Most írjuk fel a súlypontoszámítást a másik irányba is!

$$X's = \frac{\frac{x \cdot b \cdot \sigma \cdot x \cdot x}{2 \cdot a \cdot 3} + \frac{x \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a}) \cdot x}{2 \cdot 2} + \frac{(a - x) \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a}) \cdot (x + \frac{a - x}{4})}{2 \cdot 3}}{\frac{x \cdot b \cdot \sigma \cdot x}{2 \cdot a} + \frac{x \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a})}{2} + \frac{(a - x) \cdot b \cdot (\sigma - \frac{\sigma \cdot x}{a})}{2 \cdot 3}}$$

Ebben az egyenletben x és X's is szerepel. Ez nem probléma, ugyanis x értékét az előbbi egyenlet segítségével ki tudjuk számolni. A célunk most is az, hogy a lehető legegyszerűbb formában kifejezzük a függvény értéket, X's-t. Ennek érdekében hozzuk egyszerűbb formára az egyenletet!

$$X's = \frac{\frac{x^3 \cdot b \cdot \sigma}{6 \cdot a} + \frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{4} - \frac{x^3 \cdot b \cdot \sigma}{4 \cdot a} + \frac{x^3 \cdot b \cdot \sigma}{8 \cdot a} - \frac{5 \cdot x^2 \cdot b \cdot \sigma}{24} + \frac{a \cdot x \cdot b \cdot \sigma}{24} + \frac{a^2 \cdot b \cdot \sigma}{24}}{\frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{2 \cdot a} + \frac{x \cdot b \cdot \sigma}{2} - \frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{2 \cdot a} + \frac{a \cdot b \cdot \sigma}{6} - \frac{x \cdot b \cdot \sigma}{3} + \frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{6 \cdot a}}$$

$$X's = \frac{\frac{x^3 \cdot b \cdot \sigma}{24 \cdot a} + \frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{24} + \frac{a \cdot b \cdot x \cdot \sigma}{24} + \frac{a^2 \cdot b \cdot \sigma}{24}}{\frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{6 \cdot a} + \frac{x \cdot b \cdot \sigma}{6} + \frac{a \cdot b \cdot \sigma}{6}}$$

Annak érdekében hogy megszabaduljunk az emeletes törttől, szorozzunk át a nevezővel!

$$\frac{x^3 \cdot b \cdot \sigma}{24 \cdot a} + \frac{x^2 \cdot b \cdot \sigma}{24} + \frac{a \cdot b \cdot x \cdot \sigma}{24} + \frac{a^2 \cdot b \cdot \sigma}{24} = \frac{X's \cdot x^2 \cdot b \cdot \sigma}{6 \cdot a} + \frac{X's \cdot x \cdot b \cdot \sigma}{6} + \frac{X's \cdot a \cdot b \cdot \sigma}{6}$$

Egyszerűsítsünk ahol tudunk, majd fejezzük ki X's-t!

$$x^3 \cdot b \cdot \sigma + x^2 \cdot b \cdot \sigma \cdot a + a^2 \cdot b \cdot x \cdot \sigma + a^3 \cdot b \cdot \sigma = 4 \cdot X's \cdot x^2 \cdot b \cdot \sigma + 4 \cdot a \cdot X's \cdot x \cdot b \cdot \sigma + 4 \cdot X's \cdot a^2 \cdot b \cdot \sigma$$

$$x^3 + x^2 \cdot a + a^2 \cdot x + a^3 = 4 \cdot X's \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot X's \cdot x + 4 \cdot X's \cdot a^2$$

$$X's = \frac{x^3 + x^2 \cdot a + a^2 \cdot x + a^3}{4 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot x + 4 \cdot a^2}$$

Tehát, ismét leírtuk paraméteresen a függvény hozzárendelési szabályát. Ezzel majd számolunk kell, ezért az egyszerűbb felírás eléréséhez végezzünk el egy polinóm osztást!

$$X's = \frac{x^3 + x^2 \cdot a + a^2 \cdot x + a^3}{4 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot x + 4 \cdot a^2} = \frac{x}{4} + \frac{a^3}{(4 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot x + 4 \cdot a^2)}$$

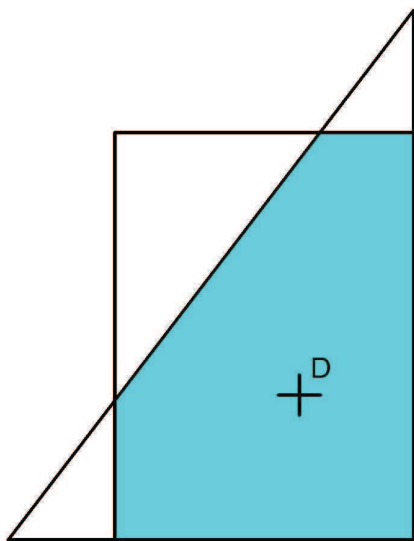
3.2.4.4. Az ellenőrző levezetés összefoglalása

Ismét egy paraméteres eredményt kaptunk a görbe leírására. Ennél a módszernél is két egyenletbe kell behelyettesítenünk, ha meg akarjuk tudni a görbe egyik pontjának a koordinátáit. Ez hasonlóság a két megoldásban, de önmagában még nem bizonyít semmit. A két módszer paraméteres eredményei nem ugyanazt a kifejezést adták. Ez természetes, hiszen teljesen más változó függvényében írtuk fel a problémát. Akkor mondhatjuk ki az egyezést, ha mind a két különböző módszer alkalmazásával, az összes kiszámított számpélda során pontosan ugyanazokra az eredményekre jutunk. A táblázatkezelő program segítségével, könnyedén és gyorsan le tudtam ellenőrizni az egyezést. Százas nagyságrendben végeztem ellenőrző számításokat, és minden esetben egyezést tapasztaltam. Ebből az következik, hogy a görbék ábrázolása során pontosan ugyanazokat a görbéket kaptam, mint amit a 31. ábrán láthattunk.

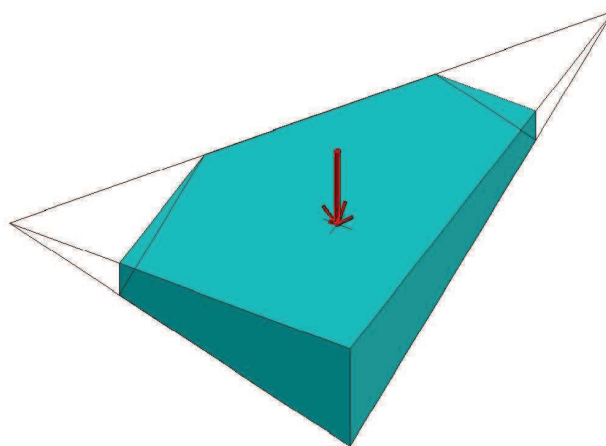
Úgy gondolom, mindezek figyelembe vételével, kimondhatjuk, hogy a levezetéseink helytállóak. Tényleg azokhoz a görbékhez jutottunk, amit kerestünk, és immár több módszerrel is meg tudjuk oldani a feladatokat. Az ellenőrzéssel bebizonyítottuk, hogy a görbe első leírása helyes. Ezt azért volt nagyon fontos bebizonyítani, mert ha azok a képletek jók, akkor a korábban taglalt, négyszög alapú feszültségi testek határerő számításánál is pontos, jó eredményre jutottunk.

3.2.5. Az öt oldalú nyomott zóna

Ha a dőféspont a görbék között helyezkedik el akkor a feszültségidom, már teljesen más test lenne. Mind a két irányban lelógna a keresztmetszetről, és ezért már öt oldalú lenne a nyomott zóna. Ezt az esetet a 36. és 37. ábrán megmutatom, de a dolgozat nem tárgyalja részleteiben az esetet, ugyanis a görbe leírásához nincs rá szükségünk. Ilyenkor a feszültségi test térfogatát úgy kapjuk meg, hogy a nagy gúlából kivonjuk a két kicsit.



36. ábra



37. ábra

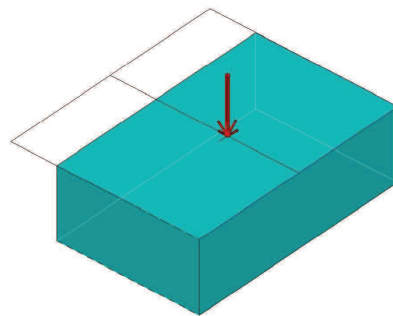
4. Vizsgálat képlékeny határállapotban

4.1. A képlékeny állapotban történő vizsgálat jelentősége

Alapvetően egy mérnök a rugalmas feszültségmegoszlás elvével gondolkodik. A valóságot a teherhordó anyagok rugalmas viselkedésével tudjuk modellezni. Gondoljunk egy egyszerű kéttámaszú gerendára. Ha azt leterheljük, akkor a szerkezet megváltoztatja az alakját, és a keresztmetszeteiben feszültségek keletkeznek. Ha növeljük a terhek nagyságát, akkor az még nagyobb lehajláshoz, elforduláshoz, és feszültségekhez vezet. A terhelés megszüntetésével a keresztmetszetek feszültségmentesek lesznek, a tartó pedig visszakerül eredeti helyzetébe, tehát maradandó alakváltozást nem szenved. Egy mérnök a szerkezetek méretezésekor az anyagok rugalmas viselkedésével számol. Az úgy nevezett statikus lehetőséget követve, lokálisan, minden szerkezeti elemet külön megtervez, miután meghatározta a rá ható igénybevételeket. Ez a módszer egy alsó korlát, mert minden pontban azt vizsgálja, hogy minimum mekkora keresztmetszetre, és minimum milyen anyagminőségre van szükségünk. Ez a módszer működik, építmények milliói rá a bizonyíték. A probléma nem az, hogy a szerkezetek nem fognak megfelelni, hanem, hogy a tervező egy komplex munka után nem tudja, hogy az építményben mennyi tartalék van. Pedig ez fontos kérdés, mert a mérnöknek ügyelnie kell arra, hogy se veszélyes, se pedig gazdaságtalan ne legyen az általa tervezett szerkezet. Erre a tájékozódásra szolgál a képlékeny feszültségmegoszlást követő számítások. Ez mutatja, hogy milyen fontos az anyagok képlékeny állapotával is számolni, de nem ez az egyetlen oka annak, hogy gyakran így számolunk. Sok esetben a rugalmas feszültségmegoszlás szerinti számolás nagyon bonyolult számításokhoz vezetne. Ilyenkor gyakran számolhatunk képlékeny alapon, mint egy közelítő eljárásként. Az idáig tárgyalt témára szintén ez igaz. Képlékeny állapotban a nyomott zóna minden pontjában a határfeszültség alakul ki, ezért számításaink a rugalmas állapottal ellentétben, minden esetben a határerő meghatározására irányulnak.

4.2. Speciális esetek

Amikor a keresztmetszetet a súlypontjában terheli a nyomó erő, akkor természetesen csak negatív feszültségek keletkeznek. Ilyenkor, a teljes felület mentén oszlik el az erő, viszont ez csak ennél az esetnél van így. Az egyenletes feszültségeloszlás miatt, képlékeny állapotban nem tudunk magidomot értelmezni. A legkisebb külpontosságnál is már megjelennek a húzófeszültségek, melyet a rúd továbbra sem bír elviselni. Már megtárgyaltuk, hogy ilyenkor repedések keletkeznek, és a keresztmetszet egyes részei feszültségmentesek maradnak. Tehát, ismét a keresztmetszet redukálásával kell foglalkoznunk, viszont a részleteket tekintve különbség van a két feszültségeloszlás között.



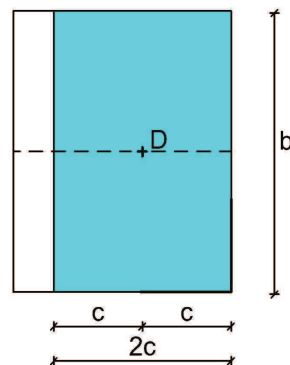
38. ábra

Szintén speciális eset, amikor a dőféspont valamelyik szimmetriatengelyen helyezkedik el. A 38. ábrán látható, hogy a feszültségi test ilyenkor egy téglalap alapú egyenes hasáb, mellyel könnyen tudunk számolni, az előbb taglaltak alapján:

$$F_H = A_{ny} \cdot \sigma_H$$

A nyomott felület kiszámításához pontosan fel kell venni a feszültségidomot. Egy ilyen, téglalap alapú hasáb súlypontjának a vetülete az oldalai felében van. A módszer nem változott, ugyanazok a lépések, mint a rugalmas feszültségmegoszlásnál. Továbbra is „c”-vel jelöljük a dőféspont távolságát a legjobban nyomott szélső száltól. Ahhoz, hogy a dőféspont a feszültségi test oldalfelezőjéhez essen, a másik irányban is „c”-t kell felmérnünk. Ezzel biztosítjuk, hogy a feszültségidom központos legyen a dőféspontra. A 39. ábráról könnyen leolvasható, hogy a nyomott felület:

$$A_{ny} = 2cb$$

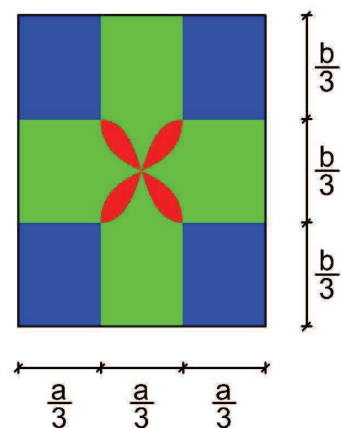


39. ábra

Ebből a típuspéldából is látható az, ami az egész képlékeny feszültségmegoszlásra jellemző. A módszer, lépéseiben megegyezik a rugalmas állapotban tárgyalattal, viszont némileg könnyebb számításokat igényelnek a példamegoldások. Ahogy a fejezet bevezetőjében is említettem, ez az egyik oka annak, hogy gyakran közelítő megoldásként az anyagok képlékeny viselkedésével számolunk, ha valójában nem is az a helyzet.

4.3. Általános esetek

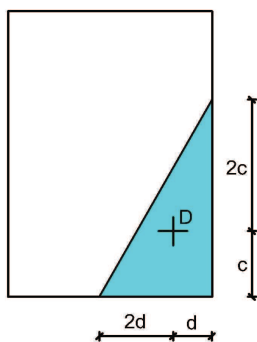
Ismét áttérhetünk az általános esetek tárgyalására. Említettem, hogy a képlékeny feszültségeloszlásnál is létezik egy hasonló ábra, mint amit a rugalmas esetről vizsgáltunk. Ez a 40. ábrán látható. A jelentése hasonló, mint a másik módszernél. Egész pontosan azt jelenti, hogy amennyiben a dőfpont valamelyik kék területre esik, akkor a nyomott zóna háromszög alakú. Ha a nyomó erő a zöld területen terheli a keresztmetszetet, akkor négy oldalú, ha pedig a görbék által közbezárt piros terület valamelyikén megy át az erő hatásvonala, akkor öt oldalú a dolgozó keresztmetszet, tehát a nyomott zóna alakja. A két ábrát összehasonlítva a leginkább szembeötlő különbség az, hogy a képlékeny esetről az ábrán nincs feltüntetve magidom. Korábban megbeszéltük, hogy csak akkor nem fog húzófeszültség megjelenni, ha központos a nyomás, hiszen amint valami minimális külpontosság is fellép, akkor a képlékeny hajlításból származó feszültségek minden pontban a folyási feszültség értékével fognak megjelenni. Tulajdonképpen az a terület, melyet ha az erő terhel, és a keresztmetszeten egynemű, nyomó feszültségek keletkeznek, az mindösszesen egy pont, a keresztmetszet súlypontja.



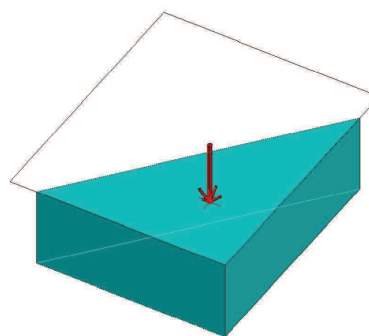
40. ábra

4.3.1. A három oldalú nyomott zóna

Akkor beszélünk ezekről az esetekről, amikor a dőfpont a kék területre esik. Már ennél az esetről is nagyon jellemző az, hogy sokkal könnyebb dolgunk lesz a feladatok megoldásával, és a levezetések elvégzésével. Ez azért van, mert azzal, hogy a feszültségeloszlás egyenletes, sokkal könnyebben kezelhető alakzatokat kapunk feszültségi testnek. Ebből adódóan a térfogatuk kiszámítása egyszerűbb számítást fog igényelni, mint amiket a rugalmas állapot tárgyalása során láthattunk. Ez még nem minden, ugyanis a súlypont helyének meghatározása is jelentősen leegyszerűsödik. A feszültségidomot úgy lehet értelmezni, hogy a sík nyomott zóna minden pontjában értelmezzük a keresztmetszetre merőleges feszültségeket, és így kapjuk meg a harmadik dimenziót. Azonban a képlékeny feszültségmegoszlás miatt minden pontban ugyanakkora feszültséggel számolunk, tehát ezúttal a testek súlypontszámítását visszavezethetjük síkidomokéra. Ez jelentősen megkönnyíti a dolgunkat. Amikor három oldalú a nyomott zóna akkor a feszültségidom egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb. Egy ilyen testet láthatunk a 42. ábrán. Könnyen megállapítható, hogy egy ilyen hasábnak a súlypontja az oldalak harmadában van, lévén derékszögű háromszög az alapja, és a feszültségek értékei változatlanok. Ez azt jelenti, hogy a „c” értékéhez még „2c-t” kell felmérni. A 41. ábra ehhez a lépéshez magyarázatul szolgál.



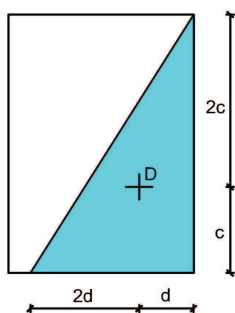
41. ábra



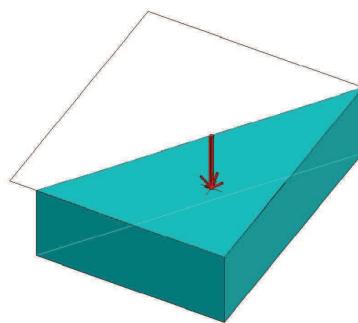
42. ábra

4.3.2. A három- és négy oldalú nyomott zóna határa

Az ábrán látható, hogy a kék és zöld zónák határa a keresztmetszet harmadában van. Ez szintén egy eltérés a rugalmas állapothoz képest, viszont az oka ugyanaz. A rugalmas esetben azért volt a zónák határa a keresztmetszet negyedében, mert a gúla alakú feszültségi éktestnek az egymásra merőleges vízszintes oldalak negyedében van a súlypontja. Az előbb megbeszéltük, hogy ennek a derékszögű háromszög alapú egyenes hasábnak a merőleges oldalak harmadában van a súlypontja. Emiatt a hasáb egyik oldala „ $3c$ ” hosszúságú lesz. Ha ez egyenlő a keresztmetszet „ b ” oldalával, akkor könnyű kifejezni, hogy „ $c = b/3$ ”. A nyomott zóna felvétele, a 43., míg a kialakuló feszültségi test a 44. ábrán látható. Ahogy a rugalmas esetben, itt is még azokat a számításainkat használhatjuk, amelyeket a három oldalú nyomott zónánál, hiszen a feszültségidom, ugyan olyan alakzat, mint amiket azoknál az eseteknél láttunk.



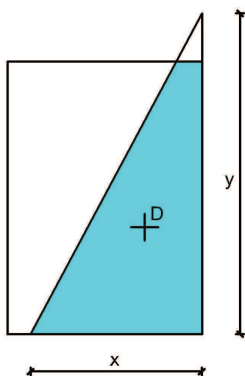
43. ábra



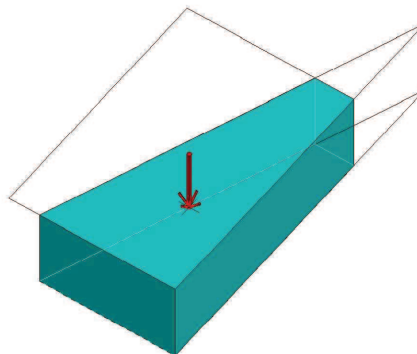
44. ábra

4.3.3. A négy oldalú nyomott zóna

Ha a dőfpont az előző állapothoz képest feljebb helyezkedik el, akkor a „ $3c$ ” már nagyobb, mint a keresztmetszet „ b ” mérete. Ezt azt eredményezi, hogy a nagy hasáb le fog lógni a keresztmetszetről, és ott feszültség mentes lesz, tehát a feszültségidom ilyenkor egy csonkolt hasáb. Az elméleti megközelítésben is átfedés vehető észre a két fajta feszültségmegoszlás kezelése tekintetében. Természetesen a részletekben eltérő lesz a két módszer, hiszen más alakú a feszültségi test. Első megoldásként ismét két test különbségével kaphatjuk meg a keresett idomot. A nagy hasábból le kell vonni a kicsi feszültségmentes hasábot, tehát azt a részt, ami lelóg a keresztmetszetről. Korábban gúlákkal tettünk mindezt, ami bonyolultabb számításokhoz vezetett. Itt könnyebb dolgunk lesz a levezetésekben, viszont a felmerülő problémák ugyanazok. Köztük a legnagyobb, hogy nem tudjuk a feszültségi test méreteit, így nem tudunk vele számolni. Azért nem tudjuk, mert egy ilyen csonkolt testnek nem ismerjük a súlypontját, tehát nem tudjuk elvégezni „ c ” méret többszörösének felmérésével a feszültségidom szerkesztését. Először ezt kell paraméteresen megkapnunk. A következő levezetésekben szereplő jelöléseket, az 51. ábrán jelöltem. Ismét a nagy test, jelen esetben a nagy hasáb méreteit kell megismernünk, mert ha azokat tudjuk, akkor már a kis hasáb levonásával egyszerűen megkaphatjuk a feszültségi test térfogatát, és így a nyomott rúd teherbírását. A szóban forgó feszültségidomot a 46. ábrán láthatjuk.



45. ábra

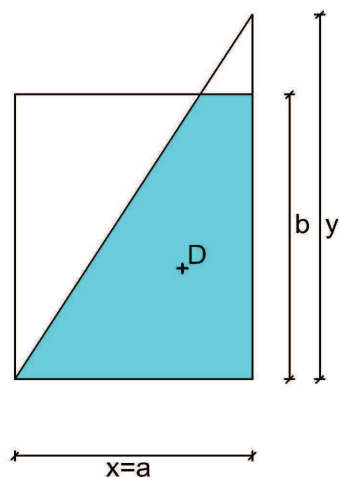


46. ábra

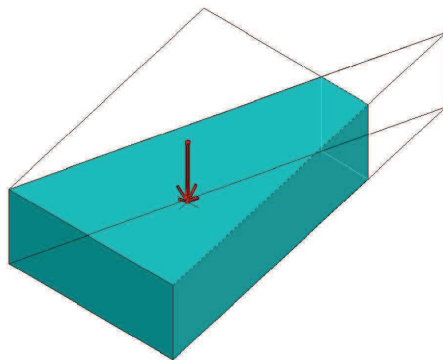
Ez a levezetés, mely a feszültségidom térfogatának meghatározására irányul, annyira összefügg a görbe egyenletének leírásával, hogy együtt fogjuk ezeket kezelni. Mielőtt áttérünk ezekre a paraméteres összefüggésekre vegyük azt az esetet, amikor a dőféspont a görbén helyezkedik el.

4.3.4. A négy- és öt oldalú nyomott zóna határa

Ez a helyzet akkor áll elő, amikor a dőféspontra központos feszültségi test még éppen nem lóg le két irányban a keresztmetszetről. Az egyik befogója már az általános négy oldalú nyomott zónánál is hosszabb volt a keresztmetszet oldalánál. Ez a rész változatlan az előző esethez képest, viszont a feszültségidom másik oldala speciális helyzetet vett fel. Ilyenkor, ahogy a rugalmas feszültségeloszlásnál is láttuk, a feszültségi test egyik befogója éppen a keresztmetszet, rá párhuzamos oldalának hosszával fog megegyezni. Ez a 47. ábrán látható. Ha „ x ” egy kicsivel is nagyobb lenne, akkor már túl lógna a keresztmetszeten, és ezáltal öt oldalú nyomott zóna alakulna ki. Ebben a fejezetben azt a határállapotot tárgyaljuk, amikor éppen a négy és öt oldalú nyomott zóna esetek között vagyunk. A görbe éppen ennek a két esetnek a határát írja le, tehát az erő dőféspontja ezeknél a speciális helyzeteknél éppen a görbe egyik pontján terheli a keresztmetszetet. Ilyenkor a feszültségidom a 48. ábrán bemutatott test.



47. ábra

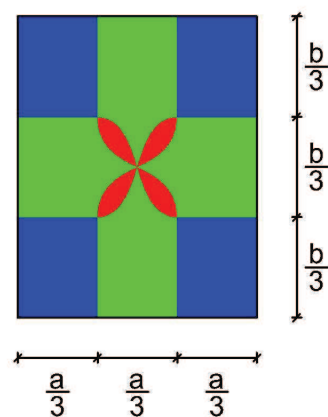


48. ábra

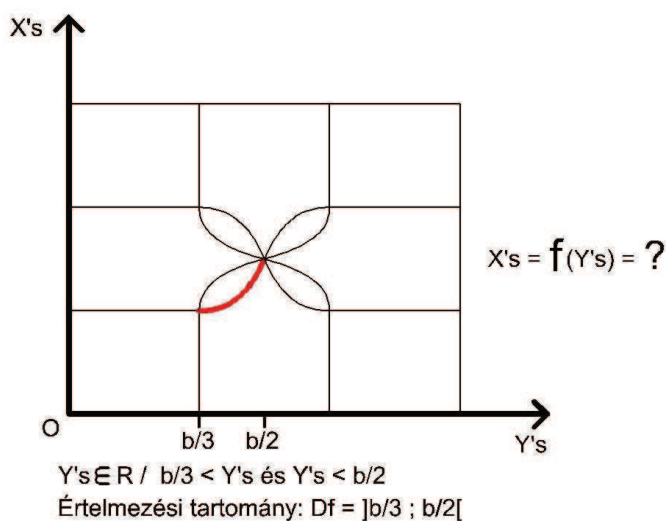
Ennél a képlékeny esetnél is könnyen megállapíthatjuk, hogy a négy és öt oldalú nyomott zónák határánál a feszültségi test, alakját tekintve még megegyezik a négy oldalú esettel. A 47. ábrán látható, hogy a nyomott zóna még mindig négy oldalú, és a feszültségidom térfogatát még mindig kiszámolhatjuk a nagy és a kicsi hasáb különbségével. Emiatt a hasonlóság miatt egyszerre mutatom be a négy oldalú feszültségidom térfogatszámítását, és a görbe egyenletének paraméteres leírását.

4.3.4.1. A görbe származtatása paraméteres alakban

Azért fontos ismernünk a görbe egyenletét, mert anélkül nem tudjuk egyértelműen eldönteni, hogy melyik esettel állunk szemben. Ez akkor van így, amikor a dőféspont valahol a görbe közelében helyezkedik el. Ilyenkor az, hogy a 49. ábrán melyik tartományba esik az erő hatáspontja azon múlik, hogy a görbe alakja mennyire lapos, illetve mennyire görbe. Magáról a görbe elhelyezkedéséről csak annyit tudunk, hogy a keresztmetszet harmadából indul ki, és a súlypontjába fut be. Ez egy példa megoldásánál semmit nem segít, viszont a görbe leírásának első lépését el tudjuk végezni. A görbét függvényként fogjuk kezelni, tehát először is meg kell adnunk az értelmezési tartományát. Látható, hogy ezek a görbék páronként megegyeznek. Egyszerre csak egyről beszéljünk, és ez legyen az 50. ábrán piros színnel kiemelt görbe.



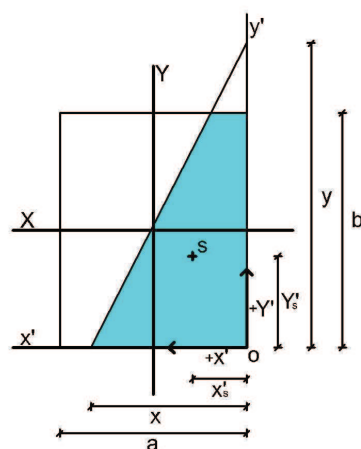
49. ábra



50. ábra

Az értelmezési tartományt, melyet a függvényre nézve rögtön meg tudunk adni, az 50. ábrán feltüntettük. A függvény kezelése hasonló ahhoz, mint amit a rugalmas állapotban végeztünk. A függvény helyét azon tengely mentén értelmezzük, amelyik irányban a nagy hasáb lelóg a keresztmetszetről. A pirossal jelölt görbe esetén a nagy test „y” mérete a „b” oldal irányában lógott túl a keresztmetszeten. Ez az 51. ábrán látható. Az 50. ábrán azért forgattuk el a keresztmetszetet, hogy betartsuk a klasszikus függvényábrázolási szabályokat, miszerint a függvény helyét a vízszintes, és a függvény értéket a függőleges tengelyen értelmezzük.

A levezetés elvi alapja megegyezik a korábban tárgyaltakéval. Először a nagy hasáb méreteit szeretnénk meghatározni. Az x és y tengely irányú oldalak lesznek az ismeretlenek, és ezeket a két irányú súlypontszámítás egyenleteiből szeretnénk kifejezni. Ha ez valóban sikerül, akkor áttérhetünk a görbe leírására. Ekkor az „x” oldalt egyenlővé tesszük a keresztmetszet a méretével, és a függvény értéke, „X's” lesz az ismeretlen, amit ki kell fejeznünk. Ha ezt megtesszük, azzal megadjuk a függvény paraméteres hozzárendelési szabályát. A következő levezetésekben az 51. ábrán látható jelöléseket használjuk.



51. ábra

Első megoldásként, most is két test különbségével dolgozunk. A nyomó erő hatásvonala a feszültségidom súlypontján kell, hogy átmenjen, tehát a megoldás most is egy súlypontszámításra vezethető vissza. Először a súlypont Y' koordinátájának paraméteres megoldását írjuk fel!

$$Y's = \frac{Sx'}{V} = \frac{Sx'_{\text{nagyhasáb}} - Sx'_{\text{kishasáb}}}{V_{\text{nagyhasáb}} - V_{\text{kishasáb}}} = \frac{V_{\text{nagyhasáb}} \cdot t_n - V_{\text{kishasáb}} \cdot t_k}{V_{\text{nagyhasáb}} - V_{\text{kishasáb}}}$$

$$Y's = \frac{\sigma \cdot A_{\text{nagyhasáb}} \cdot t_n - \sigma \cdot A_{\text{kishasáb}} \cdot t_k}{\sigma \cdot A_{\text{nagyhasáb}} - \sigma \cdot A_{\text{kishasáb}}} = \frac{\frac{x \cdot y \cdot y}{2 \cdot 3} - \left[\frac{(y-b) \cdot \left(x - \frac{b \cdot x}{y}\right)}{2} \cdot \left(b + \frac{y-b}{3}\right) \right]}{\frac{x \cdot y}{2} - \left[\frac{(y-b) \cdot \left(x - \frac{b \cdot x}{y}\right)}{2} \right]}$$

A kicsi és a nagy hasáb egymáshoz hasonló testek. Ezért az oldalakat a hasonló háromszögek tételének segítségével írhatjuk fel x és y függvényében. Ezzel elérhetjük, hogy továbbra is csak két ismeretlenünk legyen. Látható, hogy σ kiesik az egyenletből. Hozzuk egyszerűbb alakra az egyenletet!

$$Y's = \frac{\frac{x \cdot y^2}{6} - \left[\frac{x \cdot y^2}{6} + \frac{b^3 \cdot x}{3y} - \frac{b^2 \cdot x}{2} \right]}{b \cdot x - \frac{b^2 \cdot x}{2y}}$$

Szorozzunk át a nevezővel, hogy megszabaduljunk az emeletes törttől!

$$\frac{-b^3 \cdot x}{3y} + \frac{b^2 \cdot x}{2} = Y's \cdot x \cdot b - \frac{b^2 \cdot x \cdot Y's}{2y}$$

A célunk, hogy y -t kifejezzük. Ehhez a következő lépésekben egyszerű egyenletrendezési műveleteket kell elvégeznünk. Ezek a lépések, úgy gondolom, nem szorulnak kommentálásra. Látható, hogy x , az egyik ismeretlen, kiesik az egyenletből. Ez megkönnyíti a számításainkat.

$$\frac{-b^2}{3y} + \frac{b}{2} = Y's - \frac{b \cdot Y's}{2y}$$

$$\frac{-b^2}{3} + \frac{b \cdot y}{2} = Y's \cdot y - \frac{b \cdot Y's}{2}$$

$$\frac{-b^2}{3} + \frac{b \cdot Y's}{2} = Y's \cdot y - \frac{b \cdot y}{2}$$

$$\frac{-b^2}{3} + \frac{b \cdot Y's}{2} = y \cdot \left(Y's - \frac{b}{2} \right)$$

$$y = \frac{\frac{-b^2}{3} + \frac{b \cdot Y's}{2}}{Y's - \frac{b}{2}} = \frac{\frac{2b^2 - 3b \cdot Y's}{6}}{\frac{b - 2Y's}{2}}$$

$$y = \frac{2b^2 - 3b \cdot Y's}{3b - 6Y's}$$

Ezzel kifejeztük az egyik ismeretlent, a nagy hasáb egyik oldalát. Most írjuk fel a súlypont X' koordinátájának a paraméteres megoldását is!

$$X's = \frac{Sy'}{V} = \frac{Sy' \text{ nagyhasáb} - Sy' \text{ kishasáb}}{V \text{ nagyhasáb} - V \text{ kishasáb}} = \frac{V \text{ nagyhasáb} \cdot t_n - V \text{ kishasáb} \cdot t_k}{V \text{ nagyhasáb} - V \text{ kishasáb}}$$

$$\frac{\sigma \cdot A \text{ nagyhasáb} \cdot t_n - \sigma \cdot A \text{ kishasáb} \cdot t_k}{\sigma \cdot A \text{ nagyhasáb} - \sigma \cdot A \text{ kishasáb}} = \frac{\frac{x \cdot y \cdot x}{2 \cdot 3} - \left[\frac{(y-b) \cdot \left(x - \frac{b \cdot x}{y}\right) \cdot \left(x - \frac{b \cdot x}{y}\right)}{2 \cdot 3} \right]}{\frac{x \cdot y}{2} - \left[\frac{(y-b) \cdot \left(x - \frac{b \cdot x}{y}\right)}{2} \right]}$$

Hozzuk egyszerűbb alakra az egyenleteket!

$$X's = \frac{\frac{x^2 \cdot y}{6} - \frac{y \cdot x^2 - 3 \cdot b \cdot x^2 + 3 \cdot b \cdot \frac{x^2 \cdot x^2}{y} - b \cdot \frac{x^3 \cdot x^2}{y^2}}{6}}{\frac{x \cdot y}{2} - \frac{y \cdot x - 2 \cdot b \cdot x + \frac{b^2 \cdot x}{y}}{2}}$$

$$X's = \frac{\frac{x^2 \cdot y}{6} - \frac{y \cdot x^2}{6} + \frac{3 \cdot b \cdot x^2}{6} - \frac{3 \cdot b^2 \cdot x^2}{6 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x^2}{6 \cdot y^2}}{\frac{x \cdot y}{2} - \frac{x \cdot y}{2} + b \cdot x - \frac{b^2 \cdot x}{2 \cdot y}}$$

$$X's = \frac{\frac{b \cdot x^2}{2} - \frac{b^2 \cdot x^2}{2 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x^2}{6 \cdot y^2}}{b \cdot x - \frac{b^2 \cdot x}{2 \cdot y}}$$

Szorozzunk át a nevezővel, és kezdjük el x-et kifejezni az egyenletetből!

$$\frac{b \cdot x^2}{2} - \frac{b^2 \cdot x^2}{2 \cdot y} + \frac{b^3 \cdot x^2}{6 \cdot y^2} = X's \cdot b \cdot x - \frac{X's \cdot b^2 \cdot x}{2 \cdot y}$$

$$\frac{b \cdot x^2 \cdot y^2}{2} - \frac{b^2 \cdot x^2 \cdot y}{2} + \frac{b^3 \cdot x^2}{6} = X's \cdot b \cdot x \cdot y^2 - \frac{X's \cdot b^2 \cdot x \cdot y}{2}$$

$$\frac{x \cdot y^2}{2} - \frac{b \cdot x \cdot y}{2} + \frac{b^2 \cdot x}{6} = X's \cdot y^2 - \frac{X's \cdot b \cdot y}{2}$$

$$x \cdot \left(y^2 - b \cdot y + \frac{b^2}{3} \right) = 2 \cdot X's \cdot y^2 - X's \cdot b \cdot y$$

$$x = \frac{2 \cdot X's \cdot y^2 - X's \cdot b \cdot y}{y^2 - b \cdot y + \frac{b^2}{3}}$$

Így kifejeztük az x oldalt, ami y függvényében változik. Helyettesítsük be a fent kifejezett y – t az egyenletbe!

$$x = \frac{2 \cdot X' \cdot s \cdot \left(\frac{4 \cdot b^4 - 12 \cdot b^3 \cdot Y' \cdot s + 9 \cdot b^2 \cdot Y'^2 \cdot s^2}{9 \cdot b^2 - 36 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 36 \cdot Y'^2 \cdot s^2} \right) - b \cdot X' \cdot s \cdot \left(\frac{2 \cdot b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s}{3 \cdot b - 6 \cdot Y' \cdot s} \right)}{\frac{4 \cdot b^4 - 12 \cdot b^3 \cdot Y' \cdot s + 9 \cdot b^2 \cdot Y'^2 \cdot s^2}{9 \cdot b^2 - 36 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 36 \cdot Y'^2 \cdot s^2} - b \cdot \left(\frac{2 \cdot b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s}{3 \cdot b - 6 \cdot Y' \cdot s} \right) + \frac{b^2}{3}}$$

$$x = \frac{\frac{8b^4 X's - 24b^3 Y's X's + 18b^2 Y'^2 s^2 X's - 6b^4 X's + 12b^3 X's Y' s + 9b^3 X's Y' s - 18b^2 X's Y' s^2}{9b^2 - 36b Y' s + 36 Y'^2 s^2}}{\frac{4b^4 - 12b^3 Y' s + 9b^2 Y'^2 s^2 - 6b^4 + 12b^3 Y' s + 9b^3 Y' s - 18b^2 Y' s^2}{9b^2 - 36b Y' s + 36 Y'^2 s^2} + \frac{b^2}{3}}$$

$$x = \frac{\frac{2 \cdot b^4 \cdot X' \cdot s - 3 \cdot b^3 \cdot X' \cdot s \cdot Y' \cdot s}{9 \cdot b^2 - 36 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 36 \cdot Y'^2 \cdot s^2}}{\frac{-2 \cdot b^4 + 9 \cdot b^3 \cdot Y' \cdot s - 9 \cdot b^2 \cdot Y'^2 \cdot s^2 + 3 \cdot b^4 - 12 \cdot b^3 \cdot Y' \cdot s + 12 \cdot b^2 \cdot Y'^2 \cdot s^2}{9 \cdot b^2 - 36 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 36 \cdot Y'^2 \cdot s^2}}$$

$$x = \frac{2 \cdot b^4 \cdot X' \cdot s - 3 \cdot b^3 \cdot X' \cdot s \cdot Y' \cdot s}{b^4 - 3 \cdot b^3 \cdot Y' \cdot s + 3 \cdot b^2 \cdot Y'^2 \cdot s^2}$$

$$x = \frac{2 \cdot b^2 \cdot X' \cdot s - 3 \cdot b \cdot X' \cdot s \cdot Y' \cdot s}{b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 3 \cdot Y'^2 \cdot s^2}$$

Tehát, felírtuk a nagy hasáb oldalait a dőféspont helyének függvényében. Ezzel a két képlettel megoldhatunk egy számpéldát, ha a nyomott zóna négy oldalú. A rúd teherbírásának ismeretéhez a feszültségidom térfogatát kell kiszámolnunk. Ezt már a levezetés elején felírtuk, a súlypontszámításnál a nevezőben szerepelt.

$$V = \frac{\sigma \cdot x \cdot y}{2} - \left[\frac{(y-b) \cdot \left(x - \frac{b \cdot x}{y} \right) \cdot \sigma}{2} \right]$$

$$V = \sigma \cdot b \cdot x \cdot \left(1 - \frac{b}{2 \cdot y} \right)$$

Ha ezeket a képleteket behelyettesítünk, akkor már könnyen méretezhetjük a szerkezeti elemet. Most térjünk át a görbe leírására. Ennél az eseteknél az x változót konstans értéként kezeljük. Azért, mert akkor helyezkedik el a dőféspont a görbén, amikor x=a. Ez, hogy x már nem ismeretlen alapvető szüksége annak, hogy fel tudjuk írni a görbe egyenletét. Az y oldal továbbra is változó. A másik ismeretlen a függvény értéke, X's, lesz. Ha ezt ki tudjuk fejezni, akkor azzal megadjuk a függvény paraméteres hozzárendelési szabályát.

$$x = \frac{2 \cdot b^2 \cdot X' \cdot s - 3 \cdot b \cdot X' \cdot s \cdot Y' \cdot s}{b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 3 \cdot Y'^2 \cdot s^2} = a$$

$$X' \cdot s (2 \cdot b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s) = a \cdot (b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 3 \cdot Y'^2 \cdot s^2)$$

$$X' \cdot s = \frac{a \cdot (b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s + 3 \cdot Y'^2 \cdot s^2)}{2 \cdot b^2 - 3 \cdot b \cdot Y' \cdot s}$$

Ezzel fel is írtuk a görbe egyenletét!

Határozzuk meg a nyomott rúd képlékeny határerejét !

Bemenő adatok

$$b = 1,2 \text{ m}$$

$$a = 1,0 \text{ m}$$

$$\sigma = 4 \text{ N/mm}^2$$

$$X's = 0,2 \text{ m}$$

$$Y's = 0,45 \text{ m}$$

Első lépésben számoljuk ki a feszültségi test y méretét. Ezt a következő összefüggés segítségével tehetjük meg.

$$y = \frac{2b^2 - 3b \cdot Y's}{3b - 6Y's}$$

Helyettesítsünk be a képletbe, majd végezzük el a számítást !

$$y = \frac{2 \cdot 1,2^2 - 3 \cdot 1,2 \cdot 0,45}{3 \cdot 1,2 - 6 \cdot 0,45} = 1,4 \text{ m}$$

Tehát, a hasáb y oldala 1,4 m hosszú.

Következő lépésben határozzuk meg a feszültségi test x méretét !

$$x = \frac{2 \cdot b^2 \cdot X's - 3 \cdot b \cdot X's \cdot Y's}{b^2 - 3 \cdot b \cdot Y's + 3 \cdot Y's^2}$$

Helyettesítsünk be a képletbe, és számoljuk ki az eredményt !

$$x = \frac{2 \cdot 1,2^2 \cdot 0,2 - 3 \cdot 1,2 \cdot 0,2 \cdot 0,45}{1,2^2 - 3 \cdot 1,2 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,45^2} = 0,59 \text{ m}$$

E két oldal méretének ismeretében, már meghatározhatjuk a szerkezet teherbírását.

$$V = \sigma \cdot b \cdot x \cdot \left(1 - \frac{b}{2 \cdot y}\right)$$

Helyettesítsünk be a képletbe, majd számoljuk ki a végeredményt !

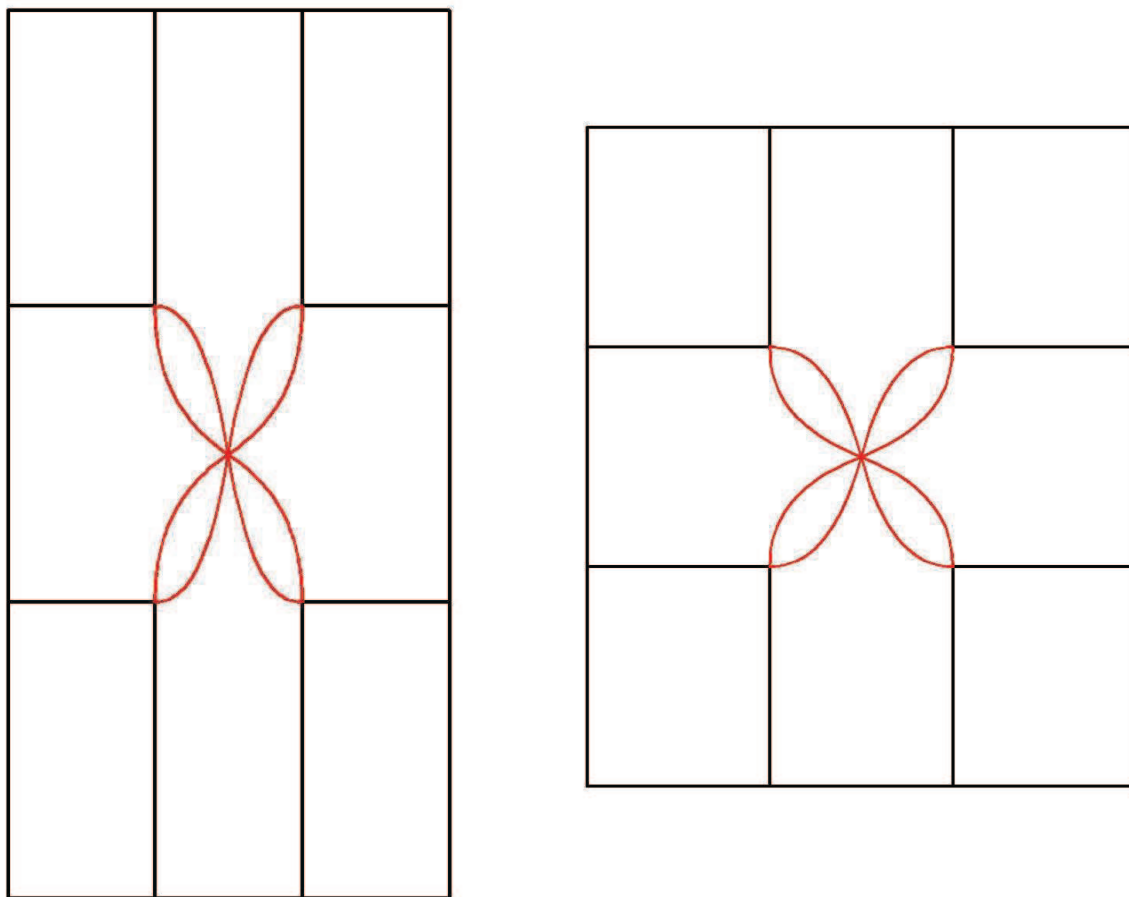
$$V = 4000 \cdot 1,2 \cdot 0,59 \cdot \left(1 - \frac{1,2}{2 \cdot 1,4}\right) = 1618,29 \text{ kN}$$

Tehát, a nyomott rúd képlékeny határereje 1618,29 kN

4.3.4.3. A levezetés értékelése

A kapott képletek alkalmazásával könnyen és gyorsan megoldhatjuk a számpéldákat, és méretezhetjük a szerkezeteket. Egyszerűen meg tudjuk szerkeszteni azt a feszültségi testet, mely központos a nyomóerőre. A test pontos méreteinek ismeretében gond nélkül ki tudjuk számolni a feszültségidom köbtartalmát. Ha az anyag határfeszültségével helyettesítünk be a képletbe, akkor kiszámolhatjuk a külpontosan nyomott rúd képlékeny határerejét. Ezek a képletek a négy oldalú nyomott zóna esetében használhatóak. Amikor szembesülünk a megoldandó feladattal, még nem tudjuk eldönteni, hogy melyik eset szerint kell eljárni. Nagyon hasznos lenne, ha rögtön egy gyors számítással meg tudnánk ezt állapítani. A görbe egyenletének ismerete ezt lehetővé teszi.

Ezek a képletek mindenképpen hasznosak lehetnek, persze csak akkor, ha helyesek. Ugyanazokat az ellenőrzéseket végeztem el, melyeket a rugalmas esetről is. Mindenekelőtt a kapott eredményeket visszahelyettesítettem az egyenlet eredeti formájába. Ez azonossághoz vezet, mely azt jelenti, hogy az algebrai hibákat és elírásokat kizárhatjuk. Fontos ellenőrzési pont az is, hogy a képletek által leírt görbe hihető alakzatot mutat-e. Ezt pusztán kíváncsiságból is rögtön elvégeztem, újfent a számítógépes táblázatkezelő program segítségével. A több száz számpélda eredményeként kapott görbék az 52. ábrán láthatóak.



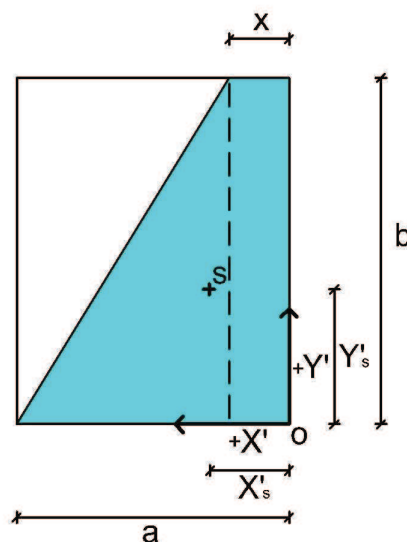
52. ábra

Azt a virágsziromra emlékeztető alakzatot kaptuk a képletek alkalmazásával, amit vártunk. Ezek az ellenőrzések azt mutatják, hogy jó eséllyel helyesek a levezetéseink, azonban amíg egy másik módszerrel nem igazoltuk az egyezést, addig nem lehetünk biztosak benne, hogy a kapott képleteink használhatóak. Ezért a képlékeny állapotra vonatkozó levezetéseimet is két különféle módszerrel végeztem el.

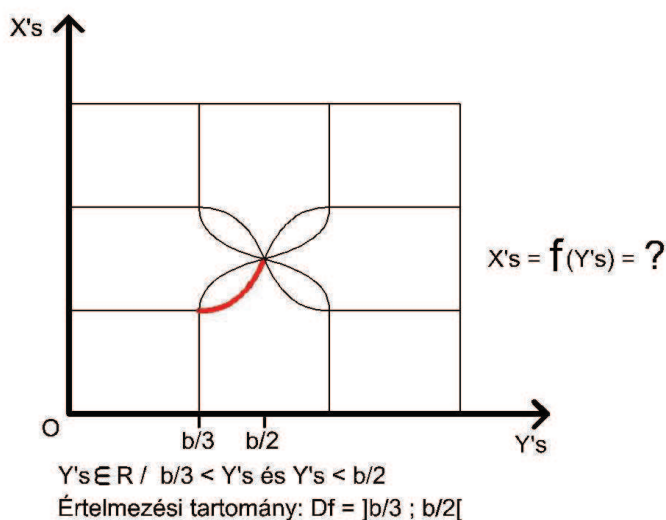
4.3.4.4. Az ellenőrző levezetés

Ezúttal is, az ellenőrzés során már nem általános helyzettel kezdjük a levezetést, hanem olyan feszültségi testet veszünk fel, mely akkor alakul ki, ha a dőfspont a görbén helyezkedik el. Továbbá kihasználjuk, hogy a feszültségeloszlás egyenletes, és már csak síkidomok súlypontszámításával foglalkozunk. Az előbb a feszültségidomot a két hasáb különbségével számoltuk. Most más megközelítésből nézzük. A nyomott zóna ilyenkor egy trapéz. Ez az 53. ábrán is látható. Ennek a síkidomnak már nem nehéz a súlypontszámítása. A nyomott zónát felbonthatjuk egy téglalapra, és egy derékszögű háromszögre, úgy, hogy egyedül az ábrán jelölt „x” méret lesz az egyedüli ismeretlen.

Előzetes terveink szerint, könnyedén kifejezhetjük majd a függvény értékét, hiszen ismét két egyenletünk lesz amiatt, hogy mindkét irányban felírjuk a súlypontszámítást. Első lépésben majd „x”-t kell kifejeznünk, és ha már ismerni fogjuk, hogy minek függvényében változik, akkor áttérhetünk a görbe egyenletének leírására, mely során ismét a függvény értékét tekintjük ismeretlennek. A görbét ugyanúgy fogjuk kezelni, mint korábban. A levezetések során az 53. és 54. ábrán látható jelöléseket használjuk.



53. ábra



54. ábra

Először az y irányban írjuk fel a súlypontszámítást, mert ebben az egyenletben még csak egy ismeretlen, az x szerepel. A trapéz alakú nyomott zónát egy háromszögre, és egy téglalapra bontottam fel.

$$Y's = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{\frac{x \cdot b \cdot b}{2} + \frac{(a-x) \cdot b \cdot b}{2 \cdot 3}}{x \cdot b + \frac{(a-x) \cdot b}{2}}$$

$$Y's = \frac{\frac{x \cdot b^2}{3} + \frac{a \cdot b^2}{6}}{\frac{x \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2}}$$

$$\frac{x \cdot b^2}{3} + \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{Y's \cdot x \cdot b}{2} + \frac{Y's \cdot a \cdot b}{2}$$

$$\frac{x \cdot b^2}{3} - \frac{Y's \cdot x \cdot b}{2} = \frac{Y's \cdot a \cdot b}{2} - \frac{a \cdot b^2}{6}$$

$$2 \cdot x \cdot b^2 - 3 \cdot Y's \cdot x \cdot b = 3 \cdot Y's \cdot a \cdot b - a \cdot b^2$$

$$x \cdot (2 \cdot b^2 - 3 \cdot Y's \cdot b) = 3 \cdot Y's \cdot a \cdot b - a \cdot b^2$$

$$x = \frac{3 \cdot Y's \cdot a \cdot b - a \cdot b^2}{2 \cdot b^2 - 3 \cdot Y's \cdot b}$$

$$x = \frac{3 \cdot Y's \cdot a - a \cdot b}{2 \cdot b - 3 \cdot Y's}$$

Kifejeztük az egyik változót, ami egy fontos részeredmény. Most írjuk fel a súlypontszámítást X irányban is!

$$X's = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{\frac{x \cdot b \cdot x}{2} + \left[\frac{(a-x) \cdot b}{2} \cdot \left(x + \frac{a-x}{3} \right) \right]}{x \cdot b + \frac{(a-x) \cdot b}{2}}$$

$$X's = \frac{\frac{x^2 \cdot b}{2} + \left(\frac{a \cdot b}{2} - \frac{x \cdot b}{2} \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{3} + \frac{a}{3} \right)}{\frac{x \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2}}$$

$$X's = \frac{\frac{x^2 \cdot b}{6} + \frac{a \cdot b \cdot x}{6} + \frac{a^2 \cdot b}{6}}{\frac{x \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2}}$$

$$\frac{x^2 \cdot b}{3} + \frac{a \cdot b \cdot x}{3} + \frac{a^2 \cdot b}{3} = X's \cdot x \cdot b + X's \cdot a \cdot b$$

$$\frac{x^2 \cdot b}{3} + \frac{a \cdot b \cdot x}{3} - X's \cdot x \cdot b = X's \cdot a \cdot b - \frac{a^2 \cdot b}{3}$$

Ebbe az egyenletbe x helyére helyettesítsük be az előbb kapott kifejezést!

$$\frac{\left(\frac{3 \cdot Y's \cdot a - a \cdot b}{2 \cdot b - 3 \cdot Y's}\right)^2 \cdot b}{3} + \frac{a \cdot b \cdot \left(\frac{3 \cdot Y's \cdot a - a \cdot b}{2 \cdot b - 3 \cdot Y's}\right)}{3} - \left(\frac{3 \cdot Y's \cdot a - a \cdot b}{2 \cdot b - 3 \cdot Y's}\right) \cdot b \cdot X's = X's \cdot a \cdot b - \frac{a^2 \cdot b}{3}$$

Hozzuk közös nevezőre, majd összegezzük az egyenlet bal oldalát!

$$\frac{3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot Y's - a^2 \cdot b^3 - 27 \cdot a \cdot b^2 \cdot X's \cdot Y's + 6 \cdot a \cdot b^3 \cdot X's + 27 \cdot a \cdot b \cdot X's \cdot Y's^2}{12 \cdot b^2 - 36 \cdot b \cdot Y's + 27 \cdot Y's^2} = X's \cdot a \cdot b - \frac{a^2 \cdot b}{3}$$

$$3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot Y's - a^2 \cdot b^3 - 27 \cdot a \cdot b^2 \cdot X's \cdot Y's + 6 \cdot a \cdot b^3 \cdot X's + 27 \cdot a \cdot b \cdot X's \cdot Y's^2 \Rightarrow$$

$$\rightarrow = 12 \cdot a \cdot b^3 \cdot X's - 36 \cdot a \cdot b^2 \cdot X's \cdot Y's + 27 \cdot a \cdot b \cdot X's \cdot Y's^2 - 4 \cdot a^2 \cdot b^3 + 12 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot Y's - 9 \cdot a^2 \cdot b \cdot Y's^2$$

Rendezzük nullára az egyenletet, és összegezzük az egyenmű tagokat!

$$-9 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot Y's + 3 \cdot a^2 \cdot b^3 + 9 \cdot a \cdot b^2 \cdot X's \cdot Y's - 6 \cdot a \cdot b^3 \cdot X's + 9 \cdot a^2 \cdot b \cdot Y's^2 = 0$$

$$9 \cdot a^2 \cdot b \cdot Y's^2 - 9 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot Y's + 3 \cdot a^2 \cdot b^3 = -9 \cdot a \cdot b^2 \cdot X's \cdot Y's + 6 \cdot a \cdot b^3 \cdot X's$$

Az egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy:

$$3 \cdot a \cdot Y's^2 + a \cdot b^2 - 3 \cdot a \cdot b \cdot Y's = 2 \cdot b^2 \cdot X's - 3 \cdot b \cdot X's \cdot Y's$$

$$a \cdot (3 \cdot Y's^2 + b^2 - 3 \cdot b \cdot Y's) = X's \cdot (2 \cdot b^2 - 3 \cdot b \cdot Y's)$$

$$X's = \frac{a \cdot (3 \cdot Y's^2 - 3 \cdot b \cdot Y's + b^2)}{2 \cdot b^2 - 3 \cdot b \cdot Y's}$$

Tehát, ugyanazt a függvényt kapjuk mint, a másik módszerrel. A rugalmas esettel ellentétben, most paraméteresen is kimutattuk az egyezést. Ez az egyszerűbb felírásnak a következménye, amivel a képlekeny állapot jár. Polinóm osztást végezhetünk, hátha kezelhetőbb eredményre jutunk.

$$(3 \cdot Y's^2 \cdot a - 3 \cdot a \cdot b \cdot Y's + a \cdot b^2) \div (-3 \cdot b \cdot Y's + 2 \cdot b^2) = \frac{-a \cdot Y's}{b}$$

$$-(3 \cdot a \cdot Y's^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot Y's)$$

$$(-a \cdot b \cdot Y's + a \cdot b^2) \div (-3 \cdot b \cdot Y's + 2 \cdot b^2) = \frac{-a \cdot Y's}{b} + \frac{a}{3}$$

$$-(-a \cdot b \cdot Y's + \frac{2}{3} a \cdot b^2)$$

$$\frac{a \cdot b^2}{3} \div (-3 \cdot b \cdot Y's + 2 \cdot b^2) = \frac{-a \cdot Y's}{b} + \frac{a}{3}$$

$$X's = \frac{-a \cdot Y's}{b} + \frac{a}{3} + \frac{a \cdot b^2}{-9 \cdot b \cdot Y's + 6 \cdot b^2}$$

Ezzel megadtuk a függvény hozzárendelési szabályát.

4.3.4.5. Az ellenőrző levezetés értékelése

Látható, hogy az ellenőrzésből is ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az előbbi levezetésből. Itt szembeötlőbb az egyezés a két módszer között, mint amit a rugalmas állapotnál mutattunk be, ugyanis ezúttal paraméteresen is megegyezik a két végeredmény. A rugalmas esetben, a feszültségi test bonyolultságából adódóan, olyan végeredményeket kaptunk, melyek további paraméteres műveletekre nem alkalmasak. A képletek nem egyeztek, hiszen teljesen más változó függvényében írtuk fel az egyenleteket, így a számpéldák győztek meg arról, hogy egyezik a két levezetés.

Képlékeny állapotban ennél könnyebb dolgunk volt. A feszültségi test sokkal kezelhetőbb alakja, jelentősen egyszerűbb számításokhoz vezetett. Itt is más változó függvényében írtuk fel a problémát, viszont olyan végeredményeket kaptunk, melyekkel gond nélkül végezhetünk további paraméteres számításokat. Ezt kihasználva a két különböző változó egymásból való kifejezésével, megoldható volt, hogy ugyan abban a paraméteres formában írjuk le a két végeredményt. Ez természetesen azt jelenti, hogy makulátlanul ugyanazt az eredményt kapjuk, mind a két módszerrel.

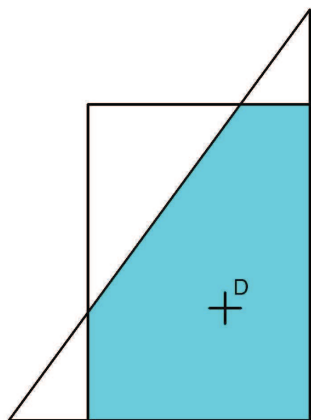
Talán könnyebb volt elvégezni az ellenőrző levezetést, hiszen ott már csak olyan esetet tárgyaltunk, amikor a dőféspont a görbén helyezkedik el. Ettől függetlenül fontos az első módszer is. Nem csupán ellenőrzési szempontból volt hasznos, hanem azoknak a levezetésnek során olyan képletekre jutottunk, melyek lehetővé teszik a szerkezetek méretezését négy oldalú nyomott zóna esetében.

Végeredményben ezen ellenőrző számítások elvégzése után is meggyőződhattunk arról, hogy helyes eredményeket kaptunk.

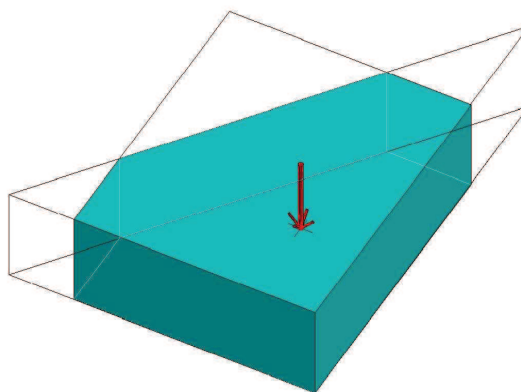
4.3.5. Az öt oldalú nyomott zóna

Amikor a dőféspont hatásvonala a görbék által határolt területen éri a keresztmetszeti felületet, a nyomott zóna öt oldalú lesz. Ilyenkor már nemcsak egy irányban lóg le a kialakuló nagy hasáb a keresztmetszetről, mint ahogy a négy oldalú nyomott zóna esetében láttunk, hanem két irányban, tehát a feszültségi test egy kétszeresen csonkolt egyenes hasáb lesz. Az öt oldalú nyomott zóna felülnézetből az 55., míg a feszültségi test axonometrikus rajza az 56. ábrán látható.

Látható, hogy a feszültségi test térfogatát úgy kaphatjuk meg, hogy a nagy hasábból kivonjuk a két kicsit. Ezen számítások részleteit most nem tárgyaljuk, ugyanis a görbe analitikus leírásához nem volt rá szükségünk. Ez annak volt köszönhető, hogy a négy és ötoldalú nyomott zónák határhelyzeténél, még minden szempontból helyesek voltak azok az egyenletek, amelyeket a négy oldalú nyomott zóna eseténél fejeztünk ki.



55. ábra

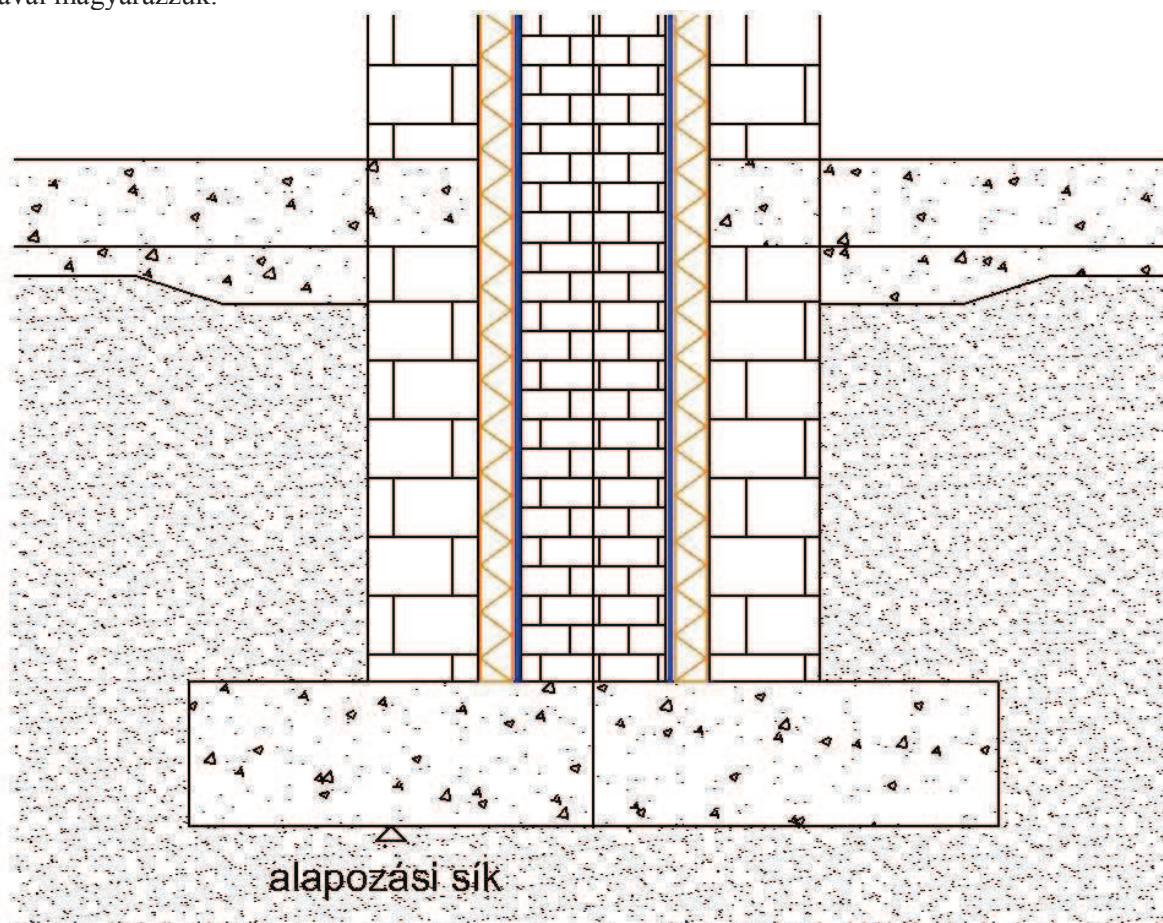


56. ábra

5. Alkalmazások a műszaki gyakorlatban

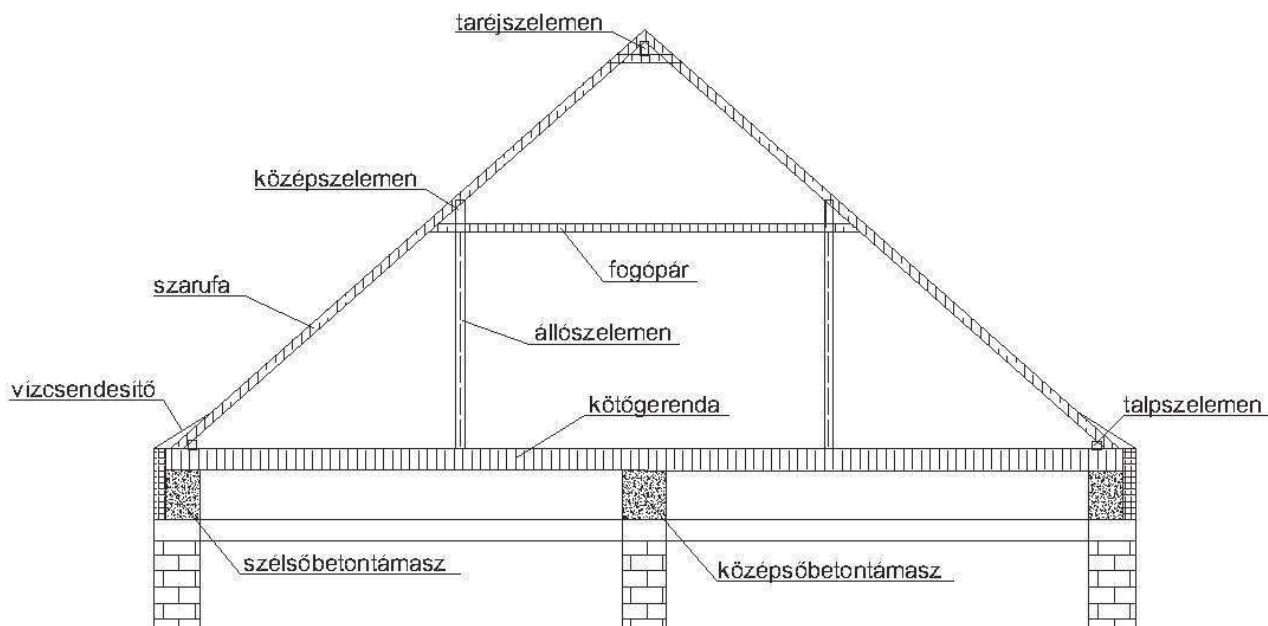
Most mutatunk néhány jellegzetes példát arra, hogy mely esetekben gyakori a húzószilárdság nélküli, zömök rudak külpontos nyomása.

Leggyakrabban akkor fordulnak elő ezek az esetek, amikor ezek a rudak alaptestek. Ezek a pillér alapok általában vasalatlan betonból készülnek, tehát húzófeszültség felvételére nem alkalmasak, és egyértelműen zömök szerkezeti elemek. Amikor megtehetjük, akkor központosan terheljük le ezeket az alaptesteket. Ilyenkor a környező tényezőktől függ, hogy külpontossággal számolunk-e. Amikor jelentős vízszintes teher, például szélnyomás hat a felmenő falra, akkor a horizontális és vertikális erőkből vektorháromszög képzésével állapíthatjuk meg a terhek eredőerejének a helyét. Amikor az alaptestet terhelő fal helyzete központos az alaptestre, akkor is gyakran külpontossággal kell számolnunk. Ezen felül a valós tervezői munkában rengeteg körülményt kell figyelembe venni. Hogy az általunk tervezett szerkezet minden téren megfeleljen az elvárásoknak, gyakran olyan megoldásokhoz kell folyamodni, melyek eltérnek a leggyakoribb, és sok szempontból legkedvezőbb módszertől. Egy ilyen esetre mutatnék egy jellemző példát. Amikor egy épület alapozásánál, egy már meglévő szomszédos épület mellé kell elhelyezni a pillér alapokat, akkor azt gyakran külpontosan tesszük. Ez azért van, mert a két épület felmenő falai között nem szeretnénk túl nagy rést, és ezzel egy sikátort hagyni. Az alaptest méretét az esetleges süllyedés miatt nem csökkenthetjük, ezért kénytelenek vagyunk a falat az alaptestre külpontosan elhelyezni. Ezt a helyzetet az 57. ábrával magyarázzuk.



57. ábra

A magasépítésben is lehet tipikus példát találni erre a fajta igénybevételre. Akkor is ilyen esettel találjuk szemben magunkat, amikor kötőgerendák alatti megtámasztó elemek méretezését kell elvégeznünk. A leggyakoribb eset az, amikor a kötőgerenda fából készül, és egy zömök beton, vagy falazott szerkezeti elemre támaszkodik. Erre az 58. ábrán láthatunk egy példát.



58. ábra

A szélső megtámasztó elemek természetesen külpontos nyomásnak vannak kitéve. A középső támaszokról elképzelhető, hogy rendeltetésüket tekintve központos nyomásra méretezhetjük őket, de egy esetleges felújításnál, mely a fa kötőgerendáknál gyakran előfordul, külpontos nyomás is felléphet. Egy statikusnak minden eshetőségre gondolnia kell, és ebben az esetben szintén a korábban bemutatott összefüggéseket lehet alkalmazni.

6. Irodalomjegyzék

- [1] Dr. Bárczi István: Teherhordó Szerkezetek Zsebkönyve Budapest, Műszaki könyvkiadó, 1984.
- [2] Dr. Bárczi István- Falu Gyula- Dr. Zalka Károly: Mechanika II. (Szilárdságtan) Budapest, Tankönyvkiadó, 1989.
- [3] Becker Sándor: Szilárdságtan II. Budapest, Műegyetemi kiadó, 1999.
- [4] Dr. Cholnoky Tibor: Mechanika II. Budapest, Tankönyvkiadó, 1966.
- [5] Muttnyánszky Ádám: Szilárdságtan Budapest, Tankönyvkiadó, 1981.
- [6] Dr. Palotás László: Mérnöki kézikönyv 1. kötet Budapest, Műszaki könyvkiadó, 1955.
- [7] Dr. Palotás László: Mérnöki kézikönyv 3. kötet Budapest, Műszaki könyvkiadó, 1959.
- [8] Dr. Pelikán József: Szilárdságtan Budapest, Tankönyvkiadó, 1972.