

DOBOK ÉS MEMBRÁNOK SPEKTRUMÁNAK ELMÉLETI VIZSGÁLATA

TDK dolgozat

NAGY ALEXANDRA
Fizika BSc.

Témavezető:
TŐKE CSABA, DOCENS
Budapesti Műszaki Egyetem
Természettudományi Kar
Elméleti Fizika Tanszék

Pécsi Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Fizikai Intézet
2012

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ.....	3
1. A DOBOKRÓL, VALAMINT HANGZÁSUKRÓL.....	4
1.1 A dobok általános felépítése	4
2. MODELLALKOTÁS.....	5
2.1 Az ideális membrán	5
2.1.1 A téglalap alakú membrán.....	5
2.1.2 Az ideális, kör alakú membrán.....	6
2.1.3 A módusok	7
2.1.4 A módusok vizsgálata.....	9
2.2 Az elhanyagolt effektusok	10
3. MEMBRÁNMODELLEK.....	11
3.1 A középpontban lyukas membrán	11
3.2 A levegő hatása az üstdob rezgéseire	12
4. NEM KONCENTRIKUS PERFORÁCIÓ HATÁSAI.....	15
4.1 Hullám szóródása két dimenzióban	15
4.2 A spektrum vizsgálata	17
4.2.1 Zérushelyek keresése	17
4.2.2 Sajátrezgések	20
4.3 Konklúzió.....	25
5. A KÉTMEMBRÁNOS DOB REZGÉSEI.....	26
5.1 A mozgásegyenletek	26
5.2 A sajátfrekvenciák vizsgálata.....	30
6. KONKLÚZIÓ, KITEKINTÉS.....	34
IRODALOMJEGYZÉK	35

ELŐSZÓ

A rugalmas membránok vizsgálata különböző feltétek mellett, igen alapvető probléma. A membrán rezgését a Helmholtz-egyenlet írja le, melyet a fizika más ágaiban is gyakran alkalmazunk. Ebben a dolgozatban először a dobok alapvető elemeit fogom bemutatni, majd kitérek azokra az effektusokra, melyeket megfontolandó figyelembe venni az elméleti modellek felállításánál. Emellett megemlítem azokat a legfontosabb kísérleti elrendezéseket, amelyekkel megvizsgálható a spektrum változása, és így tesztelhetőek velük az elméleti számítások.

Ezután azt a két rendszert mutatom be röviden, melyet az irodalomban ugyan már tárgyaltak, azonban az általam vizsgált probléma alapjai. Először a membrán kávéjával nem koncentrikusan elhelyezkedő lyukkal rendelkező membrán spektrumának változását fogom vizsgálni a perforáció méret- és helyzetváltozásának függvényében. A modellben a membrán vákuumban helyezkedik el, illetve nem rendelkezik dobtesttel. A lyuk peremén a Neumann-, a membrán peremén pedig a Dirichlet-határfeltételt illeszttem, ami annak felel meg, hogy a belső perem nem rögzített, a külső pedig igen. A másik probléma, amit elemezni fogok a kétfenekű dob esete. Ekkor a dobtest mindkét végén membrán helyezkedik el, valamint a dobtesten belül és kívül is levegő helyezkedik el, így a rezgések csatolódnak.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretnék köszönetet mondani önzetlen segítségéért témavezetőmnek, dr. Tőke Csabának, aki érdekes témafelvetéseivel és a kérdéseimre adott körültekintő válaszaival, valamint a kézirat végső formájának átolvasásával és javításával segítette munkámat.

1. A DOBOKRÓL, VALAMINT HANGZÁSUKRÓL

A dolgozatban a lyukas membrán, valamint a kétfedelű dob sajátrezgéseit fogjuk vizsgálni, azonban ahhoz, hogy ezt megtehessük, legelőször a dobok alapvető felépítését kell megismerni. Azokat mutatom be, melyek modellezése reális cél lehet.

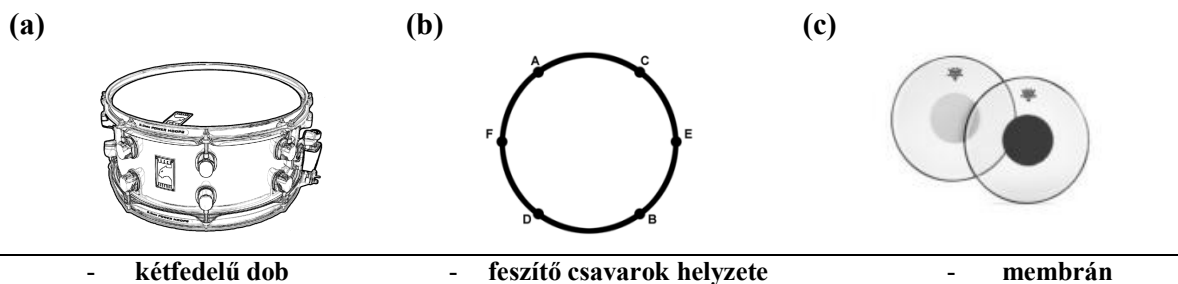
1.1 A dobok általános felépítése

A dob leggyakrabban egy kör keresztmetszetű üreges test, melynek egyik, vagy akár mindkét felére membránt feszítenek. Bármely dob két legszembevetőbb, egyben alapvető eleme a dobbőr, illetve a dobtest. A hangszer leginkább dobverővel szólaltatják meg, a lényeg, hogy az ütést a bőrről, vagy a káván végezzük el (a dobbőr kerete).

A membrán rögzítésére, illetve megfeszítésére sokféle módszert alkalmaznak. A leggyakoribb, hogy a hártya peremét először egy fém keretre tekerik fel (káva), majd ezt csavarozzák oda testhez. Így a membrán feszességét ezen csavarok segítségével lehet állítani. A dobtest, illetve a dobbőr anyaga sokféle lehet, azonban a modell felállításánál az anyagi különbségeket nem vesszük figyelembe. A dobtest rezgéseit elhanyagoljuk, valamint a számításokban a membrán paraméterei közül csak a felületi tömegeloszlás és a megfeszítettség jelenik meg.

A sípoknál és húroknál a felhangok az alaphang egész számú többszörösei, más szóval a felhangok az alaphang felharmonikusai. Az alaphanggal egyidejűleg általában a felharmonikusok is fellépnek, ezek adják a hang színezetét. A dob felhangjai nem harmonikusak, az igen sok és közel megegyező intenzitású felhang folytán, melyek gyorsan lecsengenek nincs meghatározott hangmagasságuk, inkább „semleges” hangúak.

A dob felépítése az első ábrán látható /1.1 ábra/ :



1.1 ábra

2. MODELLALKOTÁS

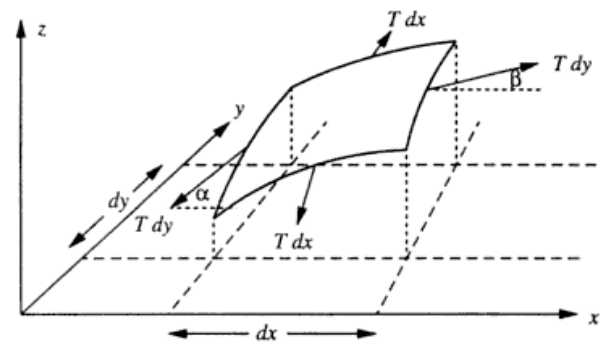
Az előző fejezetben a legegyszerűbb dobok felépítését mutattam be. Ebben a szakaszban először a membrán kezelésének legegyszerűbb modelljét, az ideális membrán modellt fogom ismertetni, majd megvizsgálom, hogy melyek azok az effektusok, melyek elhanyagolása nagyban befolyásolja a kapott eredményt.

2.1 Az ideális membrán

Az ideális membrán egy keret mentén kifeszített vékony hártya, melynél nem vesszük figyelembe az egyenetlen feszítettséget, a keret, illetve a dobtest rezgéseit, a membrán anyagának egyenetlenségét, valamint a levegő nyomásának és rezgésének hatását.

2.1.1 A téglalap alakú membrán

Feltesszük, hogy a membrán az $x - y$ síkban van kifeszítve, valamint nyugalmi állapotban a feszültség mindenhol állandó T érték. A számolás során a transzverzális rezgéseket vizsgáljuk, az ezekhez tartozó sajátrezgéseket és sajátfrekvenciákat szeretnénk megkapni. Ez annyit jelent, hogy a kissé kimozdított membrán egységnyi felületelemére ható erők eredőjének csak z komponensét vesszük



Az egységnyi membránelem kitérése miatt ébredő feszültségek

2.1 ábra

figyelembe. A differenciálegyenlet meghatározásához egy görbült, négyszögletes membrán elemet tekintünk, melyre a feszültség miatt erők fognak hatni, ezek eredője a visszatérítő erő.

A mozgásegyenlet a fent vázolt kiindulási helyzetből egyszerűen levezethető. A megoldás lépéseit nem részletezem, mivel a végrehajtás menete az irodalomban megtalálható (pl. [1,2]). A membrán pontjainak kitérés – idő függvénye a következő hullámegyenletet elégíti ki:

$$(2.1.1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = c^2 \Delta \xi$$

ahol σ a felületi tömegeloszlás (mértékegysége $[\text{kg}/\text{m}^2]$). A fenti egyenlet akkor oldható meg egyszerűen, ha a membrán téglalap alakú. A keresett ξ kitérés függvény felírható, mint a módusok súlyozott összege (ld. [1]):

$$(2.1.2) \quad \xi = \sum_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} (A_{mn} \cos 2\pi\nu_{mn}t + B_{mn} \sin 2\pi\nu_{mn}t)$$

$$\nu_{mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$$

mely egyenletben L_x, L_y a téglalap alakú membrán két oldala. A peremfeltételek illesztése meghatározza a sajátfrekvenciákat, az A_{mn} , illetve B_{mn} együtthatók pedig a kezdeti feltételekből határozhatóak meg.

2.1.2 Az ideális, kör alakú membrán

Egy kör alakú membrán leírásánál - tekintettel a rendszer szimmetriájára - a megoldást Descartes-koordináták helyett polárkoordinátákban célszerű keresni. Tehát váltsunk az eredeti koordinátákról polárkoordinátákra:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow r \cos \varphi \\ y &\rightarrow r \sin \varphi \end{aligned}$$

Ekkor a Laplace-operátor polárkoordinátás alakját felhasználva a (2.1.1)-es egyenlet a következő alakra módosul:

$$(2.1.3) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right)$$

Ha az időben periodikus megoldásokra szorítkozunk: $\xi(t, r, \varphi) = U(r, \varphi) \cdot e^{i\omega t}$, akkor a térfüggést leíró $U(r, \varphi)$ függvényre az alábbi *Helmholtz*-egyenletet kapjuk:

$$(2.1.4) \quad (\Delta + k^2) \cdot U(r, \varphi) = 0$$

ahol $k = \omega/c$. Tekintettel az origó körüli forgásszimmetriára¹, a módusokat az $U(r, \varphi) = R(r) \cdot e^{im\varphi}$ alakban érdemes keresni.

¹: A szimmetria felhasználásának kifejtése a 4.1 pontban található

Célszerű dimenziótlan mennyiségeket használni, ezért bevezetve az $y = \omega r/c$ változót, az $R(y)$ függvényre a matematikában ismert *Bessel-féle* differenciálegyenletet kapjuk:

$$(2.1.5) \quad y^2 R'' + y R' + (y^2 - m^2) R = 0$$

Ennek két független megoldása a J_m elsőfajú és Y_m másodfajú Bessel-függvény. Az általános megoldást ezek lineáris kombinációjával adhatjuk meg.

$$(2.1.6) \quad U(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [a_m J_m(kr) + b_m Y_m(kr)] \cdot e^{im\varphi}$$

Ideális membrán esetén, mivel $Y_m(x)$ megoldás az origóban szinguláris, ki kell zárunk. Az $U(r, \varphi)$ egyenletre a membrán pereménél a Dirichlet-féle határfeltételt illesztve, megkapjuk a kitérésmezőt:

$$(2.1.7) \quad a) \quad \xi_{mn} = e^{i\omega t} \cdot e^{im\varphi} \cdot J_m\left(\frac{\omega r}{c}\right)$$

$$b) \quad \frac{\omega R}{c} = x_{mn}$$

ahol x_{mn} a J_m Bessel-függvény n -edik zérushelye, R a membrán sugara, m a csomóátmérők, n pedig a csomókörök száma.

2.1.3 A módusok

A dob módusait aszerint azonosítjuk, hogy mennyi csomóátmérőt, illetve csomókört tartalmaznak. A sajátrezgések vizsgálatánál kitűnik, hogy egyes módusok hasonló viselkedést mutatnak, mint a monopólus, dipólus, stb. Ilyen sajátfrekvencia a (0,1)-es, (1,1)-es, illetve (2,1)-es módus, melyek rendre úgy sugároznak hanghullámokat, mint egy mono-, egy di-, és egy kvadrupólus forrás. [5]

Az egyes sajátrezgések a csomóátmérők számától függően különböző elforgatási szimmetriákat mutatnak:

- Azok a módusok, melyek csak csomókört tartalmaznak, tetszőleges szöggel forgathatóak
- Minden módusra igaz, hogy a $2\pi/m$ szögű forgatás önmagába viszi át.

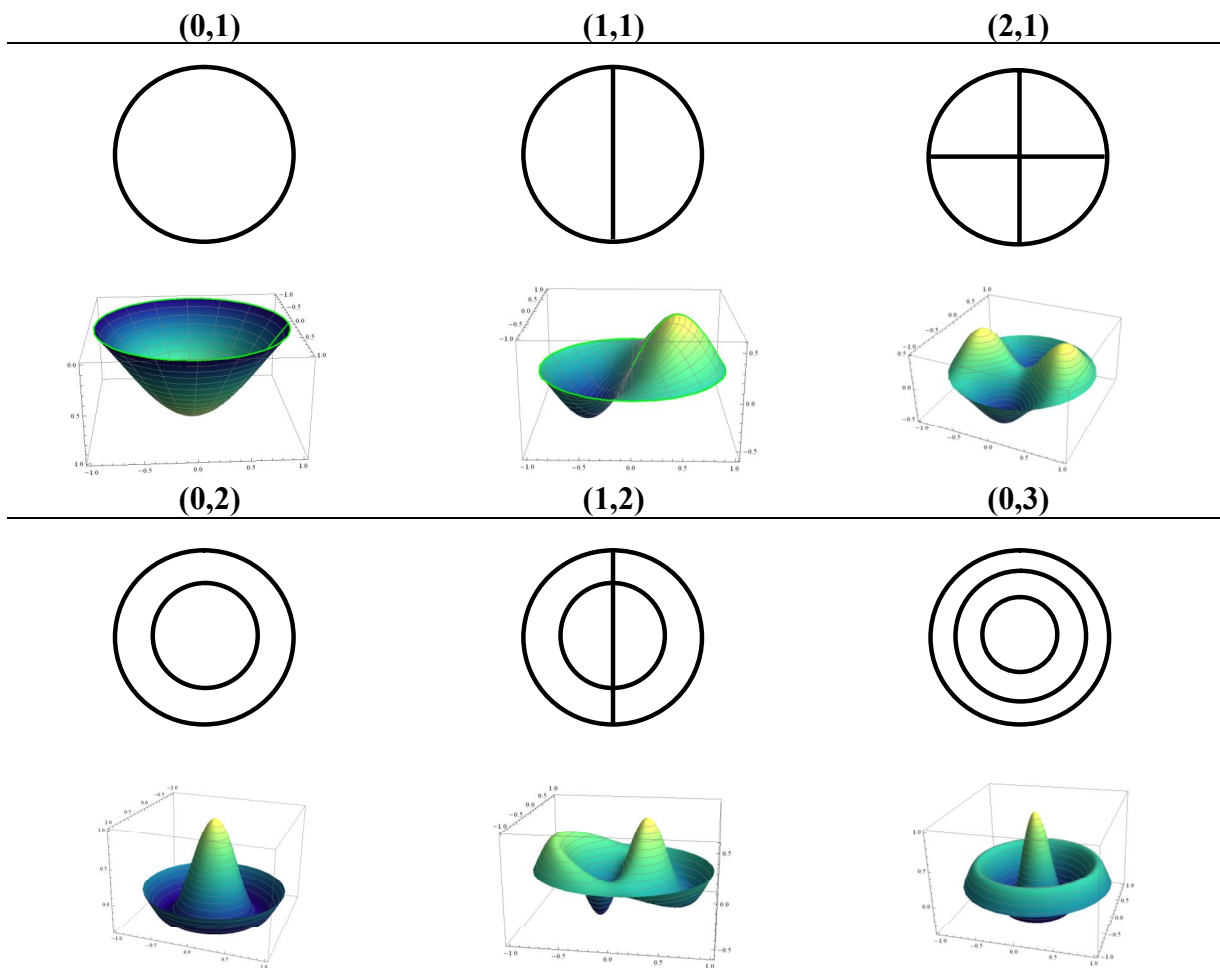
Az egyes rezgések vizsgálatánál figyelembe kell venni a *degenerációt*. Az $m \neq 0$ módusok kétszeres multiplicitásúak, kétszeresen degeneráltak. Amennyiben a membránon elváltozás

keletkezik, ezek a degenerált módusok törvényszerűen felhasadnak, a spektrumban mindkét sajátfrekvencia megjelenik. A folytonos elforgatási szimmetria csökken, ennél többet akkor lehet mondani, ha az elváltozás is rendelkezik valamilyen tükrözési vagy elforgatási szimmetriával. Ha a tükrözési teljesül, a felhasadt módus egyik fele szimmetrikus lesz erre a szimmetriára, a másik antiszimmetrikus. Elváltozás lehet a csavarok egyenetlen meghúzásából származó nem egyenletes feszültség (elforgatási - [13]), vagy a membrán anyagában található szimmetrikus inhomogenitás (tükrözési).

Ilyen felhasadás tapasztalható például a *tabla* nevű indiai hangszernél, melynél a membránra bőrdarabokból egy púp van ragasztva ([6]), vagy egy lyukas membránnál, amelynél a perforáció nem koncentrikus a membrán peremével.

A **2.2-es ábrán** egy ideális kör alakú membrán néhány sajátrezgésének jellegzetes alakja látható:

Az ideális membrán néhány módusa



2.2 ábra

2.1.4 A módusok vizsgálata

A membrán módusait többfajta mérési módszerrel is szemléltethetjük, ezek közül csak néhányat szeretnék bemutatni.

Chladni-féle hangábrák:

A Chladni-féle hangábrákkal könnyen ellenőrizhető, hogy az egyes sajátrezgések valóban az elméletileg számolt frekvenciánál találhatóak-e. A membrán felületét megszórjuk homokkal, majd ha a vizsgálni kívánt sajátrezgéseknek megfelelő frekvencián rezgetjük a hátyát, a homok a csomóvonalakban, illetve csomókörökben fog megállni. Ezzel a módszerrel „kirajzolhatjuk” az adott módusokat, ha helyesek a hozzájuk számolt frekvenciák. [8]

Vizsgálat stroboszkóppal

Az egyes frekvenciák lecsengését szabad szemmel is megfigyelhetővé teszi az stroboszkópos vizsgálat. Ha a megvilágítás frekvenciája kétszer akkora, mint a megfigyelni kívánt módus frekvenciája, akkor a membrán csak azokban az egymás utáni időpillanatokban lesz megvilágítva, amikor egyszer fenti, egyszer pedig lenti fázist látunk. Az egyes sajátrezgések mozgását lassítva, szabad szemmel is könnyen megfigyelhető módon vizsgálhatjuk. [9]

Akusztikus holográfia

Az akusztikus holográfia egy újabb módszert biztosít a membrán gerjesztésére, a módusok vizsgálata mellett. A gerjesztéshez a membrán felületén egy apró mágnes helyezünk el, ami „lefogja” azokat a módusokat, melyeknek csomóátmérője, vagy csomóköre a mágnes helyén jönne létre. (A vizsgálat során figyelembe kell venni, hogy az adott elhelyezéssel melyik módusok mérhetőek.) Ha dobőr alá egy tekercset helyezünk el, akkor szinuszos áram hatására, a változó elektromos tér – a Maxwell-törvényeknek megfelelően - változó mágneses teret hoz létre, melynek következtében a mágnes rezegni kezd és a membránt is gerjeszti.

A módszer lényege, hogy a membrán mozgásakor keletkezett hanghullámokat egy egyedi fázis érzékeny mikrofonnal mérik, mely a nyomást és a hangsebességet detektálja egy x - y tartomány mentén, ahol a mikrofon mozgatható. Ezekből kiszámolható az akusztikus impedancia, az intenzitás faktor, a membrán elmozdulása és a gyorsulás. Ezek ismeretében modellezhető a hangtér. [7]

2.2 Az elhanyagolt effektusok

Egy összetettebb modell módusai akár nagymértékben eltérhetnek az ideális modellnél számolt, az előző fejezetben ismertetett alakoktól. A valódi és az ideális membrán közötti optimális utat az egyes effektusok hatásának figyelembe vételével találhatjuk meg. A befolyásoló tényezőket csoportosíthatjuk aszerint, hogy a dobtesttől, vagy a membrántól származnak a hatások. A legfőbb effektusok, melyek befolyásolják a spektrumot:

Dobtest:

- a test rezgéseinek elhanyagolása
- a bezárt levegő merevítő, és a külső levegő terhelő hatása

Membrán:

- nemlinearitás
- hajlítási merevség
- nyíróerők

Vékony membrán esetén a legerőteljesebb változást az okozza, hogy a rendszer nem vákuumban helyezkedik el. Általánosan a levegő hatása csökkenti a frekvenciák értékét.

A levegő mozgásának hatása a hanghullámok levegőben, illetve anyagban való terjedési sebességének egymáshoz való arányától függ, valamint attól, hogy a levegő mozgása valamely irányban korlátozva van. A bezárt levegő a csomókörös módusok frekvenciáit növelni fogja, míg a többit csökkenti. Emellett a levegő csillapításának hatására az időben végtelen rezgések csillapodni kezdenek. ([1])

A membrán nemlinearitása a sajátrezgéseknél frekvenciaösszegzéseket hoz be. Ez jól bizonyítható bármely vizsgálatnál, melynél a rezgések frekvenciáját mérjük. Ilyen a Balinéz gong frekvenciájának vizsgálatára vonatkozó kísérlet is. [14]

A hajlítási merevség kezelésénél a membrán differenciálegyenletében megjelenik egy plusz elem, mely a linearitást nem rontja, azonban behoz egy negyedrendű tagot, mely tartalmazza a Young-modulust. Ez ideális esetben megnöveli a frekvenciát, ennek ellenére kis jelentőségű effektus, csupán 0,5 – 1% közötti frekvencia-elmozdulást eredményez. ([1])

A nyíróerő a frekvenciák kismértékű eltolódását okozza, másodrendű effektus, mely akkor lehet nagyobb hatással a módusokra, ha a rezgés amplitúdója nem túl kicsi. A nyírómerevség csak a felület menti elmozdulásoknál fontos, emeli a frekvenciáit. Ez akkor válik lényegessé, ha a membrán nagyon nagy amplitúdójú mozgásokat végez. Mivel az általunk vizsgált membrán kis kitérésű mozgást végez, ezért a nyírómerevséget nem vesszük figyelembe. [1]

3. MEMBRÁNMODELLEK

Ebben a részben azokat a problémákat szeretném ismertetni, melyek alapvetően kapcsolódnak a dolgozatban vizsgált modellekhez.

3.1 A középpontban lyukas membrán

Az ideális, rugalmas membrán sajátrezgéseinek számítása az irodalomban jól ismert probléma. Hagymási Imre „A lyukas membrán hangjai” című TDK dolgozatának első részében a középen lyukas membrán módusait vizsgálja, majd ezt a rendszert analógnak tekinti egy elektron kilyukasztott, kör alakú biliárdban történő mozgásával [3]. Azt a térrészt nevezzük kvantum biliárdnak, amelynek faláról az elektron klasszikusan verődik vissza. A szabad részecske energiaszintjeit ugyanaz az egyenlet határozza meg, mint a dob sajátfrekvenciáit, így annak meghatározásával egy kvantummechanikai problémát is sikerül megoldani. Dolgozatának fő célja az energiaszintek és sajátfrekvenciák állapotsűrűségének tanulmányozása, azonban csak a lyukas membrán spektrumának meghatározását ismertetem, mivel ez szorosan kapcsolódik az általam vizsgált problémához.

A 2. fejezetben levezettem, hogy egy ideális, nem lyukas membrán kitérésmezőjének és sajátfrekvenciáinak egyenletét hogyan határozhatjuk meg. A középen lyukas membrán módusainak meghatározása a (2.1.6)-os egyenletig ugyanúgy történik, mint az ideális membrán esetében. Ekkor a Neumann-függvényeket (másodfajú *Bessel*-függvények) azért zártuk ki, mivel az origóban szingularitást mutattak. Amennyiben középen lyuk található, akkor az $Y_m(x)$ megoldásokat sem hagyhatjuk el.

Ebben az esetben a következő határfeltételeink adódnak:

- A membrán a keretnél rögzített $\rightarrow$ *Dirichlet-féle* határfeltétel
- A lyuk pereme nincs rögzítve $\rightarrow$ *Neumann-féle* peremfeltétel

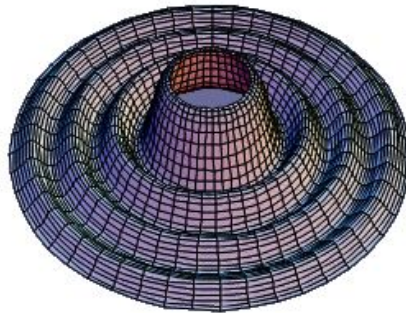
$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ll} \text{a.} & U(r, \varphi)|_{r=R_2} = 0 \\ \text{b.} & \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = 0 \end{array}$$

ahol R_2 a membrán sugara, R_1 pedig a lyuk sugara. A fenti egyenletek a (2.1.6)-os egyenlőségben szereplő a_m és b_m ismeretlenekre egy homogén lineáris egyenletrendszert adnak. Ennek csak akkor van a triviálistól eltérő megoldása, ha az együtthatómátrix szinguláris, vagyis determinánsa nulla.

$$(3.1.2) \quad \begin{vmatrix} J_m(kR_2) & Y_m(kR_2) \\ J_m'(kR_1) & Y_m'(kR_1) \end{vmatrix} = 0$$

ahol $J_m'(kR_1) = \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} \Big|_{r=R_1}$, a Neumann-függvényre pedig hasonlóan.

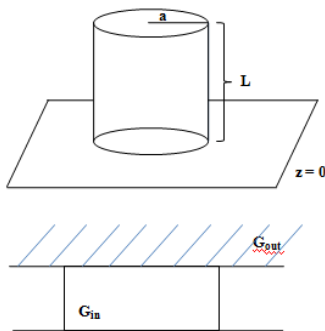
A membránon található lyuk körszimmetrikus, és az origóban helyezkedik el, tehát a rendszer forgási szimmetriája nem sérül. Hiába található a membránban inhomogenitás, a degenerált módusok nem fognak felhasadni. A lyukas dob egyik módusára példa a **3.1 ábrán** látható.



(0,4)-es sajátrezgés – [Hagymási, 2006]

3.1 ábra

3.2 A levegő hatása az üstdob rezgéseire



A tér tartományokra bontása mellett a $z = L$ síkban nincs részecskemozgás.

3.2 ábra

A 2.2-es fejezetben láthattuk, hogy a levegő hatása a frekvencia-értékek megváltozását okozza. R. S. Christian, R. E. Davis és A. Tubis által publikált cikk az általam modellezett egyik probléma alapja. [4]

A publikációban azt vizsgálják, mekkora hatást gyakorol az üstdob rezgéseire az, ha a membrán nem vákuumban helyezkedik el, illetve, ha rendelkezik dobtesttel.

A számítás során nincs figyelembe véve a terem akusztikája, valamint az üstdob oldalán lévő szellőzőnyílás hatása. A membrán ideális, viszont a dobtest többi része merev, nincs alsó membrán. A rezgéseket nem tekintik időben végtelennek, a lecsengési időt a módusok komplex frekvenciájának képzetes részéből számolható ([10,11]). A nyomás hullámszerű változást mutat, ezért felírhatjuk rá a Helmholtz-egyenletet. A levegő mozgását Green-függvényekkel modellezzük, amelyekre a dob falain valamint a

külső térrészben, a dobőr meghosszabbításával keletkezett végtelen síkon Neumann-féle határfeltételt alkalmazzák. Technikai közelítés, hogy a membrán síkjában nincs részecskemozgás, mely a szerzők szerint gyengén befolyásolja a kapott eredményeket. /3.2 ábra/ [15]

A megoldás során még egy fontos feltételt szabunk, a levegő mozgását a folyadék mozgását leíró linearizált Euler-Navier-Stokes formulával kezeljük. Az elforgatási szimmetria érvényes, ezért a membrán kitérését a csomóátmérők rögzített m száma mellett az ideális membrán módusai szerint sorfejtik. A levezetés végén a (3.1.1)-es nemlineáris sajátérték egyenletet kapjuk. Ezt az összegzést $n, n'' = 4$ -nél vágják le.

$$(3.1.1) \quad \sum_{n''} M_{nn''} \cdot a_{n'',s}^m = a_{n,s}^m \left(\frac{\omega^2}{c_m^2} - \frac{x_{mn}^2}{a^2} \right)$$

ahol a a dobőr sugara, c_m a membránbeli sebesség. Az $\hat{M}$ mátrix tartalmazza az alkalmazott Green-függvények integrálját a membrán felületén.

A számolt adatok alátámasztják a feltételezést, miszerint a levegő hatására a módusok frekvenciája csökken. A bezárt levegő hatása (miszerint a csomókörös módusok frekvenciája nőne) kevésbé érvényesül, a legerőteljesebb hatás a frekvencia-csökkenés. Ezen adatokat a cikkben mérési eredményekkel is igazolták.

A numerikus számítás során a levágás értéke elég kicsi. A számítások reprodukálása után modern technikával és nagyobb levágással újraszámoltuk azokat az eredményeket, melyeket kísérleti mérések is alátámasztanak. A sajátfrekvenciára írt keresési eljárás akkor lenne korrekt, ha a komplex számtesten keresnénk, azonban a reprodukálás során csak a valós számokon futtatunk keresést. A kapott sajátfrekvencia értékek az **I. táblázatban** találhatóak.

I. táblázat: a membrán sugara: $a = 0.328$ m; felületi tömegeloszlás: $\sigma = 0.262$ kg/m²; megfeszítettsége: $T = 1960$ N/m; levegő sűrűsége: $\rho_0 = 1,21$ kg/m³; dob térfogata: $V = 0,14$ m³;

$T = 1960$ N/m				
Ideális membrán		Christian et. al. $n, n'' = 4$	Reprodukált $n, n'' = 8$	Mért adat
Módus (mn)	f_{mn} (Hz)			
01	101	...	68	94
11	161	107	108	107
21	215	161	161	161
02	231	181	181	179
31	267	211	201	211
12	295	231	232	232
41	318	262	262	261
22	353	291	293	302
03	363	302	308	286
51	368	309	311	310

Az elmélet alapján számolt és kísérletileg mért üstdob módus frekvenciák. A T tenziós paraméter elméleti érték, amelyet úgy állítunk be, hogy f_{II} (calc.) = f_{II} (expt.)

4. NEM KONCENTRIKUS PERFORÁCIÓ HATÁSAI

A 3.1-es pontban Hagymási Imre dolgozata alapján bemutattam, hogyan alakulnak egy centrálisan kilyukasztott membrán sajátfrekvenciái. A dolgozatomban tárgyalt első probléma, hogy hogyan változnak a módusok abban az esetben, amikor a lyuk nem a középpontban helyezkedik el.

4.1 Hullám szóródása két dimenzióban

A fizikai rendszerek szimmetriacsoportjainak jelentős része – így a kör szimmetriacsoportja is – geometriai transzformációkból áll, ezeket a koordináták lineáris transzformációival adhatjuk meg. A φ szöggel történő elforgatások leírására az $R(\varphi)$ mátrixokat vezethetjük be, melyek Lie-csoportot alkotnak. Ennek neve speciális, két-dimenziós, ortogonális csoport: $SO(2)$. Mivel az $SO(2)$ csoport Abel-csoport, így a komplex számtest feletti irreducibilis ábrázolásai csak egydimenziósak lehetnek, jelöljük ezeket $D^{(m)}$ -mel. Az ábrázolások 1×1 -es mátrixokból állnak, melyekre igaz:

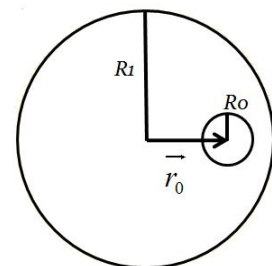
$$(4.1.1) \quad D^{(m)}(\varphi)D^{(m)}(\varphi') = D^{(m)}(\varphi + \varphi')$$

Az egyenletet φ' szerint deriválva, valamint $\varphi' = 0$ -t behelyettesítve egy elsőfokú differenciálegyenletet kapunk, melynek megoldása: $D^{(m)}(\varphi) = \exp(C_m \varphi)$. Az ábrázolásoktól elvárjuk, hogy a $\varphi = 2\pi$ szögű forgatás esetén megegyezzen az egységelemmel, innen a következő egyenlőséget kapjuk:

$$(4.1.2) \quad D^{(m)}(\varphi) = \exp(im\varphi)$$

Mely egyben a $D^{(m)}$ ábrázolás karakterével is egyenlő lesz. [16]

A **4.1 ábrán** látható nem koncentrikus lyukkal rendelkező membrán módusait fogjuk vizsgálni, az ábrán látható jelölésmódot követve. A mozgásegyenlet levezetésének első része megegyezik a 2.1-es pontban leírtakkal, így a megoldás lépéseit a (2.1.6)-os egyenlettel folytatom. A 3.1-es pontban tárgyaltakhoz hasonlóan először a lyuk pereménél illesztjük a Neumann-féle határfeltételt, abban a polárkoordináta rendszerben, amelynek origója a lyuk



4.1 ábra

középpontja.

$$(4.1.3) \quad \left. \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k \cdot e^{im\varphi} \cdot [c_m J'_m(kR_0) + d_m Y'_m(kR_0)] = 0$$

ahol $J'_m(kR_0)$ és $Y'_m(kR_0)$ a Bessel-függvények r szerinti deriváltját jelöli, az $r = R_0$ helyen. A fenti egyenletből c_m -t kifejezve, majd visszahelyettesítve $U(r, \varphi)$ függvényre egy d_m együtthatóktól függő összegzést kapunk.

Ezután célszerű áttérni komplex koordinátákra, valamint a koordináta-rendszer középpontját a lyuk középpontjából a membrán középpontjába toljuk:

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} z &= x + iy \\ \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{r}_0 \\ z' &= z + z_0 \end{aligned}$$

ahol $\vec{r}'$, z' a membrán középpontjától van mérve. A fentieket felhasználva $U(r, \varphi)$ ezentúl z' -től fog függeni, és a következő alakot ölti:

$$(4.1.5) \quad U(z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \cdot \left[\frac{z' - z_0}{|z' - z_0|} \right]^m \cdot \left[Y_m(k|z' - z_0|) - \frac{Y'_m(kR_0)}{J'_m(kR_0)} \cdot J_m(k|z' - z_0|) \right]$$

Most a membrán peremén követeljük meg a Dirichlet-féle peremfeltételt, valamint legyen $z' = R_1 \cdot e^{i\theta}$. Ekkor ($\forall n \in \mathbb{Z}$):

$$(4.1.6) \quad \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \cdot U(R_1 \cdot e^{i\theta}) = 0$$

A (4.1.6)-os egyenlet egzakt ugyan, de csak numerikusan értékelhető ki, ezért a (4.1.5)-ös összefüggésben levágást kell bevezetni: $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rightarrow \sum_{m=-M}^M$. Ekkor $2M + 1$ ismeretlenünk van, így a (4.1.6)-os egyenletet is csak $n = -M, -M + 1, \dots, M$ értékekre közelíthetjük meg. A levágások segítségével a fenti összefüggés egy $2M + 1$ egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszer, $2M + 1$ darab ismeretlenre (d_m). A homogén egyenletrendszernek akkor, és csak akkor létezik a triviálistól eltérő megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa eltűnik:

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} \text{Det}(A_{mn}) &= 0 \\ A_{mn} &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \cdot \left[\frac{R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0}{|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|} \right]^m \cdot \left[Y_m(k|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|) - \frac{Y'_m(kR_0)}{J'_m(kR_0)} \cdot J_m(k|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|) \right] \end{aligned}$$

$\text{Det}(A_{mn})$ zérushelyei egyértelműen rögzítik k -t, amely $\omega = c \cdot k$ megfeleltetéssel a lyukas membrán spektrumát adja.

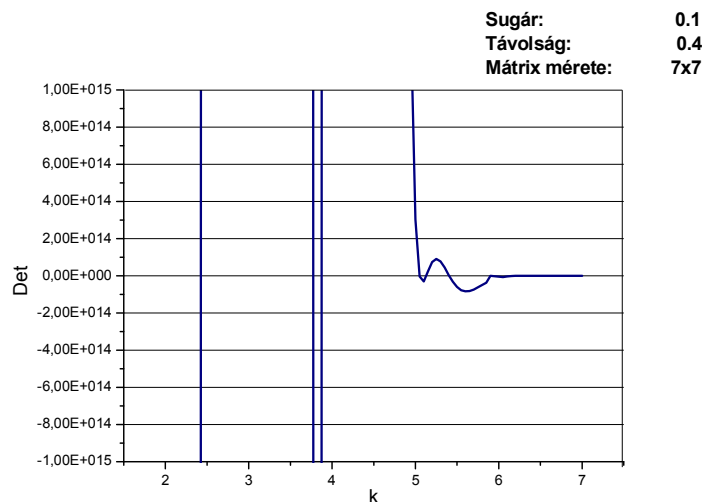
4.2 A spektrum vizsgálata

A 4.1-es pontban kapott egyenletek segítségével megvizsgálhatjuk, hogy egy szimmetrikus lyuk, mint inhomogenitás, milyen hatással van az ideális membrán sajátrezgéseire, illetve a sajátfüggvényeire.

4.2.1 Zérushelyek keresése

a. Keresés „nyers erővel”

A legegyszerűbb módszer, amivel a zérushelyeket kereshetjük, ha a (4.1.6)-os egyenletből mátrixot képzünk, majd a teljes frekvenciatartományon vizsgáljuk a determináns értékét, annak valós részét ábrázoljuk. Elegendő csupán a valós részt vizsgálni, mivel analitikusan és numerikusan is bizonyítható, hogy a komplex rész kiesik. Ekkor a levágás mértékének megfelelően csupán az első néhány sajátfrekvencia értéket kaphatjuk meg. A keresésben paraméterként állíthatjuk a lyuk méretét, illetve középponttól való távolságát. A számítások általánosításához a membrán sugarát egységnyi hosszúságúnak tekintem a számolások során, a lyuk mérete pedig ehhez igazodóan csupán arányszámként van jelen. Egy ilyen futási eredményt láthatunk a **4.2 ábrán**.



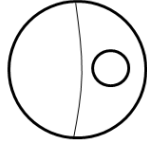
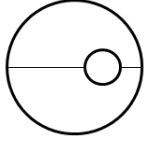
4.2 ábra

A keresés következő lépése, hogy az előjelváltás szűk tartományában egy zérushelykereső eljárást indítunk (pl. intervallumfelezés), mely 4 tizedesjegyig meghatározza annak pontos értékét, hiszen k értékének kis megváltozásához nagy frekvenciakülönbség tartozhat. Az ábrán látható, hogy a degenerált módusok a zavar hatására felhasadnak, azonban frekvenciájuk nagybani eltérést nem mutat. Így a számítások során az egymáshoz közeli

értékeket nehéz megtalálni, valamint az egyenlet bonyolultsága miatt nagy a futásidő, ez korlátozza a levágás, tehát a pontosság mértékét.

b. Szimmetria alapú keresés

A fenti problémára ad megoldást az, ha a keresés során a rendszer szimmetria tulajdonságait is figyelembe vesszük. A nem koncentrikus lyuk miatt a struktúra körszimmetriája elromlik, azonban a valós tengelyre szimmetrikus marad a membrán, így a keresését páros, illetve páratlan részekre bonthatjuk. A lyuk elhelyezkedésében két eset lehetséges: vagy egy csomóvonalon fekszik, vagy pedig nem /4.3 ábra/. U ugyan komplex értékű függvény, azonban végső értéke valós, így külön tekinthetjük a valós és képzetes részét, ebből erednek a degenerált módusok.

páros	páratlan
$d_m = (-1)^m d_{-m}$	$d_m = (-1)^{m+1} d_{-m}$
valós	képzetes
	

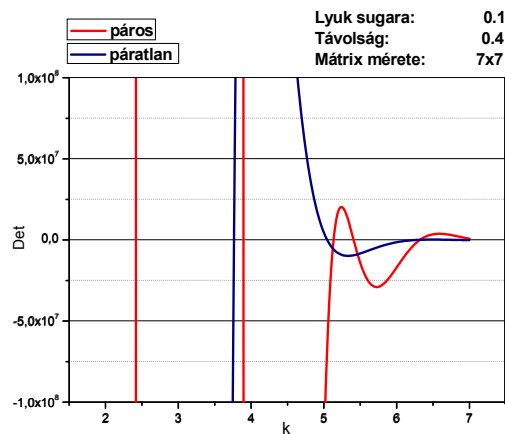
4.3 ábra

Amennyiben a d_m együtthatókra fent leírt tulajdonságot alkalmazzuk, a (4.1.6)-os egyenletet páros, és páratlan részekre bonthatjuk fel. Ekkor az m -re történő összegzést 1-től indítjuk M -ig, és az összefüggés belső részét szétbontjuk m -nek és $-m$ -nek megfelelően. További rendezések után a páros és páratlan mátrixok A_{mn} -edik elemére, melyet a keresés során fogunk felhasználni, a következő összefüggést kapjuk:

$$(4.1.8) \quad A_{mn}^{páros} = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \cos(n\theta) \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0}{|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|} \right]^m \cdot \left[Y_m(k|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|) - \frac{Y'_m(kR_0)}{J'_m(kR_0)} \cdot J_m(k|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|) \right]$$

$$(4.1.9) \quad A_{mn}^{páratlan} = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sin(n\theta) \cdot \operatorname{Im} \left[\frac{R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0}{|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|} \right]^m \cdot \left[Y_m(k|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|) - \frac{Y'_m(kR_0)}{J'_m(kR_0)} \cdot J_m(k|R_1 \cdot e^{i\theta} - z_0|) \right]$$

A fenti egyenleteket felhasználva, ugyanazokkal a paraméterekkel futtatva keresést, mint amelyek a **4.2 ábrán** láthatóak, megkapjuk ugyanazokat a zérushelyeket, azonban a program futási ideje körülbelül a negyedére csökken (így majd növelhetjük a levágás mértékét), valamint a felhasadt frekvenciapárok nem egy grafikonon találhatóak, így szűkebb tartományon való keresés sem fog az intervallumfelezés hibát adni.



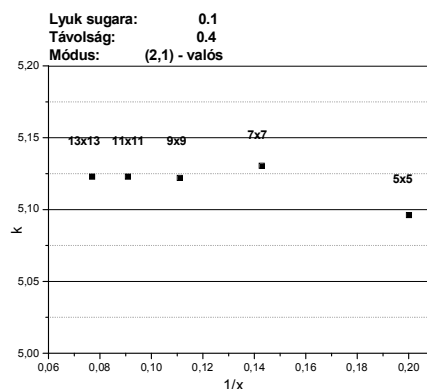
Páros-páratlan szimmetrián alapuló keresés.

4.4 ábra

c. A számítás pontossága

A numerikus kiértékeléssel megtalálható módusok száma a levágás mértékétől függ. Az első keresési módszerrel a mátrix maximális mérete 7×7 -es volt, a mi erőforrásainkhoz mérten, ebben az esetben a futási idő már majdnem egy nap hosszára nyúlt. A nagyobb pontossággal azonban k értékei nem mutattak telítődést, így a szimmetria alapú keresés kidolgozása nem csupán a futásidő rövidítése miatt fontos.

A második keresési móddal a mátrixok akár 19×19 -es méretet is elérhetnek - anélkül, hogy a futási idő hosszára nyúlna -, azonban a számítások során azt tapasztaltuk, hogy nem szükséges magas levágást alkalmazni, a frekvencia értékek gyorsan telítődnek, 13×13 -as mátrixméretnél már csak a harmadik tizedesjegyben okoznak változást. /**4.5 ábra**/

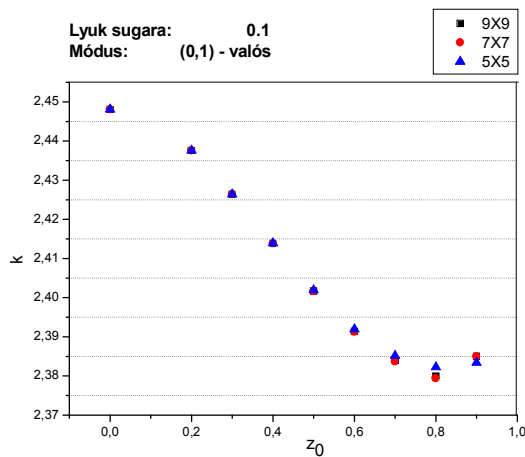


4.5 ábra

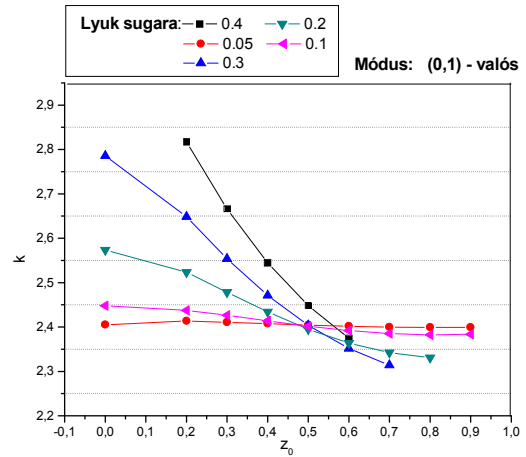
4.2.2 Sajátrezgések

(0,1) módus

A (0,1) módus a kör alakú ideális membrán alapvető sajátrezgése. A vibrálás e módusában a membrán úgy működik, mint egy monopólus, mely igen hatékony hangsugárzó. A számolás első részében azt vizsgáltuk, hogyan változik a módus frekvenciája abban az esetben, ha a lyuk mérete állandó, a középponttól való távolsága viszont folyamatosan növekszik. Ebben az esetben is megfigyelhető, hogy a levágás növelésével a frekvenciaértékek gyorsan konvergálnak.



(b) (0,1) módus változása a lyuk helyzetének változtatásával, különböző pontosságnál

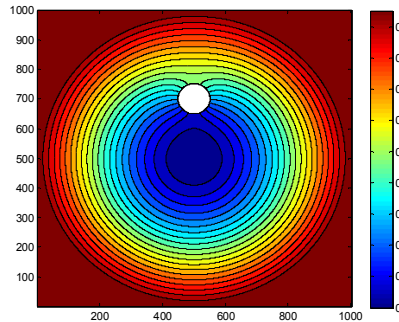


(a) (0,1) módus változó lyukméret és helyzet mellett, közelítés 13×13-as mátrixszal

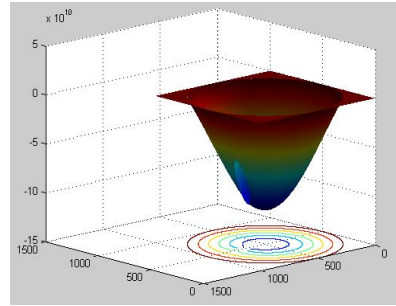
4.6 ábra

Mindkét grafikonon megfigyelhető, hogy az alaphang elmélyül, ahogy a lyuk a membrán pereme felé halad. Ahogy az várható, minél nagyobb a lyuk mérete, annál nagyobb hatást gyakorol a membrán sajátfrekvenciáira. Abban az esetben, amikor a perforáció mérete 40%-a a membrán méretének, a hatás igen jelentősnek mondható, ekkor a sajátfrekvenciák értékében akár 25-30%-os csökkenés is tapasztalható. Bár 0.1-es részméretnél a változás nem annyira látványos, a többi módust mégis ezzel a nagysággal vizsgáltuk, mivel a gyakorlati alkalmazásoknál általánosságban ezt a méretarányt használják. Érdekes megfigyelés, hogy a legnagyobb részméret kivételével a különböző mérthez tartozó frekvencia „utak” egy pontban, a membrán felénél metszik egymást. Úgy tűnik, mintha kisebb hatások esetén ennél a távolságnál a membrán minden lyukméretre egyforma mértékben reagálna.

A (0,1)-es módus kitérésfüggvényét ábrázolva látható, hogy a lyuk a „összehúzza” a szintvonalakat. Magán a kitérésen azonban nagy eltérés nem látható, hiszen az effektus is kicsi. /4.7 ábra/



(a) a kitérésmező szintvonalas ábrázolása – (0,1) módus



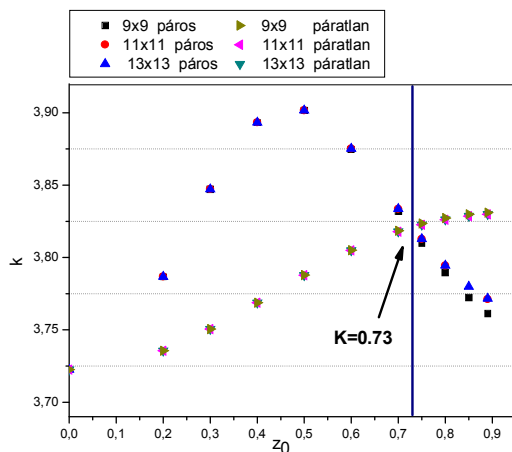
(b) a kitérésmező 3D-ban – (0,1) módus

4.7 ábra

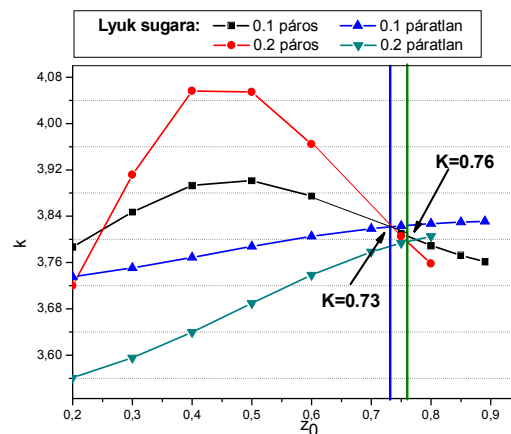
(1,1) módus

Amennyiben a membránon az (1,1)-es módus alakul ki, a rendszer úgy viselkedik, mint egy dipólus forrás. Ennek eredményeként a módus nem közli rezgési energiáját akkora mértékben, mint az alaprezgés.

Az (1,1)-es módus degenerált, a zavar hatására pedig ez a degeneráció felhasad két frekvenciára, ahogy azt a 4.2.1-es részben tárgyaltam. /4.8 ábra/



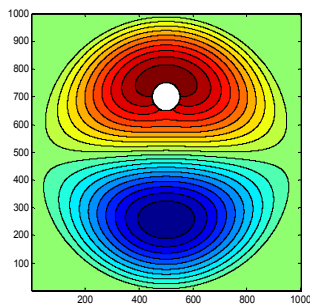
(a) (1,1) módus változása a 0.1-es lyuk helyzetének változtatásával, különböző pontosságnál



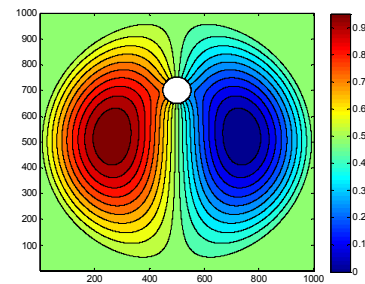
(b) (1,1) módus változó lyukméret és helyzet mellett, közelítés 13×13-as mátrixszal

4.8 ábra

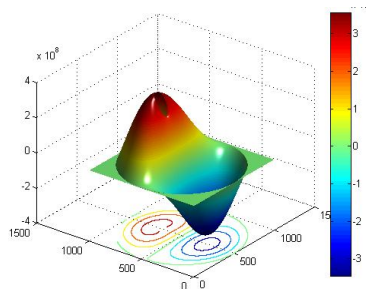
A páros rész magasabb felé tér el, majd alábukik, miközben a páratlan rész viszonylag egyenletesen növekszik. Ennek következtében kereszteződés alakul. Ennek helye nem állandó, a (b) ábrán látszik, hogy nagyobb lyukméret mellett a kereszteződés helye a membrán pereme felé tolódik. A csomópont helyét polinom illesztéssel határoztam meg. Mivel a frekvenciák felhasadása kismértékű, ezért valószínűleg nem csak akkor tapasztalható lebegés, ha a lyukat a kereszteződés közelében helyezzük el, hanem a membrán bármely pontján. A kereszteződés ugyan kicsit távolabb található a középponttól, mint a (0,1) módus esetében az a pont, amire a membrán hasonló frekvenciával reagált, mégis valószínűleg ugyanaz a helyzet áll fent. A lyuk nagyságától függően található egy „stabil” távolság, melynél a felhasadás ellenére ugyanazt a frekvenciát kapjuk mind páros, mind páratlan esetben. A frekvencia értékek ebben az esetben is gyors konvergenciát mutatnak. A páros és páratlan rész kitérés függvényét ebben az esetben is ábrázolhatjuk, a kontrasztos ábrázolásban jól látható a szintvonalak torzulása a 2.1.3-as pontban ábrázoltakhoz képest.



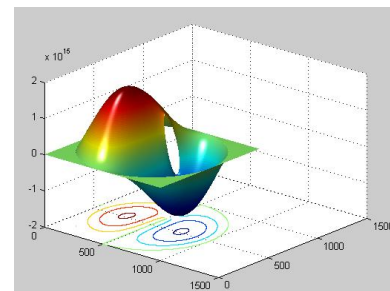
(a) a páros kitérésmező szintvonalas ábrázolása - (1,1) módus



(b) a páratlan kitérésmező szintvonalas ábrázolása - (1,1) módus



(c) a páros kitérésmező 3D-ben - (1,1) módus

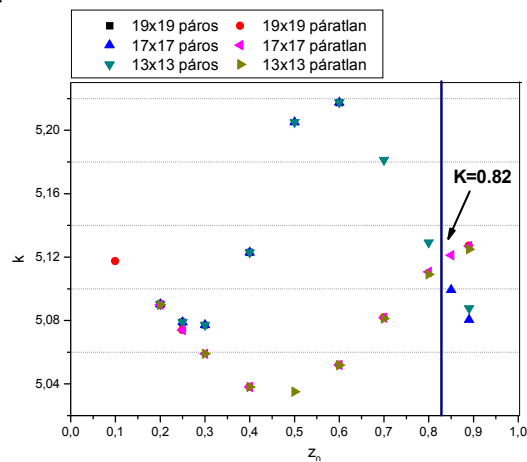


(d) a páratlan kitérésmező 3D-ben - (1,1) módus

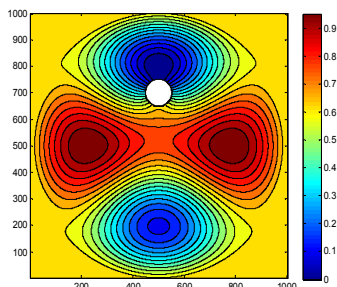
4.9 ábra

(2,1) módus

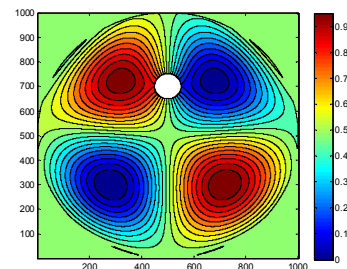
A (2,1) módusban a membrán egy kvadrupól forráshoz hasonlóan viselkedik, aminek következtében rezgési energiáját még az (1,1)-es módusnál is lassabban közli a környezettel. A (2,1)-es módus esetén a felhasadás hasonló alakot mutat, mint az (1,1)-es módus, csupán a szétválás nagyobb mértékű. Ebben az esetben is található egy keresztezési pont, távolabb, mint az előző esetben, viszont helye ebben az esetben sem állandó. A kereszteződés helyét ebben az esetben is polinom illesztéssel határoztam meg. A kontrasztos ábrázolásban látható, hogy a páros részt sokkal jobban torzítja az inhomogenitás, a csomóvonalak nem keresztezik egymást.



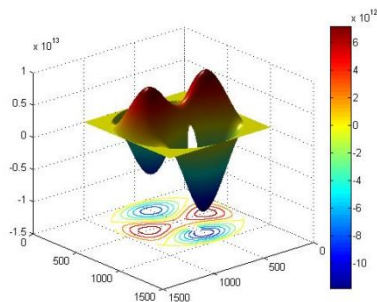
(a) (2,1) módus változása a 0.1-es lyuk helyzetének változtatásával, különböző pontosságnál



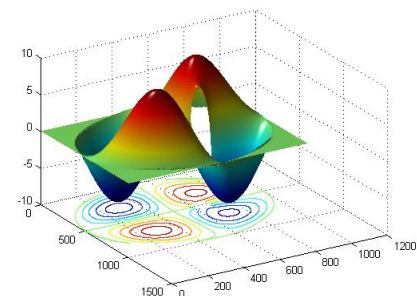
(a) a páros kitérésmező szintvonalas ábrázolása – (2,1) módus



(b) a páratlan kitérésmező szintvonalas ábrázolása – (2,1) módus



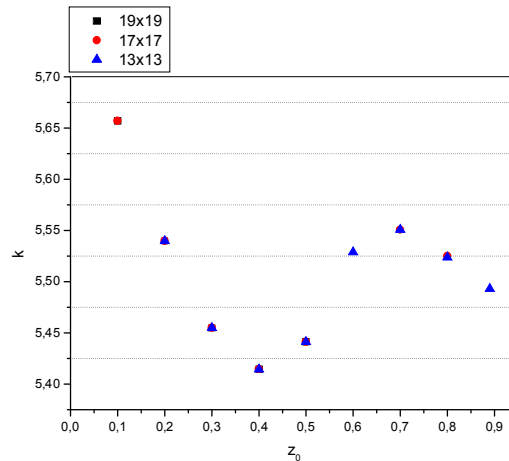
(c) a páros kitérésmező 3D-ben – (2,1) módus



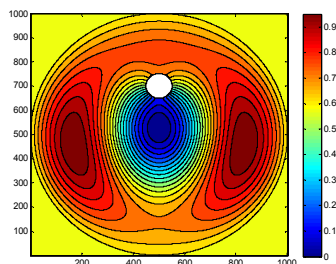
(d) a páratlan kitérésmező 3D-ben – (2,1) módus

(0,2) módus

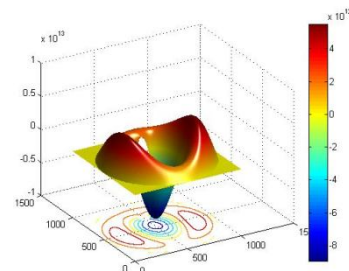
A módus hangsugárzása sokkal bonyolultabb, mint az előző háromé nem hasonlítható konkrétan valamilyen sugárzási módhoz. Mivel csomóátmérőt nem tartalmaz, így nem található felhasadás. A frekvencia elmozdulási iránya attól függ, hogy a lyuk a csomókör melyik oldalán helyezkedik el. A középpont felőli oldalon a frekvencia meredeken csökken, majd a csomókörhöz közeledve emelkedik. Azon átlépve azonban ismét csökkenni kezd. A csomókör megfogalmazás ellenére nem beszélhetünk valódi csomókörökről, hiszen az inhomogenitás torzítja a szimmetriát, valódi csomókör nem tud kialakulni. A pontosság ebben az esetben megköveteli a nagyobb levágást, mivel az egyre nagyobb frekvenciaértékek egyre lassabban konvergálnak.



(a) (0,2) módus változása a 0.1-es lyuk helyzetének változtatásával, különböző



(b) a kitérésmező szintvonalas ábrázolása – (0,2) módus



(c) a kitérésmező 3D-ban – (0,2) módus

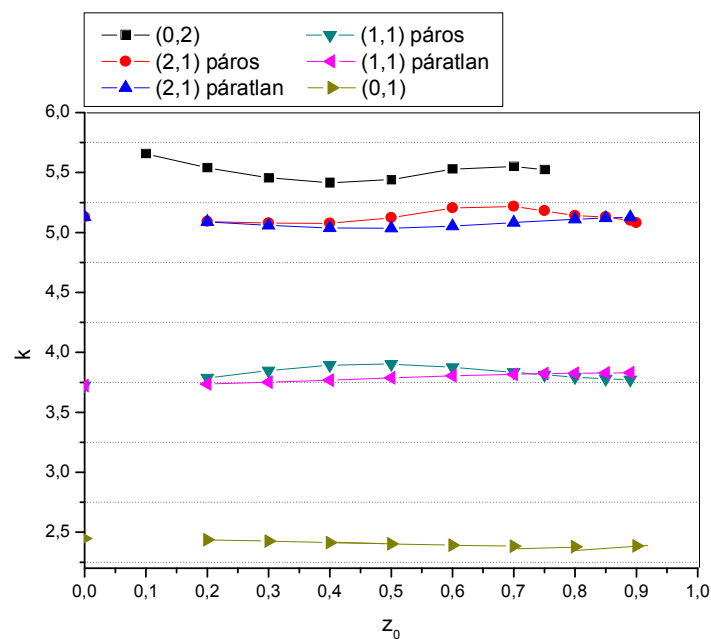
4.11 ábra

4.3 Konklúzió

A membrán frekvenciáját vákuumban a középpontban elhelyezett lyuk csupán a második, harmadik tizedesjegyben befolyásolja. Ebben az esetben a körszimmetria megmarad, a spektrumban nem sok változás tapasztalható. Amennyiben a perforáció nem a középpontban helyezkedik el, sérül a rendszer elforgatási szimmetriája, a 4.2 pontban leírtak alapján páros-páratlan szimmetria alakul ki.

A degenerált módusok felhasadnak, majd – a lyuk távolságának függvényében – kereszteződés alakul ki. Ennek távolsága nem állandó, változik a lyukméret, valamint a módus függvényében. A degeneráció nem védett (nem szimmetria biztosítja), ezért érthető, hogy a kereszteződés helye véletlenszerű.

A hatás viszonylag kicsinynek tekinthető, így a felhasadt módusoknál lebegés tapasztalható, függetlenül a lyuk elhelyezkedésétől. A frekvenciák változását főleg 0.1-es lyukméret esetén vizsgáltuk, mivel a kis dominancia ellenére a gyakorlatban főleg ebben a méretarányban alkalmazzák. A zenészek gyakran vágnak lyukat a dobőrre, mivel állításuk szerint szebb hangzást ad a doboknak. Mivel a lyukat majdhogynem véletlenszerűen helyezik a bőrön, és a frekvenciaértékek elmozdulása nem jelentős, így a kellemesebb hangzás kialakulását a lebegés megjelenésével magyarázhatjuk. A **4.12-es ábrán** az első négy módus látható együtt, így jól érzékelhető az effektus mértéke.



4.12 ábra

5. A KÉTMEMBRÁNOS DOB REZGÉSEI

A második probléma, melyet a dolgozatomban tárgyalok, a kétmembrános dob problémája. Ebben az esetben a dobtest mindkét végén ki van feszítve egy membrán, valamint a rendszernél a levegő hatását is figyelembe veszem.

5.1 A mozgásegyenletek

A számítások során nem veszem figyelembe a terem akusztikáját, valamint a dobtest rezgéseit. A membránok ideálisak, azonban a köztük lévő levegő miatt mozgásuk csatolt. A 3.2 pontban ismertetett problémához hasonlóan a membránok meghosszabbításával keletkezett végtelen síkon a Neumann-féle határfeltételt illeszttem, tehát úgy tekintem, hogy a membrán síkjában nincs részecskemozgás.

A számítások során használt gondolatmenet a [4]-ben szereplő levezetés adaptációja. A mozgásegyenlet levezetését a felső membrán esetében ismertetem, az alsó esetében a megoldás teljesen hasonló. A számolás során az időben periodikus megoldásokra szorítkozva: $\eta(\rho, \phi, t) = \eta(\rho, \phi) \cdot e^{i\omega t}$. A membrán pontjainak kitérés-idő függvényére a következő mozgásegyenletet írhatjuk fel:

$$(5.1.1) \quad \sigma \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T \cdot \nabla^2 \cdot \eta + p(\rho, \phi, L_-, t) - p(\rho, \phi, L_+, t)$$

ahol σ a membrán felületi sűrűsége, T a megfeszítettsége, p pedig a nyomás, attól függően, hogy belső, vagy külső területre vonatkoztatjuk. L_- és L_+ a felső membrán alsó és felső határa, amennyiben a dob alját a $z = 0$ síkban helyezzük el, és magassága L .

A nyomást a következő alakban keressük: $p(\rho, \phi, z, t) = p(\rho, \phi, z) \cdot e^{i\omega t}$. A levegőben hullámként terjed a nyomás fluktuációja, ezért felírhatjuk rá a Helmholtz – egyenletet:

$$(5.1.2) \quad \left(\nabla^2 + \omega^2 / c_a^2 \right) p(\mathbf{r}) = 0$$

ahol c_a a hangsebesség levegőben. Ezután – első lépésben - a dobtestbe zárt levegő terhelő hatásának leírásához a nyomás Green-függvényét használjuk. Így a Helmholtz-egyenlet Green-függvényét definiáló egyenlet:

$$(5.1.3) \quad (\nabla^2 + k^2) G_{\text{in}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \cdot \delta(\phi - \phi') \cdot \delta(z - z')$$

Mivel a dobtesten nem mehet át levegő, így a peremfeltételeket is felírhatjuk:

$$(5.1.4) \quad \left. \frac{\partial G_{\text{in}}}{\partial \rho'}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right|_{\rho'=a} = \left. \frac{\partial G_{\text{in}}}{\partial z'}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right|_{z'=0,L} = 0$$

ahol a a membrán sugara. Az (5.1.3)-as egyenletet átírva:

$$(5.1.5) \quad (\nabla^2 + k^2)G_{\text{in}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = f(\rho, \phi) \cdot g(z|z')$$

A $f(\rho, \phi)$ könnyen megszerkeszthető az elsőfajú Bessel-függvények lineáris kombinációjaként, Ψ_{mn} bázis szerint:

$$(5.1.6) \quad f(\rho, \phi) = \sum_{mn} \Psi_{mn} \cdot c_{mn}$$

$$(5.1.7) \quad \Psi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{im\phi} \cdot J_m \left[y_{mn} \cdot \frac{\rho}{a} \right]$$

Itt használjuk fel az első peremfeltételt, vagyis y_{mn} -t úgy választjuk meg, hogy az m -edik Bessel-függvény deriváltjának zérushelye legyen.

Az (5.1.6)-os egyenletet Ψ_{mn}^* -gal szorozva, a membrán területén integrálva, majd további algebrai átalakítások után megkapjuk az első két koordinátát leíró függvényt:

$$(5.1.8) \quad f(\rho, \phi) = \sum_{mn} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{im(\phi-\phi')} \cdot J_m \left[y_{mn} \cdot \frac{\rho}{a} \right] \cdot J_m \left[y_{mn} \cdot \frac{\rho'}{a} \right] \cdot 2 \left[a^2 \cdot \left(1 - \frac{m^2}{y_{mn}^2} \right) \cdot J_m[y_{mn}] \right]^{-1}$$

Ha az (5.1.3)-as egyenlet bal oldalán szereplő kifejezést kifejtjük, majd a Bessel-azonosságokat felhasználva átrendezzük, $g(z|z')$ -re a következő feltételt kapjuk:

$$(5.1.9) \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 - \frac{y_{mn}^2}{a^2} \right) g(z|z') = -4\pi \cdot \delta(z - z')$$

A második peremfeltételt, valamint az időbeli megfordíthatóságot felhasználva megkapjuk a harmadik koordinátát leíró egyenletet, így a bezárt levegő hatását leíró Green-függvényt:

$$(5.1.10) \quad G_{\text{in}}(\rho, \phi, z|\rho', \phi', z') = -4\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\phi-\phi')}}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot J_m \left[y_{mn} \cdot \frac{\rho}{a} \right] \cdot J_m \left[y_{mn} \cdot \frac{\rho'}{a} \right]}{a^2 \cdot (1 - m^2/y_{mn}^2) \cdot J_m^2[y_{mn}]} \cdot \frac{\cos(y_{mn}z_{<}) \cos[y_{mn}(L-z_{>})]}{y_{mn} \sin(y_{mn}L)}$$

$$(5.1.11) \quad \begin{aligned} \gamma_{mn} &= \sqrt{\omega^2/c_a^2 - y_{mn}^2/a^2}, & \gamma_{mn} &< \omega \cdot a/c_a \\ \gamma_{mn} &= i \sqrt{y_{mn}^2/a^2 - \omega^2/c_a^2}, & \gamma_{mn} &> \omega \cdot a/c_a \end{aligned}$$

ahol $z_>$ ($z_<$) a nagyobb (kisebb) z és z' közül.

A külső légnyomás modellezése erősen függ attól, hogy milyen hatásokat veszünk figyelembe a dob környezetében. A számítások során nem veszem figyelembe a hanghullámok visszaverődését a falakról, továbbá feltételezek egy végtelen, merev sík peremet a membrán körül, a membrán síkjában. Ez az egyszerűsítés nagyban könnyíti a külső légnyomás modellezését, azonban a levezetések során ez a feltételezés van fizikailag a legkevésbé alátámasztva.

$$(5.1.12) \quad (\nabla^2 + k^2)G_{\text{out}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

G_{out} -ot úgy keressük, hogy a végtelenben lecsengjen. A fenti egyenletekből, valamint a végtelen síkra vonatkozó peremfeltétel illesztésével már megkaphatjuk a keresett függvényt, valamint a külső koordinátákat a felső membrán síkjára tükrözzük, mintha a hatás bentől terjedne.

$$(5.1.13) \quad G_{\text{out}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{\exp\left[i(\omega/c_a)\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2}\right]}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2}} + \frac{\exp\left[i(\omega/c_a)\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')+(z+z'-2L)^2}\right]}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')+(z+z'-2L)^2}}$$

A Green-függvények ismeretében az (5.1.2)-es és (5.1.3)-as egyenleteket felhasználva, integrálva a teljes térben felírhatjuk a nyomást annak függvényében, hogy a dobtesten kívül, vagy belül akarjuk leírni a hang terjedését a felső membrán esetén.

$$(5.1.14) \quad p_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \left[G_{\text{in}}(\rho, \phi, L_-|\rho', \phi', L_-) \cdot \frac{\partial p}{\partial z'}(\rho', \phi', L_-) - \right. \\ \left. - G_{\text{in}}(\rho, \phi, 0_+|\rho', \phi', L_-) \cdot \frac{\partial p}{\partial z'}(\rho', \phi', L_-) \right]$$

$$(5.1.15) \quad p_{\text{out}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' G_{\text{out}}(\rho, \phi, L_+|\rho', \phi', L_+) \cdot \frac{\partial p}{\partial z'}(\rho', \phi', L_+)$$

Az (5.1.15) és (5.1.16)-os függvények egyszerűsítéséhez a levegő mozgását a folyadékok mozgását leíró linearizált Euler-Navier-Stokes formulával közelítjük:

$$(5.1.16) \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \cdot \omega^2 \cdot \eta$$

ahol ρ_0 a levegő sűrűsége. Az így kapott egyenleteket beírjuk az (5.1.1)-es összefüggésbe, majd a valódi módusokat a levegő nélküli rezgési módusokkal fejtjük ki:

$$(5.1.17) \quad \eta_{m,s}(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,s}^{(m)} \cdot \eta_{m,n}^{(0)}(\rho, \phi)$$

itt $\eta_{m,n}^{(0)}(\rho, \phi) = \frac{\sqrt{2}}{a \cdot J_{m+1}(x_{mn})} \cdot J_m(x_{mn} \frac{\rho}{a}) \cdot \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$. A Bessel-féle differenciálegyenletből

következően pedig: $\nabla^2 \cdot \eta^{(0)} = -\frac{x_{mn}^2}{a^2} \cdot \eta^{(0)}$. Némi egyenletrendezés után, a mozgásegyenletet az alsó membránra is hasonlóan megoldva, a rendszer sajátfrekvenciájára az alábbi csatolt egyenletrendszert kapjuk. Amennyiben a sajátfrekvenciát visszahelyettesítve kiszámoljuk az $a_{n,s}^{(m)}$ együtthatókat, a kitérésmezőt is ábrázolhatjuk.

(5.1.18) **Felső membrán:**

$$\begin{aligned} \sum_{n_f'=1}^{\infty} a_{n_f',s}^{(m)} \left(T \frac{x_{mn}^2}{a^2} - \omega^2 \sigma \right) \cdot \eta_{m,n_f'}^{(0)}(\rho, \phi) = \\ \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{4\pi} \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \left(\sum_{n_f=1}^{\infty} a_{n_f,s}^{(m)} \cdot \eta_{m,n_f}^{(0)}(\rho, \phi) \cdot [G_{\text{in}}(\rho, \phi, L_- | \rho', \phi', L_-) - \right. \\ \left. G_{\text{out}}(\rho, \phi, L_+ | \rho', \phi', L_+) \right] - \sum_{n_a=1}^{\infty} a_{n_a,s}^{(m)} \cdot \eta_{m,n_a}^{(0)}(\rho, \phi) \cdot G_{\text{in}}(\rho, \phi, 0_+ | \rho', \phi', L_-) \end{aligned}$$

(5.1.19) **Alsó membrán:**

$$\begin{aligned} \sum_{n_a'=1}^{\infty} a_{n_a',s}^{(m)} \left(T \frac{x_{mn}^2}{a^2} - \omega^2 \sigma \right) \cdot \eta_{m,n_a'}^{(0)}(\rho, \phi) = \\ \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{4\pi} \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \left(\sum_{n_a=1}^{\infty} a_{n_a,s}^{(m)} \cdot \eta_{m,n_a}^{(0)}(\rho, \phi) \cdot [G_{\text{in}}(\rho, \phi, 0_+ | \rho', \phi', 0_+) - \right. \\ \left. G_{\text{out}}(\rho, \phi, 0_- | \rho', \phi', 0_-) \right] - \sum_{n_f=1}^{\infty} a_{n_f,s}^{(m)} \cdot \eta_{m,n_f}^{(0)}(\rho, \phi) \cdot G_{\text{in}}(\rho, \phi, L_- | \rho', \phi', 0_+) \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk az $a_{n,s}^{(m)}$ együtthatókat, és a hozzájuk kapcsolódó módus frekvenciákra vonatkozó egyenleteket, a fenti összefüggésekbe behelyettesítjük a már kiszámolt Green-függvényeket, megszorozzuk őket $\rho \cdot \eta_{m,n}^{(0)}(\rho, \phi)$, valamint integráljuk a membránok felületén ρ és ϕ szerint.

A számítások során felhasználjuk, hogy a levegő nélküli rezgési módusok ortonormáltak:

$$(5.1.20) \quad \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \eta_{m',n'}^{(0)}(\rho, \phi) \cdot \eta_{m,n}^{(0)}(\rho, \phi) = \delta_{mm'} \cdot \delta_{nn'}$$

valamint, hogy $\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m'-m)(\phi-\phi')} = \delta_{mm'} \cdot (2\pi)^2$. A Green-függvények további integrálását Bessel-azonosságok felhasználásával folytatjuk. Ekkor végtelen számú lineáris egyenletet találunk az együtthatókra:

(5.1.21) **Felső membrán:**

$$a_{n_f,s}^{(m)} \cdot \left(\frac{\omega^2}{c_m^2} - \frac{x_{mn}^2}{a^2} \right) = \frac{4\rho_0 \cdot \omega^2}{T} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{f=1}^{\infty} \frac{x_{mn}}{x_{mn}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{x_{mn''f}}{x_{mn''f}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{1}{1 - m^2/y_{mn'}} \cdot$$

$$\frac{1}{y_{mn'}} \cdot \cot(\gamma_{mn'} L) \cdot a_{n''f,s}^{(m)} - \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{2\pi} \sum_{n''f=1}^{\infty} I_{m,n,n''f} \cdot a_{n''f,s}^{(m)} - \sum_{a=1}^{\infty} \frac{x_{mn}}{x_{mn}^2 - y_{mn'}^2} \cdot$$

$$\frac{x_{mn''a}}{x_{mn''a}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{1}{1 - m^2/y_{mn'}} \cdot \frac{1}{y_{mn'}} \cdot \frac{1}{\sin(\gamma_{mn'} L)} \cdot a_{n''a,s}^{(m)}$$

(5.1.22) **Alsó membrán:**

$$a_{n_a,s}^{(m)} \cdot \left(\frac{\omega^2}{c_m^2} - \frac{x_{mn}^2}{a^2} \right) = \frac{4\rho_0 \cdot \omega^2}{T} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{x_{mn}}{x_{mn}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{x_{mn''a}}{x_{mn''a}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{1}{1 - m^2/y_{mn'}} \cdot$$

$$\frac{1}{y_{mn'}} \cdot \cot(\gamma_{mn'} L) \cdot a_{n''a,s}^{(m)} - \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{2\pi} \sum_{n''a=1}^{\infty} I_{m,n,n''a} \cdot a_{n''a,s}^{(m)} - \sum_{f=1}^{\infty} \frac{x_{mn}}{x_{mn}^2 - y_{mn'}^2} \cdot$$

$$\frac{x_{mn''f}}{x_{mn''f}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{1}{1 - m^2/y_{mn'}} \cdot \frac{1}{y_{mn'}} \cdot \frac{1}{\sin(\gamma_{mn'} L)} \cdot a_{n''f,s}^{(m)}$$

$$(5.1.23) \quad I_{m,n,n''} =$$

$$\int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \exp \left[i(\omega/c_a) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right] \cdot$$

$$\left[\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right]^{-1} \eta_{m,n''}^{(0)}(\rho, \phi) \cdot \eta_{m,n}^{(0)}(\rho', \phi') =$$

$$4\pi a^2 x_{mn} x_{mn''} \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_a^2} \right)^{-1/2} \frac{J_m^2(a\lambda)}{(a^2 \lambda^2 - x_{mn}^2)(a^2 \lambda^2 - x_{mn''}^2)}$$

Az $I_{m,n,n''}$ kifejezés redukált alakja a [12] 1323-as, és 1324-es oldalán szereplő azonosság alkalmazásával adódik [4]. Az indexelések esetén az a és f jel az alsó, illetve felső membrán együttthatóit jelenti.

5.2 A sajátfrekvenciák vizsgálata

Ahhoz, hogy megtaláljuk a fenti csatolt rendszer sajátrezgéseit, először a 3.2-es pontban ismertetett rendszer megoldásait kell részletesebben megvizsgálni.

a. Mozgásegyenlet egyfenekű dobra

Amennyiben a mozgásegyenleteket az 5.1-es pontban ismertetett levezetés szerint csupán egyetlen membránra írjuk fel (azzal a határfeltétellel kiegészítve, hogy a dobtest alsó feneke nem mozog), akkor a membránra az (5.1.22)-eshez hasonló egyenletet kapunk, az alsó membrán hatása nélkül.

$$(5.2.1) \quad a_{n,s}^{(m)} \cdot \left(\frac{\omega^2}{c_m^2} - \frac{x_{mn}^2}{a^2} \right) = \frac{4\rho_0 \cdot \omega^2}{T} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \frac{x_{mn}}{x_{mn}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{x_{mn''}}{x_{mn''}^2 - y_{mn'}^2} \cdot \frac{1}{1 - m^2/y_{mn'}} \cdot \frac{1}{y_{mn'}} \cdot \\ \cot(\gamma_{mn'} L) \cdot a_{n'',s}^{(m)} - \frac{\rho_0 \cdot \omega^2}{2\pi} \sum_{n''=1}^{\infty} I_{m,n,n''} \cdot a_{n'',s}^{(m)}$$

Az így kapott homogén lineáris egyenletek komplexek, ezért a megoldásként kapott sajátfrekvenciák is azok.

Ezen komplex sajátrezgések képzetes része a módus lecsengési idejével áll kapcsolatban, míg a valós rész magát a rezgést adja. A [4] cikkben a megoldás során kihasználják, hogy ha a levegő által perturbált módus ugyanolyan azimutális szimmetriát mutat, mint az ideális eset, akkor a két rendszernél megegyezik a csomóponti körök száma. Ekkor alacsony frekvenciákon a következő eljárási mód alkalmazható:

- (1) n, n' és n'' szerinti összegzést limitáljuk
- (2) $I_{m,n,n''}$ -be ω helyett $\omega_{mn}^{(0)}$ -t helyettesítünk (vákumban lévő ideális, kör alakú membrán sajátfrekvenciái)
- (3) Lineáris sajátvektor – sajátérték problémaként oldjuk meg a megcsonkított egyenletrendszert
- (4) Az így kapott ω_s sajátfrekvenciát az eredeti egyenletbe helyettesítjük, majd újra megoldjuk
- (5) A procedúrát addig folytatjuk, amíg az egymás után kapott sajátfrekvenciák csupán 0.5%-ban térnek el egymástól

Az **I. táblázat**ban látható, hogy a mérési eredmények megfelelnek az így kapott sajátfrekvenciáknak (a valós rész valóban pontos, azonban a képzetes részből számolt lecsengési idő nagy pontatlanságot mutat), így a spektrum számítására a fenti keresési eljárás alkalmazható.

Az általunk használt keresési módszer esetén nem használjuk fel a vákuumbeli módusokat. Az eljárás során az (5.2.1)-es egyenletet úgy rendezzük, hogy az egyik oldalon nulla szerepeljen, a másik oldalon kapott mátrix determinánsának zérushelyei pedig rögzítik ω értékeit. Amennyiben az átrendezett egyenletbe a valós számtesten végigfutva behelyettesítjük a különböző frekvencia értékeket, megkapjuk a determináns által leírt görbét. A valós rész nullátmenetét figyelve a kísérletileg számolt értékeket megfelelő pontossággal kaptuk vissza, így a valós és komplex számtesten való keresés ebben az

esetben közelíthető a valóson történő vizsgálattal. Ekkor a determináns valós és képzetes részének nem ugyanazon a helyen van zérushelye, azonban a módusok lecsengési idejét nem akartuk reprodukálni.

b. Keresési eljárások kétmembrános dobra

Amennyiben az (5.1.22)-es és (5.1.23)-as csatolt egyenletrendszert akarjuk megoldani, nem tudjuk az előző pont első felében tárgyalt keresési eljárást alkalmazni. A módszer azon alapszik, hogy a kiválasztott módushoz keressük a megfelelő frekvenciát, azonban a kétmembrános esetben a rendszer a módusok szuperpozíciójában van. Ezekhez a párokhoz nem rendelhetünk vákuumbeli értéket, hiszen ekkor a membránok között nincs csatolás, egymástól függetlenül rezegnek, mint két ideális, kör alakú membrán. A csatolatlan módusok frekvenciája degenerált, ezért ha ez felhasad, nem világos, hogy az iteráció melyik megoldáshoz fog tartani.

Az általunk használt eljárást ebben az esetben úgy alkalmazzuk, hogy mindkét egyenletet nullára rendezzük, majd az együtthatókat vektorba rendezve úgy alakítjuk ki a mátrixot, hogy besorozva vele az együtthatókat az 5.1-es pontban kapott egyenletrendszert kapjuk eredményül. Ekkor szintén közelíthetjük a megoldást úgy, hogy a valós számtesten futtatjuk a keresést, majd a kapott sajátfrekvenciákat visszahelyettesítve, a sajátvektorok segítségével azonosíthatjuk a módusokat. A kapott eredményeket ebben az esetben nem használom fel a dolgozatban, mivel mérési eredmények hiányában nem lehet megállapítani, hogy a komplex számtesten való keresés elhanyagolásával mekkora hiba keletkezik.

A keresési módszerre korrekt eljárás, ha a komplex térben vizsgáljuk a függvényt, azonban minden egyes sajátfrekvenciához hatalmas területet kéne átvizsgálni, ami nem célravezető módszer, illetve futási időben is hosszadalmas. A keresést gyorsabbá lehetne tenni a Christian et. al., illetve a Newton-Raphson iterációval. (Ebben az esetben ugyanaz a probléma, mint a Christian et. al. iterációval, a csatolatlan módusok esetén mindig az egyik zérushelyhez jutnánk. A módszer előnye a nagyobb konvergencia lenne.)

Azonban a fenti módszerekhez az szükséges, hogy a keresést a zérushely közeléből indítsuk. Ezeket azonban csak próbálgatással lehet meghatározni, mivel hiába használnánk fel a mért frekvenciákat, az nem garantálná, hogy a kereséssel a megfelelő megoldáshoz tartunk a komplex síkon. Ami itt releváns, az a zérushelyek vonzó tartománya. Ha a levegő hatását is figyelembe vesszük, a kétmembrános dob disszipatív rendszer. Ezekben vonzó

attraktorok jelennek meg, vagyis a trajektóriák ezekhez a pontokhoz fognak tartani, véges sok kiindulási pontot kivéve.

c. Kitekintés

A megfelelő keresési eljárás ismeretében meg lehetne vizsgálni, hogyan kezdenek egymásra hatni a membránok a vákuumtól kezdve a levegő bekapcsolódásáig. A sajátfrekvenciák ismeretében látható lenne, hogy melyik módusok állnak párban, illetve mekkora a membránok egymáshoz viszonyított kitérése. Sejthető, hogy ha a két membrán azonos módusban van, akkor két eset lehetséges: amikor azonos, illetve ellentétes fázisban rezegnek. Ekkor a módus felhasadásához hasonló jelenséget tapasztalhatunk, míg az egyik frekvenciája változatlan, a másiké jelentősen eltérhet.

6. KONKLÚZIÓ, KITEKINTÉS

A dolgozatban megvizsgáltuk a nem koncentrikus lyukkal rendelkező membrán sajátfrekvenciáinak viselkedését, abban az esetben, ha a lyuk peremén Neumann-, a membrán peremén pedig Dirichlet-határfeltételeket illesztünk. Azt tapasztaltuk, hogy a degenerált módusok felhasadnak, majd a lyuk középponttól való távolodásával metszik egymást. Ez a metszés pont nem állandó, a lyuk méretétől függően változik a helye. Az effektus maga eléggé kicsi, így valószínűleg végig lebegés tapasztalható.

Reprodukáltuk emellett az üstdob rezgéseire vonatkozó mozgásegyenleteket, valamint megvizsgáltuk, hogyan alakulnak akkor, ha két membrán található, és a levegő hatására csatolódnak rezgéseik. A kétfedelű dobon végzett munka még nem készült el teljesen, az 5.2-es fejezetben taglalt keresési eljárások segítségével a spektrum változását is szeretnénk megvizsgálni.

A későbbi számítások során hasznos lenne az elméleti eredményeket szisztematikus mérési eredményekkel összevetni. A kétfenekű dob esetében érdemes lenne megvizsgálni azt az esetet, amikor a két membrán megfeszítése nem egyezik. Emellett a modellt közelebb vinné a valósághoz, ha a dobtest rezgéseit is figyelembe vennénk.

A lyukas membrán esetén is érdemes lenne figyelembe venni a levegő hatását, valamint az eredményeket mérésekkel alátámasztani.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] N. H. Fletcher and T. D. Rossing: *The Physics os Musical Instruments*, Springer, 1991, pp. 70-99, 584-599
- [2] Dr. Budó Ágoston: *Mechanika*, Tankönyvkiadó, 1970, pp. 280-302
- [3] Hagymási Imre: *A lyukas dob hangjai*, Tudományos Diákköri dolgozat, http://people.bolyai.elte.hu/~hagymasi/tdk_hagymasi.pdf, 2006
- [4] R. S. Christian, R. E. Davis, A. Tubis, C. A. Anderson, R. I. Mills and T. D. Rossing: *Effects of air loading on timpani membrane vibrations*, The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 76, Issue 5, pp.1336-1345, 1984
- [5] D. A. Russell: *Vibrational Modes of a Circular Membrane*, <http://www.kettering.edu/physics/drussell/Demos/MembraneCircle/Circle.html>, 2000
- [6] G. Sathej and R. Adhikari: *The eigenspectra of Indian musical drums*, <http://arxiv.org/abs/0809.1320v1>, 2008
- [7] B. Sullivan: *Near-Field Acoustic Holography of a Vibrating Drum Head*, 2008, http://online.physics.uiuc.edu/courses/phys193/NSF_REU_Reports/2008_reu/Brendan_Sullivan_Senior_Thesis/bsullivan_senior_thesis.pdf
- [8] D. Ullmann: *Life and Work of E. F. F. Chladni*, The European Physical Journal, Volume 145, Number 1, 2007
- [9] R. K. Jones: *The Well-Tempered Timpani*, 2011, http://music.nebrwesleyan.edu/wtt/?page_id=30
- [10] H. Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1980, pp. 263-269,
- [11] E. Skudrzyk: *Simple and Complex Vibrating Systems*, The Pennsylvania State U.P., University Park, PA, 1968, pp. 301-313

- [12] P. M. Morse and H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953, Vol II.
- [13] R. Worland: *Normal modes of a musical drumhead under non-uniform tension*, J. Acoust. Soc. Am. Volume 127, Issue 1, pp. 525-533, 2010
- [14] D. W. Krueger, K. L. Gee and J. Grimshaw: *Acoustical and vibrometry analysis of a large Balinese gamelan gong*, J. Acoust. Soc. Am. Volume 128, Issue 1, pp. EL8-EL13, 2010
- [15] A. H. Benade: *Fundamentals of Musical Acoustic*, Oxford U. P., London, 1976, pp. 141 – 145.
- [16] Wu-Ki Tung: *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing Co., 1985